NÄHTUSE TÄISJUURDEKASVU JAOTAMISE METOODIKAST

A. Isotamm
Rahanduse ja krediidi kateeder

I.

Teatavasti valitseb nähtuste vahel statistiline sõltuvus, kui ühe suuruse igale antud väärtusele vastab teise suuruse väärtuste jaotus, mis muutub koos esimese suuruse muutumisega. Statistilise sõltuvuse üks piirjuht on nähtustevahelise sõltuvuse täielik puudumine; teine piirjuht on funktsionaalne sõltuvus: funktsiooni muutumine on tingitud argumentide muutumisest. Sel juhul avaldub resultaatnähtuse väärtus temaga põhjuslikult seotud teiste nähtuste väärtuste (argumentide) funktsioonina. Funktsiooni (resultaatnähtuse) dünaamika uurimisel on keskseks probleemiks argumentide mõjuulatuste leidmine, s. o. funktsiooni täisjuurdekasvu jaotamine argumentide vahel.

Olemasolevad jaotamisviisid põhinevad indeksimeetodil. Lähtudes tegurite (argumentide) muutumise järjekorra käsitlemisest eristatakse ahelasendusmeetodit, mille kasutamine eeldab tegurite vaatlemist üksteise järel muutuvaina, ja meetodit, mis eeldab üksiktegurite vaatlemist samaaegselt muutuvaina.

Kumba neist jaotusmeetodeist kasutada, sõltub uuritava nähtuse muutumise seaduspärasustest. Ahelasendusmeetodit võib (ja tuleb) rakendada ainult siis, kui on teada tegurite muutumise järjekord, muutumise järjekord ühtib tegurite järjekorraga tegurisüsteemis ning on täidetud nõue, et kõik tegurid muutuvad isoleeritult, s. o. pärast esimese teguri muutumist muutub teine, seejärel kolmas jne. (Näiteks, juhul kui mingi kaubarühma kaupade hindu muudeti aruandeperioodi 1. kuupäevaks ning ülesanne on jaotada selle kaubarühma maksumuse täisjuurdekasv (baasiperioodi suhtes) hinnateguri ja kaupade füüsilise mahu muutumise, s. o. mahuteguri vahel.) Kui need tingimused pole täidetud, annab ahelasendusmeetodi kasutamine illusoorseid tulemusi.

Funktsiooni täisjuurdekasvu jaotamise kõigil ülejäänud juhtudel tuleb kasutada tegureid samaaegselt muutuvaina käsitlevaid meetodeid. Üksiktegurite absoluutsed mõjuulatused avaldatakse sel juhul kahes osas: esiteks iga teguri isoleeritud mõjuulatusena ja teiseks, iga teguri ja ülejäänud tegurite kombineerumisel tekkinud täiendava osajuurdekasvuna. Siinjuures tekib kaks probleemi: esiteks, millise meetodiga leida tegurite isoleeritud mõjuulatused ja täiendavad osajuurdekasvud (nimetame seda tööetappi «esmaseks jaotuseks») ja teiseks, kuidas viimaseid üksikute tegurite vahel jaotada. Lähtudes indeksimeetodist, annab esimesele küsimusele ammendava lahenduse U. Mereste [1], kelle meetodit vaatleme lühidalt järgnevas. Teise probleemi lahenduseks on pakutud mitmeid teravmeelseid võtteid, mis aga, nagu tõestas A. Humal [2], ei rahulda kõiki nõudeid ning ta esitas rangelt matemaatilise, universaalse täiendavate osajuurdekasvude jaotamise meetodi. Käesoleva töö eesmärk piirdub n.-ö. «esmase jaotuse» uurimisega.

Dotsent U. Mereste meetod võimaldab jaotada mistahes lineaarfunktsiooni täisjuurdekasvu tegurite vahel. Oletame näiteks, et nähtuse P ja nähtuste a, b ja c vahel valitseb seos $P = abc$. Tähistame teguri (näit. a) isoleeritud mõjuulatuse $\triangle(a)P$ ning tegurite (näit. a ja c) koosmõjul tekkinud täiendava osajuurdekasvu $\triangle(ac)P$-ga. Täisjuurdekasvu «esmane jaotus» toimub järgmiselt:

nähtuse P täisjuurdekasv $\triangle P = \triangle abc = a_1b_1c_1 - a_0b_0c_0$

$$\triangle(a)'P = a_1b_0c_0 - a_0b_0c_0 = \triangle ab_0c_0$$
$$\triangle(b)'P = a_0 \triangle bc_0$$
$$\triangle(c)'P = a_0b_0 \triangle c_0$$
$$\triangle(ab)P = \triangle a \triangle bc_0$$
$$\triangle(ac)P = \triangle ab_0 \triangle c$$
$$\triangle(bc)P = a_0 \triangle b \triangle c$$
$$\triangle(abc)P = \triangle a \triangle b \triangle c$$
$$\triangle P = \triangle(a)'P + \triangle(b)'P + \triangle(c)'P + \triangle(ab)P + \triangle(ac)P + \triangle(bc)P + \triangle(abc)P.$$

