# PÄIKESE OTSESE INTEGRAALSE KIIRGUSE INTENSIIVSUSE VALEMITE ÜLDISTAMISE KATSEST

**H. Mürk**
Astronoomia ja geofüüsika kateeder

## Sissejuhatus

Paljude aktinomeetriliste, meteoroloogiliste ja klimatoloogiliste küsimuste lahendamisel, nagu kiirgus- ja soojusbilansi uurimisel, atmosfääri läbipaistvuse karakteristikute määramisel, otsese kiirguse intensiivsuse taandamisel ühelt massiarvult teisele ja mõnel teisel juhul etendavad tähtsat osa otsese integraalse kiirguse intensiivsuse $S_m$ valemid, mis seovad $S_m$ massiarvuga $m$ ja atmosfääri läbipaistvust iseloomustava karakteristikuga. Nende valemite teoreetilisel tuletamisel lähtutakse tavaliselt Bouguer' valemist monokromaatse kiirguse intensiivsuse kohta maapinnal ja integreeritakse seda lainepikkuse $\lambda$ järgi rajades 0 kuni $\infty$ [1]. Seejuures tuleb tähendada, et integreeritav avaldis on keeruline $\lambda$ funktsioon ja seepärast leitakse integraal numbriliselt või graafiliselt. Teatud lihtsustamisel on võimalik seda integraali määrata ka analüütiliselt [2].

Käesolevas töös lähtutakse integraalse kiirguse intensiivsuse valemite tuletamisel teisest seisukohast — eeldatakse, et integraalse kiirguse nõrgenemise massikoefitsient $k$ on sama läbipaistvusega atmosfääri puhul massiarvu $m$ funktsioon, ja leitakse otsese integraalse kiirguse intensiivsuse valem üldisel kujul. Valides nõrgenemise koefitsiendile $k(m)$ sobiva lähendusfunktsiooni saame lihtsalt tuletada Sivkovi, Gulnitski, Kastrovi, Kozik'i ja Mahhotkini integraalse kiirguse intensiivsuse valemid. Edasi näidatakse tee intensiivsuse uute valemite tuletamiseks. Käesolevas töös ongi näitena tuletatud kaks $S_m$ valemit.

## 1. Otsese kiirguse intensiivsuse valem üldisel kujul

Päikese kiirguse selektiivse hajumise ja neeldumise tõttu Maa atmosfääris on integraalse kiirguse nõrgenemise mass-koefitsient $k$ atmosfääri massiarvu $m$ funktsioon — $k = k(m)$. Vaadeldes kiirguse nõrgenemist õhukeses kihis võime Bouguer' diferentsiaalvõrrandi eeskujul kirjutada seose

$$dS = -k(m) S\, dm. \tag{1, 1}$$

Integreerides seda avaldist $m$ järgi rajades $m_0$-st kuni $m$-ini, saame

$$S_m = S_{m_0} \exp\,[-\int_{m_0}^{m} k(m)\, dm], \tag{1, 2}$$

kus $S_m$ ja $S_{m_0}$ on otsese kiirguse intensiivsused vastavalt massiarvudele $m$ ja $m_0$. Kui võtta $m_0 = 0$, siis temale vastav intensiivsus $S_{m_0} = S_0$ on solaarkonstant ja seega

$$S_m = S_0 \exp\,[-\int_{0}^{m} k(m)\, dm]. \tag{1, 3}$$

Valem (1, 2) või (1, 3) ongi otsese kiirguse intensiivsuse valem üldisel kujul.

Nagu nähtub valemist (1, 2), on tarvis $S_m$ arvutamiseks teada $S_{m_0}$, $m$, $m_0$ ja $k(m)$. Kolme esimese suuruse määramine ei tee raskusi. Neljas suurus $k(m)$ on keeruline $m$ funktsioon, mida ei saa üldisel juhul avaldada valemina. Sel puhul tuleb valemis (1, 2) esinev integraal arvutada lähisvõtetega. Kui valida $k(m)$-le sobiv lähendusfunktsioon, saame valemile (1, 2) või (1, 3) anda võrdlemisi lihtsa ja praktiliselt kasutatava kuju.

## 2. Otsese kiirguse intensiivsuse praegu kasutatavate valemite tuletamine üldisest valemist

Käesolevas osas näitame, et Sivkovi, Gulnitski, Kastrovi, Koziki ja Mahhotkini valemid otsese kiirguse intensiivsuse kohta on valemi (1,3) lihtsamad erandjuhud.

