ОБ ОПРЕДЕЛЕНИИ ЗАРЯДА ЧАСТИЦ АЭРОЗОЛЕЙ ОСЦИЛЛЯЦИОННЫМ МЕТОДОМ

М. М. Фишер

Рассмотрим определение зарядов частиц аэрозолей в границах применимости закона Стокса в специальном случае использования в осцилляционном методе [1, 3, 4] электрического поля симметричной прямоугольной формы

$$E(t)=\frac{4E_0}{\pi}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\sin(2k+1)\omega t}{2k+1}=\begin{cases} E_0, \text{ когда } nT\leqslant t\leqslant(2n+1)\frac{T}{2} \\ -E_0, \text{ когда } (2n-1)\frac{T}{2}\leqslant t\leqslant nT, \end{cases} \quad (1)$$

которое является наилучшим с точки зрения чувствительности по заряду. Общеизвестно определение радиуса и заряда частицы по вертикальному компоненту скорости и углу наклона траектории [1, 3]. Радиус частицы в этом случае определяется на основе формулы

$$r=\left(\frac{9\eta V_y}{2\gamma g}\right)^{1/2}, \quad (2)$$

где V_y — вертикальный компонент скорости частицы, η — вязкость среды, γ — плотность частицы, g — ускорение силы тяжести. В дальнейшем радиус частицы будем считать известным, и рассмотрим определение ее заряда с помощью амплитуды ее колебаний в направлении электрического поля. Это оказывается необходимым, если условие квазистационарности $\frac{\omega}{\alpha}=\frac{2\pi f}{\alpha}\ll 1$, где $\alpha=\frac{6\pi\eta r}{m}$, m — масса частицы, не выполняется и траектория частицы в такой степени искажена, что величину угла наклона траектории измерить невозможно [2].

Выбирая ось x по направлению однородного периодического электрического поля, мы можем записать дифференциальное уравнение, описывающее колебания частицы в направлении электрического поля в виде

$$m\frac{d^2x}{dt^2}+6\pi\eta r\frac{dx}{dt}-qE(t)=0, \qquad (3)$$

где q — заряд частицы. Уравнение (3) приближенное, сопротивление среды считается безынерционным [4]. Решая уравнение (3), найдем закон движения частицы в электрическом поле $x=x(r, q, t)$, из которого можно определить амплитуду колебаний $A=A(r, q, T)$. Зная величины r и T и измеряя на фотограмме амплитуду A, можно найти заряд частицы.

Уравнение (3) проще всего решается следующим методом: проинтегрируем уравнение отдельно по двум промежуткам времени

$$0\leqslant t\leqslant\frac{T}{2} \text{ и } \frac{T}{2}\leqslant t\leqslant T,$$

в течение которых напряженность поля $E(t)$ постоянна и равна E_0 или $-E_0$. Затем свяжем полученные выражения условиями непрерывности и периодичности. В этом случае полученное выражение описывает только сформированные колебания, не описывая переходного процесса. Уравнение (3) можно представить следующим образом:

$$\left.\begin{aligned}&\frac{d^2x_1}{dt^2}+\alpha\frac{dx_1}{dt}-\beta E_0=0\\&\frac{d^2x_2}{dt^2}+\alpha\frac{dx_2}{dt}+\beta E_0=0\end{aligned}\right\} \qquad (4)$$

Здесь

$$x=\begin{cases}x_1, \text{ когда } 0\leqslant t\leqslant\frac{T}{2}\\ x_2, \text{ когда } \frac{T}{2}\leqslant t\leqslant T\end{cases}; \quad \alpha=\frac{6\pi\eta r}{m}; \quad \beta=\frac{q}{m} \qquad (5)$$

Общие решения уравнений (4) будут

$$\left.\begin{aligned}x_1&=\frac{\beta E_0}{\alpha}t+A_1\exp(-\alpha t)+B_1\\x_2&=-\frac{\beta E_0}{\alpha}t+A_2\exp(-\alpha t)+B_2\end{aligned}\right\} \qquad (6)$$

На основе условия непрерывности

$$\left.\begin{aligned}&x_1\left(\frac{T}{2}\right)=x_2\left(\frac{T}{2}\right)\\&\frac{dx_1}{dt}\left(\frac{T}{2}\right)=\frac{dx_2}{dt}\left(\frac{T}{2}\right)\end{aligned}\right\}$$

постоянные A_2 и B_2 выражаются через A_1 и B_1. Получим

$$\left.\begin{aligned}A_2&=A_1-\frac{2\beta E_0}{\alpha^2}\exp\left(\frac{\alpha T}{2}\right)\\B_2&=B_1+\frac{\beta E_0 T}{\alpha}+\frac{2\beta E_0}{\alpha^2}\end{aligned}\right\} \qquad (7)$$

Используя условие периодичности

$$\left.\begin{aligned} x_1(0) &= x_2(T) \\ \frac{dx_1}{dt}(0) &= \frac{dx_2}{dt}(T) \end{aligned}\right\},$$