Leitavate osajuurdekasvude üldarv võrdub kombinatsioonide summaga m elemendist (resp. tegurist):

$$\sum_{x_1=1}^{n} C_m^{x_1}.$$

---

[1] U. Mereste. Nähtuse absoluutse juurdekasvu jaotamisest rohkem kui kahe teguri vahel. — TRÜ Toimetised, 68. Majandusalaseid töid. Tartu, 1959, lk. 58, 88.

[2] А. Хумал. «Ученые записки по статистике», том 8.

II.

Eeltoodust järeldub, et isoleeritud mõjuulatuste summa on alati väiksem resultaatnähtuse täisjuurdekasvust. Võib tõestada, et need on võrdsed ainult siis, kui kõigi tegurite (ja seega ka resultaatnähtuse enda) juurdekasvud võrduvad nulliga. Oletame, et kehtib võrdus:

$\triangle(a)'P + \triangle(b)'P + \triangle(c)'P = \triangle P$. Siis

$a_1b_0c_0 - a_0b_0c_0 + a_0b_1c_0 - a_0b_0c_0 + a_0b_0c_1 - a_0b_0c_0 =$
$a_1b_1c_1 - a_0b_0c_0$. Teisendame saadud avaldist:

$$a_1b_0c_0 + a_0b_1c_0 + a_0b_0c_1 = a_1b_1c_1 + 2a_0b_0c_0,$$

$$a_0b_0c_0\left(\frac{a_1}{a_0} + \frac{b_1}{b_0} + \frac{c_1}{c_0}\right) = a_1b_1c_1 + 2a_0b_0c_0,$$

$$\frac{a_1}{a_0} + \frac{b_1}{b_0} + \frac{c_1}{c_0} = \frac{a_1b_1c_1}{a_0b_0c_0} + 2.$$

Võrrandit rahuldab ainult tingimus

$$\frac{a_1}{a_0} = \frac{b_1}{b_0} = \frac{c_1}{c_0} = 1,$$

seega $\triangle a = \triangle b = \triangle c = 0$.

Sellele vaatamata võib majandusliku tegevuse analüüsi alases kirjanduses kohata (ahelasendusmeetodi nime all) soovitatavat võtet resultaatnähtuse täisjuurdekasvu jaotamiseks ainult isoleeritud mõjuulatuste leidmise teel. Tegemist on kahekordse eksitusega: esiteks, on demonstreeritud ahelasendusmeetodi mittetundmist, ja teiseks, taotletud isoleeritud mõjuulatuste summa ühtimist resultaatnähtuse täisjuurdekasvuga (analüüsitulemuste bilansseerumist). Peatume siinjuures kahel näitel. Automajandite tegevuse analüüsi õpikute autorid I. A. Verhovski[3] ning Z. I. Aksjonova[4] on esitanud koguni arvulisi näiteid, kus (vastu igasuguseid ootusi) analüüsitulemused bilansseeruvad. Vaatleme lühidalt, kuidas neil on õnnestunud selliste tulemusteni jõuda. I. A. Verhovskil on esitatud järgmine näide:

$$S_b = \frac{e_b}{q\gamma\beta}\ \frac{\text{kop.}}{\text{tkm}},$$

kus e_b on kütusekulu 1 km läbisõidu kohta kopikates;
q on nominaalne kandejõud tonnides;
β on läbisõidu kasutamise koefitsient;
γ on kandejõu kasutamise koefitsient.

---

[3] И. А. Верховский. Анализ производственно-финансовой деятельности автохозяйств. Москва, 1960, стр. 22.

[4] З. И. Аксенова. Автомобильные грузовые перевозки (Экономический анализ). Автотрансиздат, Москва, 1960, стр. 157. З. И. Аксенова. Вопросы экономики перевозок грузов. Москва, 1964, стр. 155.

