ACTA ET COMMENTATIONES UNIVERSITATIS TARTUENSIS DE MATHEMATICA
Volume 1, 1996

Итерационные сети слабо контрактивных операторов

А. А. Меленцов

Пусть X комплексное пространство Банаха, а K подмножество пространства X .

Определение 1. *Оператор* $T : K \to K$ *называют контрактивным, если* $\| Tx - Ty \| < \| x - y \|$ *при всех* $x, y \in K$ *и* $x \neq y$.

Определение 2. *Оператор* T *называется слабо контрактивным, если каждой точке* $x \in K$ *соответствует число* $C(x)$, *а каждой последовательности* $\{x_n\}$, *сходящейся в точке* x , *число* N *такие, что при* $n > N$:

$$\| Tx - Tx_n \| \leq C(x) \| x - x_n \| .$$

Очевидно, класс слабо контрактивных операторов содержится в классе непрерывных операторов и содержит в себе все контрактивные.

Кирк и Масса в 1989 г. опубликовали статью [1], в которой определен трансфинитный итерационный процесс, и доказана следующая теорема:

Теорема. *Пусть* K *слабо компактное подмножество из* X , *а отображение* $T : K \to K$ *контрактивно. Если для каждого ординала* $\alpha < \Omega$, Ω *первый несчетный ординал, определена итерация* T^α , *то существует точка* $z \in K$ *такая, что для каждого* $x \in K : T^\Omega(x) = z$.

Авторы оставили открытой проблему: " Является ли точка z неподвижной точкой отображения T ?"

В настоящей заметке описывается трансфинитный итерационный процесс для слабо контрактивного оператора и условия его сходимости к неподвижной точке оператора.

Пусть $\sum(X)$ пространство последовательностей построенное над X и наделенное тихоновской топологией [4]. Пусть $\{\xi_\alpha\}$

трансфинитная сеть элементов из $\sum(X)$. Сеть $\{\xi_\alpha\}$ называют фундаментальной, если каждой окрестности $u(\theta)$ нулевого элемента $\theta \in \sum(X)$ соответствует ординал α_0 такой, что при $\alpha, \beta > \alpha_0$, $\xi_\alpha - \xi_\beta \in u(\theta)$. Если сеть $\{\xi_\alpha\}$ элементов пространства $\sum(X)$ фундаментальна и $\xi_\alpha = \{x_k^\alpha\}$, $x_k^\alpha \in X$, то сеть $\{x_k^\alpha\}_\alpha$, составленная из k-тых координат последовательностей ξ_α, является фундаментальной сетью в пространстве X и, следовательно, сходится, т.е. для каждого фиксированного k существует предел $\lim_\alpha x_k^\alpha = x_k$. Последовательность $\{x_k\}$ называется предельной последовательностью фундаментальной сети $\{\xi_\alpha\}$ [4].

Определение 3. Фундаментальная сеть $\{\xi_\alpha\}$ называется равномерно фундаментальной, если для каждого $\epsilon > 0$ существует натуральное число k_0, и для каждого натурального p найдется ординал α_0 такие, что при $\alpha, \beta > \alpha_0$:

$$\| x_{k_0+p}^\alpha - x_{k_0}^\beta \| < \epsilon.$$

Теорема 1. *Для того, чтобы предельная последовательность фундаментальной сети $\{\xi_\alpha\}$ была сходящейся, необходимо и достаточно, чтобы сеть $\{\xi_\alpha\}$, была равномерно фундаментальной.*

Необходимость и достаточность теоремы легко доказываются методом "ϵ деленное на три".

Пусть $\{A\}$ семейство регулярных операторов, определенных на пространстве $\sum(X)$ [3]. Если K слабо компактное множество из X, и T оператор, отображающий множество K в себя, то существует трансфинитная итерационная сеть $\{\xi_\alpha\} \subset \sum(K)$, построенная по следующему правилу (см. [2], стр. 255):

Пусть каждому предельному ординалу $\alpha \geq 0$ соответствует регулярный оператор A_α, точка x_α и последовательность $\xi_\alpha = \{T^n x_\alpha\}$, удовлетворяющие относительно сильной топологии пространства X условиям:

A. Существует предел A_ω-$\lim T^n x_0 = x_\omega$, $\xi_\omega = \{T^n x_0\}$.

B. Если предельный ординал β непосредственно предшествует предельному ординалу α, то $x_\alpha = A_\alpha$-$\lim_n T^n x_\beta$.

C. Если для любого предельного ординала $\beta < \alpha$ существует предельный ординал β' такой, что $\beta < \beta' < \alpha$, то $x_\alpha = A_\alpha$-$\lim_{\beta<\alpha} x_\beta$ и $\xi_\alpha = \{T^n x_\alpha\}$.

