

# Matemaatikat tuleks õpetada kui mõtteviisi, mitte kui arvutamist

Keith Devlin<sup>a1</sup>

<sup>a</sup> *Stanfordi ülikooli haridusteaduse instituut (Emeritus)*

## Sissejuhatus

Pärast viiskümmend aastat kestnud matemaatikukarjääri loobusin 2018. aasta lõpus ülikooliõppejõu ametist ja jäin pensionile. Kogu oma karjääri jooksul ei kasutanud ma peaaegu *ühtegi* koolis või ülikoolis omandatud matemaatilist meetodit. Ja nagu ma allpool näitan, ei ole minu kogemused sugugi ebatüüpilised inimeste puhul, kellel tuleb tööga seoses pidevalt matemaatikat kasutada.

See ei tähenda, et koolis ja ülikoolis matemaatika õppimisele kulutatud aeg oleks olnud raisatud. Täiesti vastupidi. Asi on selles, et sellel, *mida* ma õppisin (ja harjutasin ja lihvisin rohkem kui tuhandeid tunde), oli minimaalselt otseseid tagajärgi. Palju olulisem oli kooli ja kõrghariduse omandamise ajal välja kujundatud *mõtteviis*. Kooli ja bakalaureuseõppe käigus saadud kõige väärtuslikum oskus ei olnud mitte võime teostada mitmesuguseid matemaatilisi toiminguid, vaid teatava mõtteviisi omandamine, mida mõned meist nimetavad *matemaatiliseks mõtlemiseks*.

Matemaatilise mõtlemise tähendusrikkad aspektid on uurimine, kahtlemine, süsteemne töö, visualiseerimine, hüpoteeside püstitamine, oma seisukohtade selgitamine, üldistamine, põhjendamine ja tõestamine, aga mitte rangete protseduuride teostamine, mida teevad kas masinad või mida peetakse „madalama taseme“ mehaaniliseks tegevuseks. Vt näiteks Stacey (2006); Devlini (2012a, b, c); Singhi jt (2018); NRICH-i (2020) töid.

Siinses essees keskendutakse matemaatilisele mõtlemisele. Kuid enne alustamist tuleks mainida, et oma kirjutises lähtun vaatenurgast, mis on omandatud karjääri jooksul, millesse mahtusid nii akadeemilised teadusuuringud puhtas matemaatikas kui ka rakendusmatemaatikaga seotud maailm, kus tegelesin paljude reaalse probleemidega nii eraettevõtluse kui ka valitsuse heaks.

---

<sup>1</sup> Haridusteaduse instituut, Stanfordi Ülikool, 450 Serra Mall, Stanford, CA 94305, USA; [kdevlin@stanford.edu](mailto:kdevlin@stanford.edu).

## Matemaatika kui tehnoloogilise revolutsiooni tööriist

Oma karjääri teises pooles kasutasin matemaatikat abivahendina eluliste probleemide lahendamisel (samal ajal aitasin luua uusi matemaatilisi abivahendeid). Seda tehes kogesin suurt nihet matemaatika kasutamises.

Selline nihe toimus peamiselt kahe aastakümne jooksul – 1970.–1990. aastani. Kuigi paljud inimesed, sealhulgas lapsevanemad ja õpetajad, ei tea tänapäevani sellise muutuse toimumisest, kasutavad kõik professionaalsel tasandil matemaatikaga tegelevad inimesed seda 1990. aastast alates varasemast *täiesti erinevalt*. See on juhtunud tänu tehnoloogiale ja liialdamata võib öelda, et tegemist oli *revolutsiooniga* matemaatika rakendamises.

Esimene revolutsiooniline samm tehti 1960. aastate alguses elektroonilise kalkulaatori leiutamiselega, mis vabastas professionaalid kirjalikust arvutamisest. Elektrooniline kalkulaator – esimesed neist olid kallid, töölauale paigutatavad seadmed – võis arvutusi teha palju kiiremini kui inimene ja sealjuures ilma vigadeta.

Nagu öeldud, olid esimesed elektroonilised kalkulaatorid kallid (umbes 5000 dollarit) ja neid kasutati kontorites peaaegu alati kõrvuti (ja hiljem nende asemel) 20. sajandi algusest kasutusel olnud raskete elektri jõul töötavate mehaaniliste arvutusmasinatega, mis omakorda olid välja vahetanud veel varasemad vändaga arvutusmasinad (vt joonist 1).



**Joonis 1.** Vanaaegsed kalkulaatorid alustades uematest ja lõpetades vanematega. Üleval vasakul endiselt populaarne Texas Instrumentsi TI84 graafiline taskukalkulaator, mis võeti kasutusele 2004. aastal (maksumus umbes 100 dollarit); üleval paremal Hewlett Packardi HP9100 elektrooniline lauakalkulaator, mis võeti kasutusele 1965. aastal (maksumus 5000 dollarit); all vasakul Marchanti elektril töötav mehaaniline arvutusmasin umbes aastast 1920; all paremal vändaga mehaaniline arvutusmasin 19. sajandi lõpust. Pildid Wikipediast.

Kuid 1970. aastate alguses tulid turule väikesed, odavad, taskuformaadis elektroonilised kalkulaatorid, mis muutsid uue tehnoloogia kõigile kättesaadavaks (vähemalt arenenud maailmas). Töökohtadel muutusid elektroonilised taskukalkulaatorid kiiresti valdavaks. 1973. aastaks tuli lauakalkulaatorite müük lõpetada. Numbritega töötavad inimesed lihtsalt lõpetasid kirjalikult arvutamise. Sellest hoolimata jätkasid koolid aritmeetiliste oskuste õpetamist. Nagu ma hiljem seletan, tegid nad seda valel põhjusel ja sellest tulenevalt ka õpetasid seda sobimatul viisil. Samas oli neil täiesti õigus, kui nad järgisid oma vaistu, et aritmeetika õppimine on siiski vajalik.

Kui ma 1965. aastal ülikooli matemaatikat õppima asusin, teadsin tänu elektroonilise kalkulaatori olemasolule, et ma ei vaja enam kunagi paljude kooliaastate jooksul veatuks lihvitud aritmeetiliste tehete lahendamise oskust. Teisest küljest pidin ülikoolis matemaatikat õppides pühendama suure osa ajast sellele, et omandada lõpmatul hulgal algoritme ja tehnikaid, mille abil sooritada numbritest ja sümbolitest koosnevaid arvutusi, koostada tõestusi geomeetrias ja algebras ning lahendada võrrandeid. Matemaatiliste probleemide lahendamiseks pidin ma tuimalt jooksutama mitmesuguseid algoritme ja protseduure. Muud võimalust ei olnud. Polnud masinaid, mis oleks seda teinud minu eest, nagu kalkulaator teeb aritmeetilisi arvutusi.

Pärast ülikooli lõpetamist ja matemaatikuna tööle asumist jäi olukord samaks. Kuid 1985. aastal ilmusid turule lihtsalt kättesaadavad ja massiliselt toodetud *graafilised* kalkulaatorid, mis tähendas digitaalse tehnoloogia jõudmist palju kaugemale kui aritmeetika, sest hakati pakkuma tööriistu, mis lahendasid algebraülesandeid ja joonistasid graafikuid. Kuna graafilised kalkulaatorid olid suhteliselt odavad (alla 100 euro), tekitasid need revolutsiooni koolimatemaatikas, eelkõige reaalinetes. (Matemaatikaõpetajad jätkasid siiski arusaadavatel põhjustel ka kirjaliku arvutamise õpetamist.)

Varsti pärast seda, kui graafiline kalkulaator viis revolutsiooniliste muudatusteni reaalinete õpetamises, käis ülikooli matemaatikaharidusest üle veelgi suurem tehnoloogiline revolutsioon ja muutis igaveseks viisi, kuidas professionaalid matemaatikaga tegelevad. 1988. aasta juunis lasi matemaatik Stephen Wolfram turule oma massiivse Mathematica paketi (<https://www.wolfram.com/mathematica/>) esimese versiooni (vt joonist 2).

Mathematica võib täiesti vabalt lahendada *mis tahes* matemaatilisi protseduure ükskõik millises matemaatika harus.

Varsti pärast seda, kui Wolfram oma toote turule tõi, lasid Kanada arendajad välja sarnase süsteemi nimega Maple (<https://www.maplesoft.com>) ning välja tulid teisedki analoogsed tooted. Need tooted tegid peaaegu kogu matemaatika protseduuride jaoks seda, mida elektrooniline kalkulaator oli teinud seoses aritmeetikaga: nad muutsid matemaatiliste protseduuride teostamise

vananenud inimlikuks oskuseks. (Peaksin siinkohal lisama, et vananenuks, välja arvatud hariduslikel eesmärkidel kasutades, aga sellest juba edaspidi.)

Esimest korda ajaloos ei olnud matemaatikaga tegelemiseks enam vaja arvutamisoskust ega võimet teostada osavalt ja õigesti matemaatilisi protseduure. See tõi esile alati eksisteerinud enamikule matemaatikakaugetele inimestele senini märkamatuks jäänud erinevuse matemaatika kasutamise *rutiinse* (protseduuride teostamine) ja *loomingulise* poole vahel.

**Corporate Speakers at the *MATHEMATICA*<sup>™</sup> Product Announcement (June 23, 1988):**

- **Forest Baskett**, Vice President, Research & Development, Silicon Graphics Computer Systems
- **Gordon Bell**, Vice President, Research, Development and Engineering, Ardent Computer
- **Steven Jobs**, President NeXT, Inc.
- **William Joy**, Vice Presiders, Research & Development, Sun Microsystems
- **Vicky Markstein**, Research Staff Member, IBM
- **Eric Lyons**, Director of Technology, Autodesk, Inc.
- **Larry Tesler**, Vice President, Advanced Technology, Apple Computer
- **Stephen Wolfram**, President, Wolfram Research, Inc., and Professor of Physics, Mathematics and Computer Science, University of Illinois



**Bundled with NeXT**

**Joonis 2.** 1988. aasta juunis tutvustas professor Stephen Wolfram oma uut arvutipõhist algebra-süsteemi Mathematica.

## Dirigentide koolitamine

Mõne aasta jooksul kasutati selliseid tooteid nagu Mathematica ja Maple peamiselt ülikoolide matemaatika-, füüsika- ja tehnikateaduskondades. Need olid kallid, keerulised kasutada ja töötasid üksnes parimates personaalarvutites. Seetõttu kasutati neid vaid üksikutes koolides ning selliste uute süsteemide mõju koolimatemaatikale ja reaalinete õpetamisele oli minimaalne. (Ma tean. Olin Wolframi algusaegadel selle teadusnõukoja liige.)