Plaani järgi

$$S_b = \frac{28}{4 \times 1 \times 0{,}55} = 12{,}6 \ \frac{\text{kop.}}{\text{tkm}}.$$

Tegelikult $S'_b = \dfrac{30}{4 \times 0{,}9 \times 0{,}6} = 13{,}9 \ \dfrac{\text{kop.}}{\text{tkm}}$.

Et kindlaks teha üksikute tegurite mõjuulatusi S'_b ja S_b vahelisele hälbele, tehakse järgmised ahelasendused («цепные подстановки») (võttes $q = q'$):

$$1)\ S'' = \frac{e_b}{q\gamma\beta} = \frac{30}{4 \times 1 \times 0{,}55} = 13{,}5 \ \frac{\text{kop.}}{\text{tkm}}.$$

Kütuse ülekulu kutsus selles artiklis esile omahinna suurenemise 13,5—12,6 = 0,9 kop. võrra.

$$2)\ S'''_b = \frac{e_b}{q\gamma'\beta} = \frac{28}{4 \times 0{,}9 \times 0{,}55} = 14 \ \frac{\text{kop.}}{\text{tkm}}.$$

$$3)\ S''''_b = \frac{e_b}{q\gamma\beta'} = \frac{28}{4 \times 1 \times 0{,}6} = 11{,}6 \ \frac{\text{kop.}}{\text{tkm}}.$$

Kandejõu kasutamise koefitsiendi mittetäitmise tagajärjel on omahind selles artiklis ületatud

14—12,6 = 1,4 kop. võrra.

Kandejõu kasutamise koefitsiendi (peaks olema: läbisõidu kasutamise koefitsiendi. — *A. I.*) plaaniülesande ületamise tõttu on selles artiklis omahind alanenud

12,6—11,6 = 1 kop.

Sel viisil saame järgmise seose:

$$S'_b - S_b = (S''_b - S_b) + (S'''_b - S_b) + (S_b - S''''_b) =$$
$$= 13{,}9 - 12{,}6 = 0{,}9 + 1{,}4 - 1{,}0 = +1{,}3 \ \frac{\text{kop.}}{\text{tkm}}$$ [5]

Kui kontrollida esitatud võrduste aritmeetilist õigsust, saame järgmised tulemused:

$S_b = 12{,}73 \ \dfrac{\text{kop.}}{\text{tkm}}$ (Verhovskil 12,6),

$S'_b = 13{,}89 \ \dfrac{\text{kop.}}{\text{tkm}}$ („ 13,9),

$S''_b = 13{,}64 \ \dfrac{\text{kop.}}{\text{tkm}}$ („ 13,5),

$S'''_b = 14{,}14 \ \dfrac{\text{kop.}}{\text{tkm}}$ („ 14),

$S''''_b = 11{,}67 \ \dfrac{\text{kop.}}{\text{tkm}}$ („ 11,6).

[5] И. А. Верховский. Анализ ..., стр. 123.

ning üksikute mõjuulatuste summa ei ole $+1{,}3 \frac{\text{kop.}}{\text{tkm}}$, vaid on $+1{,}16 = +1{,}2 \frac{\text{kop.}}{\text{tkm}}$.

Tänu sellele, et üksiktegurite individuaalindeksid on võrdlemisi lähedased ühele, on ka nende koosmõjust põhjustatud osajuurdekasv täisjuurdekasvuga võrreldes suhteliselt väike ning tulemuste bilansseerimiseks tuli andmeid suhteliselt vähe suvaliselt ümardada.

Põhimõtteliselt samuti nagu I. A. Verhovski on probleemi lahendanud ka Z. I. Aksjonova. 1960. aastal ilmunud teoses «Автомобильные грузовые перевозки (Экономический анализ)» avaldatud arvulises näites on leitud $\Delta(e)S$, $\Delta(\gamma)S$ ja $\Delta(\beta)S$ ning nende isoleeritud mõjuulatuste summa ja täisjuurdekasvu vahe on kantud nominaalse kandejõu arvele, kusjuures on märgitud, et selle teguri mõjuulatus ($\Delta(q)S$) leitakse analoogiliselt teiste tegurite mõjuulatuste leidmisega. Autori sõnade järgi vähendab kandejõu muutumine kulusid 0,63 kop/tkm võrra. Tegelikult moodustab selle teguri (isoleeritud) mõjuulatus ainult 0,50 kop/tkm! Sama autori 1964. a. ilmunud teoses «Вопросы экономики перевозок грузов» kohtame sama näidet samade arvudega; erinevus on valitud mõõtühikus (1960. a. 10 tkm, 1964. a. 1 tkm). Seekord on välja arvutatud $\Delta(\beta)S$ ja $\Delta(\gamma)S$ ning märgitud, et kandejõu muutumine põhjustas kulude alanemist 0,45 kopika võrra (1960 a. näitas 0,63 kop.), ja summeeritud nende kolme teguri mõjuulatused. Kütuse kulunormidest kinnipidamise mõjuulatust pole seekord üldse püütud välja tuua; on piirdutud vaid märkusega, et kütusekulude suurenemine tonnkilomeetri kohta on tingitud põhiliselt selle teguri muutumisest.

