

Matemaatikapädevuse arendamisvõimalustele keskenduv õppematerjalide analüüsimise raamistik ja selle rakendamine 8. klassi matemaatikaõpiku näitel

Kateryna Lipmaa^{a1}, Marje Johanson^b, Maarja Sõrmus^b,
Eva Saul^a, Margus Pedaste^b

^aTartu Ülikooli matemaatika ja statistika instituut

^bTartu Ülikooli haridusteaduste instituut

Annotatsioon

Eesti põhikooli riikliku õppekava ainevaldkonna „Matemaatika“ kohaselt on matemaatikaõppe eesmärk kujundada õpilastel eakohane matemaatikapädevus, mida peaks toetama õppematerjalid, ent meil puudub teadmine, kuidas need seda rolli täidavad. Siinse uuringu eesmärk on luua õpilaste matemaatikapädevuse arendamisvõimalustele keskenduv õppematerjalide analüüsimise raamistik ja uurida selle alusel 8. klassi matemaatikaõpikus pakutavaid võimalusi õpilaste matemaatikapädevuse terviklikuks arendamiseks. Uuringu käigus loodud raamistik käsitleb kolme dimensiooni: matemaatikapädevus (6 kategooriat), pädevusega seotud tegevus (4) ja pädevuse arendamise potentsiaal (5). Õpiku analüüs näitab, et ülesannetest on 78% protseduurilised, 21% arendavad kommunikatsioonipädevust, 20% esituspädevust, 5% arutluspädevust, 3% probleemi lahendamise ja 3% seoste loomise pädevust ning 59% eeldavad tegevusena jälgendamist ja 44% konstrueerimist. Pädevuse arendamise seisukohast neutraalseid või sihipärast arendamist kitsendavaid ülesandeid on 12%.

Võtmesõnad: matemaatikapädevus, valdkonnapädevus, matemaatikaõpikute analüüs, kvantitatiivne analüüs, sisuanalüüs

¹ Matemaatika ja statistika instituut, Tartu Ülikool, Narva mnt 18, 51009 Tartu, Eesti; kateryna.lipmaa@ut.ee.

Sissejuhatus

Viimastel aastakümnetel on matemaatika-pädevus kujunenud oluliseks uurimis-objektiks nii haridusuuringutes kui ka hariduspoliitikas, tuues matemaatika õpetamise keskmesse teistesse valdkondadesse üle kantavad oskused. Üldjoontes vaadeldakse matemaatika-pädevust kui indiviidi võimet kasutada matemaatilisi teadmisi, oskusi ja hoiakuid mitmesugustes kontekstides probleemide mõistmiseks ja lahendamiseks. Matemaatika-pädevust võib vaadelda valdkonna-pädevuse (matemaatika õppimise käigus omandatavad pädevused sõltumata elulisest aspektist; Niss, 2003; Weinert, 2001) või üldpädevusena (seotud matemaatikas õpitu rakendamisega igapäevaelus; Pellegrino & Hilton, 2012; Rychen & Salganik, 2003). Siinses uurimuses käsitleme matemaatika-pädevust valdkonnapädevusena ja lähtume Eesti põhikooli riikliku õppekava ainevaldkonnas „Matemaatika“ (2025) esitatud matemaatika-pädevuse määratlusest, tuginedes Rootsis välja töötatud matemaatika-pädevuse uurimisraamistikule (ingl *Mathematical Competency Research Framework*, lühend MCRF; Lithner *et al.*, 2010), mida on Eestis kasutatud riiklike e-tasemetööde analüüsiks (Johanson *et al.*, 2021a) ja õpilaste matemaatika-pädevuse taseme mõõtmiseks (Johanson *et al.*, 2023).

Riikliku õppekava kohaselt on matemaatika-õppe eesmärk kujundada õpilastel eakohane matemaatika-pädevus (Põhikooli riiklik õppekava, lisa 5, 2025) ning õpik määrab suuresti, mida ja kuidas klassiruumis õpetatakse, olles ühenduslülilik kavandatud ja rakendatud hariduslike eesmärkide vahel (Valverde *et al.*, 2002). Veel kümme aastat tagasi kasutas üle 90% Eesti õpetajatest matemaatika-õpikut ainsa ülesannete allikana igas tunnis või pea-aegu igas tunnis (Lepik *et al.*, 2015). Remillardi (2005) hinnangul võib sama õpik olenevalt õpetaja kasutusviisist toetada pädevuste omandamist või taanduda protseduurilise drilli vahendiks, sest õpikud on instruksiooniliselt neutraalsed. Leiame, et matemaatika-pädevuse dimensioonide info õpikus ja selle arvesse võtmine õpiku koostamisel võimaldaks leevendada matemaatika-pädevuse kujundamisel õpikute instruksioonilist neutraalsust ning luua õppematerjalid, mis teadlikumalt toetavad õpilaste matemaatika-pädevuse terviklikku arendamist. Sellest tulenevalt töötasime välja õpilaste matemaatika-pädevuse arendusvõimalustele keskenduva õppematerjalide analüüsimeetodiku, mis võimaldab 1) uurida õppematerjalide pakutavaid võimalusi õpilaste matemaatika-pädevuse terviklikuks arendamiseks ja 2) disainida õpikuid sihipärase matemaatika-pädevuse arendamise eesmärgist lähtuvalt.

Matemaatika õppematerjalide analüüsimise raamistikud

Matemaatikaõpikute uurimine on rahvusvaheliselt tunnustatud ja metoodoloogiliselt mitmekesine iseseisev uurimissuund, mille kohta on ilmunud erinevaid kirjanduse ülevaateid (nt Fan *et al.*, 2013; Rezat, 2024; Rezat *et al.*, 2021). Rezati (2024) uurimuse kohaselt on kõige enam matemaatikaõpikute uurimusi seotud õpiku sisu analüüsiga (57% vaadeldud allikatest; vrd ka Fan *et al.*, 2013), näiteks arvutamise käsitlemise kirjeldamine (Fan, 1998; Li, 2000; Reys *et al.*, 1996), murdude ja jagamise käsitlemine (Charalambous *et al.*, 2010; Son & Senk, 2010; Sun, 2011), ülesannete STEM-sisu analüüs (Li *et al.*, 2025), korduvate teemade osakaal kooliastmeti (Pickle, 2012), kuid tegeldakse ka matemaatikapädevuse mõistes üksikute alampädevuste esindatuse kirjeldamisega: arutlemine ja/või tõestamine (Bieda *et al.*, 2014; Sevinc *et al.*, 2022; Stylianides, 2009), funktsionaalse mõtlemise ülesanded (Utami *et al.*, 2023), probleemülesanded (Durmus & Kirenli, 2024; Tárraga-Mínguez *et al.*, 2021; Zhu & Fan, 2006). Õpiku sisu analüüs on oma olemuselt seotud õpikus pakutavate õpivõimaluste peegeldamisega (Valverde *et al.*, 2002).

Raamistikke, millele tuginedes õppematerjalide sisu analüüsitakse, on palju ja need sõltuvad uurimuse eesmärgist. Kõige mastaapsem (Fan *et al.*, 2013) ja paljudes uuringutes (nt Ackerman, 2018; O’Keeffe, 2013) metoodiliseks aluseks võetud õpikute analüüs vaatlleb viit õpiku dimensiooni: pakutavad tegevused (retoorika elemendid, narratiivsus vs. ülesannetele orienteeritus), sisu ja keerukus (teemade arv ja valik, fookuse seadmine, teemade keerukus), struktuur (skemaatilisus, teemade järjestatus ja vaheldumine/katkestatus, oodatavate oskustega seotud tegevuste jaotus, info esituse viisid), füüsilised karakteristikud (lehekülgede arv ja pindala, graafika hulk ja keerukus) ning oodatavad oskused (mõistete teadmine ja kasutamine, (mõõtmis)vahendite kasutamine / rutiinsete protseduuride teostamine, keeruliste protseduuride teostamine, uurimine ja probleemide lahendamine, matemaatiline arutlemine ja kommunikatsioon) (Valverde *et al.*, 2002). Iga oodatavate oskuste kategooria on omakorda seotud 3–6 tegevusega, mis on erinevad sõltuvalt konkreetsest oskusest (Valverde *et al.*, 2002). Valverde jt (2002) eesmärk oli uurida, kuidas õpikud tõlgendavad hariduslikke eesmärgi ja kujundavad õppijate õpivõimalusi eri riikides. Li (2000) arvutuslike probleemülesannete analüüsimise raamistik, mille on õpikute analüüsis lähtekohaks võtnud näiteks Elazzabi ja Kaçar (2018), Li jt (2025), Özer ja Sezer (2014), Zhu ja Fan (2006), vaatlleb nelja mõõdet: matemaatilisus (ühe- või mitmetehteline), kontekstilisus (puhtalt matemaatiline, illustratiivne kontekst pildi või looga), vastuse tüüp (arv, avaldis, põhjendus/lahenduskäik vajalik) ja kognitiivne nõudlikkus (protseduuriline, kontseptuaalne mõistmine, probleemide lahendamine, erinõuded). Li (2000) eesmärk oli, tuginedes lineaarvõrrandite käsitlemisele õpikutes, võrrelda eri riikide lähenemist õppimisele

ja õpetamisele. Ka O’Keeffe (2013) vaatleb nelja mõõdet: ülesande sisu (matemaatiline teema), struktuur (suletud, avatud, mitmeastmeline), ootused (protse-duuriline, kontseptuaalne, arutlev) ja keel (lihtne, keeruline, terminoloogiline). Gracin (2018) rakendas viiedimensioonilist raamistikku: matemaatiline teema, tegevus (esitused ja modelleerimine, arvutamine jm tehted, tõlgendamine, argu-menteerimine ja arutlemine), komplekssuse tase (otsene rakendamine, seoste loomine, reflektiivne mõtlemine), vastuse vorm (suletud või avatud vastus) ja kontekst (matemaatikasisene, realistlik ja eluline), et näidata, milliseid mate-maatilisi oskusi õpikutes õpetatakse ning millised jäävad alakäsitletuks. Hiljuti ilmunud USA keskkoolide matemaatikaõpikute analüüsis (üle 63 000 ülesande) vaadeldi matemaatilist sisu/taksonoomiat, kognitiivset nõudlikkust (teadmine, rakendamine, arutlemine), elulist konteksti, tehnoloogiliste (kalkulaator või arvuti) ja manipulatiivsete õppevahendite (nt tangramid jm käelised õppe-vahendid) kasutamist (Huntley *et al.*, 2024). Varasemate Eesti matemaatika õppematerjale puudutavate analüüsidena saab esile tuua Hemmi jt (2019) Eesti, Soome ja Rootsi õpikuid võrdleva kvalitatiivse uuringu varajase algebra (1.–3. klass) käsitluse kohta matemaatikaõpikutes. Peale selle on uuritud õpeta-jate vaadet õpiku kasutamisele ning õpiku rollile õpetamisel ja õpilaste toeta-misel (Lepik *et al.*, 2015; Pehkonen *et al.*, 2019). Charalambos jt (2010) tõdevad, et õpikutes leiduvate õpivõimaluste hindamiseks ja võrdlemiseks pole ühtset lähenemisviisi tekkinud. Seda seisukohta ei ole ümber lükanud ka hilisemad uuringud.