Olukord muutus kardinaalselt 2009. aastal, kui toodi turule Wolfram Alpha, mis muutis Mathematica kogu tema võimsuses kättesaadavaks pilverakenduse kaudu, millele pääses (tasuta) ligi mis tahes arvutist, tahvelarvutist või mobiiltelefonist. Pealegi oli Wolfram Alpha lihtne kasutajaliides, mis võimaldas sooritada peaaegu kõiki matemaatilisi protseduure sama lihtsalt kui elektroonilist kalkulaatorit kasutades.

Kõige lihtsam viis Alpha tööpõhimõtetest arusaamiseks on veebi kaudu sellesse siseneda ja mõnda aega seda uurida (<http://wolframalpha.com>). Tahan rõhutada, et see võimaldas inimestel matemaatikat kasutada, ilma et nad oleksid omanud konkreetsete protseduuride teostamiseks vajalikke oskusi. (Kirjeldan allpool, milliseid teadmisi täpsemalt selleks vaja on. Neid on palju.)

Wolfram Alpha muutis igaveseks *viisi*, kuidas inimesed saavad matemaatikat kasutada. Tänapäeval ei ole matemaatiliste protseduuride valdamine matemaatika kasutamiseks enam vajalik.

2011. aastal, kaks aastat pärast Wolfram Alpha müügile laskmist, tegi Eli Luberoff veebis kättesaadavaks mobiilipõhise süsteemi Desmos, mis on koolimatemaatika jaoks loodud ülivõimas graafiline kalkulaator, mis oleks võinud tekitada ja paljudes koolides ka tekitas revolutsiooni koolimatemaatika õpetamises ja õppimises, samamoodi nagu Alpha uuendas revolutsiooniliselt seda, kuidas professionaalid matemaatikat kasutavad. (Vt näiteks Abramovichi (2013).)

Mõlemal juhul nihutasid uued töövahendid matemaatikas rõhuasetuse protseduuride teostamiselt – mis on olnud valdav kogu viie tuhande aastase ajaloo vältel, mil matemaatikat on õpetatud ja kasutatud – loomingu- ja mõtlemisele ja probleemide lahendamisele. See oli märkimisväärselt suur nihe. Ometi juhtus see nii kiiresti, et enamik teaduse-, tehnika- ja matemaatika-kaugeid inimesi ei teadnud selle toimumisest midagi. Ameerika Ühendriikides olid selle dramaatiliseks väljenduseks 2010. aastal vastu võetud riiklikud matemaatika õpetamise põhistandardid (<http://www.corestandards.org/Math>), millega sätestati, mida peaksid õpilased kogu riigis iga klassi lõpuks teadma.

Ühtsed põhistandardid, mille eesmärk oli tagada, et Ameerika õpilased oleksid kooli lõpuks varustatud selliste matemaatiliste oskustega, mida nad saaksid tänapäeva maailmas tõhusalt kasutada nii kodanikuna kui ka oma töös (mis iganes see ka ei oleks), sattusid vastamisi märkimisväärse vastuseisuga, mis ei ole aastate jooksul täielikult hajunud. Probleem oli selles, et standardid koostanud ekspertide komisjon oli täiesti teadlik sellest, millise revolutsiooni oli tehnoloogia matemaatikas esile kutsunud ja mida see tähendas matemaatika õpetamisele, kuid keegi ei paistnud täielikult mõistvat, mil määral ühiskond tervikuna ja eelkõige paljud vanemad (ja mõned õpetajad) ei olnud sellest revolutsioonilisest muutusest üldse teadlikud.

Et aidata inimestel mõista, kuidas tänapäeval matemaatikat kasutatakse, loon ma sageli analoogia muusikalise maailmaga. Matemaatiku elu enne 1990. aastat oli sama mis paljude instrumentide valdamine orkestris: aritmeetika instrument, geomeetria instrument, trigonomeetria instrument, algebra instrument, arvutamisinstrument jne. Mida rohkem matemaatilisi instrumente sa valdasid, seda võimekam matemaatik sa olid.

Seevastu tänapäeval on matemaatika kasutamine võrreldav pigem orkestri dirigeerimisega. Selleks, et orkestrit hästi juhatada, peab teadma, milleks on iga instrument võimeline, ja kindlasti peab mõne instrumendiga mõningaid kokkupuuteid olema ning vähemalt ühte neist peaks päris hästi oskama. Kuid ühtegi neist ei pea valdama maailmatasemel. Üksikud muusikud orkestris „ajavad igaüks oma rida“. Dirigendina pead sa teadma, kuidas ja millal nad koos tööle panna, näidates, milliseid instrumente iga eesmärgi jaoks kasutada, vastavalt sellele, kuidas sümfoonia lahti rullub.

## Kuidas profid matemaatikat kasutavad

Varem pidi matemaatika kasutaja



valdama paljusid instrumente

aritmeetika, geomeetria, trigonomeetria, algebra, analüütiline matemaatika, tõenäosusteooria, statistika, diferentsiaalvõrrandid, võrguteooria ...

Tänapäeval peab matemaatika kasutaja



oskama orkestrit dirigeerida

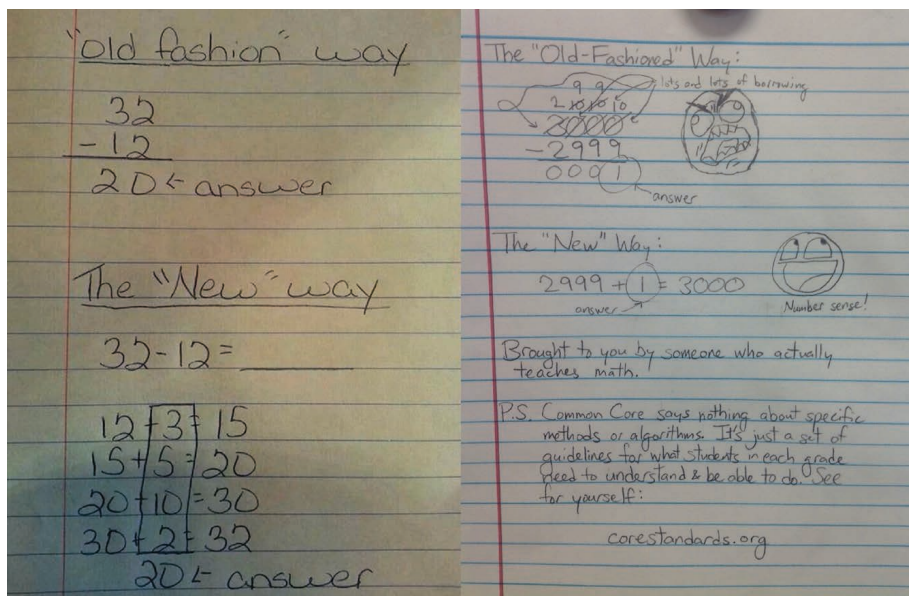


**Joonis 3.** Õppimise orkestrid. Vt aruteluks esitatud teksti. Avaliku domeeni pildid.

Selge on see, et kui matemaatikat nüüdsest niimoodi tehakse, siis on matemaatika kasutamise kogemus täiesti erinev kogu matemaatika varasema ajaloos jooksul saadud kogemusest. Eelkõige on kadunud vajadus osata hästi mis tahes viisil arvutamist. Tänapäeva matemaatikud ei pea oskama kiiresti või täpselt arvutada. Ausalt öeldes *ei tee nad seda peaaegu kunagi*. Nüüd teostavad masinad mis tahes formaalseid protseduure või rakendavad detailseid algoritme. Masinad teevad seda inimestest tunduvalt kiiremini, vähemate vigadega (sisuliselt ühegi veata) ja palju suuremaid andmemahte töödeldes, kui inimaju iial suudaks.

## Matemaatilise mõtlemise esiletõus

Üks veider aspekt, mis iseloomustab Ameerika lastevanemate vastuseisu ühtsetele põhivandarditele, väljendus teadlaste, inseneride ja teiste elukutseliste matemaatikute sotsiaalmeediapostitustes, milles kritiseeriti viisi, kuidas nende lapsi koolis õpetati. Kuigi lastevanemad teadsid väga hästi, kuidas tänapäeva professionaalid kasutavad tehnoloogiat matemaatiliste protseduuride teostamiseks, leidsid nad, et nende lapsed peaksid oma kooliaastaid kasutama traditsiooniliste kirjaliku arvutamise meetodite – nn standardalgoritmide – omandamiseks. Kuigi kirjalikult arvutamise oskus on igati väärtuslik ja kindlasti ülimalt vajalik ning aitab kaasa ka matemaatilise mõtlemise tekkimisele, olid lapsevanemate teadmised matemaatika õpetamisest (õppeaine, mida on aastakümnete jooksul klassiruumides lihvitud) parimal juhul minimaalsed.



**Joonis 4.** Vasakpoolse pildi postitas Facebookis ühiste põhivandardite järgi õpetatud õpilase vanem. Paremal on esitatud õpetaja vastus. Aruteluks vt teksti. Sotsiaalmeediast võetud pildid.

Joonisel 4 on esitatud ühe sellise lapsevanema kriitiline postitus. Lapsevanem uskus ekslikult, et lapsele õpetatakse ebaefektiivset arvutamiski. Nagu õpetaja reageeringust paremal pool näha, ei näita lapse töö mitte kasutatud algoritmi, vaid lapse *loomingulisi mõtlemänge* positsioonilise arvustusüsteemiga, millega ta uuris (ja seega püüdis mõista), kuidas lahutamine toimib. Eesmärgiks ei olnud arvutamise õppimine – kalkulaator võib teha mis tahes arvutusi hetkega –, vaid *arvutaju* arendamine, mis on igale poole ulatuvate arvutamisressursside ajastul hädavajalik võime.

Lühidalt öeldes tähendab arvutaju arvude *muutlikkuse ja paindlikkuse mõistmist, nende tähenduse tunnetamist ja suutlikkust peast arvutada ning võimet maailma vaadelda ja selle põhjal võrdlusi luua*. Kui teil oleks näiteks vaja arvutada, kui palju on  $16 \times 24$ , siis kuidas te jätkaksite? Hea arvutajuga inimene võiks arutleda nii:  $16 \times 25$  on lihtne tehe, sest see on sama mis  $4 \times 100$ , mis on 400, aga kuna selles tehtes on üks 16 ülearu, siis tuleb see 400st lahutada, mis annab tulemuseks 384. Selline arvude üle arutlemise võime on näide heast arvutajust.