III.

U. Mereste meetod eeldab tegurite ja resultaatnähtuse vahelist võrdelist sõltuvust, s. o. funktsioon peab avalduma tegurite korrutise vormis. Kui mõni tegur on resultaatnähtusega pöördvõrdelises sõltuvuses, tuleb opereerida selle pöördväärtusega. Kui aga osutub vajalikuks märksa keerukamate funktsioonide kujul avalduvate majandusnähtuste uurimine, pole see meetod enam rakendatav. Alljärgnevas esitatakse katse kirjeldada mõnevõrra universaalsemat jaotusmeetodit. Märkimisväärne on, et lineaarfunktsioonide täisjuurdekasvude jaotamisel annavad mõlemad meetodid täpselt ühtivaid tulemusi.

Tihti võimaldab mitme muutuja funktsiooni väärtust mistahes täpsusega välja arvutada Taylori valem (tingimus on, et funktsioonil $f(x, y)$ on punkte $M(x, y)$ ja $M_1(x + \Delta x; y + \Delta y)$

ühendaval lõigul igas punktis ($n+1$)-järku tuletis), mille abil leitakse, teades funktsiooni $f(x, y)$ ja tema tuletiste väärtusi

$f(a, b),\ f'(a, b),\ f''(a, b),\ \ldots$

«algpunktides» $x = a$, $y = b$, funktsiooni $f(x, y)$ väärtus mistahes x ja y väärtuste puhul.

Meie ülesande tingimused aga eeldavad, et on teada nii $f(x, y)$ kui ka Δx ja Δy. Ilmselt võime valemi arendises käsitleda vastavate muutujate (x ja y) isoleeritud mõjuulatustena ainult ühe muutuja (kas x või y) diferentsiaale sisaldavaid liikmeid, ülejäänud liikmeid aga muutujate koosmõjusid kajastavate suurustena.

Taylori valemi üldkuju (kahe muutuja jaoks) on järgmine:

$$\Delta f(x, y) = \frac{1}{1!} df(x, y) + \frac{1}{2!} d^2 f(x, y) + \ldots + \frac{1}{n!} d^n f(x, y) +$$

$$+ \frac{1}{(n+1)!} d^{n+1} f(x + \Theta \Delta x, y + \Theta \Delta y),$$

kus Θ on mingi positiivne ühest väiksem arv:

$$0 < \Theta < 1.$$

Näiteks, olgu meil funktsioon $u = \frac{x}{yz}$,

siis

$$u(x, y, z) = \left(\frac{\partial u}{\partial x} dx + \frac{\partial u}{\partial y} dy + \frac{\partial u}{\partial z} dz \right) + \frac{1}{2!} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} dx^2 + \right.$$

$$+ \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} dy^2 + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} dz^2 + 2 \frac{\partial^2 u}{\partial xy} dx\, dy + 2 \frac{\partial^2 u}{\partial xz} dx\, dz +$$

$$\left. + 2 \frac{\partial^2 u}{\partial yz} dy\, dz \right) = \frac{1}{yz} dx - \frac{x}{y^2 z} dy - \frac{x}{yz^2} dz + \frac{x}{y^3 z} dy^2 +$$

$$+ \frac{x}{yz^3} dz^2 - \frac{1}{y^2 z} dx\, dy - \frac{1}{yz^2} dx\, dz + \frac{x}{y^2 z^2} dy\, dz - \frac{x}{y^4 z} dy^3 -$$

$$- \frac{x}{yz^4} dz^3 + \frac{1}{y^3 z} dx\, dy^2 + \frac{1}{yz^3} dx\, dz^2 - \frac{x}{y^3 z^2} dy^2\, dz -$$