Siinses uurimuses lähtume Eesti põhikooli riikliku õppekava eesmärgist kujundada õpilastel eakohane matemaatikapädevus rõhuasetusega õppe-materjalis loodud võimalustele pakkuda õpilaste matemaatikapädevuse tervik-likku arendamist. Seega on meid huvitava õppematerjalide analüüsimise raa-mistiku keskmes matemaatikapädevuse käsitus ja ülesannete pädevuse arengut toetavad aspektid. Kuigi erinevad õpikute analüüsimise raamistikud toovad sisse meie mõistes matemaatikapädevuse dimensiooni analoogi: Valverde jt (2002) oodatavad oskused, Huntley jt (2024), Li (2000) kognitiivse nõudlikkuse mõõtme, O’Keeffe (2013) ootused, Gracin (2018) tegevused (osaliselt) ja komp-lekssuse taseme (osaliselt), ning mõningatel juhtudel pädevusega seotud tege-vused: Valverde jt (2002) oodatavate oskustega seotud tegevused, Gracin (2018) tegevused (osaliselt) ja komplekssuse tase (osaliselt), siis valmis õppematerjalide analüüsimise raamistikku kirjandus meie uurimisfookuse ja matemaatika-pädevuse määratluse kontekstis ei paku. Raamistikku, mis implitsiitselt seaks uuringu eesmärgiks kirjeldada õppematerjali disainis matemaatikapädevuse arengut toetavaid aspekte, olemas ei ole. Veelgi enam, juba üle 10 aasta tõde-takse, et õppematerjalide disaini ja õpilaste õpitulemuste kui õpivõimaluste ühe võimaliku mõõdetava indikaatori vahelise seose kirjeldamine on olnud pigem kaudne ning vajab lisauuringuid (Fan *et al.*, 2013; Rezat *et al.*, 2021).

Eesmärk ja uurimisküsimused

Siinse uuringu eesmärk on asjakohasele kirjandusele ja olemasolevate teoreetiliste lähenemiste sünteesile tuginedes luua matemaatika õppematerjalide analüüsimise raamistik, mis võimaldaks hinnata, kuivõrd laialdasi võimalusi pakuvad õppematerjalid õpilaste matemaatikapädevuse sihipäraseks ja terviklikuks arendamiseks, ning kaardistada, mil määral toetab 8. klassis kasutatav matemaatikaõpik õpilaste matemaatikapädevuse terviklikku arengut. Pidades silmas uuringu eesmärki, sõnastasime kaks uurimisküsimust.

1. Millistest dimensioonidest võiks koosneda õppematerjalide analüüsimise raamistik, mis võimaldab uurida matemaatika õppematerjalides loodud võimalusi õpilaste matemaatikapädevuse terviklikuks arendamiseks?
2. Milline on ühe Eestis kasutatava 8. klassi matemaatikaõpiku ülesannete profiil õpilaste matemaatikapädevuse arendamisvõimaluste seisukohast üldiselt ja õpiku teemade võrdluses?

Metoodika

Õpilaste matemaatikapädevuse arendamisvõimalustele keskenduv õppematerjalide analüüsimise raamistik

Eesti konteksti sobituva ja õpilaste terviklikku matemaatikapädevuse arendamise eesmärki silmas pidava matemaatika õppematerjalide analüüsimise raamistiku väljatöötamiseks tutvusime esmalt õpikute analüüsi ja matemaatikapädevuse arendamist puudutava kirjandusega. Lähtuvalt leitud infost otsustasime võtta õppematerjalide analüüsi raamistiku väljatöötamise lähtekohaks matemaatikapädevuse uurimisraamistiku (ingl *Mathematical Competency Research Framework*, lühend MCRF; Lithner *et al.*, 2010), mida on Eestis kasutatud riiklike e-tasemetööde analüüsiks (Johanson *et al.*, 2021a) ja õpilaste matemaatikapädevuse taseme mõõtmiseks (Johanson *et al.*, 2023). Matemaatikapädevuse uurimisraamistik eristab kuut matemaatikapädevuse alampädevust (probleemi lahendamise pädevus, arutluspädevus, protseduuriline pädevus, esituspädevus, seoste loomise pädevus ja kommunikatsioonipädevus) ja kolme alampädevusega seotud tegevust (tõlgendamine, kasutamine, hinnangu andmine) (Lithner *et al.*, 2010). MCRF on kooskõlas Eesti põhikooli riikliku õppekava matemaatikapädevuse definitsiooniga, käsitledes matemaatikapädevust mitmemõõtmelise pädevusena, millega on seotud erinevad tegevused (vrd Johanson *et al.*, 2021a). Ühtlasi on MCRF-i puhul tegu raamistikuga, mis on mõeldud just empiiriliste andmete analüüsiks (Lithner *et al.*, 2010).

Kasutades MCRF-i, analüüsisime 225 ülesannet kahest meie hinnangul Eestis 8. klassis enim kasutatavast matemaatikaõpikute komplektist (Kaldmäe *et al.*, 2025; Kaljas *et al.*, 2022; Nurk *et al.*, 2022), et selgitada välja matemaatika-pädevuse uurimisraamistiku rakendatavus õpikute analüüsi kontekstis. Analüüsi tulemusena muutsime kommunikatsioonipädevuse ja tõlgendamise definitsioone õpikute konteksti sobivamaks. Lähtudes Pedaste jt (2021b) probleemülesande definitsioonist, laiendasime probleemi lahendamise pädevuse definitsiooni nii, et see oleks kooskõlas valdkonnapädevusel põhineva lähenemisega. Tuginedes Jäderi jt (2020) ning Lithneri (2008) uurimustele, mis rõhutavad vajadust eristada algoritmi järgimist nõudvaid ülesandeid neist, mis eeldavad meetodi loomist või lahendusstrateegia ülesehitamist, asendasime matemaatikapädevuse uurimisraamistiku tegevuse „kasutamine“ kahe tegevusega: jälgendamine (ülesande lahendamisel saab järgida analüüsitavas materjalis antud lahendusskeemi minimaalsete kohandustega; sellised ülesanded täidavad harjutamis- ja kinnistamisfunktsiooni) ja konstrueerimine (ülesande lahendamiseks tuleb luua sobiv lahendusskeem, algoritm, esitus või arutluskäik, kuna õpikus vajaminev lahendusskeem puudub või ei ole sisuliste muudatusteta rakendatav).

Tuginedes Watsoni ja Ohtani (2015) uurimusele, lisasime õpilaste matemaatikapädevuse arendamisvõimalustele keskenduvasse õppematerjalide analüüsimise raamistikku pädevuse arendamise potentsiaali kirjeldava dimensiooni, et arvestada erinevaid õpivõimalusi, mida pakuvad ülesande struktuur, kohustuslikkus, toetatus ja kognitiivne avatus. Potentsiaali dimensiooni skaala (vt tabelit 1) on disainitud mõõtma nii ülesande sisulist ja didaktilist rolli õpikus (seos peatüki eesmärkidega, põhi- ja valikülesandeks liigitumine, erinevate lahenduskäikude võimaldamine, ülesande lahendamist toetavate elementide olemasolu; vrd Valverde *et al.*, 2002) kui ka ülesande arenduslikku funktsiooni matemaatikapädevuse kujunemisel, st mil määral ja millisel viisil loob ülesanne võimalusi õpilase matemaatikapädevuse arendamiseks ja rakendamiseks. Selline skaala võimaldab vaadelda ülesannete potentsiaali matemaatikapädevuse iga kategooria arendamisel erineva suuna ja ulatusega õpivõimaluste spektrina. Potentsiaali dimensiooni sisu seostub tihedalt õpivõimaluste kontseptsiooniga (Bingolbali & Bingolbali, 2019; Hadar, 2017) ja Vygotsky lähima arengu tsooni käsitlusega, mis eristab saavutatud pädevuse taset suunamise abil saavutatavast võimalikust arengutasemest (Vygotsky, 1978).

Tabel 1. Potentsiaali dimensiooni skaala

Skaala väärtus	Sisu	Seos varasemate uurimustega
Vajalik	Kirjeldab peatüki põhisisu ja õpieesmärkidega seotud ülesandeid, kus õpilane peab rakendama pädevust, mille arendamiseks need ülesanded on mõeldud. Sellised ülesanded toetavad pädevuse kinnistamist ja protseduurilise sujuvuse kujunemist.	Protseduurilist sujuvust käsitletakse näiteks NCTM (ingl <i>National Council of Teachers of Mathematics</i>) koolimatemaatika standardites (NCTM, 2000).
Laiendav	Kirjeldab õpikus käsitletava sisuga kooskõlas olevaid ülesandeid, millel on valikuline iseloom (nt ülesanded enesekontrolliks või kordamiseks), ja ülesandeid, mis loovad võimalusi minna õpikus seotud miinimumnõuetest kaugemale (nn tärnülesanded).	Ülesannete laiendava mõju idee tugineb Schmidt jt (1997) käsitlusele õppekava eri tasanditest (kavandatud, potentsiaalne ja rakendatud õppekava), rõhutades, et kõik õpikusse lisatud võimalused ei pruugi õppimisel realiseeruda (vt ka Remillard, 2005).
Toetatud	Kirjeldab ülesandeid, mille puhul õpilasele pakutakse struktuurseid tugielemente (vihjeid, vaheeesmärke, jooniseid või näiteid) eesmärgiga aidata õpilasel ülesannet mõista ja lahendada olukorras, kus nende puudumisel võib ülesande lahendamine osutuda liiga koormavaks või keerukaks.	Selle skaalaväärtuse sisu on kooskõlas kognitiivse koormuse käsitlusega (Sweller, 1994) ja toetamise (ingl <i>scaffolding</i>) loogikaga sotsiaalkonstruktivistlikus traditsioonis (Vygotsky, 1978).
Kitsendav	Kirjeldab ülesandeid, kus alternatiivse lahenduskäigu valik võimaldab sihitud pädevuse rakendamisest „mööda minna“. Ülesanne võib küll tihedalt õpieesmärkidega seotud olla, kuid erinevate lahendusvõimaluste olemasolu võib luua potentsiaali arendada sihitust erinevaid pädevusi.	Kitsendavad ülesanded ei toeta õpilase pädevuste sihipärast arengut (Große & Renkl, 2006).
Neutraalne	Kirjeldab ülesandeid, mis ei toeta konkreetsel õppetasemel õpilase pädevuste arengut (nt varasemate oskuste rutiinne kordamine, funktsionaalse lugemise ülesanded ja õpiku teemadega sisu poolest nõrgalt seotud ülesanded).	Oma olemuselt neutraalseid ülesandeid on käsitletud ka Valverde jt (2002).