Asi on selles, et enamik tänapäeva professionaale õppis matemaatikat traditsioonilisel viisil, sest tol ajal ei olnud muud alternatiivi. Kuid sellise ajaloolise meetodiga kaasnes neli probleemi.

- 1) Raisatud aeg. See tähendab, et kulutatakse meeletult aega sajandite jooksul lihvitud meetodite õppimisele ja harjutamisele, et saavutada suurepärane kirjaliku arvutamise oskus, kusjuures ajalooliselt on rõhutatud arvutamise kiirusele ja täpsusele, millest kumbki ei ole vajalik, kui reaalsuses kasutatakse masinat.
- 2) Arusaamise puudumine õpilaste seas. Tõhusale arvutamisoskusele rõhudes ei aita need meetodid õpilastel *matemaatiliselt* protseduuri *mõista*. Sageli keskendutakse hoopis sellele, kuidas arvutust lehele paigutada, millel ei ole vähimatki pistmist numbrisüsteemi põhistruktuuri ja aritmeetikaga. Tehete lahendamise meisterlikkus neist tegelikult aru saamata viitab nõrkadele teadmistele, mida saab tulemuslikult rakendada üksnes piiratud oludes, näiteks eksamitel.
- 3) Arusaamise puudumine hilisemas elus. Arusaamise puudumisest õpilasena võib saada takistus, kui hilisemas elus teadlasteks ja insenerideks saanutel tuleb rakendada keerukat matemaatiliselt mõtlemist, et kasutada loominguliselt ja tõhusalt nende käsutusse antud võimsat uut tehnoloogiat. Seda puudujääki tõestasid veenvalt eespool kirjeldatud sotsiaalmeediapostitused, mis näitasid korduvalt, et sellised vanemad ei suutnud täielikult mõista nende lastele õpetatud arvutamise meetodite kontseptuaalseid aluseid. Asjaolu, et kõnealused professionaalid *ei saanud* elementaarse aritmeetilise tehte puhul *aru* (nende jaoks uudsest) arvutusmeetodist, näitab, et nad suutsid rakendada vaid *mehaaniliselt* õpitud arvutuskäike ega olnud saavutanud isegi mitte *arusaamise* madalaimat taset.
- 4) Negatiivsed hoiakud. Kui tulevased teadlased ja insenerid koolis matemaatikatunde nautisid ja oma arvutusoskuse üle uhkust tundsid (nagu minagi), siis suuremale osale nende kaasõpilastest tekitas see peaaegu kindlasti frustratsiooni ja negatiivset suhtumist matemaatikasse, millest nad sageli esimesel võimalusel loobusid. See on suur kaotus nii neile enestele, võttes arvesse nende tulevasei karjäärivõimalusi, kui ka ühiskonnale seoses võimaliku raisatud andega.



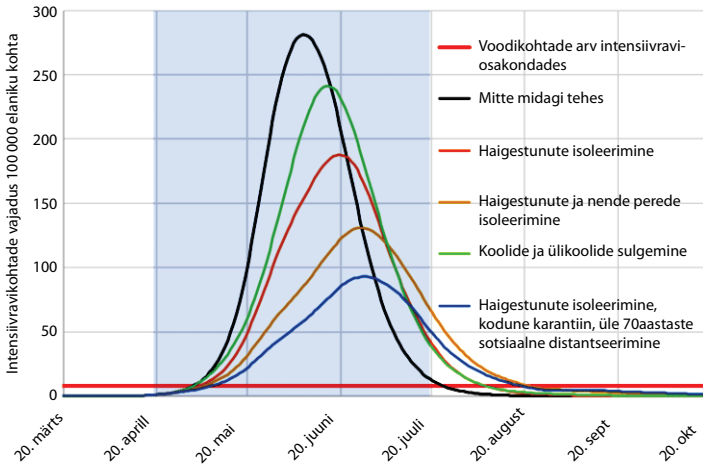
Seega ei olnud ühtsete põhistanardite kriitikutel õigus, välja arvatud ühes asjas. Arvude ja muude matemaatiliste abstraktsioonide abil põhjendamise õppimine on väärtuslik ja oluline matemaatilise mõtlemise osa. Eksiteele viis neid see, et nad eeldasid vaikimisi, et püütakse saavutada juba aegunud eesmärki. Tänapäeva maailmas ei ole vaja õpetada arvutamist ega üldse mitte mingite matemaatiliste protseduuride teostamist. Masinad saavad sellega meist palju paremini hakkama. Pigem on *eesmärk saavutada piisav arusaamine*, mis võimaldaks meil matemaatikat oskavaid masinaid (eluliste) probleemide lahendamiseks hästi ära kasutada. Kui lähtuda minu analoogiast muusikaga, siis peame õpetama järgmist põlvkonda nii, et neist saaksid dirigendid, mitte üksikute instrumentide valdajad.

Selleks, et saada heaks dirigendiks, peate muidugi saavutama piisava meisterlikkuse vähemalt ühel instrumendil, võib-olla enamalgi. Kuid ükski dirigent ei valda ega peagi valdama neid kõiki. Dirigeerimiseks vajalikud oskused põhinevad kindlasti ühe või mitme instrumendi mängimise õppimisel, kuid need oskused erinevad suuresti neist, mis on vajalikud viiuli või klaveri tipp-tasemel mängimiseks. Sama kehtib ka matemaatika kohta.

### **Missugust matemaatikat peaksime õpetama?**

Nii nagu muusika puhulgi, ei ole tegelikult oluline, milliseid matemaatilisi instrumente (matemaatika valdkondi) te valdate. See võib olla nii aritmeetika, algebra kui ka geomeetria, sest need kõik on madalama astme valdkonnad, mida läheb vaja paljudes ametites ja eluvaldkondades. Pealegi oskavad kõik praegusaja õpetajad neid valdkondi õpetada.

Sellesse nimekirja peaksime kindlasti lisama andmeteanduse (mis hõlmab algoritmide mõistmist), kuna sellel valdkonnal on tänapäeva maailmas tähtis roll. Selleks, et esitada vaid üks, ülimalt päevakohane näide, vaadelgem joonist 5, millel esitatu tõhusaks kasutamiseks on vaja oskust tõlgendada õigesti eri stsenaariume esindavate kõverate suhteliselt ebamääraseid kujutisi ning mõista, mida igaüks neist tähendab, et siis selle põhjal paremaid otsuseid teha. Pandeemia alguses jäid USA otsustajad nende andmete lugemisega hätta ning selle tulemusena oli surmade arv suurusjärgu võrra suurem, kui see oleks võinud olla. Head andmeteanduse oskused on nüüdisaegses ühiskonnas üliolulised.



Joonis 2. Intensiivravikohtade vajadus Ühendkuningriigis viiruse piiramise eri stsenaariumide korral. Must joon näitab ravikohtade vajadust juhul, kui epideemia tõkestamiseks ei tehta mitte midagi. Roheline joon näitab voodikohtade vajadust juhul, kui suletakse koolid ja ülikoolid; oranž juhul, kui isoleeritakse haigestunud; kollane juhul, kui isoleeritakse haigestunud ja nende pered; sinine juhul, kui isoleeritakse haigestunud, kehtestatakse kodune karantiin ja tagatakse üle 70aastaste sotsiaalne distantseerimine. Sinine taust näitab kolme kuud, mille jooksul peaksid need sekkumised kehtima.

**Joonis 5.** Andmeteaduse olulisus. See joonis on võetud Ühendkuningriigi valitsuse planeerimisdokumentidest, mida valitsus kasutas märtsi alguses, et kaaluda strateegiaid, millega maha suruda just alanud koroonaepeideemia. Siin esitatud andmed on matemaatilise epidemioloogia meetodeid kasutava matemaatilise mudeldamise abil saadud prognoosid (Ferguson *et al.* 2010).

Lineaarvõrrandid ja kahe või enama tundmatuga võrratused on tänapäeva maailmas tohutult vajalikud, mis annab hea argumendi selle teemaga seotud algebrakursuse loomiseks.

Sellist algebrat kasutatakse peamiselt optimeerimisprobleemide formuleerimiseks ja lahendamiseks. Google, kulleriteenust pakuvad ettevõtted UPS ja FedEx, tähtsamad lennufirmad ja suured interneti vahendusel tegutsevad jaemüügiettevõtted kasutavad optimeerimisel lineaarset algebrat.

Optimeerimisülesanded, millest sõltub nende ettevõtete hea käekäik, sisaldavad tavaliselt tuhandeid või isegi miljoneid tundmatuid, millega toimetulek ületab kaugelt inimvõimete piiri. Selliste ülesannete lahendamiseks kasutatakse arvutiprogramme. Ükski inimene ei suudaks iialgi nende lahendamisega hakkama saada. Samas annab lineaarse optimeerimise meetodist arusaamiseks hea võimaluse vaid kahte või kolme tundmatut sisaldavate ülesannete lahendamine. (See ei kehti kõigi matemaatiliste probleemide suhtes, kuid selle puhul siin küll.)

Seega, arvestades sagedust, millega kerkib üles lineaarvõrrandite ja võrratuste lahendamise vajadus seoses paljude meie elu mõjutavate tänapäevaste

probleemidega, on üsna põhjendatud selliste õppemeetodite kasutuselevõtt, mis õpetaksid kirjalikult lahendama ühe või kahe muutujaga võrrandeid.

Vastupidiselt eespool esitatud mõttekäigule ei ole matemaatilise analüüsi õpetamine põhikoolis kindlasti vajalik. Esiteks on see oluline vaid õpilastele, kes soovivad saada edaspidi kas teadlaseks, inseneriks või lausa matemaatikuks. (Andmeteadus on kõigi jaoks oluline.) Kuid matemaatilist analüüsi ei saa ka gümnaasiumi tasemel hästi õpetada, sest see on tunduvalt keerulisem kui miski muu kooli õppekavas. Õpilastel, kes on koolis matemaatilist analüüsi õppinud, tekib hiljem sageli probleeme ülikooli matemaatilise analüüsi kursustel, sest koolist saadud kogemus annab neile pealiskaudse ja sisuliselt protseduurilise arusaamise, mis tekitab neis esimestel nädalatel vale turvatunde, ning viib lõpuks ebameeldiva ja vahel lausa katastroofilise kogemuseni, kui selgub, et nende nõrgad teadmised on kursuse keerulisema osa läbimiseks ebapiisavad.