1) Sivkovi interpolatsiooni valemi saame, kui võtta $k(m)$ lähendusfunktsiooniks esimest järku polünoom $m$ suhtes

$$k(m) = a_0 + a_1 m \tag{2, 1}$$

ja asetada see valemisse (1,3). Saame

$$S_m = S_0 \exp(-a_0 m - \frac{a_1}{2} m^2).$$

Logaritmides viimase valemi mõlemaid pooli ja tähistades

$$a = -a_0 \log e,$$

$$b = -\frac{a_1}{2} \log e, \tag{2, 2}$$

saame Sivkovi interpolatsiooni valemi tema poolt esitatud kujul

$$\log S_m = \log S_o + am + b\, m^2 \tag{2, 3}$$

2) G u l n i t s k i valemi tuletamiseks tuleb võtta $k(m)$ lähendusfunktsiooniks samuti esimest järku polünoom $m$ suhtes, kusjuures $m$ kordajaks on tähistatud $2 \ln \alpha$:

$$k(m) = a_o + 2 \ln \alpha \;\; m. \tag{2, 4}$$

Asendades selle valemisse (1, 3) ja teostades vastavad teisendused, leiame

$$S_m = S_0\, \alpha^{-m^2} p_0{}^m, \tag{2, 5}$$

kusjuures

$$p_0 = e^{-a_0} \tag{2, 6}$$

Valem (2, 5) ongi Gulnitski valem tema poolt esitatud kujul.

3) Võttes $k(m)$ lähendusfunktsiooniks avaldise

$$k(m) = \frac{h}{1 + cm} \tag{2, 7}$$

ja paigutades selle valemisse (1, 3) saame

$$S_m = \frac{S_0}{(1 + cm)^{\frac{h}{c}}} \tag{2, 8}$$

Aktinomeetrias kasutatava K a s t r o v i valemi saamiseks tuleb $h = c$; sel korral

$$S_m = \frac{S_0}{1 + cm}. \tag{2, 9}$$

4) K o z i k i valemi saame, kui $k(m)$ lähendusfunktsiooniks on avaldis

$$k(m) = h + \frac{l_1}{1 + l_2 m} \tag{2, 10}$$

Asetades selle põhivalemisse (1, 3) ja läbi viies vastavaid teisendusi ning tähistades

$$\left.\begin{aligned} e^{-h} &= p_0 \\ \frac{l_1}{l_2} &= l \end{aligned}\right\} \tag{2, 11}$$

saame Koziki valemi

$$S_m = S_0 (1 + l_2 m)^{-l} p_0{}^m \tag{2, 12}$$

5) Erinevalt seni käsitletud juhtudest, kus $k(m)$ lähendusfunktsioon oli ainult $m$ funktsioon, tuleb Mahhotkini valemi tuletamiseks vaadelda $k(m)$ kui $m$ ja $S$ funktsiooni ja nimelt

$$k(m) = \frac{\varkappa}{Sm} \qquad (2, 13)$$

Asendades selle valemisse (1, 1) ja integreerides seda $m$ järgi rajades 1-st kuni $m$-ini, saame

$$S_m = S_1 - \varkappa \ln m. \qquad (2, 14)$$

Võrreldes viimast valemit Mahhotkini valemiga

$$S_m = c - b \log m, \qquad (2, 15)$$

selgub, et

$$c = S_1$$

ja

$$b = \varkappa \ln 10. \qquad (2, 16)$$

Valemite (2, 3), (2, 5), (2, 9) ja (2, 12) tuletamisel lähtusime valemist (1, 3), mis sisaldab solaarkonstanti $S_0$. Nimetatud valemitele saame anda üldisema kuju, kui lähtuda valemist (1, 2), kus integreerimise alumiseks rajaks on lähte-massiarv $m_0$ ja $S_0$ asemel $m_0$-le vastav intensiivsus $S_{m_0}$.

Kasutades valemi (1, 3) asemel valemit (1, 2) saame:

a) Sivkovi valemi kujul

$$\log S_m = \log S_{m_0} + a(m - m_0) + b(m^2 - m_0^2), \qquad (2, 17)$$

b) Gulnitski valemi kujul

$$S_m = S_{m_0} a^{-(m^2 - m_0^2)} p_0^{m - m_0}, \qquad (2, 18)$$

c) Kastrovi valemi kujul

$$S_m = S_{m_0} \frac{1 + cm_0}{1 + cm}, \qquad (2, 19)$$

d) Koziki valemi kujul

$$S_m = S_{m_0} \left( \frac{1 + l_2 m}{1 + l_2 m_0} \right)^{-l} p_0^{m - m_0} \qquad (2, 20)$$

Valemid (2, 17) — (2, 20) taanduvad valemiteks (2, 3), (2, 5), (2, 9) ja (2, 12), kui neis võtta $m_0 = 0$.

