

AMPLITUUDFILTRITE JA DIAFRAGMADE MÖJUST DIFRAKTSIOONPILDILE. II

L. Tuvikene

Teoreetilise füüsika kateeder

Töös [1] oli vaadeldud ühtlase läbilaskvusega diafragma kaju arvutamist vastavast integraalvõrrandist fokaaltasandil etteantud amplituudijaotuse korral.

Käesolevas artiklis käsitletakse nimetatud probleemi üldisemalt, lähtudes amplituudijaotusest ekstrapokaalses ruumis (intra- ja ekstrapokaalsetel tasanditel) Uuritakse ka seda, kas valguspunkti ekstrapokaalne pilt antud ava korral on realiseeritav mõne teise ava fokaalse pildina.

Tuleb märkida, et autoril ei ole õnnestunud nimetatud küsimuste kohta leida andmeid kirjandusest.

1. Fresneli difraktsioon. Intra- ja ekstrapokaalsed difraktsioonkujundid

Difraktsiooniteoorias tuntud Kirchhoff'i ligikaudset valemit ([2], lk. 154) võib esitada Fresneli difraktsiooni korral järgmiselt

$$u(R, \alpha, \beta) = \int \int_{(\text{üle ava})} e^{-ik\Phi(\xi, \eta)} d\xi d\eta, \quad (1.1)$$

kus

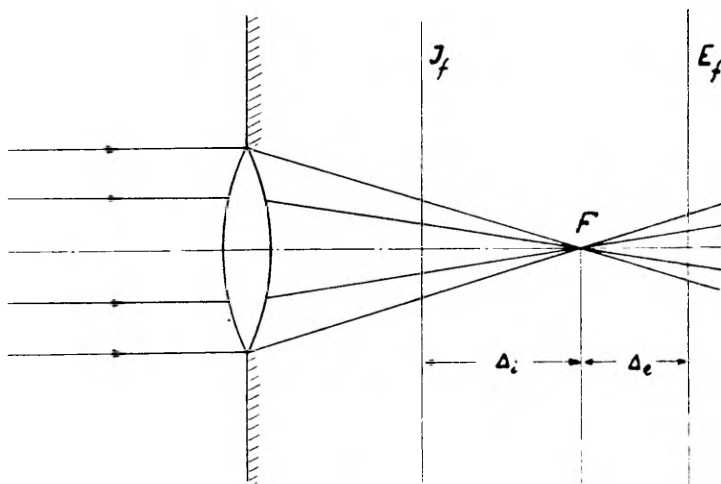
$$\Phi(\xi, \eta) = -\alpha \xi - \beta \eta + \frac{1}{2} \frac{\xi^2 + \eta^2}{R} - \frac{1}{2} \frac{(\alpha \xi + \beta \eta)^2}{R} + \quad (1.2)$$

kus α, β esitavad ava tsentrist difraktsiooni vaatluspunkti M viiva raadiusvektori R sihikoosinusi; ξ, η on ava punkti koordinaadid,

$k = \frac{2\pi}{\lambda}$ — kasutatava valguse lainepikkus. $u(R, \alpha, \beta)$ on võnkeamplituud punktis $M(R, \alpha, \beta)$ Valemis (1.1) koos arendusega (1.2) on arvestatud, et avale langevad tasapinnalised lained risti ava tasapinnaga. Kui $R \rightarrow \infty$, siis valem (1.1) koos arendusega (1.2) määrab Fraunhoferi difraktsiooni ehk fokaalse difraktsiooni. Välja nihkudes pikksilma objektiiv fokaaltasapinnast ekstra- või intrafokaalsesse ruumi saab R lõplikuks ja valem

(1.1) määrab Fresneli difraktsiooni. Intensiivsus punktis $M(R, \alpha, \beta)$ avaldub valemiga $I(R, \alpha, \beta) = uu^*$

Selleks et määrata intensiivsuse jaotust intra- ja ekstrapokaalses ruumis või intra- ja ekstrapokaalsetel tasanditel (vt. joonis 1), s. o. tasanditel, mis on risti objektiivläätsse optilise peateljega ja asuvad mõnesugusel kaugusel Δ fookusest F , on otstarbekohane amplituudijaotust $u(R, \alpha, \beta)$ või I siduda väljanihke suurusega Δ fokaaltasandist ja objektiivi fookuse kaugusega f . Eelneva põhjal on loomulik arvata, et u (või I) sõltuvus Δ -st saab olema R kaudu. Vastava transformatsioonivalemi tuletamine on seotud läätsse valemiga. Olgu läätses lõpmata õhuke kumerlääts (fookuse kaugusega f), mille paigutame ekraani avasse.