Rõhutan veel, et kuigi selle üle, *mida* me õpetame, võib vaielda, ei peaks me vaidlema selle üle, *miks* me mõnda õppeainet õpetame ja *kuidas* me seda teeme. Vastus küsimusele „kuidas“ sõltub vastusest küsimusele „miks“.

Neid küsimusi ei vaidlustata seetõttu, et matemaatika õpetamine on edukas siis, kui see tagab tulevastele põlvkondadele oskuse matemaatikat tulemuslikult kasutada maailmas, kus nemad elama hakkavad, ja selles maailmas on *matemaatiline mõtlemine* otsustava tähtsusega. (Arvutid *arvutavad* ja *teostavad* protseduure; inimesed *mõtlevad*.)

Arvutaju on muide matemaatilise mõtlemise osa, nagu eelduste põhjal loogiliste järelduste tegemise võimegi.

Tuleb meeles pidada, et matemaatika ei ole digiajastul muutunud, kuigi matemaatika uute harude, näiteks fraktaalgeomeetria vormis on toimunud muutusi, mis tulenevad digitehnoloogia arengust. Muutunud on hoopis viis, kuidas inimesed matemaatikat kasutavad. Kuna praktikas on arvutamisel ja protseduuride teostamiselt üle mindud matemaatilisele mõtlemisele, siis on toimunud muutus – või õigemini on muutumine toimumas – selles, mida oodatakse haridussüsteemilt selliste inimeste ettevalmistamisel, kes oskaksid matemaatikat tõhusalt kasutada (ehk *matemaatiliselt mõtlejad*).

Kiiresti, tõhusalt ja täpselt arvutamise oskus oli varem hädavajalik. Nüüd ei ole seda enam vaja. Nende oskuste asemele (mille omandamine nõudis suuremal osal inimestest märkimisväärselt palju aega ja vaeva, kusjuures paljud andsid alla) on tekkinud hulk uusi oskusi. Need uued oskused, näiteks matemaatiline mõtlemine, on tegelikult palju lähemal humanitaarainetele või loomingulisele tegevusele, kui enamik inimesi praegu veel arvab või on valmis uskuma.

Selleks, et matemaatikat tõeliselt nautida, peavad formaalsed abstraktsioonid ja kontekstivaba formaalne põhjendamine teis põnevust tekitama.

Matemaatika ei meeldi sugugi mitte kõikidele inimesele isegi mitte siis, kui nad sellega hakkama saavad. Kuid vaid vähestele meist pakub huvi kõik, millega meie kaasinimesed otsustavad tegeleda. Inimlikust vaatenurgast polegi seda nii palju, mida tänapäeva digitaalsed matemaatilised vahendid on sellele teadusharule lisanud, pigem on nad eemaldanud selle, mis oli paljude jaoks takistuseks.

Kokkuvõtteks, kuna kooli ja kõrgkooli esimese astme matemaatika õpetamise eesmärk on tänapäeval matemaatilise mõtlemise („orkestri dirigeerimise“) saavutamine, siis see, *millist* matemaatikat me õpetame, on teisejärguline võrreldes sellega, *kuidas* me seda õpetame. Võttes arvesse tänapäeva tehnoloogiad, ei piira meid kindlasti enam vajadus õpetada sellist matemaatikat, mille puhul peavad õpilased tegema kõik arvutused kirjalikult. Teisest küljest on kirjalikult arvutamine hariduse seisukohalt kindlasti kasulik, sest nii jõutakse arvude ja arvutamisprotsessi mõistmiseni. Samuti on kasulik aru saada avaldiste lihtsustamisest ja saada mõningane lihtsate lineaarvõrrandite lahendamise kogemus.

### ***Kuidas* õpetada matemaatilist mõtlemist?**

Eespool antud soovitusi teemade kohta, mida matemaatikas õpetada, tulebki võtta just soovitustena. Nagu ma varem märkisin, on küsimus selles, *kuidas* me õpetame, mitte selles, *mida* me õpetame. Oma olemuselt jääb matemaatiline mõtlemine samaks, olenemata õpetatavast teemast. Muusikaga seotud analoogia jätkamiseks võiks öelda, et kõik orkestri liikmed mängivad muusikat, olgugi et kõik instrumendid näevad erinevad välja ja kõlavad erinevalt. Muusika on muusika.

Matemaatilise mõtlemise vilumust on võimalik arendada, keskendudes üksnes aritmeetikale (täisarvud ja murrud). Seda tõestas tulemuslikult Hiina päritolu matemaatikaõpetaja Liping Ma (2013). Ma tugines oma õpetamiskogemusele Hiinas, kus ta alustas oma õpetajakarjääri enne Ameerika Ühendriikidesse kolimist ja doktorikraadi omandamist Stanfordi Ülikoolis.

Hiinas hästi toimiv õpetamismeetod ei pruugi avatud Lääne ühiskondades muidugi nii hästi töötada. Igal juhul ei pea õpetamine olema nii piirav. Aritmeetika, algebra ja geomeetria õpetamine koos andmeteadusega annab laiema vaatenurga ning lubab kasutada suuremat hulka näiteid, mis on igapäevaeluga otseselt seotud ja väga olulised ning võivad õpilasi motiveerida. Tänapäevaste tehnoloogiliste abivahendite toel saavad õpilased tegeleda eluliste probleemidega, mis on nende jaoks tähtsad, ilma et neid piiraks möödunud sajandite jooksul matemaatika õpetamist takistanud asjaolu, et tunnis antud ülesanded pidid olema kirjalikult lahendatavad viisil, mida õpilased valdasid.

Mis puutub sellesse, *kuidas* me õpetame, siis peab ühiskond varem või hiljem seisma vastamisi reaalsusega, et matemaatilise mõtlemise arendamine nõuab väga erinevat arusaama õpetamisest võrreldes sellega, millega enamik õpetajaid on kokku puutunud. Tegelikult *on* õpetajad sellega kokku puutunud, ainult et mitte matemaatikatunnis.

Õppimise varajastes etappides kaasneb enamiku õppeainetega suure hulga faktilise info omandamine. Et õppeaines edasi liikuda, peab õpilane kõigepealt päris palju *teadma*. See hõlmab palju juhendamist, lugemist ja tänapäeval (aga mitte siis, kui mina olin õpilane) videote vaatamist. Õpilastel tuleb tavaliselt testide ja eksamite kaudu tõestada, et nad on vajalikke teadmisi piisaval hulgal omandanud.

Matemaatika on erand. Jah, mõned faktid tuleb selgeks õppida, kuid enne kõike tähendab matemaatika õppimine *matemaatikaiülesannete lahendamist*. Heitke pilk ükskõik millisesse matemaatikaõpikusse. Pärast lühikest sissejuhatust, kus esitatakse veidi teavet, kirjeldatakse õpilasele palju pikemas lõigus näiteid mõttekäikudest, mida tuleb järgida, kasutades äsja saadud uut teavet ülesannete lahendamiseks. Sellele järgneb pikk ülesannete rivi, mida õpilane peaks proovima lahendada. Võrrelge seda sissejuhatavate bioloogia või füüsika või minu pärast kas või ajaloo, sotsiaalteaduste, geograafia või kirjanduse õpikutega.

Matemaatika õppimine tähendab eelkõige *tegemist*, mitte *teadmist*. Selles suhtes sarnaneb matemaatika õppimine pigem spordi, muusika või käsitööga (või reaalainete laboratoorse tööga, mis järgnevad tavaliselt tundidele, kus on õpitud faktiteadmisi). Milline on õpetaja roll nendes ainetes?

Õpetaja ja lapsevanemana (kes on selle essee sihtrühm) mõelge tagasi ajale, mil te õppisite näiteks autot juhtima, mõnd pilli, tennist, malet või golfi mängima, suusatama, loovalt kirjutama või võõrkeelt rääkima. Milline oli juhendaja roll selles?

Kõige parem oleks seda kirjeldada sõnaga „treener“. Te õppisite selle tegevuse sooritamist, tehes seda teie isiklikku arengut toetava asjatundja valvsa pilgu all. See ongi kõige parem viis millegi *tegema* õppimiseks. Jah, me võime ka ise edusamme teha, osaledes loengutes, lugedes raamatuid või vaadates videoid. Aga üldiselt saavutame vilunud treeneri käe all palju kiiremini tunduvalt paremaid tulemusi.

*Tegemist* eeldava õppeainena on ka matemaatika nii kõige parem õppida. Termin „matemaatiline mõtlemine“ kasutamise üheks põhjuseks on rõhutada, et see on eelkõige *tegemist* nõudev õppeaine ning selline tegemine seisneb aktiivses ja sageli loomingulises *mõtlemises*.

Praegu kasutatakse sellist treeneristiilis lähenemist matemaatika õppimisele vaid ülikooli doktorihariduse tasemel. Mõned ülikoolid pakuvad seda

süsteemselt ka bakalaureuseõppes, näitena võib tuua Oxfordi ja Cambridge'i oma „Tuutorisüsteemiga“.

Teades, kui väärtuslik on selline juhendamine, püüavad paljude kolledžite ja ülikoolide õppejõud leida aega sellisteks tuutorisessioonideks, sama teevad ka mõned matemaatikaõpetajad koolides. Kuid praeguse koolisüsteemi ülesehituse puhul on seda raske teha. Kui õpetaja keskendub ühele konkreetsele õpilasele, nagu hea juhendamise puhul vajalik, ei saa ta teiste õpilaste vajaduste eest hoolt kanda. Klassi jagamine väikesteks rühmadeks ja õpetajate abide kasutamine võib aidata veidi soovitud suunas liikuda. Kuid selline lahendus ei ole ideaalne.

Ja nüüd jõuamegi peamiseni, mida ma tahan rõhutada. Enamik maailma koolisüsteeme on vastu võtnud tootmisliini meenutava lähenemisviisi, mis on kujundatud ja kavandatud tulevaste kodanike ettevalmistamiseks 19. sajandi tööstusajastuks, mil need süsteemid loodi ja kasutusele võeti. Matemaatika õppekavad ja õpikud kujundati just sellise mudeli toetamiseks. Kõige enam vajas ühiskond aritmeetikat hästi valdavat tööjõudu, kes suudaks töötada tööstusrevolutsiooni tõukejõuks saanud mehhaniseeritud tootmisliinidel. Individuaalse loovuse järele ei olnud erilist nõudlust. Ajastu nõudis kiiret, tõhusat ja täpset reeglite järgimist, kusjuures kõik tegid asju ühtemoodi.