$$- \frac{x}{y^2 z^3} dy\, dz^2 + \frac{1}{y^2 z^2} dx\, dy\, dz + \ldots =$$

$$= u \frac{dx^*}{x} - u \frac{dy}{y} - u \frac{dz}{z} + u \left(\frac{dy}{y} \right)^2 + u \left(\frac{dz}{z} \right)^2 -$$

$$- u \left(\frac{dx}{x} \right) \left(\frac{dy^{**}}{y} \right) - u \left(\frac{dx}{x} \right) \left(\frac{dz}{z} \right) + u \left(\frac{dy}{y} \right) \left(\frac{dz}{z} \right) -$$

$$-u\left(\frac{dy}{y}\right)^3-u\left(\frac{dz}{z}\right)^3+u\left(\frac{dx}{x}\right)\left(\frac{dy}{y}\right)^2+$$
$$+u\left(\frac{dx}{x}\right)\left(\frac{dz}{z}\right)^2-u\left(\frac{dy}{y}\right)^2\left(\frac{dz}{z}\right)-$$
$$-u\left(\frac{dy}{y}\right)\left(\frac{dz}{z}\right)^2+u\left(\frac{dx}{x}\right)\left(\frac{dy}{y}\right)\left(\frac{dz}{z}\right)+\ldots$$

---

* $\frac{1}{yz}dx=\frac{dx}{yz}=\frac{dx}{yz}\frac{x}{x}=\frac{x}{yz}\frac{dx}{x}=u\frac{dx}{x}$, jne.

** $\frac{1}{y^2z}dx\,dy=\frac{dx}{yz}\frac{dy}{y}=u\frac{dx}{x}\frac{dy}{y}$.

Siit näit. teguri y isoleeritud mõjuulatus:

$$\triangle(y)'u=-u\left(\frac{dy}{y}\right)+u\left(\frac{dy}{y}\right)^2-u\left(\frac{dy}{y}\right)^3+\ldots=$$
$$=-u\left[\frac{dy}{y}-\left(\frac{dy}{y}\right)^2+\left(\frac{dy}{y}\right)^3+\ldots\right].$$

Nurksulgudes olev avaldis kujutab endast lõpmatut geomeetrilist progressiooni, mille summa võrdub:

$$\frac{\frac{dy}{y}}{1+\frac{dy}{y}}, \text{ tingimusel, et } \left|\frac{dy}{y}\right|<1.$$

Siit järeldub kitsendus vaadeldava meetodi kasutamisel: ühegi teguri absoluutne juurdekasv ei või ületada teguri absoluutset algväärtust. Tundub siiski, et praktiliselt rahuldavad seda nõuet küllaltki paljud majandusnähtused.

Kuna $dy=y_1-y$, saame

$$\frac{\frac{y_1-y}{y}}{1+\frac{y_1-y}{y}}=\frac{(y_1-y)y}{yy_1}=\frac{y_1-y}{y_1}=\frac{dy}{y_1}$$

ja järelikult $\triangle(y)'u=-u\left(\frac{dy}{y_1}\right)$.

Samasuguse tulemuse saame ka eelkäsitletud meetodit rakendades: teguri y isoleeritud mõjuulatus võrdub

$$\triangle(y)'u=\frac{x_0}{y_1z_0}-\frac{x_0}{y_0z_0}=\frac{x_0y_0-x_0y_1}{y_1y_0z_0}=\frac{x_0y_0}{y_1y_0z_0}-\frac{x_0y_1}{y_1y_0z_0}=$$
$$-u_0\left(\frac{y_1-y_0}{y_1}\right)=-u_0\frac{dy}{y_1}.$$

Analoogiliselt $\Delta(z)'u = -u_0 \frac{dx}{z_1}$.

Kuna f(x, y, z) kõrgemat järku tuletised (alates 2. järgust) x järgi võrduvad nulliga, on

$$\Delta(x)'u = u \frac{dx}{x}.$$

Üksikute tegurite koosmõjusid kajastavad eeltoodud avaldise teised liikmed, näiteks y ja z koosmõju

$$u\left(\frac{dy}{y}\right)\left(\frac{dz}{z}\right)^2 \text{ jne.}$$

Kahe teguri (näiteks x ja y) kogu koosmõju väljendub:

$$\Delta(xy)u = -u\frac{dx}{x}\frac{dy}{y} + u\frac{dx}{x}\left(\frac{dy}{y}\right)^2 - u\frac{dx}{x}\left(\frac{dy}{y}\right)^3 + \ldots =$$

$$= -u\frac{dx}{x}\left[\frac{dy}{y} - \left(\frac{dy}{y}\right)^2 + \left(\frac{dy}{y}\right)^3 + \ldots\right] = -u\frac{dx}{x}\frac{dy}{y_1}.$$