Joon. 1.

Artiklit [3] silmas pidades võib väita, et difraktsioonkujundid eksisteerivad nii ekraani ees ruumis kui ka ekraani taga. Vaadeldes nüüd difraktsioonpilte (vt. joonis 2) ruumiosas I (ekraani ees) lõpmatuseni kuni fokaaltasandini, saame nad läätsse abil transformeerida ruumiosas II — ekstrapokaalsesse ruumi fokaaltasandist kuni lõpmatuseni. Läätsse valemist

$$a = \frac{f \cdot k}{f - k} \approx R,$$

kus joonise 2 järgi

$$f - k = 1 < 0.$$

Seega

$$R = \frac{f(f - \Delta)}{\Delta}, \quad \Delta < 0 \quad (1.3a)$$

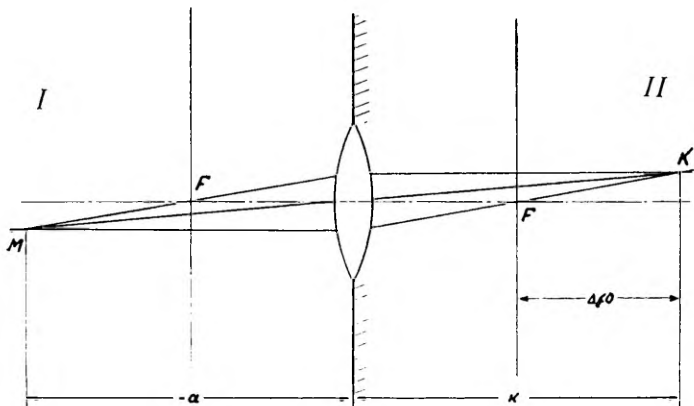
Analoogilise valemi võib tuletada ka punktide transformeermiseks intrafokaalsesse ruumi. Arvestades, et siin on tegu ebakujutise teisendamisega, saame

$$R = \frac{f(f - \Delta)}{\Delta}, \Delta > 0. \quad (1.3b)$$

Olles arvutanud valemi (1.1) alusel amplituudijaotuse u ja püstitanud intensiivsuse jaotuse $I(R, \alpha, \beta)$ (ilma läätseta), ning tehes viimases asenduse (1.3)¹, saamegi otsitava intensiivsuse avaldise kujul

$$I = I \left[\frac{f(f - \Delta)}{\Delta}, \alpha, \beta \right]. \quad (1.4)$$

Kui valemis (1.4) anda Δ -le positiivseid väärtusi, siis I määrab intensiivsuse jaotuse intrafokaalses ruumis (intrafokaalsed difraktsioonkujundid) Andes Δ -le aga negatiivseid väärtusi, saame valemist (1.4) arvutada kõik ektrafokaalsed difraktsioonkujundid.



Joon. 2.

Transformatsioonivalemite (1.3a) ja (1.3b) erinevusest (Δ märgis) võib järeldada, et intrafokaalsed ja ektrafokaalsed difraktsioonkujundid ei ole üldiselt paigutatud sümmeetriliselt fokaaltasandi suhtes.

2. Ühtlase läbilaskvusega ava äärejoone arvutamisest, kui amplituudijaotus on ette antud intra- või ektrafokaalsel tasandil

Kirchhoff'i valemit (1.1) võib intra- ja ektrafokaalse ruumi peatelje lähedaste punktide jaoks küllaldase täpsusega esitada kujul:

¹ Asenduse (1.3) teostamine intensiivsuse avaldises nõuab avasse läätse asetamist fookusekaugusega f .

$$u(l, v, \omega) = \int_{-a}^{+a} e^{iv\xi} e^{-il\xi^2} d\xi \int_{-\eta_0(\xi)}^{+\eta_0(\xi)} e^{i\omega\eta - il\eta^2} d\eta, \quad (2.1)$$

kus $v = ka$, $\omega = k\beta$; $l(\Delta) = \frac{k}{2R} = \frac{k}{2} \frac{\Delta}{f(f-\Delta)}$, $\eta_0(\xi)$ määrab ühtlase läbilaskvusega ava äärejoone kuju ja $u(l, v, \omega)$ on amplituudijaotus l -ga fikseeritavas (või Δ -ga fikseeritavas) intravõi ekstrasfokaalses tasandis.

