

КАЖУЩИЙСЯ СПЕКТР АЭРОИОНОВ ПРИ УЧЕТЕ ТЕПЛОВОЙ ДИФФУЗИИ

Я. И. Сальм

Самой общей задачей, которая решается с помощью счетчика аэроионов, является снятие спектра аэроионов. Ради краткости спектром аэроионов будем называть нормированную спектральную функцию, определенную предельным переходом

$$f(k) = \lim_{\Delta k \rightarrow 0} \frac{q(k, k + \Delta k)}{q(0, \infty) \Delta k},$$

где $q(k, k + \Delta k)$ — полярная (+ или —) плотность заряда, обусловленная аэроионами, имеющими подвижность в промежутке от k до $k + \Delta k$, $q(0, \infty)$ — полярная плотность заряда.

В этой работе мы рассматриваем аэроионы только одной полярности, безразлично, которой именно, и, соответственно, полярные величины.

Очевидно, $f(k)$ нормирована следующим образом

$$\int_0^{\infty} f(k) dk = 1.$$

Спектр снимается в следующем порядке. Варьируется какой-либо режимный параметр счетчика ψ , обычно это напряжение на конденсаторе или расход (скорость) воздуха, а в это же время измеряется сила тока I на собирающую обкладку конденсатора. Из функции $I(\psi)$, называемой характеристикой счетчика, по теоретическим формулам вычисляется искомый спектр. Однако эти формулы выведены в предположении, что диффузия в измерительном конденсаторе не имеет места. На самом же деле, кроме движений за счет переноса потоком воздуха и за счет электрического поля, аэрион совершает также случайное блуждание за счет беспорядочных столкновений с огромным числом молекул, т. е. аэрион подвержен также молекулярной диффузии.

Интуитивно ясно, что, используя формулы, которые не учиты-

вают диффузию, мы получим спектр, сглаженный по сравнению с истинным — все «пики» утолщены, а близлежащие «пики» могут слиться, т. е. разрешающая способность ухудшается.

Наиболее полно этот вопрос исследован в работе [Таммет, 1967]. В этой работе рассматривается случай предельно слабой диффузии, а действие ее характеризуется относительной ошибкой определения подвижности дискретной группы аэроионов, независимо от конкретного типа счетчика, исходя из дисперсий координат аэроиона при броуновском движении.

Попытаемся уточнить и конкретизировать представления и понятия, связанные с действием диффузии при измерении спектра аэроионов.

* *
*

В вышеуказанной работе характеристика действия диффузии — относительная ошибка подвижности — получена, исходя из выражения подвижности аэроиона через координаты при движении в однородных скрещенных полях (электрическое поле с напряженностью E и поле течения воздуха со скоростью u) (см. рисунок 1):

$$k = \frac{u}{E} \frac{y}{x} = \frac{u}{E} \operatorname{tg} \alpha. \quad (1)$$

Относительная кажущаяся дисперсия подвижности найдена в вышеприведенной работе сложением относительных дисперсий координат x и y или, можно сказать, использована линеаризация выражения (1), оставляя в ряде Тейлора только линейные члены. Линеаризация вызывает возражения в связи с тем, что координаты при броуновском движении очень хорошо описываются нормальным распределением, а, следовательно, k вообще не имеет моментов.

Покажем, как можно более строго определить смысл относительной ошибки подвижности, используя подход, близкий к работе [Таммет, 1962].

На рис. 1 изображено движение аэроиона, отправившегося из начала координат O . Через некоторое время t местонахождение аэроиона определяется двумерным нормальным распределением координат с плотностью вероятности

$$p(x, y) = \frac{1}{2\pi\sigma^2} \exp \left[-\frac{(x-ut)^2 + (y-kEt)^2}{2\sigma^2} \right], \quad (2)$$

где σ — стандартное отклонение координаты аэроиона. Как указано в вышеотмеченных работах,

$$\sigma = \sqrt{2Dt} = \sqrt{\frac{2kTkt}{q}}, \quad (3)$$

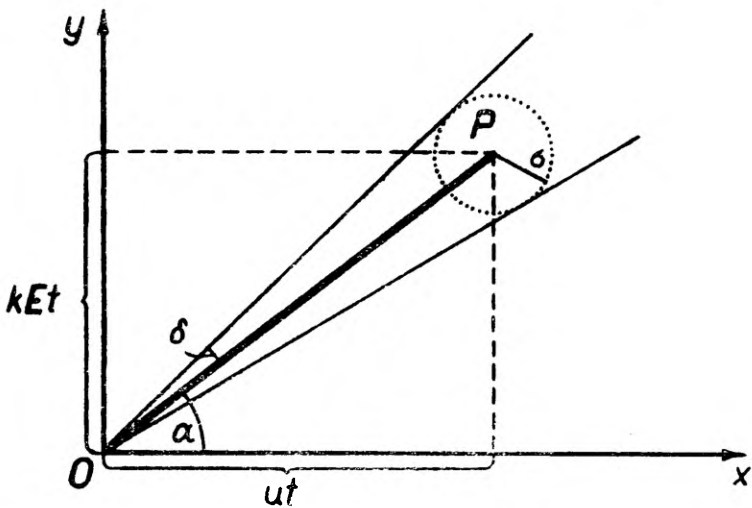


Рис. 1.