Loodud matemaatika-pädevuse arendamisvõimalustele keskenduv õppematerjalide analüüsimise raamistik on kolmedimensiooniline, sidudes omavahel ülesande lahendamiseks vajalikud matemaatika-pädevuse alampädevused, pädevusega seotud tegevused ja ülesannete potentsiaali aidata kaasa õpilase matemaatika-pädevuse arendamisele (vt tabelit 2).

Andmestik ja ülesannete märgendamine

Saamaks ülevaadet, mil määral toetab 8. klassis kasutatav matemaatikaõpik võimalusi õpilaste matemaatika-pädevuse terviklikku arengut toetada, valisime õpiku analüüsiks juhuslikult ühe Eestis kasutatava 8. klassi matemaatikaõpiku komplekti. Selle õpikute komplekti ülesannete märgendamisel vaatlesime nummerdatud alamülesandeid iseseivate ülesannetena (vt lisa B reeglit 5). Kokku märgendasid neli sõltumatut kodeerijat matemaatika-pädevuse arendamisvõimalustele keskenduva õppematerjalide analüüsimise raamistiku rakendamise käigus 2670 ülesannet. Ülesannete märgendamiseks lepiti kokku üldised reeglid (vt lisa B) ning iga kodeerija oli varustatud ühe ja sama versiooniga õppematerjalide analüüsimise raamistikust (vt lisa A ja tabelit 1).

Et hinnata märgendamise usaldusväärsust, analüüsisime kodeerijatevahelist kooskõla raamistiku kolme dimensiooni kõigis kategooriates, kasutades Fleissi kapat. Ühiselt märgendasime kokku 280 (10%) juhuslikult valitud ülesannet. Kodeerijatevahelist kooskõla parandasime järjestikuste kalibreerimissessioonide käigus, kus arutasime läbi kõik kodeerimise erinevused, saavutasime märgendamise suhtes konsensusi ning täiendasime analüüsiraamistikku näidete ja kaasamise-välistamise kriteeriumitega. Pärast esimest märgendamist olid kapaväärtused vahemikus 0,03–0,55 ja pärast teist etappi 0,20–0,70. Viimase ühise kodeerimisega jäid kapaväärtused üldiselt vahemikku 0,62–0,95 (vt tabelit 2), mis Landise ja Kochi (1977) tõlgenduse järgi viitab heale ja väga heale kooskõlale. Erandiks olid kolm kategooriat, mille puhul kapaväärtus jäi oodatust väiksemaks: Fleissi kapat tõlgendamisel tuleb arvesse võtta, et kategooriad, kus on väga vähe andmeid (siinses uuringus probleemi lahendamise pädevus, seoste loomise pädevus ja hinnangu andmine) on tundlikud märgendamise vähimagi lahknevuse suhtes, alahinnates tegelikku kooskõla (nt Feinstein & Cicchetti, 1990). Lähtudes sellest eripärast ja eesmärgist hinnata kodeerijatevaheliste erinevuste võimalikku mõju, arvutasime lisaks ka kodeerijatevahelise kooskõla, mis esimeses märgendamise etapis jäi vahemikku 66–78%, teises etapis oli 40–100% ning kolmandas 75–100% (vt tabelit 2), mis viitab kõigi kodeerijate stabiilsele ja ühtlasele kodeerimisele (Gwet, 2014).

Tabel 2. Matemaatikapädevuse arendamisvõimalustele keskenduva õppematerjalide analüüsimise raamistiku dimensioonid ja nende kategooriad ning kodeerijatevaheline kooskõla protsentides ja Fleissi kapa (κ)

Dimen- sioon	Dimensiooni kategooriad	κ	Kodeerijate kooskõla paarikaupa (%)*					
			R1/R3	R3/R4	R1/R4	R1/R2	R2/R3	R2/R4
Matemaatikapädevus	Probleemi lahendamise pädevus	0,35	97	92	95	92	92	97
	Arutluspädevus	0,83	100	96	96	100	100	96
	Protseduuriline pädevus	0,65	97	79	81	92	89	84
	Esituspädevus	0,71	93	79	83	93	87	87
	Seose loomise pädevus	0,28	99	91	92	96	95	96
	Kommunikatsiooni-pädevus	0,62	91	80	89	84	77	81
Tegevus	Tõlgendamine	0,65	92	75	99	97	95	96
	Jälgendamine	0,63	88	75	87	87	75	84
	Konstrueerimine	0,76	96	88	89	88	84	85
	Hinnangu andmine	-0,06	100	95	95	100	100	95
Potentsiaal	Toetatud	0,68	93	93	95	97	96	92
	Laiendav	0,95	98	96	97	100	99	97
	Kitsendav	0,65	97	95	97	97	95	97
	Vajalik	0,66	97	83	85	83	83	92
	Neutraalne	0,70	97	93	93	99	99	92

Märkus. * R1–R4 tähistavad nelja sõltumatut kodeerijat.

Pärast hea ja väga hea kodeerijatevahelise kooskõla saavutamist jaotasime märgendamata ülesanded juhuslikkuse alusel nelja võrdsesse alamhulka (ligikaudu 22–28% ülesannetest) kodeerijatele iseseisvaks märgendamiseks. Koos kalibreerimisega kestis märgendamine 12 nädalat.

Andmete analüüs

Õpiku matemaatika-pädevuse arendamisvõimaluste profiili kirjeldamiseks leidsime raamistiku dimensioonide jaotused. Jaotusi analüüsimine nii peatükkide kaupa kui ka matemaatika koondteemade tasandil: algebra (hulkliikmed, kahe tundmatuga lineaarvõrrandisüsteem ja matemaatilised laused; kokku 1062 ülesannet) ja geomeetria (kahe sirge lõikamine sirgega ja trapets, kujundite sarnasus, ringjoon; kokku 985 ülesannet). Teadvustame, et metoodilises mõttes peaks matemaatiliste lausete peatükki käsitlema iseseisva koondteemana, kuid ülesannete vähene arv selles peatükis ei võimalda algebra ja geomeetriaga samaväärset käsitlemist. Tulenevalt teistsugusest struktuurist sisust toome analüüsis eraldi välja kordamisülesanded, kuhu kuuluvad sissejuhatava kordamise, enesekontrolli ja kordamisosade ülesanded (kokku 623 ülesannet).

Analüüsi aluseks võtsime ülesande kui ühiku. Kuna iga ülesanne võib olla seotud mitme alampädevuse, pädevusega seotud tegevuse ja potentsiaali skaala väärtusega, ei summeeru jaotuse osakaalud kokku 100%, vaid neil on tähendus omavahelises võrdluses.

Tulemused

Matemaatika-pädevuse arendamisvõimalustele keskenduv õppematerjalide analüüsimise raamistik

Matemaatika-pädevuse arendamisvõimalustele keskenduv õppematerjalide analüüsimise raamistik on kolmedimensiooniline ning seob omavahel 1) ülesande lahendamiseks vajalikud matemaatika-pädevuse alampädevused, 2) pädevusega seotud tegevuse ja 3) ülesande potentsiaali toetada õpilase matemaatika-pädevuse arendamist (vt tabelit 2).

Esimese dimensiooni kategooriateks ehk matemaatika-pädevuse alampädevusteks on probleemi lahendamise, arutlus-, protseduuriline, esitus-, seoste loomise ja kommunikatsioonipädevus (vt lisa A tabelit 3). Erinevalt MCRF-ist (Johanson *et al.*, 2021a; Lithner *et al.*, 2010) loetakse matemaatika-pädevuse arendamisvõimalustele keskenduvast õppematerjalide analüüsimise raamistikus kommunikatsioonipädevust nõudvateks üksnes sellised ülesanded, mis eeldavad õpilaselt õpiku autori lahenduskäigu tõlgendamist, auditooriumile suunatud (kirjalikku) selgitust või kommunikatsiooni kvaliteedi hindamist, ent mitte ülesanded, kus tekst toimib pelgalt andmeallika või juhisenä (loen teksti ja kasutan fakti või valemit). Ülesande teksti mõistmise jätsime kommunikatsioonipädevuse definitsioonist välja, kuna praktikas juhib klassis toimuvat suhtlust õpetaja (aitab vajaduse korral tõlgendada ja mõista) ning

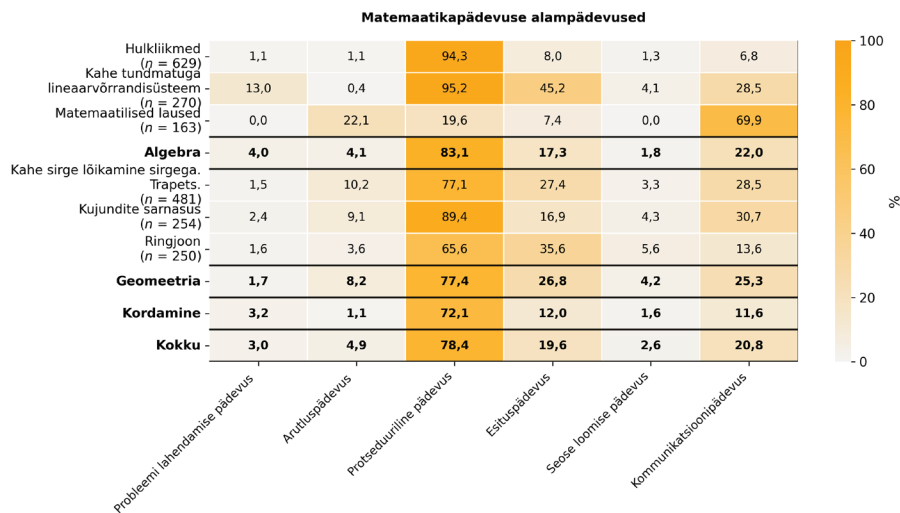
õppematerjalide analüüsimise raamistiku eesmärk on hinnata õpilase kommunikatsioonipädevuse arendamise võimalusi, mida pakub õpik ise.

Raamistiku teine dimensioon on pädevusega seotud tegevused: tõlgendamine, jälgendamine, konstrueerimine ja hinnangu andmine (vt lisa A tabelit 4). Võrreldes MCRF-iga (Johanson *et al.*, 2021a; Lithner *et al.*, 2010) on muudetud tegevuse „tõlgendamine“ sisu. Õppematerjalide analüüsimise raamistikus käsitleme tõlgendamist pädevusega seotud tegevusena üksnes juhul, kui ülesande lahendamisel ei esine muid tegevusi. See võimaldab eristada olukordi, kus ülesanne piirdub matemaatilise info mõistmise ja tähenduse avamisega, ilma et järgneks jälgendamine, konstrueerimine või hinnangu andmine.