Edasi tähistame

$$P(\xi, \omega, l) = e^{-il\xi^2} \int_{-\eta_0(\xi)}^{+\eta_0(\xi)} e^{i\omega\eta - il\eta^2} d\eta \quad (2.2)$$

ja defineerime uue funktsiooni P_0 järgmiselt

$$P_0(\xi, \omega, l) = \begin{cases} P(\xi, \omega, l) & \text{kui } -a < \xi < +a, \\ 0 & \text{kui } |\xi| > a. \end{cases}$$

Siis võrrand (2.1) laseb end esitada kujul

$$u(l, v, \omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} P_0(\xi, \omega, l) e^{iv\xi} d\xi. \quad (2.3)$$

Seost (2.3) võib vaadelda kui võrrandit P_0 määramiseks etteantud ekstrasfokaalse amplituudijaotuse $u(l, v, \omega)$ korral. Rakendades võrrandile (2.3) Fourier' transformatsiooni, saame

$$P_0(\xi, \omega, l) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} u(l, v, \omega) e^{-iv\xi} dv. \quad (2.4)$$

Ava äärejoone $\eta_0(\xi)$ arvutamiseks saab kasutada võrdust (2.2), kui asetada viimasesse P asemele P_0 , mis on arvatud võrrandist (2.4). $\eta_0(\xi)$ arvutamiseks on otstarbekohane võrduse (2.2) paremas pooles esinevat integraali teisendada. Selgub, et nimetatud integraal avaldub trigonomeetriliste funktsioonide ja Fresneli integraalide kaudu.

Erijuht: amplituudijaotus on etteantud lõikes $\omega = 0$ ükskõik millise $l \neq 0$ ($\Delta \neq 0$) korral, s. o. $u = u(l, v, 0)$.

Võrrandist (2.4) määrame $P_0(\xi, 0, l)$ ja vastava ava äärejoone $\eta_0(\xi)$ arvutamiseks saame võrrandi (2.2) kujul

$$P(\xi, 0, l) = 2 \sqrt{\frac{\pi}{2l}} e^{-il\xi^2} \left[C \left\{ \sqrt{\frac{2l}{\pi}} \eta_0(\xi) \right\} - iS \left\{ \sqrt{\frac{2l}{\pi}} \eta_0(\xi) \right\} \right], \quad (2.5)$$

kus $C\{\}$, $S\{\}$ on Fresneli integraalid.

Võrrandiga (2.5) on samaväärne järgmine võrrandsüsteem:

$$\begin{aligned} \cos(l\xi^2) P_r(\xi, 0, l) \mp \sin(l\xi^2) P_{im}(\xi, 0, l) = \\ = 2 \sqrt{\frac{\pi}{2l}} C \left\{ \sqrt{\frac{2l}{\pi}} \eta_0(\xi) \right\}, \end{aligned} \quad (2.6a)$$

$$\begin{aligned} \sin(l\xi^2) P_r(\xi, 0, l) \pm \cos(l\xi^2) P_{im}(\xi, 0, l) = \\ = -2 \sqrt{\frac{\pi}{2l}} S \left\{ \sqrt{\frac{2l}{\pi}} \eta_0(\xi) \right\}, \end{aligned} \quad (2.6b)$$

mis on saadud võrrandist (2.5) reaalse ja imaginaarse eraldamise teel ning arvestades, et $P = P_r \pm iP_{im}$

N ä i d e.