получим

$$\left.\begin{aligned} A_1 - A_2\exp(-\alpha T) - \frac{2\beta E_0}{\alpha^2} &= 0 \\ B_2 - B_1 - \frac{\beta E_0 T}{\alpha} - \frac{2\beta E_0}{\alpha^2} &= 0 \end{aligned}\right\} \tag{8}$$

С помощью выражений (7) и (8) найдем

$$\left.\begin{aligned} A_1 &= \frac{2\beta E_0}{\alpha^2}\,\frac{1}{1+\exp\left(-\frac{\alpha T}{2}\right)} \\ A_2 &= -\frac{2\beta E_0}{\alpha^2}\,\frac{\exp\left(\frac{\alpha T}{2}\right)}{1+\exp\left(-\frac{\alpha T}{2}\right)} = -A_1\exp\left(\frac{\alpha T}{2}\right) \end{aligned}\right\} \tag{9}$$

Уравнения, связывающие константы B_1 и B_2, идентичны. B — константа, связанная с начальным положением частицы. Задавая величину B_1, мы фиксируем также величину B_2 и наоборот.

Общее решение (6) системы уравнений (4) на основании (8) и (9) можно теперь записать в виде

$$\left.\begin{aligned} x_1 &= \frac{\beta E_0 t}{\alpha} + \frac{2\beta E_0}{\alpha^2}\,\frac{\exp(-\alpha t)}{1+\exp\left(-\frac{\alpha T}{2}\right)} + B_1 \\ x_2 &= -\frac{\beta E_0 t}{\alpha} - \frac{2\beta E_0}{\alpha^2}\,\frac{\exp\left(\frac{\alpha T}{2}-\alpha t\right)}{1+\exp\left(-\frac{\alpha T}{2}\right)} + B_1 + \frac{\beta E_0 T}{\alpha} + \frac{2\beta E_0}{\alpha^2} \end{aligned}\right\} \tag{10}$$

Обозначив

$$a = \frac{\beta E_0}{\alpha};\quad b = \frac{2\beta E_0}{\alpha^2\left[1+\exp\left(-\frac{\alpha T}{2}\right)\right]};\quad c = \frac{\beta E_0}{\alpha}\left[T+\frac{2}{\alpha}\right], \tag{11}$$

систему (10) можно представить в виде

$$\left.\begin{aligned} x_1 &= at + b\exp(-\alpha t) + B_1 \\ x_2 &= -at - b\exp\left(\frac{\alpha T}{2} - \alpha t\right) + B_1 + C \end{aligned}\right\} \tag{12}$$

Уравнения (12) описывают колебания заряженной частицы в направлении электрического поля. Найдем из них двойную амплитуду колебаний частицы D.

$$D=|x_1(t_1)-x_2(t_2)|,$$

где t_1 и t_2 — моменты времени, когда соответственно x_1 и x_2 экстремальны:

$$\left.\begin{aligned} t_1 &= \frac{1}{\alpha}\ln\frac{\alpha b}{a} \\ t_2 &= \frac{1}{\alpha}\ln\frac{\alpha b}{a}+\frac{T}{2} \end{aligned}\right| \qquad (13)$$

Более точный анализ показывает, что в момент t_1 $x_1(t)$ имеет минимум, а в момент t_2 $x_2(t)$ максимально. Учитывая это, мы можем выразить D следующим образом:

$$D=x_2(t_2)-x_1(t_1)$$

Из формул (12) и (13) получим

$$D=C-\frac{2a}{\alpha}\left[\frac{\alpha T}{4}+\ln\frac{\alpha b}{a}+1\right]$$

Используя ранее введенные обозначения (11), получим

$$D=\frac{2\beta E_0}{\alpha^2}\left[\ln\left(1+\exp\left\{\frac{\alpha T}{2}\right\}\right)-\ln 2-\frac{T\alpha}{4}\right]=\frac{2\beta E_0}{\alpha^2}\ln \operatorname{ch}\frac{\alpha T}{4}$$

При условии квазистационарности $\frac{\omega}{\alpha}\ll 1$ последняя формула дает двойную амплитуду безынерционно колеблющейся частицы. Поскольку $\beta=\frac{q}{m}$ и $D=2A$, то величина заряда частицы выражается через амплитуду колебаний следующим образом:

$$q=\frac{Am\alpha^2}{E_0\ln \operatorname{ch}\frac{\alpha T}{4}} \qquad (14)$$

Учитывая, что

$$m=\frac{4}{3}\pi r^3\gamma \quad \text{и} \quad \alpha=\frac{6\pi\eta r}{m},$$

можно выразить величину заряда частицы через радиус, амплитуду колебаний и частоту электрического поля f:

$$q=\frac{27\pi A\eta^2}{E_0 r\gamma\ln \operatorname{ch}\frac{9\eta}{8\gamma r^2 f}}. \qquad (15)$$