Kolmandaks dimensiooniks on potentsiaali skaala, mis eristab viit väärtust: toetatud, laiendav, kitsendav, vajalik ja neutraalne (vt tabelit 1 ja lisa A tabelit 5). Nii nagu ülesanne võib olla seotud mitme matemaatikapädevuse dimensiooniga, saab tal olla ka mitu potentsiaali kategooria väärtust. Vajaliku ja laiendava potentsiaali korral on panus pädevuse arengusse kõige suurem. Toetatud potentsiaal võimaldab pädevuse arengule ligipääsu läbimõeldud toe (näiteks selgitava joonise) kaudu. Toetatud võivad olla nii vajalikud kui ka laiendavad ülesanded. Kitsendav potentsiaal piirab õpilase pädevuse arenguvõimalust, sest võimaldab sihitud pädevusest alternatiivse lahendusega „mööda minna“. Neutraalne potentsiaali kategooria eristab ülesandeid, millel puudub õpilase pädevusele otsene arenduslik mõju uuritava klassi eesmarke silmas pidades (näiteks eelmistes klassides omandatud kordavad ülesanded), kuid on sageli seotud matemaatikaõppe kumulatiivse iseloomuga.

Õpiku analüüs

Matemaatikapädevuse dimensioonide jaotus. Õpiku analüüs näitab õpilase protseduurilist pädevust arendavate ülesannete domineerimist õppematerjalis: 78,4% ülesannetest eeldab õpikus esitatud valemi või lahendusalgoritmi rakendamist. Üksnes protseduurilised (matemaatikapädevuse mõistes ühedimensioonilised) ülesanded moodustavad 57% kõigist ülesannetest, olles kordamise peatükkides isegi 82%: kordamise funktsionaalsus on õpikus väga sihipäraselt planeeritud. Algebra valdkond on mõnevõrra protseduurikesksem kui geomeetria (vastavalt 83,1% ja 77,4% ülesannetest).

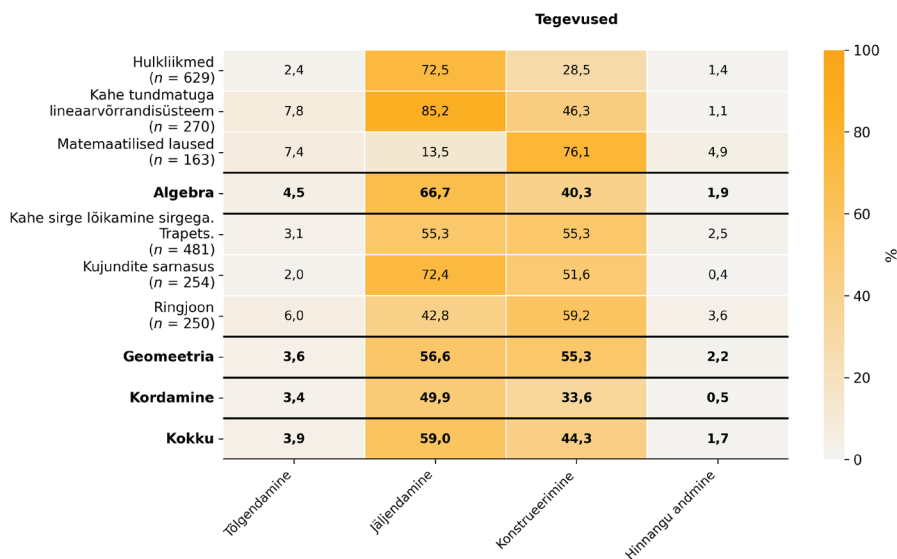


Joonis 1. Matemaatikapädevuse alampädevuste jaotus (%) koondteemade ja peatükide kaupa. Joonisel on iga lahtri osakaal arvutatud vastava rea piires valemiga $pr,c = nr,c / Nr \times 100\%$, kus Nr tähistab rea r ülesannete koguarvu ja nr,c nende ülesannete arvu reas r , mis märgendati veerus c toodud alampädevusega.

Probleemi lahendamise, arutlus- ja seose loomise pädevust arendavaid ülesandeid esineb vastavalt 3,0%, 4,9% ja 2,6%, mis osutab nende piiratud rollile õpiku disainis. Võrreldes algebra toetavad geomeetria ülesanded ligikaudu poole rohkem õpilase arutluspädevuse (osakaal vastavalt 4,1% ja 8,2%) ja seoste loomise pädevuse arengut (osakaal vastavalt 1,8% ja 4,2%), kuid probleemi lahendamise pädevusega on olukord vastupidine (vt joonis 1).

Alampädevuste jaotus peatükiti näitab, et osal õpiku teemadel on selgelt erinev roll õpilase matemaatikapädevuse arendamisel. Protseduurilist pädevust arendavate ülesannete osakaal on olenevalt peatükist 19,6% (matemaatilised laused) kuni 95,2% (kahe tundmatuga lineaarvõrrandisüsteemid). Hulkliikmete peatüki ülesannetest kodeeriti 94% protseduurilist pädevust nõudvateks ja 85% üksnes protseduurilisteks. Seda teemat iseloomustab suur alamülesannete arv ja rohke protseduuriline drill. Lineaarvõrrandisüsteemide peatükis esineb kõige rohkem probleemi lahendamise pädevust ja esituspädevust nõudvaid ülesandeid (vastavalt 13% ja 45,2%): sealsed ülesanded on reeglina matemaatika-pädevuse mõttes mitmedimensioonilised. Matemaatiliste lausete peatükil on tähtis roll õpilaste arutluspädevuse (27% kõigist arutluspädevust arendavatest ülesannetest) ja kommunikatsioonipädevuse (21% kõigist kommunikatsiooni-pädevust arendavatest ülesannetest) arendamisel.

Ülesannete jaotus pädevusega seotud tegevuse järgi. Analüüsitud õpikus keskendutakse valdavalt etteantud lahendusstrateegiate rakendamist eeldavatele ülesannetele, pakkudes vähem võimalusi loovate ja hindamisel põhinevate pädevuste kujunemiseks. Rõhuasetus on nii terves õpikus (59% ülesannetest) kui ka valdkonnapõhiselt (50–67% ülesannetest) jälgendamise tegevusel. Tõlgendamist ja hinnangu andmist eeldavaid ülesandeid esineb harva (vt joonist 2), mis viitab piiratud võimalustele refleksiooniks ja hindavaks analüüsiks selles õppematerjalis.

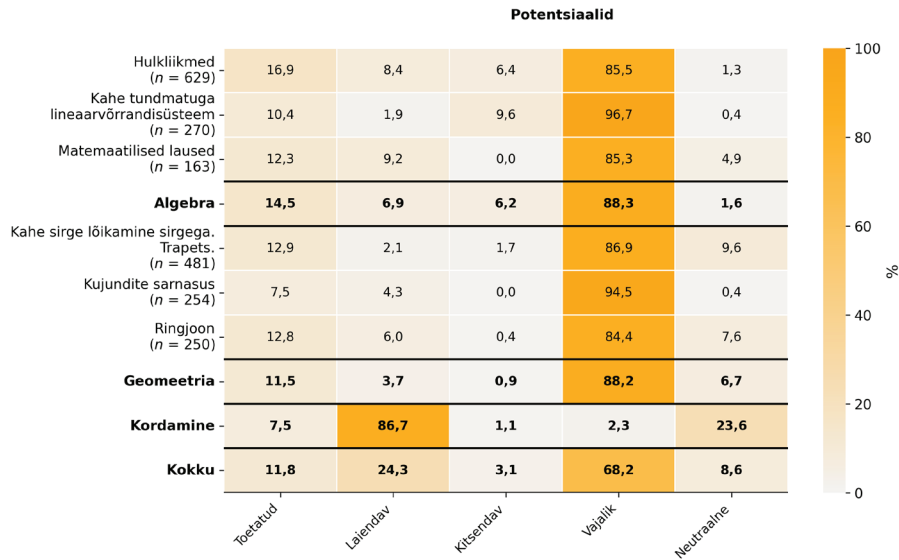


Joonis 2. Pädevusega seotud tegevuste jaotus (%) koondteemade ja peatükkide kaupa. Joonisel on iga lahtri osakaal arvatud vastava rea piires valemiga $pr,c = nr,c / Nr \times 100\%$, kus Nr tähistab rea r ülesannete koguarvu ja nr,c nende ülesannete arvu reas r , mis märgendati veerus c toodud tegevusega.

Algebra teemades suunatakse õpilasi sagedamini ette antud lahenduskäike järgima (jälgendamist 66,7%, konstrueerimist 40,3%), geomeetria pakub võrdsemalt nii jälgendamise (56,5%) kui ka konstrueerimise tegevust (55,3%). Mõnevõrra üllatuslik oli kordamisülesannetes jälgendamist eeldavate ehk harjutamis- ja kinnistamisfunktsiooni täitvate ülesannete ülekaal (vt joonist 2). Ka pädevusega seotud tegevuste dimensioonis on eriline roll matemaatiliste lausete peatükil, kus jälgendamise tegevuse osakaal on 13,5% ja konstrueerimist eeldab 76,1% ülesannetest; samuti on hinnangu andmist eeldavate ülesannete osakaal selles teemas kõige suurem (4,9%, õpiku keskmine on 1,7%).

Ülesannete jaotus pädevusega seotud potentsiaali järgi. Potentsiaali dimensiooni analüüs näitab ootuspäraselt vajaliku skaalaväärtusega ülesannete

ülekaalu (vt joonist 3). Laiendav potentsiaal ilmneb peamiselt kordamis-ülesannetes (86,7%), viidates analüüsitavas õpikus laiendavate ülesannete kinnistavale või kontrollivale, mitte niivõrd pädevust avardavale rollile. Algebras on laiendavaid ülesandeid peaaegu poole rohkem kui geomeetrias (vastavalt 6,9% ja 3,7%), keskmisest rohkem pädevust laiendavat potentsiaali pakuvad hulkliikmete (8,4%) ja matemaatiliste lausete teemad (9,2%).



Joonis 3. Potentsiaali dimensiooni jaotus (%) koondteemade ja peatükkide kaupa. Joonisel on iga lahtri osakaal arvutatud vastava rea piires valemiga $pr,c = nr,c / Nr \times 100\%$, kus Nr tähistab rea r ülesannete koguarvu ja nr,c nende ülesannete arvu reas r , mis on märgendatud veerus c toodud potentsiaali väärtusega.

Toetatud potentsiaaliga ülesannete osakaal peatükkides jääb vahemikku 8–17%, olles kõige suurem hulkliikmete peatükis. Viimane on ühtlasi kõige protseduurilisem ning õpiku struktuur leevendab meeldetuletuste ja vihjete abil selle teema meetoodilist kirevust ja suurt meeldejät miskoormust. Kitsendava potentsiaaliga ülesannete osakaal on õpikus kõige väiksem (keskmiselt 3%), kõige enam selliseid ülesandeid algebras (6,2%), täpsemalt kahe tundmatuga lineaarvõrrandisüsteemi peatükis. Ülesande lineaarvõrrandisüsteemi abil lahendamise asemel on sageli võimalik rakendada arutluspädevust ja jõuda vastuseni proovimise teel. Neutraalne potentsiaal esineb õpikus tervikuna pigem tagasihoidlikult, kuid jaotus on teemati ebaühtlane (vt joonist 3). Kõige suurem on neutraalsete ülesannete osakaal kahe sirge lõikamisel sirgega ja trapetsi teemas (9,6%), mis osutab vajadusele sealseid ülesandeid ümber struktureerida või kaaluda laiendava märke lisamist.