Analoogiliselt:

$$\Delta(xz)u = -u\frac{dx}{x}\frac{dz}{z_1},$$

$$\Delta(yz)u = u\frac{dy}{y_1}\frac{dz}{z_1},$$

$$\Delta(xyz)u = u\frac{dx}{x}\frac{dy}{y_1}\frac{dz}{z_1}.$$

Ning $\Delta u(xyz) = u\frac{dx}{x} - u\frac{dy}{y_1} - u\frac{dz}{z_1} - u\frac{dx}{x}\frac{dy}{y_1} - u\frac{dx}{x}\frac{dz}{z_1} +$

$$+ u\frac{dy}{y_1}\frac{dz}{z_1} + u\frac{dx}{x}\frac{dy}{y_1}\frac{dz}{z_1}.$$

Sel meetodil leitud osajuurdekasvud ühtivad U. Mereste meetodil leitud osajuurdekasvudega, see on, üksiktegurite isoleeritud mõjuulatused

$$\Delta(x)'u = \frac{x}{y^0z^0} = u\frac{dx}{x},$$

$$\Delta(y)'u = x^0\left(\frac{1}{y}\right)\frac{1}{z} = -u\frac{dy}{y_1},$$

. . . .

ja nähtuse täisjuurdekasv võrdub

$$\triangle(x, y, z)u = x\left(\frac{1}{y}\right)\left(\frac{1}{z}\right) = u\frac{dx}{x}\frac{dy}{y_1}\frac{dz}{z_1}.$$

Niisiis, ehkki mõlemad kirjeldatud nähtuse juurdekasvu tinginud tegurite mõjuulatuste leidmise meetodid erinevad nii tuletusprintsiipide kui ka konkreetse «arvutuseeskirja» poolest, annavad nad lineaarse sõltuvuse korral resultaatnähtuse dünaamika analüüsimisel täpselt ühtivaid tulemusi. Näib, et viimati kirjeldatud meetodil on mõningaid eeliseid ka lineaarsete funktsioonide täisjuurdekasvude jaotamisel, ja seda väiksema töömahukuse tõttu. Seejuures saavutatav «efekt» on seda suurem, mida suurema arvu tegurite mõjuulatusi uuritakse. Toome meetodite võrdlemiseks lihtsa näite. Jaotame mingi nähtuse P täisjuurdekasvu nelja teguri (a, b, c, ja d) vahel, kusjuures $P = abcd$.
Oletame, et

$$\begin{array}{ll} a_0 = 3 & a_1 = 4 \\ b_0 = 2 & b_1 = 3 \\ c_0 = 4 & c_1 = 2 \\ d_0 = 2 & d_1 = 3 \\ P_0 = 48 & P_1 = 72 \end{array}$$

Lahendame ülesande esmalt esimese meetodi abil. Esimene samm on tegurite individuaalsete juurdekasvude leidmine:

$$\triangle a = +1; \ \triangle b = +1; \ \triangle c = -2; \ \triangle d = +1.$$

Järgnevalt leiame tegurite isoleeritud mõjuulatused.

$$\begin{aligned} &\triangle(a)'P = (\triangle a)bcd = 1 \times 2 \times 4 \times 2 = +16 \\ &\triangle(b)'P = a(\triangle b)cd = 3 \times 1 \times 4 \times 2 = +24 \\ &\triangle(c)'P = ab(\triangle c)d = 3 \times 2 \times (-2) \times 2 = -24 \\ &\triangle(d)'P = abc(\triangle d) = 3 \times 2 \times 4 \times 1 = +24. \end{aligned}$$

Kokku osutub vajalikuks seega 12 korrutustehet. Kuna tegurite c ja d ning a ja b korrutised esinevad kumbki kahel korral, «hoiame kokku» kaks tehet, seega jääb neid sooritada 10. Kolmandaks arvutame täiendavad osajuurdekasvud:

$$\begin{aligned} &\triangle(ab)P = (\triangle a)(\triangle b)cd = 1 \times 1 \times 4 \times 2 = +8 \\ &\triangle(ac)P = (\triangle a)b(\triangle c)d = 1 \times 2 \times (-2) \times 2 = -8 \\ &\triangle(ad)P = (\triangle a)bc(\triangle d) = 1 \times 2 \times 4 \times 1 = +8 \\ &\triangle(bc)P = a(\triangle b)(\triangle c)d = 3 \times 1 \times (-2) \times 2 = -12 \\ &\triangle(bd)P = a(\triangle b)c(\triangle d) = 3 \times 1 \times 4 \times 1 = +12 \\ &\triangle(cd)P = ab(\triangle c)(\triangle d) = 3 \times 2 \times (-2) \times 1 = -12 \end{aligned}$$