где D — коэффициент диффузии, K — постоянная Больцмана, T — абсолютная температура, q — заряд аэроиона.

Линии равной плотности вероятности являются окружностями, центром которых будет математическое ожидание положения аэроиона — это точка P с координатами $x=ut$ и $y=kEt$. Поглощения стенками в данном случае не учитываем, что должно оправдываться при слабой диффузии, т. е. когда σ намного меньше, чем расстояние \overline{OP} .

Когда поглощение стенками не ощущается, то центр распределения P движется по прямой согласно уравнению (1). На рис. 1 проведена пунктирная окружность с центром в точке P и радиусом σ , а также проведены две прямые через начало координат, касающиеся этой окружности. По мере уменьшения отношения σ/\overline{OP} , т. е. по мере ослабления диффузии вероятность нахождения аэроиона между этими двумя прямыми приближается к $\Phi(1) \approx 0,68$ (Φ — интеграл ошибок). Рассматривая угол δ на рис. 1 как эквивалентное малое приращение подвижности σ_k , свяжем δ с σ_k , используя дифференцирование выражения (1), а окончательно получим известную формулу относительной ошибки подвижности

$$s_k = \frac{\sigma_k}{k} = \sqrt{\frac{2KT}{qU} \left(1 + \frac{k^2 E^2}{u^2}\right)}, \quad (4)$$

где U — напряжение между отправной точкой движения и центром распределения в конечный момент t .

Таким образом, мы увидели, что, хотя линеаризация функции (1). строго говоря, не допускается, все же полученную формулу относительной ошибки подвижности (4) можно вполне определенно интерпретировать. Аэроионы с некоторой подвижностью k кажутся непрерывно распределенными, причем по мере ослабления диффузии вероятность, что случайные отклонения подвижности не превышают σ_k , определенную по формуле (4), асимптотически приближается к значению Φ (1)

Формулу (4) можно было бы уточнить, найдя второе приближение, оставив в ряде Тейлора также квадратические члены. Поправка приблизительно будет равна s_k^2 . Однако более значительным может оказаться учет поглощения стенками. Поэтому подробных формул мы не приводим.

* *
*

Выше мы отметили, что кажущееся распределение подвижности, согласно формулам (1) и (2), моментов не имеет. Постараемся доказать это более детально на одном частном случае измерительного конденсатора. Рассмотрим плоский измерительный конденсатор с однородными скрещенными полями, согласно рис. 1. Обкладки конденсатора параллельны оси x . Аэроионы отправляются из точки O с постоянной двумерной силой тока I . Допустим, что собирающая обкладка представляет собой малый отрезок в окрестности точки P . Это соответствует т. н. дифференциальному счетчику второго порядка. Результаты, по-видимому, будут справедливы и в случае дифференциального счетчика первого порядка с раздельным потоком воздуха. Естественно определить кажущийся спектр аэроионов как спектр, полученный применением формул, действительных при отсутствии диффузии. В нашем случае дифференциального счетчика второго порядка для нахождения кажущегося спектра мы должны приравнять плотности тока через верхнюю обкладку в точке P в двух случаях: 1) когда диффузия не имеет места, а аэроионы имеют спектр $f(k)$, 2) когда имеется дискретная группа аэроионов и происходит диффузия.

В первом случае, для нахождения плотности тока j , учитываем, что при варьировании параметра E или u на инфинитезимальный отрезок $(x, x+dx)$ попадают аэроионы с некоторого промежутка подвижностей $(k, k+dk)$, где k определяется просто по формуле (1) а $|dk| = \frac{k}{x} dx$, плотность тока

$$j = I k f(k) / x. \quad (5)$$

Во втором случае обозначим плотность тока j_d , а вычислять ее будем ниже.