On antud Fresneli difraktsiooni võnkeamplituudi avaldis järgmisel konkreetsel kujul:

$$u(v, 0, l) = A - iB, \quad (2.7)^2$$

kus

$$A = \pi a^2 \left\{ \frac{\cos\left(\frac{1}{2}z\right)}{\frac{1}{2}z} F_1 + \frac{\sin\left(\frac{1}{2}z\right)}{\frac{1}{2}z} F_2 \right\}, \quad (2.8)$$

$$B = \pi a^2 \left\{ \frac{\sin\left(\frac{1}{2}z\right)}{\frac{1}{2}z} F_1 - \frac{\cos\left(\frac{1}{2}z\right)}{\frac{1}{2}z} F_2 \right\}$$

$$F_1 = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \left(\frac{z}{y}\right)^{2n+1} J_{2n+1}(y), \quad (2.9)$$

$$F_2 = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \left(\frac{z}{y}\right)^{2n} J_{2n}(y).$$

Need read koonduvad, kui $z < y$,

kus

$$z = \frac{k}{R} a^2, \quad y = va, \quad a = \text{konst.} \quad (2.10)$$

Teostame amplituudivalemite (2.7)–(2.10) asenduse transformatsiooni eeskirjade (1.3) kohaselt, s. o. asendades

$$z = \frac{k}{R} a^2 = ka^2 \frac{\Delta}{f(f-\Delta)} = 2a^2 l(\Delta)$$

saamegi konkreetsed amplituudijaotused intra- või ekstrapokaalse ruumi jaoks.

² Amplituudijaotus valemitega (2.7)–(2.10) on tuletatud Lommel'i poolt (vt. [4]).

Rakendades antud $u(l, v, 0)$ -le transformatsiooni (2.4) saame

$$P(\xi, 0, l) = \begin{cases} P_r - iP_{im} & -a < \xi < +a \\ 0 & |\xi| > a, \end{cases}$$

kus

$$P_r = \frac{\sqrt{2\pi}}{2} a^2 \left\{ \frac{\cos\left(\frac{1}{2}z\right)}{\frac{1}{2}z} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^{2n-\frac{1}{2}} z^{2n+1}}{a^{2(2n+1)} \Gamma\left(2n+\frac{3}{2}\right)} (a^2 - \xi^2)^{2n+\frac{1}{2}} + \right. \\ \left. + \frac{\sin\left(\frac{1}{2}z\right)}{\frac{1}{2}z} \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^{2n-\frac{1}{2}} (z)^{2n}}{a^{2(2n)} \Gamma\left(2n+\frac{1}{2}\right)} (a^2 - \xi^2)^{2n-\frac{1}{2}} \right\} \\ P_{im} = \frac{2\pi}{2} a^2 \left\{ \frac{\sin\left(\frac{1}{2}z\right)}{\frac{1}{2}z} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^{2n+\frac{1}{2}} z^{2n+1}}{a^{2(2n+1)} \Gamma\left(2n+\frac{3}{2}\right)} (a^2 - \xi^2)^{2n+\frac{1}{2}} - \right. \\ \left. - \frac{\cos\left(\frac{1}{2}z\right)}{\frac{1}{2}z} \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^{2n-\frac{1}{2}} z^{2n}}{a^{2(2n)} \Gamma\left(2n+\frac{1}{2}\right)} (a^2 - \xi^2)^{2n-\frac{1}{2}} \right\} \quad (2.11)$$

Asendades P_r, P_{im} kujul (2.11) võrdustesse (2.6) ja arendades võrduste (2.6) mõlemad pooled ritta intra- ja ekstrapokaalust iseloomustava parameetri l (või Δ) astmete järgi, saame vastavate kordajate võrdlemise tulemusena võrdused:

$$(a^2 - \xi^2)^{\frac{1}{2}} = \eta_0(\xi)$$

$$(a^2 - \xi^2)^{\frac{3}{2}} = \eta_0^3(\xi) \\ \vdots \quad \quad \quad \vdots$$

Siit selgub, et otsitav ava äärejoon on ringjoon $\eta_0(\xi) = (a^2 - \xi^2)^{\frac{1}{2}}$ (raadiusega a)

Samasugusele tulemusele võib jõuda ka η_0 numbrilisel arvutamisel näiteks võrrandist (2.5a), fikseerides numbriliselt l (või Δ).