Arutelu

Matemaatika õpetamisel ja õppimisel on õppematerjalidel oluline roll – tuleb arvestada õppekava ning matemaatikapädevuse mitmetasandilisust. Eesti matemaatika õppematerjale on vähe analüüsitud ja ka rahvusvahelisel tasandil (Rezat *et al.*, 2021) on rõhutatud vajadust uurida õppematerjalide disaini mõju õpilaste kontseptuaalsele arusaamale. Siinses uurimuses lähtusime Eesti põhikooli riikliku õppekava matemaatikaõppe eesmärgist kujundada õpilastel eakohane matemaatikapädevus ja töötasime välja matemaatikapädevuse arendamisvõimalustele keskenduva õppematerjalide analüüsimise raamistiku, mille abil kirjeldasime juhuslikult valitud 8. klassi matemaatikaõpiku näitel selles pakutavaid õpilaste tervikliku matemaatikapädevuse arendamise võimalusi.

Loodud õppematerjalide analüüsimise raamistik on kolmedimensiooniline, kuid võimaldab profileerida matemaatika õppematerjale samaväärselt rahvusvaheliste uurimuste rohkemadimensiooniliste raamistikega. Näiteks haarab raamistiku esimene, matemaatikapädevuse alampädevuste dimensioon (kuus kategooriat) endasse rahvusvaheliste uuringute kognitiivse nõudlikkuse dimensiooni (vt Huntley *et al.*, 2024; Li, 2000), oodatavad oskused (Valverde *et al.*, 2002), ootused (O’Keeffe, 2013), osaliselt konteksti mõõtmel (Huntley *et al.*, 2024), Li (2000) matemaatilise vaate ja osaliselt Gracini (2018) tegevuse dimensiooni. Loodud raamistiku teine dimensioon – tegevused (neli kategooriat) – võimaldab kirjeldada osaliselt Gracini (2018) tegevusi ja kompleksuse taset ning Valverde jt (2002) raamistikus oodatavate oskustega seotud tegevusi, kuid pakub võrreldes Graciniga detailsemat sisesevaadet, eristades tegevusena jälgendamist ja konstrueerimist, ning võrreldes Valverde jt (2002) käsitlusega pakub ühtset tegevuste struktuuri kõigi oskuste/pädevuste kontekstis. Kolmas dimensioon – pädevuse arendamise potentsiaal (viis kategooriat) – seostub õpivõimaluste ja arengutasemete teooriaga (Bingolbali & Bingolbali, 2019; Hadar, 2017; Vygotsky, 1978), aga ka ülesande struktuuri mõju uurimustega (Valverde *et al.*, 2002; Watson & Ohtani, 2015). Seega, loodud raamistik kombineerib, struktureerib, haarab endasse ja arendab edasi matemaatika kontseptuaalsete oskuste käsitlusi ning matemaatika õppematerjalide uurimise raamistikke kolmedimensioonilises vaates. Lisaks on matemaatikapädevuse uurimisraamistik (Lithner *et al.*, 2010), mis on võetud õppematerjalide analüüsimise raamistiku matemaatikapädevuse dimensiooni kujundamise lähtekohaks, seotud OECD PISA matemaatikapädevuse käsitluse ja testidega (Johanson *et al.*, 2021a), pakkudes võimalust võrrelda Eestis ja teistes riikides kasutatavaid õppematerjale PISA tulemuste kontekstis.

Õpiku analüüsiga soovisime saada indikatiivset ülevaadet sellest, milline on ühe Eestis kasutatava 8. klassi matemaatikaõpiku ülesannete profiil õpilaste

matemaatika-pädevuse arendamisvõimaluste seisukohast üldiselt ja õpiku teemade võrdluses. Analüüs näitab, et õpikus olevad ülesanded katavad matemaatika-pädevuse dimensioone ebaühtlaselt. Laialdasemalt viitavad sarnasele seisule ka matemaatika-pädevuse taseme mõõdistused teistes klassides (Johanson *et al.*, 2023). Matemaatika-pädevuse dimensioonide jaotus näitab, et 78,4% õpiku ülesannetest on protseduurilised (Ameerika Ühendriikides 79%, Singapuris 80% ja Türgis 63%; Özer & Sezer, 2014). Üle poole (59%) ülesannetest on suunatud õppematerjalis toodud lahenduskäikude jälgendamisele; Valverde jt (2002) uuringus on rahvusvahelises plaanis 8% 13-aastastele õpilastele suunatud õpikuid, kus rutiinsete protseduuridega ülesannete (meie mõistes jälgendamise) osakaal on üle 50%. Arutluspädevust arendavaid ülesandeid leidub siinse uuringu põhjal 5% (Valverde jt uuringus käsitleb 23% õpikutest matemaatilist arutelu 0–10%). Probleemi lahendamise pädevust arendavaks liigitus 3% õpiku ülesannetest, enamik neist on kahe tundmatuga lineaarvõrrandisüsteemi peatükis elulise kontekstiga ülesanded, mis potentsiaalskaalal liigituvad kitsendavateks. Valverde jt (2002) uuringu põhjal on 26% õpikutest sellised, kus uurivate ja probleemi lahendamise ülesannete osakaal on 1–10%; Özer ja Sezer (2014) raporteerivad probleemi lahendamise ülesannete osakaaluks Ameerika Ühendriikide, Singapuri ja Türgi 8. klassi õpikutes vastavalt 10%, 11% ja 11%. Arvestades, et probleemide lahendamine on üks neljast suuremast õppesisu valdkonnast (Põhikooli riiklik õppekava, lisa 5, 2025), on õpiku protseduuriliste ülesannete tasakaalustamiseks vaja kvalifitseeritud ja kogenud õpetajat, kes oskab valida ja koostada lisamaterjale. Pidades silmas, et õpik on ülesannete allikas, mida kasutatakse igas või peaaegu igas tunnis (Lepik *et al.*, 2015), osutab analüüs vajadusele luua lisamaterjale, mis toetaksid matemaatilise keele ja arutlusoskuse arengut, seda eriti kultuuriliselt mitmekesistes ja diferentseerimist nõudvates klassides.

Pädevusega seotud tegevustest eeldab hinnangu andmist alla 2% ja tõlgendamist alla 4% ülesannetest. Seoses tehisintellekti laialdase kasutuselevõtuga muutub veelgi olulisemaks tõlgendamise ja hinnangute andmise oskuste arendamine ning seda pakkuvate ülesanne osakaal võiks olla suurem.

Õpiku ülesannetes domineerib vajalik potentsiaal, mis osutab, et ülesannete esmane eesmärk on minimaalse pädevuslävendi tagamine ja põhioskuste kujundamine, mis on kooskõlas Remillard (2005) uuringuga.

Läbi viidud õpikuanalüüs illustreerib potentsiaali dimensiooni suutlikkust kirjeldada ülesannete rolli õpilaste matemaatika-pädevuse arendamisel õppeprotsessis, mida alampädevuste analüüs üksi esile ei too, ja viitab potentsiaalskaala sisulisele kooskõlale matemaatika-pädevuse kontseptsiooniga. Näiteks pädevuseta ülesandeid ($n = 189$; 17,6% on toetatud ja 93,7% neutraalse potentsiaaliga), mis on seotud üleminekute toetamisega ja varasemate teadmiste

taasaktiveerimisega, kirjeldab ainult potentsiaaliskaala. Protseduurilist pädevust arendavate ülesannete ($n = 1513$) korral loob potentsiaaliskaala vajaliku eristuse ülesannete struktuuris (toetatud 10,6%, laiendav 25,5% ja vajalik 70,1%). Ainult kommunikatsioonipädevust arendavate ülesannete ($n = 134$) puhul ilmneb neutraalse potentsiaali puudumine, mis on kooskõlas sellega, et kommunikatsioonioskused – matemaatilise teksti lauselise struktuuri mõistmine, seoste sõnastamine ja võrduste kirjanek – ei sõltu klassitasemest ega ka teemast.

Piirangud ja soovitused

Matemaatikapädevuse arendamisvõimalustele keskenduvat õppematerjalide analüüsimise raamistikku rakendati ühe 8. klassi õpiku analüüsimisel, et illustreerida loodud raamistiku kasutamist ja saada teavet õpilaste matemaatikapädevuse tervikliku arendamise võimaluste kohta 8. klassis, kuid mitte selleks, et anda hinnanguid konkreetsele õppematerjalile. Kuna analüüs hõlmab ühte klassi, kitsendab see raamistiku arendust lähtuvalt konkreetse klassi matemaatika ainesisust. Analüüsiraamistik on hoolimata vähesest dimensioonide arvust detailirohke ja mahukas, mida peegeldas ka kodeerijatevahelise kooskõla saavutamise suhteliselt pikk protsess. Neutraalne potentsiaal ei tähenda, et ülesanne oleks pedagoogiliselt väheväärtuslik, vaid et selle arenduslik fookus ei ole suunatud uuritava õppeastme sihitud pädevustele. Loodud raamistik keskendub õppematerjali sisuanalüüsile matemaatikapädevuse, seotud tegevuse ja potentsiaali vaates ega sisalda eraldi kriteeriume, hindamaks materjali vastavust õppekava õpitulemustele või sisuvaldkondadele. Kuigi uurimuse üheks lähtekohaks on Eesti põhikooli riikliku õppekava matemaatika valdkonnapädevuse definitsioon, ei käsitle siinne uurimus õpilase suutlikkust mõista matemaatika sotsiaalset, kultuurilist ja personaalset tähendust. Õppematerjalid küll mõjutavad õpilase uskumusi ja suhtumist matemaatikasse (Rezat *et al.*, 2021), kuid autorite hinnangul kuulub see vaade pigem üldpädevusliku käsitluse juurde.

Uuringu edasiarendusena võiks sama raamistikuga analüüsida erinevate klasside õppematerjale ja ka töövihikuid. Kaaluda võiks keelemudelite treenimist uurimisraamistiku kategooriate määramiseks. Samuti oleks vaja uurida, kuidas ülesannete potentsiaal praktikas realiseerub ehk kuidas õpetajad õpikus olevaid ülesandeid kasutavad.

Uuringu tulemusena pakume välja järgmised üldised soovitused õpikute disainimiseks. Vähendamaks õpikute instruksioonilist neutraalsust, võiks õpikus esitada ülesannete matemaatikapädevuse dimensioonid. Alaesindatud matemaatikapädevuse dimensioonide määra õppematerjalides võiks suurendada, et ka nende ülesannete hulgas oleks valikuvõimalusi. Samuti võiks pädevustega seotud tegevuste profiil olla ühtlasem. Tõlgendamise tegevus tuleks

üles ehitada seoste nägemisele ja mõistmisele. Eraldi võiksid olla märgistatud kitsendava potentsiaaliga ülesanded, mille eesmärk on arendada matemaatilist loovust. Algebra ja eelkõige hulkliikmete teemade juures tuleks teha pedagoogiline otsus, kas valemite ja meetodite omandamine on tehniline ja toetatud. See võimaldaks vähendada paljude meetodite drillile suunatud ülesannete hulka ja vabastaks õpiku mahtu teistele alampädevustele.