Формулу (14) можно использовать и для определения величины заряда таких частиц, для которых сопротивление среды выражается формулой Кенингема

$$F_M = -\frac{6\pi\eta r^2 V}{r + A\lambda},$$

где λ — средняя длина свободного пробега молекул воздуха. A — численный коэффициент [4]. В этом случае следует только величину α взять из формул (14) в виде

$$\alpha = \frac{6\pi\eta r^2}{m(r + A\lambda)} = \frac{9\eta}{2r\gamma(r + A\lambda)} \qquad (16)$$

Величину радиуса частицы в формуле (16) следует найти предварительно с помощью вертикального компонента ее скорости следующим образом:

$$r = \frac{1}{2}\left[\left(A^2\lambda^2 + \frac{18V_y\eta}{\gamma g}\right)^{1/2} - A\lambda\right]$$

Что касается фазового сдвига между колебательным движением частицы и изменениями напряженности электрического поля, то можно показать, что в рассмотренном случае он не превосходит $\frac{\pi}{2}$ Очевидно, что разность фаз

$$\Delta\varphi = \frac{2\pi t_1}{T} = \frac{2\pi}{T\alpha} \ln \frac{\alpha b}{a}$$

На основе сделанных обозначений (11) найдем

$$\Delta\varphi = \pi + \frac{2\pi}{T\alpha}\left[\ln 2 - \ln\left(1 + \exp\left\{\frac{\alpha T}{2}\right\}\right)\right] \qquad (17)$$

Разность фаз $\Delta\varphi$ увеличивается с увеличением радиуса частицы. Если рассчитать по формуле (17) предельное значение разности фаз при стремлении радиуса частицы к бесконечности, получим

$$\lim_{\alpha \to 0} \Delta\varphi = \frac{\pi}{2}.$$

Такой же результат для предельного значения разности фаз получим и при $T \to 0$.

При использовании напряженности поля симметричной прямоугольной формы знак заряда частицы на основании анализа формы траектории определить нельзя. Для определения знака заряда частицы можно использовать прерывание светового потока, освещающего частицу, синхронно с изменениями электрического поля, причем фаза электрического поля в момент прерывания должна быть определенной [2]. Так как разность фаз $\Delta\varphi$ никогда не превышает $\frac{\pi}{2}$ то световой поток можно прерывать в течение каждого периода в промежутках $\left(\frac{T}{4}, \frac{T}{2}\right)$ или $\left(\frac{3T}{4}, T\right)$ Используя такой прерывистый световой поток, на фотограмме получим световые метки, которые для отрицательных частиц всегда находятся в части траектории, соответствующей противоположному по сравнению с положительно заряженными частицами движению.

Следует отметить, что рассмотренный выше метод для нахождения амплитуды колебаний частицы целесообразно применить в каких угодно специальных случаях кусочно постоянного периодического электрического поля.

Если в уравнение (3) подставить в соответствующей форме ряд Фурье напряженности поля, то можно найти $x=x(t)$ как функцию, содержащую бесконечные суммы. Для нахождения амплитуды колебаний следует вычислить экстремальные значения этих сумм, что не всегда просто сделать.

ЛИТЕРАТУРА

1. Краав, В., Об определении заряда и размеров капельного аэрозоля. ТГУ. Дипломная работа. Тарту, 1961.
2. Юпрус, Я., Некоторые вопросы, связанные с определением радиусов и зарядов частиц аэрозолей осцилляционным методом. ТГУ Дипломная работа. Тарту, 1966.
3. Спурный, К., Йех, Ч., Седлачек, Б., Шторх, Аэрозоли. Атомиздат, 1964.
4. Фукс, Н. А., Механика аэрозолей. Изд-во АН СССР М., 1955.

Поступила 15/I 1969 г.

AEROSOOLIOSAKESE LAENGU MÄÄRAMISEST OSTSILLATSIOONIMEETODIL

M. Fischer

Resümee

Artiklis vaadeldakse aerosooliosakese laengu määramist ostsillatsioonimeetodil ta elektriväljasihiliste võnkumiste amplituudi põhjal Stokes'i seaduse kehtivuse piirkonnas nelinurkse sümmeetrilise elektrivälja kasutamise erijuhul. Osakese elektriväljasihilisi võnkumisi kirjeldava diferentsiaalvõrrandi lahendamisel on kasutatud matemaatilist meetodit, mis viib kergesti sihile mistahes tükati konstantse elektrivälja rakendamise juhul.

Saadud valemid on rakendatavad osakeste laengute arvutamisel, samuti ka ostsillatsioonimeetodi laengutundlikkuse hindamisel ning vastava mõõteseadme konstrueerimisel.

ON DETERMINING THE AEROSOL PARTICLE CHARGE BY THE OSCILLATION METHOD

M. Fischer

Summary

The article deals with the determination of the charge of an aerosol particle by the oscillation method on the basis of the amplitude of oscillations directed toward the electric field within the limits of the validity of Stokes' law in a special case of applying a quadrangular symmetric electric field. In solving the differential equation describing oscillations directed toward the electric field a mathematical method has been used which readily helps to reach the aim in the case of an interruptedly constant electric field.

The formulae obtained are applicable to the calculation of the particle charges, the evaluation of the charge sensitivity of the oscillation method as well as the design of a respective measuring device.