Как мы видим, кажущийся спектр различается для различных варьируемых режимных параметров. Рассмотрим случаи варьирования напряженности поля E и скорости воздуха u . Кажущийся спектр дискретной группы при варьировании напряженности поля

$$f_E^*(k) = \frac{xj_d \left[E = \frac{uy}{kx} \right]}{kI}, \quad (6)$$

а при варьировании скорости

$$f_u^*(k) = \frac{xj_d \left[u = \frac{Ekx}{y} \right]}{kI} \quad (7)$$

$j_d[\psi]$ означает, что для вычисления каждого значения $j_d^*(k)$ следует брать значение j_d именно при таком значении аргумента, в зависимости от заданного значения k .

В случае 2 (т. е. дискретная группа с диффузией) плотность заряда в точке (x, y)

$$\rho(x, y) = \int_0^{\infty} \rho(x, y) dt.$$

Взяв $\rho(x, y)$ из формул (2) и (3),

$$\rho(x, y) = \frac{I}{2\pi D} \exp \left[\frac{ux + k_1 Ey}{2D} \right] K_0 \left(\frac{\sqrt{(u^2 + k_1^2 E^2)(x^2 + y^2)}}{2D} \right), \quad (8)$$

где k_1 — подвижность дискретной группы, $K_0(z)$ — функция Макдональда (модифицированная функция Бесселя второго рода). При слабой диффузии (например, при $z > 10$) с ошибкой менее 1% можно использовать асимптотическую форму $K_0(z) \approx \sqrt{\pi/2z} e^{-z}$. Для практики ограничение $z > 10$ приемлемо. Плотность тока вычислим по формуле $j_d = k_1 E \rho(x, y)$

Сделав также некоторые алгебраические преобразования, вычислим кажущиеся спектры по (6) и (7)

$$f_E^*(k) = \frac{\sqrt{quk_1} y}{4 \sqrt{\pi K T x} \sqrt{\left(1 + \frac{y^2}{x^2}\right) \left(1 + \frac{k_1^2 y^2}{k^2 x^2}\right)}} \times \\ \times \exp \left[- \frac{\frac{y^2}{x^2} \left(1 - \frac{k_1}{k}\right) - \left(\sqrt{1 + \frac{y^2}{x^2}} - \sqrt{1 + \frac{k_1^2 y^2}{k^2 x^2}} \right)^2}{4KTk_1/qux} \right], \quad (9)$$

$$f_u^*(k) = \frac{\sqrt{qEk_1y}}{4} \times \frac{1}{2\sqrt{\pi KTx}} \sqrt{\left(1 + \frac{y^2}{x^2}\right) \left(1 + \frac{k_1^2 y^2}{k^2 x^2}\right)} k^{\frac{3}{2}} \times \exp\left[-\frac{\frac{y^2}{x^2} \left(1 - \frac{k_1}{k}\right)^2 - \left(\sqrt{1 + \frac{y^2}{x^2}} - \sqrt{1 + \frac{k_1^2 y^2}{k^2 x^2}}\right)^2}{4KTk_1y/qEx^2k}\right] \quad (10)$$

Чтобы характеризовать полученные кажущиеся спектры, выясним, нормированы ли они, а также, обладают ли они моментами. Нормировка возможна, если интеграл

$$\int_0^{\infty} f_{\psi}^*(k) dk$$

сходится. Сходимость, а также существование конечных моментов можно определить по поведению функций $f_{\psi}^*(k)$ при приближении к крайним точкам 0 и ∞ , так как внутри этого промежутка особых точек нет. Легко перейти от функций $f_{\psi}^*(k)$ к функциям $f_{\psi}^*\left(\frac{1}{k}\right)$. Для этого надо лишь первую умножить на k^2 .

Оказывается, что интеграл от $f_E^*(k)$, следовательно, также и от $f_E^*\left(\frac{1}{k}\right)$ сходится, а от $f_u^*(k)$ и $f_u^*\left(\frac{1}{k}\right)$ — нет.

Нормированность спектра $f_E^*(k)$, следовательно, также и $f_E^*\left(\frac{1}{k}\right)$, можно доказать, используя интеграл [Градштейн, Рыжик, 1962]

$$\int_0^{\infty} K_0[\alpha\sqrt{x^2 + \beta^2}] \cos \gamma x dx = \frac{\pi}{2\sqrt{\alpha^2 + \gamma^2}} \exp[-\beta\sqrt{\alpha^2 + \gamma^2}]$$

[Re $\alpha > 0$, Re $\beta > 0$, $\gamma > 0$].

При этом сделаем подстановку $\gamma = -i\gamma$, а в подинтегральном выражении — подстановки $K_0(z) := \sqrt{\pi/2z} e^{-z}$ и $\text{ch } \gamma x := \frac{1}{2} e^{\gamma x}$, допустимые в условиях слабой диффузии.