Kasutatud kirjandus

- Ackerman, D. (2018). Textbooks and tasks in the teaching and learning of mathematics. *Pythagoras: Journal of the Association for Mathematics Education of South Africa*, 39(1), 1–12. <https://files.eric.ed.gov/fulltext/EJ1209157.pdf>
- Bieda, K. N., Ji, X., Drwencke, J., & Pickard, A. (2014). Reasoning-and-proving opportunities in elementary mathematics textbooks. *International Journal of Educational Research*, 64, 71–80. <https://doi.org/10.1016/j.ijer.2013.06.005>
- Bingolbali, F., & Bingolbali, E. (2019). One curriculum and two textbooks: Opportunity to learn in terms of mathematical problem solving. *Mathematics Education Research Journal*, 31, 237–257. <https://doi.org/10.1007/s13394-018-0250-x>
- Charalambous, C. Y., Delaney, S., Hsu, H. Y., & Mesa, V. (2010). A comparative analysis of the addition and subtraction of fractions in textbooks from three countries. *Mathematical Thinking and Learning*, 12(2), 117–151. <https://doi.org/10.1080/10986060903460070>
- Elazzabi, A. A. K., Kaçar, A. (2018). A comparative analysis of ratio and proportion problems in Libyan and Turkish mathematics textbooks. *International Journal of Educational Studies in Mathematics*, 5(4), 132–139.
- Durmus, S., & Kirenli, S. (2024). The investigation of middle school mathematics textbooks in terms of mathematics' connection to nature and science. *Journal of Research and Advances in Mathematics Education*, 9(1), 43–55. <https://doi.org/10.23917/jramathedu.v9i1.3858>
- Fan, L. (1998). Applications of arithmetic in the United States and Chinese textbooks: A comparative study. In G. Kaiser, E. Luna, & I. Huntly (Eds.), *International comparison in mathematics education* (pp. 151–162). Falmer Press.
- Fan, L., Zhu, Y., & Miao, Z. (2013). Textbook research in mathematics education: Development status and directions. *ZDM – Mathematics Education*, 45, 633–646. <https://doi.org/10.1007/s11858-013-0539-x>
- Feinstein, A. R., & Cicchetti, D. V. (1990). High agreement but low kappa: I. The problems of two paradoxes. *Journal of Clinical Epidemiology*, 43(6), 543–549. [https://doi.org/10.1016/0895-4356\(90\)90158-L](https://doi.org/10.1016/0895-4356(90)90158-L)

- Glasnović Gracin, D. (2018). Requirements in mathematics textbooks: A five-dimensional analysis of textbook exercises and examples. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, 49(7), 1003–1024. <https://doi.org/10.1080/0020739X.2018.1431849>
- Große, C. S., & Renkl, A. (2006). Effects of multiple solution methods in mathematics learning. *Learning and Instruction*, 16(2), 122–138. <https://doi.org/10.1016/j.learninstruc.2006.02.001>
- Gwet, K. L. (2014). *Handbook of inter-rater reliability: The definitive guide to measuring the extent of agreement among raters* (4th ed.). Advanced Analytics, LLC.
- Hadar, L. L. (2017). Opportunities to learn: Mathematics textbooks and students' achievements. *Studies in Educational Evaluation*, 55, 153–166. <https://doi.org/10.1016/j.stueduc.2017.10.002>
- Hemmi, K., Lepik, M., Madej, L., Bråting, K., & Smedlund, J. (2019). Introduction to early algebra in Estonia, Finland and Sweden – Some distinctive features identified in the textbooks for Grades 1–3. In U. T. Jankvist, M. van denHeuvel-Panhuizen, & M. Veldhuis (Eds.), *Proceedings of the Eleventh Congress of the European Society for Research in Mathematics Education, CERME11* (pp. 2039–2046). Freudenthal Group & Freudenthal Institute, Utrecht University and ERME.
- Huntley, M. A., Terrell, M. S., & Fonger, N. L. (2024). A content analysis of the algebra strand of six commercially available U.S. high school textbook series. *Education Sciences*, 14(8), 845. <https://doi.org/10.3390/educsci14080845>
- Johanson, M., Pedaste, M., & Baucal, A. (2023). Matemaatikapädevuse dimensioonid ja nende hindamine põhikoolis. *Estonian Journal of Education/Eesti Haridusteaduste Ajakiri*, 11(2), 129–165. <https://doi.org/10.12697/eha.2023.11.2.06>
- Johanson, M., Pedaste, M., Pastak, M., Täht, K., Sõrmus, M., & Jukk, H. (2021). Matemaatikapädevuse hindamine Eesti e-tasemetöödega. *Estonian Journal of Education/Eesti Haridusteaduste Ajakiri*, 9(2), 100–126. <https://doi.org/10.12697/eha.2021.9.2.05>
- Jäder, J., Lithner, J., & Sidenvall, J. (2020). Mathematical problem solving in textbooks from twelve countries. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, 51(7), 1120–1136. <https://doi.org/10.1080/0020739X.2019.1656826>
- Kaldmäe, K., Kontson, A., Matiisen, K., & Pais, E. (2025). *Matemaatika 8. klassile: 1. osa*. Avita. ISBN 978-9985-2-2490-8
- Kaljas, T., Lepik, M., Nurk, E., Telgmaa, A., & Undusk, A. (2022). *Matemaatika 8. klassile: 2. osa*. Koolibri. ISBN 978-9985050446
- Landis, J. R., & Koch, G. G. (1977). The measurement of observer agreement for categorical data. *Biometrics*, 33(1), 159–174. <https://doi.org/10.2307/2529310>
- Lepik, M., Grevholm, B., & Viholainen, A. (2015). Using textbooks in the mathematics classroom – the teachers' view. *Nordic Studies in Mathematics Education*, 20(3–4), 129–156. <https://doi.org/10.7146/nomad.v20i3-4.148695>

- Li, S., Fan, L., & Luo, J. (2025). How STEM content is presented in mathematics textbooks from the U.S. and China: A comparative study. *International Journal of STEM Education*, 12, 39. <https://doi.org/10.1186/s40594-025-00563-1>
- Li, Y. (2000). A comparison of problems that follow selected content presentations in American and Chinese mathematics textbooks. *Journal for Research in Mathematics Education*, 31(2), 234–241. <https://doi.org/10.2307/749754>
- Lithner, J. (2008). A research framework for creative and imitative reasoning. *Educational Studies in Mathematics*, 67, 255–276. <https://doi.org/10.1007/s10649-007-9104-2>
- Lithner, J., Bergqvist, E., Bergqvist, T., Boesen, J., Palm, T., & Palmberg, B. (2010). Mathematical competencies: A research framework. In *The seventh mathematics education research seminar, Stockholm, January 26–27, 2010* (pp. 157–167). SMDF.
- National Council of Teachers of Mathematics NCTM (2000). *Executive Summary. Principles and Standards for School Mathematics*. Külastatud aadressil https://www.nctm.org/uploadedFiles/Standards_and_Positions/PSSM_ExecutiveSummary.pdf
- Niss, M. (2003). Mathematical competencies and the learning of mathematics: The Danish KOM project. In A. Gagatsis & S. Papastavridis (Eds.), *3rd Mediterranean Conference on Mathematical Education*, pp. 116–124.
- Nurk, E., Telgmaa, A., Undusk, A., & Kaljas, T. (2022). *Matemaatika 8. klassile: I osa*. Koolibri. ISBN 978-9985049259.
- O’Keeffe, L. (2013). A framework for textbook analysis. *International Review of Contemporary Learning Research*, 2(1), 1–13. <https://doi.org/10.12785/irclr/020101>
- Pedaste, M., Palts, T., Kraav, T., & Orav-Puurand, K. (2021). Komplekssete probleemide lahendamise oskus ning selle hindamine ja arendamine gümnaasiumis. *Estonian Journal of Education / Eesti Haridusteaduste Ajakiri*, 9(1), 138–161. <https://doi.org/10.12697/eha.2021.9.1.06>
- Pehkonen, L., Piht, S., Pakkas, K., Laine, A., & Krzywacki, H. (2019). *Estonian and Finnish teachers’ views about the textbooks in mathematics teaching*. <http://hdl.handle.net/10138/247826>
- Pellegrino, J. W., & Hilton, M. L. (Eds.). (2012). *Education for Life and Work: Developing Transferable Knowledge and Skills in the 21st Century*. National Academies Press. <https://doi.org/10.17226/13398>
- Pickle, M. C. C. (2012). *Statistical Content in Middle Grades Mathematics Textbooks* (Doctoral dissertation). University of South Florida. <https://digitalcommons.usf.edu/etd/4203>
- Põhikooli riiklik õppekava (2024). *Riigi Teataja I*, 2024, 2. Külastatud aadressil <https://www.riigiteataja.ee/akt/110082024002>
- Remillard, J. T. (2005). Examining key concepts in research on teachers’ use of mathematics curricula. *Review of Educational Research*, 75(2), 211–246. <https://doi.org/10.3102/00346543075002211>

- Reys, B. J., Reys, R. E., & Koyama, M. (1996). The development of computation in three Japanese primary-grade textbooks. *The Elementary School Journal*, 96(4), 423–437. <https://doi.org/10.1086/461837>
- Rezat, S. (2024). Research on curriculum resources in mathematics education: a survey of the field. *ZDM Mathematics Education* 56, 223–237. <https://doi.org/10.1007/s11858-024-01559-x>
- Rezat, S., Fan, L., & Pepin, B. (2021). Mathematics textbooks and curriculum resources as instruments for change. *ZDM – Mathematics Education*, 53, 1189–1206. <https://doi.org/10.1007/s11858-021-01309-3>
- Rychen, D. S., & Salganik, L. H. (Eds.). (2003). *Key Competencies for a Successful Life and a Well-Functioning Society*. Hogrefe & Huber.
- Schmidt, W. H., McKnight, C. C., & Raizen, S. A. (1997). *A splintered vision: An investigation of U.S. science and mathematics education*. Kluwer Academic.
- Sevinc, S., Kohanová, I., Isiksal-Bostan, M., Kubáček, Z., Isler-Baykal, I., Lada, M., Cakiroglu, E., & Di Paola, B. (2022). Developing an integrated framework for analyzing ways of reasoning in mathematics. In *Proceedings of the 15th International Conference of Education, Research and Innovation (ICERI 2022)* (pp. 2082–2089). IATED. <https://doi.org/10.21125/iceri.2022.0529>
- Son, J. W., & Senk, S. L. (2010). How reform curricula in the United States and Korea present multiplication and division of fractions. *Educational Studies in Mathematics*, 74, 117–142. <https://doi.org/10.1007/s10649-010-9229-6>
- Stylianides, G. J. (2009). Reasoning-and-proving in school mathematics textbooks. *Mathematical Thinking and Learning*, 11(4), 258–288. <https://doi.org/10.1080/10986060903253954>
- Sun, X. (2011). “Variation problems” and their roles in the topic of fraction division in Chinese mathematics textbook examples. *Educational Studies in Mathematics*, 76, 65–85. <https://doi.org/10.1007/s10649-010-9263-4>
- Sweller, J. (1994). Cognitive load theory, learning difficulty, and instructional design, *Learning and Instruction*, 4, 295–312. [https://doi.org/10.1016/0959-4752\(94\)90003-5](https://doi.org/10.1016/0959-4752(94)90003-5)
- Zhu, Y., & Fan, L. (2006). Focus on the representation of problem types in intended curriculum: A comparison of selected mathematics textbooks from mainland China and the United States. *International Journal of Science and Mathematics Education*, 4, 609–626. <https://doi.org/10.1007/s10763-006-9036-9>
- Tárraga-Mínguez R., Tarín-Ibáñez J., Lacruz-Pérez I. (2021). Analysis of Word Problems in Primary Education Mathematics Textbooks in Spain. *Mathematics*. 9(17):2123. <https://doi.org/10.3390/math9172123>
- Utami, N. S., Prabawanto, S., & Dahlan, J. A. (2023). An analysis of mathematics textbook of Indonesian curriculum based on functional thinking framework. *JRAMathEdu (Journal of Research and Advances in Mathematics Education)*, 8(4), 199–212. <https://doi.org/10.23917/jramathedu.v8i4.1928>