Tänapäeval käivad asjad täiesti teistmoodi. Masinad teevad ära kõik rutiinised reeglite järgimist vajavad tegevused. Tänapäeval läheb vaja eelkõige loomingu- ja mõtlejaid ja probleemide lahendajaid, kes teevad asju, mida masinad ei suuda. Tegelikult on nii, et just automatiseerimine, mis muutis 19. sajandi inimeste oskused mittevajalikuks, on tekitanud andmeküllase ühiskonna, kus on suur nõudlus just selliste (inimlike) oskuste järele. Enamik haridusvaldkonnas tegutsevaid inimesi muidugi teab seda. Hariduse muutmine nii, et see vajadus saaks rahuldatud, on eriti keeruline seetõttu, et see nõuab suuri ümberkorraldusi kogu haridussüsteemis, sealhulgas õpetajakutse struktuuris.

Minu isiklik seisukoht on, et koolimatemaatika tundides on tarvis (vähe-malt) kahte juhendajat. Üks on kogu klassi õpetaja, kes vastutab terve klassi eest, ja teine (ja võib-olla on vaja rohkem kui ühte lisaõpetajat) oleks „juhendaja“, kes veedab graafiku alusel igal nädalal teatud aja iga õpilasega eraldi. (Võib-olla kaks korda nädalas, koos lisatundide võimalusega, kui õpetaja seda vajalikuks peab.) Juhendaja võib jagatud tööruumis videoühenduse kaudu vabalt ka kaugtööd teha.

Idealis peaks õpetajal olema bakalaureusekraad matemaatikas ja lisaks matemaatikaõpetaja haridus. Juhendaja peab olema oma karjääri jooksul matemaatikat laialdaselt kasutanud põhjalike matemaatikateadmistega inimene, näiteks pensionil teadlane või insener. Kuigi juhendajatel oleks kindlasti tarvis mõningaid teadmisi pedagoogikast ja sellest, kuidas inimesed matemaatikat

õpivad, on nende peamiseks tugevuseks põhjalikud ja laialdased teadmised matemaatika kasutamisest tänapäeva maailmas. Vaid üksikutel õpetajatel on sellised kogemused – õpetamine on elukutse, mis nõuab täit tähelepanu.

Suuremates linnades on selliseid inimesi kindlasti lihtne leida. Hõredamalt asustatud piirkondades tuleks teha videoülekandeid. Tegelikult saaks juhendamist kõige paremini pakkuda Uberi-laadse jagamisteenusena, mis ühendaks kogu klassi õpetajad teatud valdkondades pädevate juhendajatega.

Igal juhul esitan mõtlemiseks ja arutamiseks sellise soovitus. Rõhutan siiski, et kirjutan seda artiklit kutselise matemaatiku vaatenurgast ning minu õpetamiskogemus on saadud suuresti, kuigi mitte ainult kolledžites ja ülikoolides mõningate põgusate põigetega gümnaasiumidesse ja vahetevahel ka põhikoolidesse. Seega on minu ettepanek ajendatud eesmärgist, mis võiks olla kõige kasulikum ühiskonnale, mis loomulikult koosneb selles elavatest inimestest, ning sügavast veendumusest, et meil ei ole tegelikult palju valiku võimalusi, kui me tahame tulevastele põlvetele õpetada sellist matemaatikat, mida nemad – ja seega ka ühiskond – vajavad. Kuigi olen juba mitu aastakümnet osalenud haridusuuringutes ning lugenud tõenäoliselt tunduvalt rohkem matemaatika õpetamist käsitlevat teaduskirjandust kui paljud suurepärased õpetajad, ei ole mul eriti suurt koolis õpetamise kogemust. Sellise kogemusega inimestel võib olla täiesti teistsugune vaatenurk.

Ma tean, et rahaliselt hästikindlustatud keskklassi lastevanemad hoolitsevad sageli selle eest, et nende lapsed saaksid regulaarset abi eraõpetajatelt, palgates vabakutselisi juhendajaid, kes tulevad kord või kaks nädalas neile koju ja tegelevad nende lastega. Ülikooliajal täiendasin isegi oma riiklikku stipendiumit eratundide eest saadud tasuga. Selline juhendamine peaks olema kättesaadav kõikidele õpilastele.

### **Professionaalse matemaatiku tööriistakomplekt**

Eespool aruteluks esitatud ettepanek teha süsteemne muudatus koolimatemaatika õpetamises, mis minu arvates on riiklikult oluline küsimus, tugines minu aastakümnetepikkusele matemaatika kasutamise kogemusele mitmetes uueaegsetes valdkondades. Nagu ma siinses essees juba märkisin, ei tulnud mul peaaegu ühegi töö tegemiseks kordagi (kirjalikult) võrrandeid lahendada ega teha tegelikult üldse mitte midagi sellist, mida õpilased traditsioonilises matemaatikatunnis teevad. Mida paremaks muutusid iga aastaga aina kättesaadavamad tehnoloogiad, seda rohkem lihvisin mina oma lähenemisviisi uute ülesannete lahendamiseks.

Kohe kirjeldan seda lähenemisviisi. Kõigepealt tuleb märkida, et räägin siinkohal reaalse maailma probleemidest, mitte traditsioonilistes matemaatika-

õpikutes esitatud matemaatilistest ülesannetest, mis on koostatud konkreetsete protseduuride harjutamiseks. Tulen järgmises osas selle erinevuse juurde tagasi.

Probleemid, mille kallal töötasin, olid omased valdkondadele, kuhu mind teadlasena tööle võeti. Töötasin projektide kallal, mille tellijateks olid näiteks suur elektroonikafirma Ühendkuningriigis, Euroopa kontsern, mis tegeles tsiviilehitusega, tootmisliine tootev ettevõtte USAs, USA luureteenistus ning USA merevägi ja armee. Ikka ja jälle kogesin, et minu väärtus projekti jaoks ei seisnenud minu võimes lahendada keerulisi matemaatikaülesandeid. Seda oli harva vaja. Nagu mulle korduvalt öeldi, seisnes minu panus pigem selles, kuidas ma probleemidele lähenesin. Ma pakkusin matemaatilist mõtlemisviisi.

Need kogemused panidki mind sellisele töötamisviisile viidates kasutama terminit „matemaatiline mõtlemine“, jättes koolimatemaatikast kõnelejatele termini „matemaatika“.

Joonis 6 kirjeldab viisi, kuidas ma igale uuele probleemile lähenen.

## Tänapäeva matemaatiku tööriistakomplekt



**Joonis 6.** Tänapäeval tüüpiline matemaatiku tööriistakomplekt. See on minu oma. Pedagoogilistel kaalutlustel olen lisanud kolm töövahendit, mida ma ise ei kasuta. Tavaliselt kasutan tööriistu just sellises järjekorras, alustades ülemisest vasakpoolsest.

Pean rõhutama, et see on minu enda leiutatud meetod. Seda nimekirja vaadanud teised matemaatikud ja matemaikat professionaalsel tasemel kasutavad inimesed (näiteks füüsikud ja insenerid) on öelnud, et nemad kasutavad sarnast, aga mitte identset meetodit. Me kõik lähtume konkreetsetest probleemidest, mille kallal oleme töötanud. Tegelikult sisaldab see joonis mõningaid asju, mida kasutan harva, kui üldse. Näitlikustamise eesmärgil laiendasin joonist nii, et see sisaldaks ka tööriistu, mida teised väidavad end kasutavat.



Üldiselt kasutan tööriistu joonisel esitatud järjekorras, liikudes rida-realt vasakult paremale. Miks ja kuidas ma neid kasutan?

**Google.** Ülemises reas esimene on Google. Vähe on selliseid probleeme, mille lahendust ei ole keegi teine enne mind juba otsinud. Kiire Google'i-otsing võib anda kiiresti lingid, mis viivad teiste tehtud asjakohaste töödeni. See võib säästa aega ja vaeva, mida kulutaksite juba tehtud töö dubleerimiseks, ning anda vihjeid selle kohta, kuidas peaksite jätkama.

Õige võtmesõna kasutamine otsingumootoris on siinkohal kõige olulisem oskus. Kui mingi probleemi lahendamiseks on matemaatik palgatud, siis on kindlasti tegemist probleemiga, mida tööandja ei ole ise suutnud lahendada. Nii et küllap nad arvavad, et selle lahendamiseks on tarvis matemaatilist taipu. On võimalik, et sina matemaatikuna pead neile lõpuks teatama, et isegi matemaatikast ei ole abi. Mina olen sellises olukorras olnud. Ulmekirjandus ja eriti ulmefilmid on matemaatikakaugetes inimestes tekitanud mõningaid (praegu) väga ebarealistlikke ootusi, eriti seoses tehisintellektiga.

Aga peaaegu kindlasti on teie enda otsustada, millisest matemaatikast on kasu ja kuidas probleemi (või probleemi osa) sõnastada, et sellele lahendus leida. Mida rohkem teavet saate Google'ile anda, seda tõenäolisem on, et see annab teile kasulikke vihjeid, mida järgida. Kriitikud, kes ütlevad, et Google'i-sarnaste tööriistade kasutamine on „hariduslik petmine“ või konsultandi palkamine on raha raiskamine, kui see kasutab probleemide lahendamiseks lihtsalt Google'it (ja ma olen kuulnud mõlemat), teevad seda täiesti põhjendamattult. Õige vastuse otsimine nõuab teadmisi. Sellise oskuse saab omandada üksnes kogemuste teel.

**Wikipedia.** Minu esialgne Google'i-otsing annab mõnikord linke dokumentidele, mis annavad teada teadusuuringutest, milles on kasutatud matemaatilisi meetodeid, millest ma ei ole kunagi kuulnud või millega olen ise väga ammu küll kokku puutunud (ja võib-olla isegi kasutanud), kuid mille üksikasju ma enam ei mäleta. Wikipedia täidab tavaliselt lünki minu teadmistes või mälus. Keerulisemate matemaatiliste teemade puhul on see enamasti suurepärase, usaldusväärne ja ajakohane allikas, sest kaastöid saavad teha üksnes eksperdid.

**E-post.** Kuna ma olen olnud matemaatika valdkonnas tegev mitu aastakümnet, tean ja tunnen ma paljusid matemaatika eri valdkondade eksperte, ja aeg-ajalt saadan ma neile e-kirja, kui mul on konkreetne küsimus, mille puhul ma olen kindel, et nad oskavad vastata, ja kui nad seda ei oska, siis tõenäoliselt ei oska ka keegi teine. See toimib tavaliselt ainult väga spetsiifiliste,

üksikasjalike küsimuste korral ning on kasulik ressurss ainult isiklike suhete võrgustikus, mis on loodud paljude selles valdkonnas töötatud aastate jooksul.