Учет поглощения аэроионов одной (собирающей) обкладкой не вызывает больших затруднений, так как распределение времени первого достижения границы (оно же момент поглощения) при броуновском движении известно [Прохоров, Розанов, 1967]. Соответствующие формулы кажущегося спектра мало отличаются от формул (9) и (10). Однако учет поглощения лишь одной обкладкой, по-видимому, не оправдан, а при наличии поглощения на обеих обкладках анализ намного сложнее.

Поведение спектральных функций в отдаленных точках, где значения ее практически равны нулю, имеет значение только при строгом теоретическом анализе. Во многих случаях могут быть полезны приближенные выражения этих функций для центральной части спектра, где сосредоточена основная масса вероятности.

Так как на практике длина измерительного конденсатора обычно превышает расстояние между обкладками, то интерес представляет случай длинного измерительного конденсатора для значений k , немного отличающихся от k_1 . Из формул (9) и (10) вытекают следующие функции

$$f_E^*(k) = \frac{\sqrt{qEk}y}{2\sqrt{\pi KTx \left(1 + \frac{y^2}{x^2}\right) k^2}} \times \exp \left[\frac{quy^2 (k-k_1)^2}{4KTx \left(1 + \frac{y^2}{x^2}\right) k_1 k^2} \right], \quad (11)$$

$$f_n^*(k) = \frac{\sqrt{qEk_1}}{2\sqrt{\pi KT \left(1 + \frac{y^2}{x^2}\right) k^{\frac{3}{2}}}} \exp \left[\frac{quE(k-k_1)^2}{4KT \left(1 + \frac{y^2}{x^2}\right) k_1 k} \right] \quad (12)$$

Отметим, что формула (11) представляет собой нормальное распределение величины $\frac{1}{k}$

Эти формулы дают хорошую аппроксимацию при $y < x$ даже для не очень слабой диффузии. Чтобы иллюстрировать точность приближения, сравним функцию $f_E^*(k)$ по формулам (9) и (11), если $\frac{\sigma_h}{k_1} = 0,1$. Оказывается, что при $\frac{y}{x} = 0,1$ разница в значениях этих функций в точках, где $\frac{k-k_1}{k_1} = \pm 0,2$ (что охватывает 95% всей вероятности) не превышает 0,2%, а ближе к центру точность возрастает. Даже в случае относительного короткого конденсатора, если $\frac{y}{x} = 1$, точность формулы (11) неплохая, что иллюстрируется таблицей, вычисленной также при $\frac{\sigma_k}{k_1} = 0,1$.

Таблица

$f_E^*(k)$ \ $\frac{k-k_1}{k_1}$	-0,2	-0,1	0	0,1	0,2
По формуле (11)	0,83	2,99	4,00	2,00	0,37
По формуле (9)	1,11	3,18	4,00	1,97	0,34

При увеличении длины конденсатора точность аппроксимации быстро возрастает.

Для того, чтобы было возможно использовать просто нормальное распределение для приближения $\tilde{f}_\psi^*(k)$, нужно, чтобы диффузия была намного слабее, чем в рассмотренном примере (при той же точности, по-видимому $\frac{\sigma k}{k_1} < 0,01$)

* *
*

Кажущийся спектр дискретной группы аэроионов можно применять и в случае непрерывного спектра. Допустим, что мы имеем истинный непрерывный спектр $f(k)$. а при измерениях, используя теорию, не учитывающую диффузию, мы получили искаженный (сглаженный) спектр $\tilde{f}(k)$. Этот искаженный спектр можно выразить в виде интегрального преобразования

$$\tilde{f}(k) = \int_0^{\infty} f_\psi^*(k; k_1) f(k_1) dk_1, \quad (13)$$

где $f_\psi^*(k; k_1)$ — кажущийся спектр дискретной группы аэроионов с подвижностью k_1 .

Поставим целью найти истинный спектр $f(k)$, другими словами, решить интегральное уравнение (13). Используем упрощенные выражения для кажущегося спектра дискретной группы (11) и (12), переделав их в более наглядную форму:

$$f_E^*(k; k_1) = \sqrt{\frac{a}{\pi}} \frac{\sqrt{k_1}}{k^2} e^{-a \left(\frac{\sqrt{k_1}}{k^2} - \frac{1}{\sqrt{k_1}} \right)^2} \quad (14)$$

$$f_u^*(k; k_1) = \sqrt{\frac{b}{\pi}} \frac{\sqrt{k_1}}{k^{\frac{3}{2}}} e^{-b \left(\sqrt{\frac{k}{k_1}} - \sqrt{\frac{k_1}{k}} \right)^2}, \quad (15)$$

где

$$a = \frac{quy^2}{4KTx \left(1 + \frac{y^2}{x^2} \right)},$$

$$b = \frac{qEy}{4KT \left(1 + \frac{y^2}{x^2} \right)}$$

Постоянная a имеет размерность подвижности, а b — безразмерна.