## 3. Uusi otsese kiirguse intensiivsuse valemeid

Valemite (1, 2) või (1, 3) tähtsus ei piirdu ainult sellega, et saame tuletada juba tuntud $S_m$ valemeid, vaid et nende abil on võimalik leida rida uusi otsese kiirguse intensiivsuse valemeid. Järgnevalt tuletamegi paar sellist valemit.

1) Võttes $k(m)$ lähendusfunktsiooniks $n$-astme polünoomi

$$k(m) = \sum_{i=0}^{n} a_i m^i \tag{3, 1}$$

ja asendades selle valemisse (1, 3), saame pärast vastavaid teisendusi

$$S_m = S_0 \exp\left(-\sum_{i=0}^{n} \frac{a_i}{i+1} m^{i+1}\right) \tag{3, 2}$$

ehk

$$S_m = S_0 \prod_{i=0}^{n} \exp\left(-\frac{a_i}{i+1} m^{i+1}\right). \tag{3, 3}$$

Tähistades

$$\exp\left(-\frac{a_i}{i+1} m^{i+1}\right) = p_i^{m^{i+1}}, \tag{3, 4}$$

saame eelmise valemi kirjutada järgmisel kujul

$$S_m = S_0 \prod_{i=0}^{n} p_i^{m^{i+1}} \tag{3, 5}$$

Tähistades veel

$$\prod_{i=0}^{n} p_i^{m^{i+1}} = p_m^m, \tag{3, 6}$$

saame valemi (3, 5) taandada Bouguer' valemi kujule

$$S_m = S_0 p_m^m. \tag{3, 7}$$

Valemitest (3, 2) ja (3, 7) saame tuletada seose

$$\ln p_m = -\sum_{i=0}^{n} \frac{a_i}{i+1} m^i, \tag{3, 8}$$

mis määrab $p_m$ sõltuvuse massiarvust $m$ eeldusel, et $k(m)$ avaldub $n$-astme polünoomina.

Võrreldes valemeid (2, 1) ja (2, 4) valemiga (3, 1) selgub, et kaks esimest on viimase erandjuhud: valemi (2, 1) saame, kui võtta valemis (3, 1) $n = 1$, ja valemi (2, 4), kui $n = 1$ ja $a_1 = 2 \ln \alpha$. Seega seosed (3, 2) — (3, 8) on kehtivad ka Sivkovi ja Gulnitski valemite puhul.

2) Uut tüüpi intensiivsuse valemi saame, kui võtame $k(m)$ lähendusfunktsiooniks avaldise

$$k(m) = A - B \ln m, \tag{3, 9}$$

kus $A$ ja $B$ on sama läbipaistvusega atmosfääri puhul $m$-ist sõltumatud suurused.

Valemitest (1, 3) ja (3, 9) leiame $S_m$ jaoks uue valemi

$$S_m = S_0 p_1^m m^{Bm}, \tag{3, 10}$$

kus

$$p_1 = e^{-(A+B)} \tag{3, 11}$$

Ka valem (3, 10) taandub Bouguer' valemiks (3, 7), kui võtta

$$p_m = p_1 m^B \tag{3, 12}$$

Viimane seos võimaldab määrata $p_1$ ja $B$ väärtusi mõõtmisandmeist. Selleks on tarvis valemi (3, 7) järgi arvutada kaks erinevat $p_m$ väärtust ning valemist (3, 12) saame juba leida $p_1$ ja $B$.

Valemi (3, 10) kehtivust on kontrollitud Sivkovi tabelis [3] antud otsese kiirguse intensiivsuse andmetega ja leitud, et maksimaalne hälve ei ületa $\pm$ 0,03 (cal/cm²min), kusjuures rõhuv enamik hälbeid on $\pm$ 0,01 (cal/cm²min) piirides. Samuti on selgunud, et $p_1$ ja $B$ sõltuvad vähe massiarvust; praktiliselt võib neid lugeda $m$ suhtes konstantseteks. Seega võiksid $p_1$ ja $B$ või mõni nende kaudu defineeritud uus suurus olla atmosfääri läbipaistvuse kvantitatiivseteks karakteristikuteks.