**YouTube.** Kui allikas viitab matemaatilisele meetodile, mida ma saan ehk kasutada, kuid mis on mulle uus või ammu unustatud vana, siis tavaliselt leian YouTube'ist ühe või mitu õpetlikku videot, mis mind kiiresti järje peale aitavad. Jällegi on vaja oskust valida otsinguks õiged terminid, samuti peab suutma hinnata video usaldusväärsust ja täpsust. Need on üldised veebi kasutamise oskused, mida me kõik veebiresursside turvaliseks ja tõhusaks kasutamiseks vajame.

**Wolfram Alpha.** Varustatud üldise arusaamaga sellest, milliseid matemaatilisi meetodeid peaks kasutama, tuleb järgmise sammuna teha mõned esialgsed katsed formuleerida ja uurida tuvastatud probleemi matemaatilisi aspekte. Selles etapis on lahendus harva eesmärgiks, pigem tehakse põhjalikku uurimistööd, et probleemist paremini aru saada. Alpha võib siin suureks abiks olla.

**Arvutustabel.** Probleemi esmasel uurimisel on abi ka tabelarvutusprogrammist, näiteks Microsoft Excelist. Sellised programmid nagu Alpha ja Excel on nii võimsad, et tahtmise korral võiksin ma reaalsed andmed neisse tõmmata, kuid esialgu kasutan ma sageli lihtsustatud andmeid või isegi väga lihtsaid väljamõeldud andmeid, mille abil probleemist üldiselt aru saada.

**MATLAB.** Mina ei ole MATLABi kunagi kasutanud, kuid paljud teised professionaalid teevad seda, nii et ma lisan ka selle.

**Mathematica.** Olen Mathematicat kasutanud ja tõsi ta on, et programmi loomise algusaastatel kuulusin Wolframi teadusnõukoja koosseisu, kuid praegu leian ma, et Alpha on piisav minu vajaduste rahuldamiseks. Pigem peegeldab see nende projektide olemust, mida on mulle pakutud ja mida ma olen vastu võtnud. (Levib jutt, et ma võin olla kasulik teatud liiki probleemide lahendamisel.)

**Mathoverflow.** See on arvutiinseneride *stackoverflow* eeskujul loodud veebiresurss, kus inimesed saavad esitada veebi teel nohiklikke tehnilisi küsimusi ja nohiklikud tehniliselt pädevad inimesed kogu maailmas saavad anda nohiklikke tehnilisi vastuseid. Nii küsimuste kui ka vastuste keerukuse tase varieerub tohutult, kuid selline suhtlus võib olla väga tulemuslik. Olen huvi pärast seda aeg-ajalt põgusalt uurinud, kuid mitte kunagi oma töös kasutanud.

**Graafiline kalkulaator.** Kui Alpha on käeulatuses, ei kasuta ma kunagi graafilist kalkulaatorit, kuid miljonid inimesed teevad seda ja paljudes maailma osades on see ja nutitelefon ainsad kättesaadavad digitaalsed tööriistad, nii et ma lisan ka selle siia.

**Märkmik ja pliiats:** neid tööriistu kasutan viimase võimalusena, kui ma üldse nii kaugemale jõuan. Paljude projektide puhul on minu oskus otsida ja Wikipedia kirjelduse või YouTube'i video põhjal kiiresti uusi meetodeid õppida probleemi lahendamiseks piisav. Mõnikord tundub siiski, et mitte miski leitust ei sobi probleemi lahendamiseks päris täpselt. Ma pean kohandama tehnikat, mis näib toimivat, või tuleb mul oma esialgset lähenemisviisi muuta, leidmaks viisi, kuidas matemaatikat algse probleemi lahendamiseks kasutada. Sellisel juhul kipub probleem minu kui matemaatiku jaoks väga huvitavaks muutuma, sest tekib vajadus millegi täiesti uue järele! Uute ideede otsimise faasis, kui mängin probleemile lahenduste leidmisega, ei saa üksi abivahend ligilähedalegi paberile ja pliiatsile, eelistatavalt paberikorviga.

### Kiuslikud probleemid

Kasutasin viimases lõigus sõna „probleem“ päris palju. Ilmselgelt pidasin silmas „matemaatilist probleemi“. Aga mis täpsemalt **on** matemaatiline probleem? Terminile on olemas kaks levinud tõlgendust, millest mõlemad on siinkohal väga olulised.

Kõigepealt on olemas protseduurilisi teadmisi eeldavad ülesanded, mida leiab tavapäraest matemaatikaõpikutest. Need on ülesanded, mille puhul on teatud väärtuse määramiseks või esitatud võrrandi lahendamiseks tarvis sooritada mingi kindel arvutus. Sedalaadi matemaatilised probleemid on koolimatemaatika õpetamise pärisosa ja kindlasti nii see jääbki. Kuigi enam ei ole vaja, et tulevased kodanikud suudaksid selliseid probleme realseid andmeid kasutades kiiresti ja täpselt kirjalikult lahendada, on matemaatika pakutavate võimsate meetodite mõistmiseks endiselt oluline õppida ära protsess, kuidas seda suhteliselt lihtsate andmetega teha, ilma et keskendutaks kiirusele ja ülimale täpsusele. Kuna selliste matemaatiliste probleemide lahendamisega tegelevad nüüd masinad, on sellise õppe ainus väärtus selle hariduslik pool. Aga see on oluline väärtus.

Erinevalt koolidest kalduvad ülikoolid keskenduma tänapäeval tekkivatele „realse maailma“ probleemidele, mille lahendamiseks ei ole mitmesugused matemaatilised meetodid iseenesest piisavad. Näide sellisest probleemist on järgmine: *Kas oma kodu energiavarustuse tagamiseks on mõttekas paigaldada*

*päikesepaneelid?* Tundub lihtne küsimus. Jah või ei? Aga see ei ole kaugeltki lihtne küsimus.

Sellele küsimusele vastust otsides hakkab enamik meist võrdlema mitut kujutluspilti, millest üks on päikesepaneelide rida katusel, teine suitsu õhku paiskav söeküttel töötav elektriyaam või tuumaelektriyaam või hoopis tuulegeneraator. Võime kiiresti üles lugeda igaihe plussid ja miinused.

Arvestades, kui teadlikud me oleme tänapäeval suurtest ohtudest, mis kaasnevad kasvuhoonegaaside emissioonist tekkivate kliimamuutustega, siis tõenäoliselt loobume otsekohe söeküttel töötavast elektriyaamast. Aga ülejäänud kolme puhul tuleb kindlasti mõningaid andmeid uurida.

Näiteks päikesepaneelid tunduvad puhtad, need ei tee müra, nõuavad väga vähe hooldust ning erinevalt tuulegeneraatoritest ei tapa linde. Aga millised on nende valmistamiskulud (sh nende materjalide kaevandamine ja töötlemine, millest neid tehakse) nii rahalises mõttes kui ka keskkonnamõju poolest? Millised on nende kõrvaldamise kulud, kui need üles ütlevad või vananevad ega tööta enam piisavalt hästi? Ilma kindlate andmeteta on võimatu öelda, kas see on parim valik, nagu meile esialgu võis näida.

Kui oled umbes tund aega sellele probleemile mõelnud, hakkad mõistma, et sind on kistud näiliselt lõputusse küsimuste seeriasse „Mis siis, kui?“ ja „Mis saab?“, millele vastamiseks on kõigepealt vaja suurel hulgal andmeid.

Näiteks, mis saab siis, kui maja, mille katusel on päikesepaneelid, põleb metsatulekahjus maha? See on reaalsus, millega paljude Ameerika Ühendriikide lääneosa elanikud peavad igal aastal leppima. Kas sellised päikesepaneelid paiskavad väga kõrgel temperatuuril põledes atmosfääri ohtlikke kemikaale? Kui suur probleem see oleks? Mis siis, kui põleb terve piirkond, nagu tänapäeval üha sagedamini juhtub? Kui palju kodusid peaks maha põlema, et atmosfääri paisatud kemikaalide sisaldus oleks nii suur, et see kujutaks tõsist ohtu inimesele?

Kindlasti tuleb teil kasutada matemaatikat, et koguda ja analüüsida andmeid, mida vajate usaldusväärsete võrdluste tegemiseks. Seega on kindlasti tegemist matemaatikat vajava probleemiga. Samas on selge, et „matemaatika kasutamine“ on ülesande lahendamisel see lihtne või pigem **lihtsam** osa. Eriti siis, kui kõikide arvutuste tegemiseks ja protseduuride teostamiseks on võimalik kasutada digivahendeid. Aga milliseid arve koguda? Milliseid tegureid kaaluda? Milliseid oma võrdlusandmetesse kaasata ja milliseid eirata?

Asi on selles, et koolimatemaatika on ametlike reeglitega paika seatud ülimalt piiratud valdkond. Koolimatemaatika probleemid on üheselt määratletud ja neil on vaid üks õige vastus. Pealegi on need vastused, milleni on võimalik jõuda mõistliku aja jooksul. Lisaks on iga ülesande lahendamiseks tavaliselt tarvis kasutada vaid ühte matemaatilist meetodit. Seevastu reaalmaailma

matemaatikaprobleemid kipuvad olema mitmetähenduslikud, lubama rohkem kui ühte lahendust, mis võib olla umbkaudne, ning sageli nõuab nende lahendamine kahte või enamat meetodit.

Alates 1960. aastate lõpust on sotsiaalteadlased kasutanud terminit „kiuslik probleem“ (*wicked problem*), millega kirjeldatakse ebamääraseid, lahendamata ja reaalse maailmaga seotud probleeme, nagu eespool kirjeldatud päikeseenergia probleem (Rittel & Webber, 1973). 2015. aastal hakkas mõiste „lahke probleem“ viitama vastandavale, täpselt sõnastatud väga kitsale kooliprobleemile, mis on üheselt lahenduvad ja ühe kõige õigema vastusega.

Peaaegu kõik sotsiaalteadustes, äris või lihtsalt elus tekkivad probleemid on kiuslikud. Lahked probleemid, millele koolimatemaatika keskendub, eksisteerivad tõesti üksnes klassiruumis, kus neid kasutatakse selleks, et õpilased saavutaksid matemaatilistes protseduurides vilumuse.