3. Intra- või ekstrapokaalse difraktsioonefekti ja fokaalse difraktsioonefekti ekvivalentsusest

On kehtivad amplituudijaotused: intra- ja ekstrapokaalse ruumi jaoks

$$u_{i.f.} = u(l, v, \omega) = \int_{-a}^{+a} e^{iv\xi - il\xi^2} d\xi \int_{-\eta_1(\xi)}^{\eta_1(\xi)} e^{i\omega\eta - il\eta^2} d\eta,$$

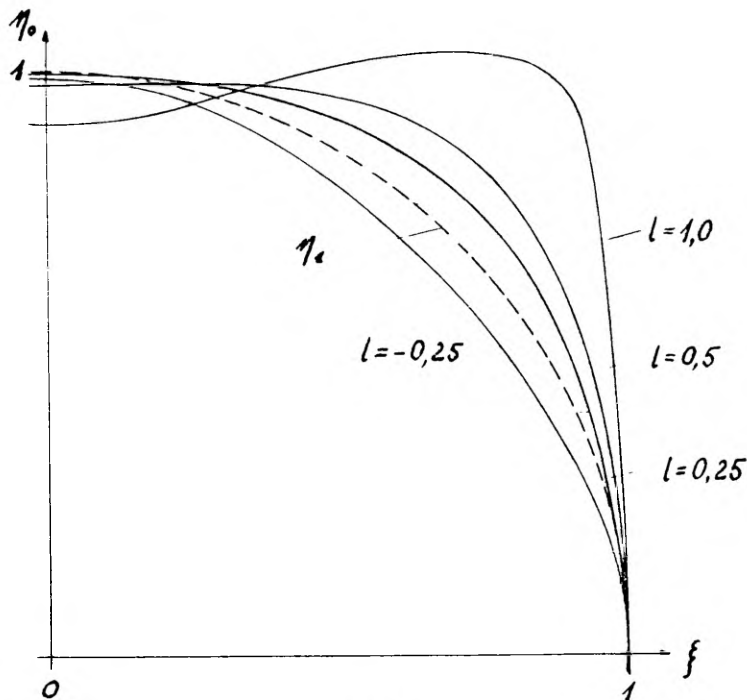
(kus $\eta_1(\xi)$ on ava äärejoon, mis on seotud intra või ekstrapokaalse pildiga) ja fokaaltasandi jaoks

$$u_f = u(v, \omega) = \int_{-a}^{+a} e^{iv\xi} d\xi \int_{-\eta_0(\xi)}^{+\eta_0(\xi)} e^{i\omega\eta} d\eta = 2 \int_{-a}^{+a} \frac{\sin \omega \eta_0(\xi)}{\omega} e^{iv\xi} d\xi,$$

(kus $\eta_0(\xi)$ on ava äärejoon, mis on seotud fokaalse pildiga)
Nõuame, et

$$u_{i.f.} = u_f \quad (3.1)$$

kehtiks iga ω, l korral.



Joon. 3.

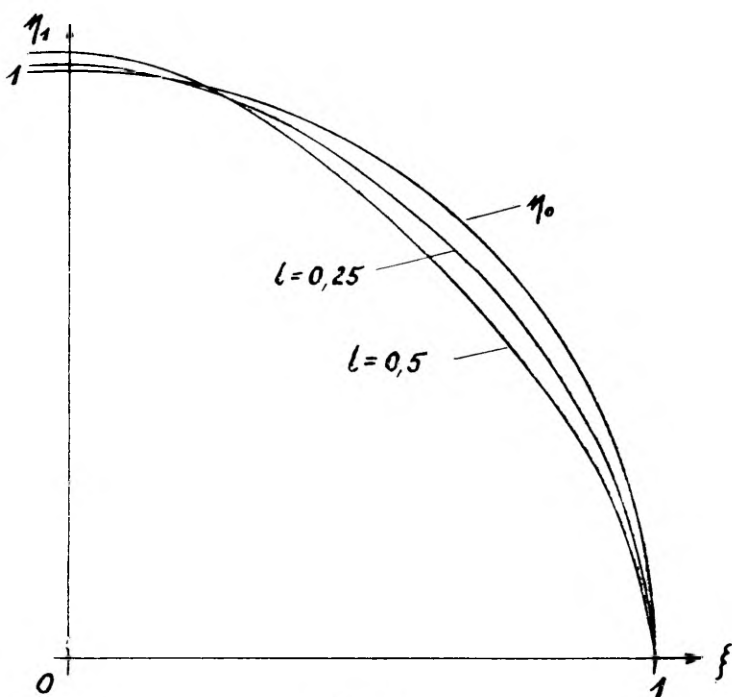
Vaatleme seost (3.1) lõike $\omega = 0$ jaoks. Saame

$$e^{-i l \xi^2} \sqrt{\frac{\pi}{2l}} \left[C \left\{ \sqrt{\frac{\pi}{2l}} \eta_1(\xi) \right\} - i S \left\{ \sqrt{\frac{2l}{\pi}} \eta_1(\xi) \right\} \right] = \eta_0(\xi). \quad (3.2)$$