$$\Delta(abc)P = (\Delta a)(\Delta b)(\Delta c)d = 1 \times 1 \times (-2) \times 2 = -4$$
$$\Delta(abd)P = (\Delta a)(\Delta b)c(\Delta d) = 1 \times 1 \times 4 \times 1 = +4$$
$$\Delta(acd)P = (\Delta a)b(\Delta c)(\Delta d) = 1 \times 2 \times (-2) \times 1 = -4$$
$$\Delta(bcd)P = a(\Delta b)(\Delta c)(\Delta d) = 3 \times 1 \times (-2) \times 1 = -6$$
$$\Delta(abcd)P = (\Delta a)(\Delta b)(\Delta c)(\Delta d) = 1 \times 1 \times (-2) \times 1 = -2.$$

Sellel tööetapil tegime 33 korrutustehet; töö ratsionaalse korralduse puhul piisab 16 tehtest. Niisiis, kahel viimasel etapil tuleb kokku sooritada 26 korrutustehet.

Nähtuse täisjuurdekasv $P_1 - P_0 = +24$. Tegurite isoleeritud mõjuulatuste summa on $+40$ ning täiendavate osajuurdekasvude summa -16. Seega on kogu täisjuurdekasv jaotatud tegurite isoleeritud mõjuulatuste ning täiendavate osajuurdekasvude vahel ($+40 - 16 = +24$).

Teise jaotusmeetodi puhul tuleb kõigepealt arvutada (nagu eelmise meetodi puhulgi) tegurite individuaalsed juurdekasvud.

$$da = 1;\ db = 1;\ dc = -2;\ dd = 1.$$

Kuna nähtuse P väärtus on kõigi üksiktegurite väärtustega võrdelises sõltuvuses, arvutame kõigi tegurite juurdekasvukoefitsiendid (nagu eespool nägime, jagatakse nähtust pöördvõrdeliselt mõjutavate tegurite individuaalsed juurdekasvud vastavate tegurite aruandeperioodi väärtustega):

$$\frac{da}{a_0} = \frac{1}{3};\ \frac{db}{b_0} = \frac{1}{2};\ \frac{dc}{c_0} = -\frac{2}{4} = -\frac{1}{2};\ \frac{dd}{d_0} = \frac{1}{2}.$$

(Kokku neli jagamistehet.)

Üksiktegurite isoleeritud mõjuulatuste leidmiseks kasutame järgmist võtet:

$$\Delta(a)'P = P_0\frac{da}{a_0} = 48 \times \frac{1}{3} = +16$$

$$\Delta(b)'P = P_0\frac{db}{d_0} = 48 \times \frac{1}{2} = +24$$

$$\Delta(c)'P = P_0\frac{dc}{c_0} = 48 \times \left(-\frac{1}{2}\right) = -24$$

$$\Delta(d)'P = P_0\frac{dd}{b_0} = 48 \times \frac{1}{2} = +24.$$

(Kokku neli korrutustehet.)

Võrreldes eelmise meetodiga, on käesoleva puhul täiendavate osajuurdekasvude leidmine tunduvalt hõlpsam:

$$\Delta(ab)P = P_0 \frac{da}{a_0} \frac{db}{b_0} = \Delta(a)'P \frac{db}{b_0} = 16 \times \frac{1}{2} = +8$$

$$\Delta(ac)P = P_0 \frac{da}{a_0} \frac{dc}{c_0} = \Delta(a)'P \frac{dc}{c_0} = 16 \times \left(-\frac{1}{2}\right) = -8$$

$$\Delta(ad)P = \qquad \Delta(a)'P \frac{dd}{d_0} = 16 \times \frac{1}{2} = +8$$

$$\Delta(bc)P = \qquad \Delta(b)'P \frac{dc}{c_0} = 24 \times \left(-\frac{1}{2}\right) = -12$$

$$\Delta(bd)P = \qquad \Delta(b)'P \frac{dd}{d_0} = 24 \times \left(+\frac{1}{2}\right) = +12$$

$$\Delta(cd)P = \qquad \Delta(c)'P \frac{dd}{d_0} = -24 \times \frac{1}{2} = -12$$