- Valverde, G. A., Bianchi, L. J., Wolfe, R. G., Schmidt, W. H., & Houang, R. T. (2002). *According to the book: Using TIMSS to investigate the translation of policy into practice through the world of textbooks*. Kluwer Academic Publishers.
- Vygotsky, L. S. (1978). *Mind in society: The development of higher psychological processes*. Harvard University Press.
- Watson, A., & Ohtani, M. (2015). *Task design in mathematics education: An ICMI study 22*. Springer Nature. <https://doi.org/10.1007/978-3-319-09629-2>
- Weinert, F. E. (2001). Concept of competence: A conceptual clarification. In D. S. Rychen & L. H. Salganik (Eds.), *Defining and Selecting Key Competencies*. OECD.
- Özer, E., & Sezer, R. (2014). A comparative analysis of questions in American, Singaporean, and Turkish mathematics textbooks based on the topics covered in 8th grade in Turkey. *Educational Sciences: Theory and Practice*, 14(1), 411–421.

Lisa A

Matemaatikapädevuse arendamisvõimalustele keskenduv õppematerjalide analüüsimise raamistik

Tabel 3. Matemaatikapädevuse dimensioon

Alam- pädevus	Definitsioon	Kaasamise ja välistamise kriteeriumid
Probleemi lahendamise pädevus	Oskus konstrueerida uusi lahendusviise ja lahendada mittestandardseid elulisi ülesandeid.	ON. 1. Ülesanne nõuab õpilase jaoks uudse lahendusmeetodi konstrueerimist, sh mitme protseduuri või algoritmi kasutamist ja kombineerimist. 2. Matemaatikasisesed ülesanded, mille lahenduskäike õpitakse järgmistes klassides. EI OLE. 1. Ülesanne, mille kohta õpikus on olemas näide või mille lahendamisel on tegu õpikus esitatud teooria rakendamisega väheste muudatustega. 2. Tõestamisülesanded, kuna seal on kesksel kohal arutus.
Arutluspädevus	Oskus oma valikuid ja järeldusi sõnaselgelt matemaatiliste argumentidega põhjendada.	ON. Ülesanne, mille lahendus vajab põhjendust, kriitikat ja/või matemaatilist argumenteerimist; ilma põhjenduse või aruteluta pole lahendus täielik või arusaadav. Näiteks „kuna...“, „siis...“ tüüpi konstruktsioonid lahenduses. Siia kuuluvad tõestamisülesanded. EI OLE. 1. 8. klassis ei loeta ühelauselisel järeldust lahenduses arutluspädevust avaldavaks. 2. Selgitus või olukorra kirjeldus ilma järeldusteta.
Protseduuriline pädevus	Oskus teostada matemaatilisi protseduure.	ON. 1. Ülesanne lahendatakse valemi, algoritmi või näidisülesandes toodud meetodi põhjal. 2. Ainult analüüsitavas õppematerjalis õpitavad protseduurid. 3. Ülesanded, kus protseduur on küll varem õpitud, kuid seda kasutatakse uues kontekstis (nt üksliikme või hulkliikme astendamine vs. arvu astendamine). EI OLE. 1. Analüüsitava õppematerjali kontekstis varem õpitud protseduurid loetakse kinnistunud taustteadmiseks. 2. Kui ülesande lahendamine eeldab arutluspädevust.

Alam-pädevus	Definitsioon	Kaasamise ja välistamise kriteeriumid
Esituspädevus	Oskus luua abstraktsete matemaatiliste üksuste konkreetseid mõttelisi või tegelikke asendusi ehk esitusi. Esitusteks on arvud, funktsioonid, geomeetrilised objektid, meetodid, mõisted, nähtused, ideed ja nende omadused.	<p>ON. 1. Ülesanne vajab vältimatult sobiva esitusviisi (joonis, tabel, graafik, avaldis, võrrand, võrrandisüsteem vms) loomist või valikut ja/või antud esituse sisulist tõlgendamist või hindamist. Geomeetriaülesandes peab joonis olema vajalik lahenduse jälgitavuseks (tähistused vms). 2. Esitustena käsitletakse vaadeldavas õpematerjalis õpitavaid esitusi, varem õpitut loetakse kinnistunud taustteadmiseks. 3. Arvuti abil (nt GeoGebra) lahendatavad geomeetria ülesanded, mille käigus luuakse joonis.</p> <p>EI OLE. Ülesanne, kus esitus on ülesande tekstis antud, v.a juhul, kui ülesande lahendamiseks on vajalik esituse hindamine, tõlgendamine või täiendamine.</p>
Seose loomise pädevus	Oskus luua seoseid matemaatiliste üksuste (nt mõisted, tähistused, valemid) või nende esituste vahel.	<p>ON. Ülesanne, kus lahendus eeldab alternatiivse esituse loomist, sh esituste mitteprotseduuriline teisendamine. Silmas peetakse viit tüüpi seoseid: erinevate üksuste esituste vahel, sama üksuse erinevate esituste vahel, ühe esituse erinevate osade vahel, erinevate üksuste vahel, ühe üksuse erinevate osade vahel.</p> <p>EI OLE. Ülesanne, mille lahendamisel erinevate esituste vahel liikumine on antud protseduurina.</p>
Kommunikatsioonipädevus	Oskus väljendada matemaatilist sisu sõnades, sümbolites, märkides ja tegevustes.	<p>ON. 1. Ülesanne vajab a) teise lahenduse või argumendi tõlgendamist (aga mitte lihtsalt ülesande teksti tõlgendamist), b) auditooriumile/lugejale matemaatilise teksti kirjutamist/selgitamist või c) kommunikatsiooni kvaliteedi hindamist. Kommunikatsioonipädevus avaldub reeglina muu matemaatikapädevuse kontekstis, nt arutluspädevuse ülesanded, protseduuri (nt võrrandi või võrrandisüsteemi lahendamise) kirjapanek. Erandiks on matemaatiliste mõistete defineerimine, kus kommunikatsioonipädevus on ainus arendatav pädevus. 2. Lahendus eeldab kahte või enam tehet/fakti/ kujundit/tegevust, mistõttu on vaja öelda, mida leitakse, miks midagi tehakse või millisest kujundist räägitakse.</p> <p>EI OLE. 1. Ülesanne, kus vastuseks on matemaatiline tekst (nt definitsioon või algoritmi osa), mida on võimalik sama õpiku osast ümber kirjutada. 2. Ülesanne, kus vastuseks on n-ö ilukirjanduslik tekst, mis ei sisalda matemaatilisi mõisteid ega sümboleid. 3. Ülesanne, kus juhis ütleb, et arvutada tuleb peast. 4. 8. klassis ei loeta ühelauselisel ülesande vastust kommunikatsioonipädevust avaldavaks.</p>

Tabel 4. Pädevusega seotud tegevuse dimensioon

Tegevus	Definitsioon	Kaasamise ja välistamise kriteeriumid
Tõlgendamine	Pädevusega seotud teabe tõlgendamine.	<p>ON. 1. Tegevuse sisuks on mõistmine/arusaamine.</p> <p>2. Ülesande tekstis esinevad sõnad* <i>loe, tuvasta, dekodeeri, tõlgi, parafraseeri, nimeta</i> (nt telgesid, ühikuid, eeldusi).</p> <p>Ei OLE. 1. Õppematerjalis toodu üks ühele ümber kirjutamine ja/või sõnastamine.</p> <p>2. Kommunikatsioonipädevuse ja arutluspädevuse ülesandeid ei rakendata tõlgendamise kontekstis.</p>
Jälgendamine	Õppematerjalis esitatud valemi, algoritmi, argumendi kasutamine minimaalsete muutustega; samuti lahendamine näidisülesande toel.	<p>ON. 1. Tegevuse sisuks on teoorias toodud näite/meetodi vahetu rakendamine. 2. Ülesande tekstis esinevad sõnad* <i>arvuta, lahenda, laienda konkreetse moel, lisa, kasuta teoreemi otse</i>.</p> <p>Ei OLE. Õppematerjalis toodud valemi, algoritmi, argumendi sõna-sõnalt ümber kirjutamine.</p>
Konstrueerimine	Ülesande lahendamiseks puuduva lahenduskäigu, algoritmi, esituse või uue arutluskäigu loomine.	<p>ON. 1. Tegevuse sisuks on lahenduskäigu või argumendi ise konstrueerimine. 2. Ülesande tekstis esinevad sõnad* <i>modelleeri, tuleta, vali muutujad ja/või tulemused, koosta joonis ülesande lahendamiseks, koosta selgitus</i>.</p>
Hinnangu andmine	Lahenduse tõesuse, kvaliteedi või sobivuse hindamine, väite põhjenduse, argumendi või esituse kritiseerimine.	<p>ON. 1. Tegevuse sisuks on hinnata matemaatilisi tegevusi (mõistmine, jäeldamine, kasutamine, üldistamine), nt põhjendada meetodi või strateegia sobivust, võrrelda alternatiive, arutada eeldusi või piiranguid. 2. Ülesande tekstis esinevad sõnad* <i>hinda, reflekteeri, põhjenda valikut, võrdle meetodeid, too välja tugevused/nõrkused</i>, lahenduse sobivus eesmärgiga, meetodi tõhusus, üldistatavus, eelduste vajalikkus, rakendatavuse piirangud, vead/eksimiskohad, riskid, „millal ei tööta?“, „miks see töötab?“, strateegia ja meetodika hindamine, enesehindamine, „mida õppisin / teen teistmoodi?“, seos varasemaga.</p> <p>Ei OLE. Arutluspädevuse ülesandeid ja tõestamist ei rakendada hinnangu andmise kontekstis.</p>

*Tegemist on suunavate sõnadega, mis ei pea ülesande tekstis esinema täpselt sellisel kujul.