Kuigi valem (3, 10) on praktilise rakendamise seisukohalt küllalt tülikas, võime siiski sellest raskusest üle saada otstarbekalt konstrueeritud nomogrammi abil. Sellise nomogrammi ehitamine ongi autoril õnnestunud.

## 4. Kokkuvõte

Mõõtmistest on teada, et integraalse kiirguse nõrgenemise mass-koefitsient $k$ on massiarvu $m$ funktsioon, millest saame tuletada valemi (1, 1) alusel otsese integraalse kiirguse intensiivsuse $S_m$ kohta üldise valemi (1, 2). Praegu aktinomeetrias kasutatavad valemid on selle üksikud erandjuhud. Üldine valem (1, 2) võimaldab ka tuletada rida uusi $S_m$ valemeid. Käesolevas töös on tuletatud kaks sellist valemit (3, 5) ja (3, 10), milledest viimast on kontrollitud ja leitud ta olevat heas kooskõlas tegelikult mõõdetud intensiivsuse andmetega. Kuna Sivkovi ja Gulnitski intensiivsuse valemid on valemi (3, 5) kitsad erijuhud, siis võib arvata, et ka (3, 5) on tegelikkusega heas kooskõlas. Peale selle võimaldavad valemid (3, 8) ja (3, 12) osaliselt lahendada $p_m$ taandamise küsimust ühelt massiarvult teisele ja luua atmosfääri uusi kvantitatiivseid läbipaistvuse karakteristikuid, nagu näiteks $p_1$ ja $B$ valemis (3, 10).

## KIRJANDUS

1. К о н д р а т ь е в, К. Я. Лучистая энергия Солнца. Гидрометеоиздат, Ленинград, 1954.

2. К а с т р о в, В. Г К вопросу об ослаблении солнечной радиации в идеальной атмосфере. Met. Zeitschr., Bd. 47, H. 4, 1930.

3. С и в к о в, С. И. Общий метод приведения интенсивности солнечной радиации к определенному числу масс атмосферы. Труды ГГО, вып. 14 (76), 1949.

# О ПОПЫТКЕ ОБОБЩЕНИЯ ФОРМУЛЫ ИНТЕНСИВНОСТИ СОЛНЕЧНОЙ ПРЯМОЙ ИНТЕГРАЛЬНОЙ РАДИАЦИИ

**Х. Мюрк**
Кафедра астрономии и геофизики

Резюме

Из измерений известно, что массовый коэффициент ослабления интегральной радиации есть функция числа масс атмосферы $m$, из чего можно на основании формулы (1, 1) вывести обобщенную формулу (1, 2) для прямой интегральной радиации $S_m$. Используемые в настоящее время в актинометрии формулы представляют частные случаи этой формулы. Обобщенная формула (1, 2) дает также возможность вывести новые формулы для $S_m$. В настоящей статье выведены 2 такие формулы (3, 5) и (3, 10). Вторая из них проверена, и найдено, что вычисленные величины хорошо сходятся с измеренными величинами интенсивности.

Так как формулы интенсивности Сивкова и Гулницкого частные случаи формулы (3, 5), можно предположить, что и формула (3, 5) дает результаты, близкие к измеряемым данным.

Кроме того формулы (3, 8) и (3, 12) дают до некоторой степени возможность разрешить вопрос приведения $p_m$ от одного числа масс к другому и найти новые количественные характеристики прозрачности атмосферы, как например $p_1$ и $B$ в формуле (3, 10).

# AN ATTEMPT TO GENERALISE THE FORMULAS FOR THE INTENSITY OF DIRECT INTEGRAL SOLAR RADIATION

**H. Mürk**

Summary

As the measurings show, the mass coefficient $k$ for extinction of integral radiation is the function of the air mass $m$, from which, on the basis of formula (1, 1), a general formula (1, 2) may be derived for the intensity of direct integral radiation $S_m$. The formulas used at present in actinometry represent isolated and exceptional cases of the general formula. From the general formula (1, 2) itself a number of new formulas for $S_m$ may be deduced. Two such formulas (3, 5) and (3, 10) are submitted in the present investigation, of which the latter has been checked and found to be in close accordance with the data obtained from actual measurements of intensity.

As Sivkov's and Gulnitsky's intensity formulas represent only specific instances of formula (3, 5), it may be assumed that the latter will also give results that agree reasonably well with the data obtained from actual measurement.

Moreover, with the help of formulas (3, 8) and (3, 12), it is possible to arrive at a partial solution of the problem of reducing $p_m$ from one air mass to another and to determine new quantitative characteristics for the transparency of the atmosphere, such as $p_1$ and $B$ in formula (3, 10).