Рассмотрим сперва случай варьирования напряжения. После раскрытия скобок в экспоненте и сгруппирования членов, согласно формулам (14) и (13), имеем

$$\sqrt{\frac{\pi}{a}} k^2 e^{-\frac{2a}{k}} \tilde{f}(k) = \int_0^{\infty} e^{-a \frac{k_1}{b^2}} e^{-\frac{a}{k_1}} \sqrt{k_1} f(k_1) dk_1.$$

Введем новые переменные ω и z ,

$$\frac{a}{k_1} := e^{\omega}, \quad \frac{a^2}{k^2} := e^z$$

После сгруппирования членов имеем

$$\sqrt{\pi} e^{-z - \frac{z}{2e^z}} \tilde{f}(ae^{-\frac{z}{2}}) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-e^z - \omega} e^{-\frac{3}{2} \omega - e^{-\omega}} f(ae^{-\omega}) d\omega.$$

В этом выражении можно выделить три функции соответственно только от z , $z - \omega$ и ω , причем

$$\tilde{g}(z) = \int_{-\infty}^{\infty} g^*(z - \omega) g(\omega) d\omega. \quad (16)$$

Это представляет собой свертку функций g^* и g . Интегральное уравнение типа свертки можно решить известными методами, например, применяя преобразование Фурье. Затем следует от полученной функции $g(\omega)$ перейти к $f(k)$.

В случае варьирования скорости воздуха исходим из формулы (15), раскрываем скобки в экспоненте и делаем подстановки $k_1 := e^{\omega}$, $k := e^z$. Окончательно имеем

$$\sqrt{\frac{\pi}{b}} e^{-2b + \frac{3}{2} z} \tilde{f}(e^z) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-2b \operatorname{ch}(z - \omega)} e^{\frac{\omega}{2}} f(e^{\omega}) d\omega,$$

что также подходит под схему (16)

Таким образом можно найти точный спектр и в случае диффузии.

ЛИТЕРАТУРА

- Градштейн Н. С., Рыжик И. М., 1962. Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. «ФМ», М.
 Прохоров В. В., Розанов Ю. А., 1967. Теория вероятностей. «Наука», М.

Т а м м е т Х. Ф., 1962. Искажающие эффекты в аспирационных счетчиках аэроионов. Изв. АН СССР, сер. геофиз. (№ 6), стр. 845—853.

Т а м м е т Х. Ф., 1967. Аспирационный метод измерения спектра аэроионов. Уч. зап. Тартуского гос. ун-та, вып. 195.

Поступила 4/IV 1968 г.

AEROIOONIDE NÄIV SPEKTER SOOJUSLIKU DIFUSIOONI ARVESTAMISEL

J. Salm

Resümee

Viidatud kirjanduses (Таммет, 1967) ilmunud valem nõrga soojusliku difusiooni tõttu tekkiva liikuvuse suhtelise vea kohta on tuletatud toetudes momentide mõistele, mis matemaatiliselt rangel käsitlusel pole võimalik. Käesolevas töös on näidatud, kuidas on siiski võimalik ülalnimetatud valemit kindlal viisil tõenäosuslikult interpreteerida. Edasi on teist järku ja (õhuvoolu järgi) esimest järku diferentsloendurite erijuhtudel uuritud, millised näivad spektrid saadakse nõrga difusiooni puhul, kui kasutada spektri arvutamiseks seoseid, mis kehtivad difusiooni puudumise eeldusel. Lõpuks on visandatud üks meetod tõelise spektri leidmiseks, lähtudes difusiooni poolt silutud mõõdetud spektrist.

THE APPARENT SPECTRUM OF AIR IONS DUE TO HEAT DIFFUSION

J. Salm

Summary

The formula (obtained from the literature referred to [Таммет, 1967]) of calculating the relative error of mobility arising from weak heat diffusion, has been originally derived from the concept of moments, which in a strictly mathematical treatment would be impossible. It is shown in the present paper how it is still possible to interpret it in a certain way from the standpoint of probability.

Further, the author has studied in special cases of the second-grade and (judging by the air-flow) first-grade differential counter, what kind of apparent spectra are obtained in weak diffusion if for the calculation of the spectrum relationships are used which are applicable in the absence of diffusion.

Last, a method has been outlined for the calculation of a real spectrum proceeding from the measured spectrum smoothed by diffusion.