Теорема 2. *Пусть $K \subset X$ слабо компактное множество. Слабо контрактивный оператор T, отображающий множество K в себя, тогда и только тогда имеет неподвижную точку, когда существует точка $x_0 \in K$ и, удовлетворяющая условиям A, B, C, сеть регулярных операторов $\{A_\alpha\}$, такие, что трансфинитная сеть итераций $\{\xi_\alpha\}$ равномерно фундаментальна.*

Необходимость условия очевидна.

Допустим, что условие теоремы выполняется. Тогда существует предельный ординал α такой, что последовательность $\{T^n x_\alpha\}$, предельная для сети $\{\xi_\beta\}$, $\beta < \alpha$, сходится по норме пространства X к элементу $x \in K$. В силу слабой контрактивности оператора T существует соответствующая константа $C(x)$, и имеет место следующее неравенство:

$$\| Tx - x \| \leq C(x) \| x - T^n x_0 \| + \| T^{n+1} x_\alpha - x \| .$$

Ясно, что правая часть неравенства стремится к нулю при $n \to \infty$, поэтому точка x является неподвижной точкой оператора T.

Если T контрактивный оператор, отображающий слабо компактное множество $K \subset X$ в себя, то в статье [1] построена трансфинитная сеть такая, что каждому предельному ординалу α соответствует слабо сходящаяся последовательность итераций $\eta_\alpha = \{T^n x_\alpha\}$, и доказано, что сеть $\{\eta_\alpha\} \in \sum(K)$, независимо от выбора начального элемента, покоординатно слабо сходится к одному и тому же элементу $z \in K$.

Известно, что для любой слабо сходящейся последовательности элементов пространства Банаха существует регулярный оператор, преобразующий эту последовательность в последовательность, сходящуюся по норме [2]. Допустим, что сеть $\{\eta_\alpha\} \subset X$ слабо сходится к элементу $z \in K$, $\alpha < \Gamma < \Omega$ [1]. Если существует сеть регулярных операторов $\{A_\alpha\}$, преобразующих сеть $\{\eta_\alpha\}$ в фундаментальную сеть пространства $\sum(X)$, предельная итерационная последовательность которой $\{T^n z\}$ сходится по норме к элементу $\omega \in K$, то в силу теоремы 2 точка ω является неподвижной точкой оператора T (в частности, может случиться, что $\omega = z$).

Простой пример. Пусть K единичный круг на комплексной плоскости. Оператор

$$T(z) = \frac{5z-3}{3z-5} : \ K \to K, \ T^2(z) = z,$$

слабо контрактивен и при $z \neq T(z)$ последовательность итераций расходится. Определим регулярные операторы следующими равенствами:

$$A_\omega\text{-} \lim T^n(z) = \frac{z + Tz}{2} = z_\omega$$

и

$$A_{(n+1)\omega}\text{-} \lim T^n z_{n\omega} = \frac{z_{n\omega} + T z_{n\omega}}{2} = z_{(n+1)\omega}.$$

Трансфинитная сеть последовательностей , построенная для предельных ординалов $\alpha < \omega^2$, равномерно фундаментальна, а ее предельная последовательность сходится к неподвижной точке оператора T.

Литература

1. W. A. Kirk, S. Massa, *An ultranet technique in metric fixed point theory,* Topics in mathematical analysis. World Scientific Publ. co., 1989, pp. 539–546.
2. Л.В. Канторович, Г.П. Акилов, *Функциональный анализ в нормированных пространствах,* М.: Наука, 1959.
3. Р. Кук, *Бесконечные матрицы и пространства последовательностей* , М.: Наука, 1960.
4. Р.Энгелькинг, *Общая топология,* М.:Мир, 1986.

Iterated nets of weakly contractive operators

Summary

Let K be a subset of a Banach space X . An operator $T : K \to K$ is said to be weakly contractive, if for every point $x \in K$ there is a number $C(x)$ and for any sequence $\{x_n\}$ with $\lim x_n = x$ there exists a number N such that

$$\| Tx - Tx_n \| \leq C(x) \| x - x_n \|$$

for all $n > N$. Every contractive operator is weakly contractive.

The investigation of transfinite iteration processes leads to the study of the sequence space $\sum(X)$ with Tychonoff's topology, to the study of fundamental and uniformly fundamental nets in the space $\sum(X)$. In Theorem 2, by using of regular operators summing divergent sequences, the necessary and sufficient conditions for the existence of a fixed point of a weakly contractive operator are given. In particular, if T is a contractive operator, then by a theorem of Kirk and Massa [1], $T^{\Omega}(x) = z$ for all $x \in K$, and by Theorem 2, $T(z) = z$.

Received May 10, 1995

Уральский Государственный Университет
620088 Екатеринбург-88, п.я.111
Россия