Kuigi eelmises osas esitatud arutelu tööriistakomplektist, mida mina ja teised matemaatikud matemaatiliste probleemide lahendamisel kasutame, kehtib kindlasti ka lahkete probleemide lahendamise kohta, siis pidasin siiski silmas, et kõik need probleemid, mille kallal ma paljude aastate jooksul töötasin, olid kiuslikud probleemid.

### Kuidas õpetada matemaatilist mõtlemist?

Matemaatiline mõtlemine on tõesti ainus abivahend, kui tahad kasutada matemaatikat reaalse maailma kiuslike probleemide lahendamiseks. Aga kuidas seda õpetada? Lihtne vastus on, et sellise mõtteviisi arendamiseks tuleb õpilastele esitada hulganisti sellist lähenemist nõudvaid reaalseid probleeme ning toetada neid asjakohase juhendamisega. Kuna see nõuab tõesti häid protseduurilisi teadmisi matemaatikas võimega õppida uusi matemaatilisi meetodeid, ei ole võimalik koolis kiuslike probleemide lahendamise eriti kaugele minna. Mida saab kooli matemaatikaõpetaja teha selleks, et valmistada oma õpilased ette kiuslike probleemide lahendamiseks *hilisemas elus*? Milliseid konkreetseid *matemaatilisi* oskusi peaksid nad aitama oma õpilastel arendada?

Nagu ma juba märkisin, ei ole õigupoolest oluline, millised matemaatilised teemad on läbi võetud, hoopis olulisem on, kuidas need on läbi võetud. Ole tume, et räägime teemadest, mida ma juba mainisin: aritmeetikast, lineaarsest algebrast, geomeetriast ja andmeteadusest.

Eesmärk on aidata kooliõpilastel teatud mõtteviisi arendada. Selle mõtteviisi sisuks on keskenduda kontseptsioonidele, mitte nende kindlatele väljendusviisidele. Esimesed küsimused, mida õpilane peaks uue probleemiga silmitsi seistes küsima, on „Mida see tähendab?“ ja „Kuhu ma tahan jõuda?“. Küsimus

„Millist meetodit ma peaksin siin kasutama?“ võib tekkida hiljem või üldse mitte. Kõige olulisem on probleemi mõista.

Toon matemaatilise mõtlemisviisi kohta lihtsa näite. Seda esitatakse sageli kui aritmeetilist mõistatust. Kogu selle näilises lihtsuses väljendub vaimsus, millest lähtudes tänapäeva matemaatikud töötavad, näidates, kuidas nende lähenemine erineb nii tavainimese kui ka traditsioonilises matemaatikatunnis õpetatavast lähenemisviisist.

Siin on mõistatus. (Enne kui edasi loed, võiksid selle oma peas ära lahendada.)

Kurikas ja pall maksavad 1,10 dollarit. Kurikas maksab 1 dollar rohkem kui pall. Kui palju maksab pall? (Mingit kampaaniahinda ei pakuta.)

Kõige levinum vastus tavainimeste puhul on, et pall maksab 10 senti. See vastus on vale. Põhjus, miks nii paljud eksivad, seisneb probleemi kavalas sõnastuses, mis tavalistes tingimustes viiks eduka strateegia kasutamisele. Probleemi kirjeldust lugedes jõutakse võtmefraasini, mis ütleb „maksab rohkem“, ja esimese mõttena tuleb pähe, et „ma pean lahutama“. Seejärel võetakse arvesse esitatud andmeid, milleks on kaks arvu 1,10 dollarit ja 1 dollar. Seega lahutatakse kõhklemata üks dollar 1,10 dollarist (väiksem suuremast, sest teatakse, et vastus peab olema positiivne). Ja nii saadaksegi vastuseks 10 senti.

Pange tähele, et mingeid arvutusi tegelikult ei tehta. Pannakse tähele keelelist mustrit. Arvud on eriti lihtsad. Peaaegu kindlasti saab mälust kätte tõsiasja, et kui lahutada dollarist ja kümnest sendist üks dollar, siis jääb alles 10 senti. Selliste rahasummade käes hoidmist võib lausa silme ette manada.

Pange tähele ka seda, et sealjuures mõistetakse asjassepuutuvaid matemaatilisi mõisteid väga selgelt. Just seetõttu probleemi sõnastus meid eksitabki!

Inimesed kasutavad trikki (tehniliselt kasutatakse heuristilist meetodit, millest edaspidi), mis on omandatud paljude finantstehingute ja tõenäoliselt paljude aritmeetiliste ülesannete lahendamise teel algkoolis. Tegelikult soodustavad aja peale tehtud testid koolides sellist aktiivset „mustrituvastamist“. Lihtsalt sellepärast, et see on kiire ja enamasti toimib!

Seega võime sõnastada hüpoteesi, miks nii paljud inimesed „lahendavad“ probleemi nii, nagu nad seda teevad. Aja jooksul on nad selliste probleemide lahendamiseks välja töötanud heuristilise meetodi (tuvastage vajalik aritmeetiline tehe ja seejärel kasutage esitatud andmeid), mis on a) kiire, b) ei vaja pingutust, ja c) tavaliselt töötab.

Üldiselt tähendab *heuristika* mis tahes lähenemist probleemide lahendamisele, kasutades praktilist meetodit, mis ei pruugi olla optimaalne, täiuslik ega isegi mitte ratsionaalne, on siiski piisav kohese ja lühiajalise eesmärgi

saavutamiseks või ligikaudse lahenduse leidmiseks. Kõikides valdkondades kasutavad eksperdid paljude aastate jooksul välja kujunenud heuristikat, mille tõhusus on järele proovitud.

Juhul kui ülesandel või probleemil on unikaalne õige lahendus, mille õigsust on võimalik kontrollida, teeb ekspert võimaluse korral sellise kontrolli. Kuid lahenduseni *jõutakse* peaaegu kindlasti heuristilist meetodit kasutades. Nii saab palju kiiremini ja nii on võimalik vältida eksimist detailide rägastikku, kus väikesed vead võivad põhjustada viivitusi.

Nii käib see muidugi puhtas matemaatikas. Professionaalsed matemaatikud jõuavad keerulise probleemi lahenduseni heuristika abil, kuid tulemused on üldiselt (kuigi mitte alati) aktsepteeritavad ainult pärast seda, kui teised on need range pilguga üle kontrollinud.

Realse maailma kiuslike probleemide puhul ei ole selline kindlus kunagi võimalik. Sellisel juhul saab kontrolle teha ja tavaliselt neid igal võimalikul juhul ka tehakse, kuid vastus tuleb paratamatult mõningase ebakindlusega, mille puhul võib, kuid ei pruugi olla võimalik anda usaldusväärset veahinnangut.

Näiteks toetatakse meditsiinilises diagnostikas pidevalt heuristikale, mida toetatakse mis tahes testidega, mida on parasjagu võimalik teha. Aga nagu me kõik teame, pannakse diagnoose sageli kujul „valitseb X% suurune võimalus, et järgneva kaheteistkümne kuu jooksul tekib Y.“

Kuigi kurika ja palli probleemi lahendamisel viib heuristika teid eksiteele, on selline lähenemisviis tavainimeste puhul arukas, sest kasutatakse midagi, milles inimaju on märkimisväärselt tugev – see on mustrite äratundmine –, ja väldib tegevust, mille omandamist peab meie mõistus raskeks ja pingutust nõudvaks (nimelt aritmeetilisi tehteid).

Probleemi tõstatamise konteksti ja veelgi tõenäolisemalt seetõttu, et ma ei ole tavainimene, vaid matemaatikat õpetav inimene, oskasite te ilmselt oodata konksuga küsimust. (Miks ma muidu sellise näite esitaksin?) Niisiis, pärast seda, kui teie mõte hüppas kõigepealt 10 sendile (mis juhtub enamikuga meist), otsustasite ehk kindla peale minna ja rakendada tuntud algoritmi. Tõenäoliselt kasutasite sellist arutluskäiku (kas paberil või peas):

Las  $x$  võrduda kurika maksumus ja  $y$  võrduda palli maksumus. Seejärel saame esitada probleemi sümbolite vormis:  $x + y = 1,10$ ;  $x = y + 1$

Eemaldades  $x$ -i mõlemast võrrandist ja kasutades algebrat, saame:  $1,10 - y = y + 1$

Kasutades jälle algebrat, saame tulemuseks:  $0,10 = 2y$

Kui jagada mõlemad pooled 2-ga, saame vastuseks:  $y = 5$  senti.

Seekord on vastus õige.

Olenemata sellest, kas suutsite seda arvutust peast teha, on lähenemine muidugi täiesti reeglitekohane ja tavapärane. Erinevalt esimesest kirjeldatud meetodist (*heuristiline*, mis on *kiire* ja *tavaliselt õige*), on see meetod *algoritmiline protseduur*. See on küll *aeglane* (palju aeglasem kui esimene meetod, isegi siis, kui algebratehted tehakse peast), kuid *toimib alati*. Lisaks saab sellise lähenemisviisiga hakkama ka masin. Tõsi, sellise lihtsa näite puhul on kiirem teha seda kirjalikult ümbriku tagaküljel, kuid üldiselt ei ole mõtet raisata inimese aega algoritmilise protseduuri peale kasvõi juba seetõttu, et isegi lihtsate näidete puhul on väga lihtne teha väikest viga, mis viib vale vastuseni.

Kuid selle ülesande lahendamiseks on olemas veel üks võimalus. Sellist lahendusviisi kasutaksid tavaliselt professionaalsed matemaatikud. Nagu esimene minu kirjeldatud meetod, on ka see heuristiline, seega instinktiivne ja kiire, kuid erinevalt esimesest heuristilisest meetodist on selle kasutajat palju raskem kavalalt esitatud sõnastusega eksiteele viia.

Kolmanda meetodi puhul vaadatakse sõnadest ja sümbolitest kaugemale ning mõeldakse uuritavate *kogusele*. Joonis 7 kujutab enam-vähem seda, mida profid teevad. Pean märkima, et mina isiklikult (ja tõenäoliselt ka teised matemaatikud) ei visualiseeri seda päris nii, nagu ma seda kohe kirjeldan. Minu puhul on see pigem ebamäärane suurusetaju. Minu esitatud joonisel on näha, kuidas ma oma meetodit paberil selgitasin, kui kognitiivteadlane seda mul teha palus.