Tabel 5. Potentsiaali dimensiooni kaasamise ja välistamise kriteeriumid

Potentsiaal	Kaasamise ja välistamise kriteeriumid
Toetatud	<p>ON. 1. Esitatud on sama meetodi või ideega seotud näide. 2. Antud on sammsammulised vihjed või osaline lahendus. 3. Viidatud on meetodile (nt „kasuta näidet...”) või joonisele.</p> <p>EI OLE. 1. Antud on ainult vastus. 2. Peatükis on küll näited, kuid ülesanne ei viita neile sõnaselgelt. 3. Lisatud teave ei ole ülesande lahendamisega seotud, nt ajalooline info. 4. Antud joonis on ülesande osa (seletab tähised, annab pikkused, nurgad vms info).</p>
Laiendav	<p>ON. Tärnülesanne, kordamisülesanne, lisaülesanne või ülesanne, kus on selgesõnaline märg „soovi korral” või „valikuline”, näiteks ülesanded peatükkidest „Kordamine”, „Enesekontrolliks”, „Nuputamine”.</p>
Kitsendav	<p>ON. Ülesandel on mitu lahendusviisi ja õpilane saab seetõttu ettenähtud alampädevuse rakendamist vältida (nt õpitava protseduuri asemel lahendada ülesanne proovimise või arutlemise teel).</p> <p>EI OLE. 1. Ülesande tekst või hindamiskriteeriumid teevad lahendusmeetodi/ pädevuse kasutamise vältimatuks (st lahenduseni viib ainult üks pädevus/ meetod; nt „tõesta geomeetriselt, et ...”). 2. Kui lahendusmeetodeid on mitu, kuid pole võimalik aru saada, millist lahendusmeetodit õpik eeldab, ehk ülesanne ei ole seotud konkreetse teooriaga (nt nuputamisyülesanded).</p>
Vajalik	<p>ON. Ülesanne on selgelt seotud peatüki teooriaga ehk toetab selle omandamist ja ülesandele määratud pädevus on lahenduseks mõõdapääsmatu.</p>
Neutraalne	<p>ON. Ülesanne käsitleb varem õpitud materjali või on vaadeldava teemaga nõrgalt seotud.</p> <p>EI OLE. Ülesanne käsitleb küll varem õpitud materjali, kuid seda tuletatakse meelde selleks, et rakendada uues kontekstis.</p>

Lisa B

Raamistiku rakendamise alused

1. Ülesannet loetakse sõna-sõnalt; peidetud õpetajakavatsust ega tõlgendusvõimalusi ei arvestata. Arvesse võetakse ülesande asukohta, peatüki selgitusi ning vahetuid visuaalseid tugimaterjale, näiteid ja vihjeid.
2. Pädevuste määramiseks lahendatakse ülesanne läbi. Mitme lahendusviisi korral lähtutakse peatükis käsitletavast teooriast; muu lahendusviisi olemasolu märgitakse kitsendava potentsiaalina.
3. Märgitakse kõik ülesande lahendamiseks vajalikud pädevused. Kui ülesanne ei seostu vaadeldava õpiku matemaatikapädevuse dimensioonidega, jääb pädevus ja sellega seotud tegevus märkimata ning potentsiaaliks määratakse neutraalne.
4. Ülesandel võib olla mitu potentsiaali, nt laiendav ja neutraalne.
5. Nummerdatud alaülesanded/küsimused kodeeritakse eraldi. Nummerdamata küsimusi eraldi alaülesannetena ei käsitleta. Sammsammuliseks lahendamiseks nummerdatud ülesande osi ei vaadelda eraldi ülesannetena.
6. Lahtrit „märkus“ kasutatakse mitmeti tõlgendatavate juhtumite dokumenteerimiseks.
7. Suunavad sõnad võivad viidata pädevusega seotud tegevusele, kuid ei määra seda üheselt.

A framework for analysing learning materials focusing on opportunities for developing mathematical competence: An application to an 8th-grade mathematics textbook

Kateryna Lipmaa^{a1}, Marje Johanson^b, Maarja Sõrmus^b,
Eva Saul^a, Margus Pedaste^b

^a*Institute of Mathematics and Statistics, University of Tartu*

^b*Institute of Education, University of Tartu*

Summary

In recent decades, mathematical competence has become an important concept in educational research and policy, highlighting the transferable skills essential to mathematical knowledge. The Estonian national curriculum aims to develop age-appropriate mathematical competence (Põhikooli riiklik õppekava, lisa 5, 2025). The textbook determines what and how mathematics is taught in classrooms, serving as a link between intended and implemented educational goals (Valverde et al., 2002). As Remillard (2005) notes, textbooks are instructionally neutral: depending on how they are used, the same book can either support competence development or devolve into procedural drill. Hence, a competency-based curriculum and educational goals do not necessarily guarantee competency-based teaching.

Research on mathematics textbooks is an established, methodologically diverse field, with several literature reviews published (Fan et al., 2013; Rezat, 2024; Rezat et al., 2021). Most studies emphasise content analysis (57%; Rezat, 2024; see also Fan et al., 2013), and many frameworks exist analysing the content of the mathematics textbooks (Gracin, 2018; Huntley et al., 2024; Li, 2000; O’Keeffe, 2013; Valverde et al., 2002). Such analyses are inherently linked to examining the learning opportunities provided by the materials; every framework targets a somewhat different research goal, e.g., topic-based analyses (Li, 2000), cross-national differences analyses (Valverde et al., 2002). Charalambous et al. (2010) conclude that no agreed approach has yet emerged for evaluating and comparing learning opportunities in textbooks.

Guided by the Estonian national curriculum’s aims, this study seeks to develop, on the basis of relevant literature and a synthesis of existing theoretical

¹ Institute of Mathematics and Statistics, University of Tartu, Narva 18, 51009 Tartu, Estonia; kateryna.lipmaa@ut.ee.

approaches, a framework for analysing mathematics learning materials that enables evaluation of whether these materials provide enough broad opportunities for the holistic development of mathematical competence. To achieve this, we formulated two research questions:

1. Which dimensions could an analytical framework for learning materials comprise to investigate the opportunities created within mathematics learning materials for the holistic development of students' mathematical competence?
2. What is the profile of tasks in one Estonian 8th-grade mathematics textbook regarding opportunities for developing students' mathematical competence overall and across different topics?

To select a framework suitable for the Estonian context and holistic competence aims, we reviewed the literature on textbook analysis and competence development. We adopted the mathematical competence research framework (Lithner et al., 2010) as a starting point, given its use in Estonia for national e-assessment analyses and competence measurement (Johanson et al., 2021a; Johanson et al., 2023). Based on an analysis of 225 tasks from the authors of the most popular mathematics textbooks in Estonia, we adapted the definitions of communication competence and interpretive activity to be suitable for the textbook context. Drawing on Pedaste et al.'s (2021b) definition of a problem task, we broadened the definition of problem-solving competence to align with a domain-competence-based approach. Following the studies by Jäder et al. (2020) and Lithner (2008), we replaced the activity "use" in the mathematics competence research framework with two activities: imitate (following a provided solution scheme with minimal adjustments) and construct (creating a scheme, algorithm, representation, or reasoning when the scheme is absent or inapplicable without substantive modification). Following Watson and Ohtani's (2015) research, we added a dimension that captures the potential for competence development – accounting for task structure, obligatoriness, support, and cognitive openness. The scale for this potential dimension is designed to measure both the substantive and didactic roles of a task that has the potential to develop competence, thereby shaping mathematical competence. Such a scale enables viewing the potential of tasks to foster each dimension of mathematical competence as a spectrum of learning opportunities differing in direction and scope.

To describe the profile of opportunities for developing mathematical competence in the textbook, we calculated distributions of the framework dimensions. The analysis is task-based. We examined the distribution for the original

chapters and the domains: algebra (1062 tasks) and geometry (985 tasks). We also highlighted the review tasks separately (totalling 623), as they have a structurally different content profile.

Although the framework for investigating mathematical competence in learning materials is three-dimensional, it enables profiling mathematics textbooks comparable to more dimensional international frameworks. The first dimension – mathematical sub-competences (6 categories) – covers cognitive demand (see Huntley et al., 2024; Li, 2000), expected skills (Valverde et al., 2002), expectations (O’Keeffe, 2013), and partially the context dimension (Huntley et al., 2024), as well as Li’s (2000) view of mathematicalness and, to some extent, Gracin’s (2018) activity dimension. The second dimension of the framework – activities (4 categories) – partially reflects Gracin’s (2018) activities and levels of complexity and Valverde et al.’s (2002) activity structures for expected skills, but offers a more detailed perspective by distinguishing between imitation and construction as separate activities and is universal for all subcompetences. The third dimension – potential for competence development (five categories) – is linked to theories of learning opportunities and developmental levels (Bingolbali & Bingolbali, 2019; Hadar, 2017; Vygotsky, 1978) as well as studies on the impact of task structure (Valverde et al., 2002; Watson & Ohtani, 2015). Thus, the framework consolidates and extends existing approaches within a three-dimensional perspective.

The analysis of an Estonian Grade 8 mathematics textbook reveals uneven coverage of competence dimensions, a trend that also characterises competence-level assessments (Johanson et al., 2023). Procedural tasks dominate (78.4%; cf. 79% in U.S., 80% in Singapore, 63% in Turkey; Özer & Sezer, 2014), of all tasks 59% focus on imitating solution procedures provided in the learning material; according to Valverde et al. (2002), only 8% of textbooks aimed at 13-year-old students have 50% or more routine procedural tasks (comparable with imitation in our case). Approximately 5% of tasks in this study require reasoning competence (whereas Valverde et al. (2002) reported that 23% of international textbooks include mathematical reasoning within a range of 0–10% of all tasks), less than 2% require evaluation, and less than 4% require interpretation.

The textbook plays a central role in classroom practice (Lepik et al., 2015; Valverde et al., 2002), and, as such requires supplementary materials that support the development of mathematical language and reasoning skills, particularly in culturally diverse and differentiation-demanding classrooms. An increasing number of tasks requiring reasoning and evaluation would better align with the goals of the Estonian national curriculum for basic school, while the rise of artificial intelligence stresses, in addition, the importance of conceptual understanding and interpretation skills.

Based on the findings of this study, we propose the following general recommendations. Textbooks should indicate the mathematical competence dimensions addressed by each task, enabling teachers to monitor the representation of all dimensions in classroom practice. The proportion of underrepresented dimensions of mathematical competence should be increased to ensure that teachers have options within these categories as well. The overall profile of competence-related activities should be more balanced but not necessarily explicitly marked. Interpretation activities should focus on recognising and understanding connections. Tasks with restrictive potential, intended to foster mathematical creativity, should be highlighted with a separate marker. In the case of algebra, a clear pedagogical decision should be made regarding whether the acquisition of formulas and methods is supported. If so, the number of tasks with supported potential should be increased, reducing the number of drill-oriented tasks.

Keywords: mathematical competence, domain-specific competence, mathematics textbook analysis, quantitative analysis, content analysis.