Võrdusega (3.2) määratud $\eta_0(\xi)$ on üldiselt kompleksne, seepärast arvestame kitsendava tingimusena $\eta_0(\xi)_{im} = 0$. Võrrand reaalse $\eta_0(\xi)$ arvutamiseks kujuneb siis järgmiseks:

$$\eta_0(\xi)_{\omega=0} = \sqrt{\frac{\pi}{2l}} C \left\{ \sqrt{\frac{2l}{\pi}} \eta_1(\xi) \right\} \left[\cos l \xi^2 + \frac{\tan(l \xi^2)}{\cos(l \xi^2)} \right] \quad (3.3)$$

Võrrandist (3.3) $\eta_0(\xi)$ arvutamiseks on tarvis ette anda $\eta_1(\xi)$ ja intra- või ekstrapokaalsust karakteriseeriva parameetri l (või l) väärtused. Arvutustulemused on antud joonisel 3.



Joon. 4.

Mis puutub aga võrrandist (3.3) $\eta_1(\xi)$ arvutamisse etteantud $\eta_1(\xi)$ korral, siis tuleb märkida, et sellel ülesandel ei ole iga l korral reaalselt lahendit $\eta_1(\xi)$. Peale selle on η_1 üldiselt mitmene. Mõned reaalsed $\eta_1(\xi)$ graafikud on antud joonisel 4.

Saadud tulemustest võib järeldada, et valguspunkti intra- või ekstrapokaalne pilt ($l \neq 0$) diafragma $\eta_1(\xi)$ korral on realiseeri-

tav vähemalt ühes lõikes $\omega = \text{konst.}$ diafragma $\eta_0(\xi)$ fokaalse pildina. See aga tähendab Fresneli difraktsiooniülesande taandamist Fraunhoferi difraktsiooniülesandeks.

Saabunud
16. I 1958.

Kirjandus

1. Tuvikene, L., Уч. зап. Тартуск. ун-та, 1958, **62**, 192—218.
2. Born, M., Optik, Berlin, 1933, 147—156.
3. Нёпф, Н., Z. Phys., 1952, **131**, 290—304.
4. Стретт, Дж. В. Волновая теория света, Москва, 1940, 102—105.

ДЕЙСТВИЕ АМПЛИТУДНЫХ ФИЛЬТРОВ И ДИАФРАГМ НА ДИФРАКЦИОННУЮ КАРТИНУ. II

Л. М. Тувикене

Кафедра теоретической физики

Резюме

В работе [1] рассматривались возможности расчета диафрагмы по заданному распределению амплитуды на фокальной плоскости.

В настоящей работе данная проблема рассматривается в более общем виде. Именно, распределение амплитуды u задается на какой-нибудь интра- или экстрафокальной плоскости; отсюда выводятся уравнения (2.4), (2.5) для вычисления соответствующей диафрагмы $\eta_0(\xi)$.

Даны формулы преобразования (1.3) для сведения дифракции Френеля к интра- или экстрафокальной дифракции. В этих формулах Δ обозначает смещение с фокальной плоскости, f — фокусное расстояние линзы.

В статье рассмотрен также вопрос об эквивалентности экстрафокального и фокального дифракционных эффектов.

ÜBER DIE WIRKUNG DER AMPLITUDENFILTER UND DIAPHRAGMEN AUF DAS BEUGUNGSBILD. II

L. Tuvikene

Zusammenfassung

In der Arbeit [1] wurden verschiedene Möglichkeiten der Diaphragmenberechnung im Falle beschrieben, wenn die Amplitudenverteilung auf einer Brennebene vorgegeben ist.

In der vorliegenden Untersuchung werden die erwähnten Probleme allgemeiner behandelt: die Amplitudenverteilung u wird auf einer extrafokalen Ebene vorgegeben. Zur Berechnung des Diaphragmas $\eta_0(\xi)$ werden die Gleichungen (2.4) und (2.5) abgeleitet.

In dem Artikel wird auch die Äquivalenzfrage der extrafokalen und fokalen Beugungseffekte behandelt.