#### PALLI MAKSUMUS



Hind

#### KURIKA MAKSUMUS



Hind

1 dollar rohkem

**PALL + KURIKAS = 1 \$ : 10    PALL = 5 senti**

**Joonis 7.** Professionaali heuristiline lahendus kurika ja palli mõistatusele.

Ülesande lugemise ajal loome kujutluspildi kahest maksumusest, palli omast ja kurika pluss palli omast koos nendevahelise suhtega, mille kohta on öeldud, viimane maksab teisest ühe dollari rohkem.

Sellest kujutluspildist, kus 1,10 dollarit kokku koosneb kolmest osast, millest ühe suurus on 1 dollar ja teised kaks on võrdsed, me lihtsalt „loeme maha“, et pall maksab 5 senti.

Niisiis, ei mingit arvutamist ega algoritmi, vaid puhas muistrituvastus.



See lahendus on näide tegelikust matemaatilisest mõtlemisest, täpsemalt arvutajust. Raske on ette kujutada, kuidas suudaks arvutisüsteem probleemi selliselt lahendada. See nõuab kirjeldatud olukorra *mõistmist* ja arusaamist sellest, mida on vaja kindlaks määrata.

Siin on ikkagi tegemist heuristikaga. Ent kui tavainimese heuristika sõltub keelelistest muustritest, siis matemaatikute heuristika töötab tegelike *arvuliste suurustega* ning seega ei ole neid võimalik keerulise sõnastusega haneks püüda.

Austraalia (puhas) matemaatik Terrence Tao (2015) on nimetanud neid kolme kurika ja palli ülesande lahendamise viisi *reeglite-eelseks*, *reeglipäraseks* ja *reeglitejärgseks* mõtlemiseks. Joonisel 8 on esitatud graafiline kokkuvõte Tao pakutud kolme liiki matemaatilisest mõtlemisest, mille abil saame probleeme lahendada.

## Matemaatiline heuristika

PROBLEEM: Pall ja kurikas maksavad kokku 1,10 dollarit. Kurikas maksab 1 dollar rohkem kui pall. Kui palju maksab pall? (Mingit allahindlust ei pakuta.)

### Reeglite-eelne mõtlemine      Reeglipärane mõtlemine      Reeglitejärgne mõtlemine

Tuleb lahutada

Teadad olevad andmed: 1,10 \$ ja 1 \$

Lahuta 1 dollar 1,10 dollarist

Vastus on 10 senti

Las  $x$  = kurika hind

Las  $y$  = palli hind

$x + y = 1,10$

$x = y + 1$

Taandame  $x$ -i:

$1,10 - y = y + 1$

$0,10 : 2y; y = 5$  senti

PALLI MAKSUMUS



Hind

KURIKA MAKSUMUS



Hind

1 dollar rohkem

PALL + KURIKAS = 1 \$ : 10      PALL = 5 senti

**Heuristiline**

**Kiire**

**Ei tööta alati**

**Protseduuriline**

**Aeglane**

**Töötab alati**

**Heuristiline**

**Kiire**

**Töötab alati**

**Joonis 8.** Terrance Tao matemaatilise mõtlemise kolm liiki kurika ja palli ülesande lahendamiseks.

Blogis, milles Tao oma klassifikatsiooni (Tao, 2015) tutvustas, arutles ta selle üle, kuidas professionaalsed matemaatikud lahendavad abstraktseid probleeme puhta matemaatika raames. Teadusartiklitele ja raamatutele omane ametlik, sümbolite ja reeglitega kirjeldus esitatakse tavaliselt alles lõpus, kui kontrollikse, kas lahendus on loogiliselt korrektne, või vahepunktides, et teha selliseid kontrole poolel teel. Aga peamise mõtlemisviisina kasutatakse reeglitejärgset, täpsemalt eksperdi heuristikat.

Lühidalt öeldes läheb professionaal *numbritest ja sümbolitest kaugemale ning ehitab oma arutluskäigu semantilistele üksustele, mida need keelelised elemendid esindavad*. See on reeglitejärgne, matemaatiline mõtlemine. Ja just see ongi see, mida me tahame, et meie õpilased suudaksid.

Teisisõnu saame selles osas käsitletava küsimuse ümber sõnastada järgmiselt: *kuidas õpetada õpilasi kõige paremini nii, et neist saaksid head reeglitejärgset matemaatikat valdavad mõtlejad?*

Kognitiivsete protsesside teadusuuringute põhjal on teada, et reeglitejärgne mõtlemine on peaaegu kindlasti midagi, mis tekib pärast pidevat reeglipärase mõtlemise praktiseerimist (vt näiteks Willingham, 2010.)

Ajal, mil ainus viis reaalse probleemi lahendamiseks vajalike matemaatiliste oskuste omandamiseks oli saavutada mitmesuguste algoritmiliste protseduuride tegemise vilumus, arenesid professionaalsed matemaatikud sageli automaatselt reeglitejärgseteks mõtlejateks, sest nad olid kulutanud tuhandeid tunde, tehes protseduurilist (st rangeid reegleid järgivat) matemaatikat!

Kuid tänapäeval meile kättesaadavate tööriistade valiku juures on meil piisavalt põhjust loota, et õigeid hariduslikke kogemusi pakkudes saame märkimisväärselt lühendada (kuigi peaaegu kindlasti mitte kõrvaldada) õppimisprotsessi, mille jooksul jõutakse reeglite-eelsest matemaatilisest mõtlemisest läbi reeglipärase mõtlemise reeglitejärgse mõtlemiseni. Eesmärk on anda õppijatele võimalus omandada piisavalt heuristilisi oskusi, et nende mõte õiges suunas liikuma saada.

Selline heuristika ei ole enamasti „matemaatika tegemine“ traditsioonilises mõttes. Pigem keskendutakse tänapäeval kättesaadavate paljude teabeallikate tõhusale ja tulemuslikule kasutamisele. Aga enne ülikoolitaseme õpikute minemaviskamist on oluline endale teadvustada, et ka mõni kõrvalpeõige mõningase reeglipärase mõtteviisi omandamiseks on ilmselt hädavajalik.

Õpetamisprotsessi saab kindlasti tõhusamaks muuta, kui formaalseid meetodeid *optimeeritakse nii, et neid oleks võimalik paremini mõista*, mitte nii, et muudetakse protseduurid tõhusamaks, nagu see oli päevil, kui pidime tegema kõik arvutused kirjalikult.

Arvestades tänapäevast tehnoloogilist tööriistakomplekti, sealhulgas otsingumootoreid, sotsiaalmeediat, selliseid internetiressursse nagu Wolfram Alpha ja Khan Academy, ning paljusid internetikursusi, on kindlasti võimalik omandada suurem osa reeglipärasest mõtlemisest, mida võib töö käigus vaja minna, kui lahendatakse sisukaid ja seega motiveerivaid ning rahuldust pakkuvaid elulisi probleeme.

See ei tähenda, et õpetajaid ei ole enam vaja. Kaugel sellest. Väga vähesed inimesed suudavad ise saada headeks matemaatilisteks mõtlejateks. Sellised inimesed nagu Newton ja Ramanujan, kes saavutasid hiilgavaid tulemusi vaid

mõnele raamatule toetudes, on äärmiselt haruldased. Enamik meist vajab hea õpetaja juhendamist ja tagasisidet.

Kuid arvestades, et matemaatikaga tegelemine sõltus veel veerand sajandit tagasi sellest, kas ollakse võimeline teostama eri liiki arvutusi ja omatakse oskusi, mis ei ole aju jaoks loomulikud ja nõuavad pidevat harjutamist ja praktikat, ning et praegu on meie käsutuses kergesti kättesaadavad arvutamist lihtsustavad abivahendid, kasutatakse tänapäeval matemaatikat praktikas aju jaoks palju loomulikumal viisil: *analoogial* põhinevaks mõtlemiseks, mitte loogiliseks mõtlemiseks, nagu varem nõuti. Matemaatika õpetamisel on vaja keskenduda sellise tehnoloogiale toetuva mõtteviisi arendamisele.

### Kasutatud kirjandus

- Abramovich, S (2013). Computers in mathematics education: An introduction. *Computers in the Schools, Interdisciplinary Journal of Practice, Theory, and Applied Research*, 30(1–2), 4–11. <https://doi.org/10.1080/07380569.2013.765305>
- Devlin, K (2012a). What is mathematical thinking? *Devlin's Angle*, <http://devlinsangle.blogspot.com/2012/08/what-is-mathematical-thinking.html>.
- Devlin, K (2012b). *Introduction to Mathematical Thinking*, Amazon Publications.
- Devlin, K (2018). Stanford University Mathematics Outreach Project, *Blue Notepad Videos* <https://sumop.org/videos/>.
- Ferguson, N. *et al.* (2020). Report 9: Impact of non-pharmaceutical interventions (NPIs) to reduce COVID-19 mortality and healthcare demand, *Imperial College COVID-19 Response Team*, 16 March 2020 <https://www.imperial.ac.uk/media/imperial-college/medicine/sph/ide/gida-fellowships/Imperial-College-COVID19-NPI-modelling-16-03-2020.pdf>.
- Ma, L. (November 2013). A critique of the structure of U.S. elementary school mathematics. *Notices of the AMS*, 60(10), 1282–1296. <https://doi.org/10.1090/noti1054>.
- NRICH, University of Cambridge (2020). <https://nrich.maths.org/mathematically>.
- Rittel, H., & Webber, M. (1973). *Dilemmas in a general theory of planning*. *Policy Sciences*, 4(2), 155–169. <https://doi.org/10.1007/BF01405730>
- Singh, P. *et al.* (2018). The use of problem-solving heuristics approach in enhancing stem students development of mathematical thinking. *International Electronic Journal of Mathematics Education*, 13(3), 289–303. <https://doi.org/10.12973/iejme/3921>
- Stacey, K (2006). What is mathematical thinking and why is it important?. *ResearchGate, Computers in Mathematics Education*. [https://www.researchgate.net/publication/254408829\\_WHAT\\_IS\\_MATHEMATICAL\\_THINKING\\_AND\\_WHY\\_IS\\_IT\\_IMPORTANT](https://www.researchgate.net/publication/254408829_WHAT_IS_MATHEMATICAL_THINKING_AND_WHY_IS_IT_IMPORTANT).
- Tao, T (2015). *There's more to mathematics than rigour and proofs*. Aug 20 <https://terrytao.wordpress.com/career-advice/theres-more-to-mathematics-than-rigour-and-proofs/>.
- Willingham, D. (2010). *Why don't students like school? A cognitive scientist answers questions about how the mind works and what it means for the classroom*. Jossey-Bass.