$$\Delta(abc)P = P_0 \frac{da}{a_0} \frac{db}{b_0} \frac{dc}{c_0} = \Delta(ab)P \frac{dc}{c_0} = 8 \times \left(-\frac{1}{2}\right) = -4$$

$$\Delta(abd)P = \qquad \Delta(ab)P \frac{dd}{d_0} = 8 \times \frac{1}{2} = +4$$

$$\Delta(acd)P = \qquad \Delta(ac)P \frac{dd}{d_0} = -8 \times \frac{1}{2} = -4$$

$$\Delta(bcd)P = \qquad \Delta(bc)P \frac{dd}{d_0} = -12 \times \frac{1}{2} = -6$$

$$\Delta(abcd)P = P_0 \frac{da}{a_0} \frac{db}{b_0} \frac{dc}{c_0} \frac{dd}{d_0} = \Delta(abc)P \frac{dd}{d_0} = -4 \times \frac{1}{2} = -2$$

(Kokku 11 korrutustehet.) Kokku tuleb teha 15 korrutus- ja 4 jagamistehet.

О МЕТОДИКЕ РАЗЛОЖЕНИЯ ПОЛНОГО ПРИРОСТА ЯВЛЕНИЯ

А. Исотамм

Резюме

При изучении связи между явлениями, находящимися в функциональной зависимости, кардинальным является вопрос о разложении полного прироста функции между ее аргументами. В зависимости от координации изменения аргументов во времени используются либо прием цепных подстановок, либо методы,

рассматривающие аргументы изменяющимися одновременно. Существующие методы разложения базируются на теории индексов.

Пределы применения метода цепных подстановок сравнительно узкие, изучение разложения прироста большинства явлений должно происходить при помощи методов, рассматривающих аргументы изменяющимися одновременно. Решение осуществляется в три этапа: 1) нахождение изолированных приростов аргументов; 2) нахождение дополнительных частных приращений и 3) разложение дополнительных частных приращений и нахождение полных приращений аргументов. Предлагаемый У. Мересте[1] метод разложения, основывающийся на теории индексов, вполне применим с относительно маленькой трудоемкостью, если изучаемое результатное явление находится в прямой зависимости от своих аргументов и число аргументов сравнительно небольшое. Если число аргументов растет, а также если между результатным явлением и аргументом имеется более сложная функциональная связь, оказывается целесообразнее применять метод разложения, основывающийся на формуле Тейлора. Метод разложения, предлагаемый У. Мересте (в границах применения), и метод, описываемый в резюмируемой статье, дают одинаковые результаты. Область применения метода разложения, основывающегося на применении формулы Тейлора, ограничена предпосылкой, что абсолютный прирост каждого аргумента не превышает его абсолютной начальной величины. В статье доказывается, что, например, полное приращение $\Delta u(x, y, z)$ функции трех аргументов x, y, z $u = \frac{x}{yz}$ равно сумме изолированных приростов аргументов

$$\Delta(x)'u = u\frac{dx}{x_0}$$

$$\Delta(y)'u = u\frac{dy}{y_1}$$

$$\Delta(z)'u = -u\frac{dz}{z_1}$$

и дополнительных частных приращений.

$$\Delta(xy)u = -u\frac{dx}{x}\,\frac{dy}{y_1}$$

. . . . ,

где dx, dy и т. д. являются индивидуальными приростами аргументов.

---

[1] U. Mereste. Nähtuse absoluutse juurdekasvu jaotamisest rohkem kui kahe teguri vahel. — TRÜ Toimetised, 68. Majandusalaseid töid. Tartu, 1959, lk. 58—88.

В резюмируемой статье доказывается в качестве примера экономичности предлагаемого метода разложения, что при разложении полного прироста результатного явления между четырьмя аргументами, находящимися с ним в прямой зависимости, при применении метода У. Мересте необходимо произвести 26, а при применении предлагаемого метода лишь 19 действий перемножения.

В первой половине статьи критикуется вкратце метод разложения, предлагаемый И. А. Верховским[2] и З. И. Аксеновой[3], который авторы сами называют методом цепных подстановок, который в действительности оказывается методом нахождения изолированных приращений. Авторы пытаются разложить полный прирост результатного явления на изолированные приращения без остатка (что является невозможным как теоретически, так и практически) и в качестве доказательства своих рассуждений приводят численные примеры либо произвольно округленные (И. А. Верховский), либо необоснованно переносят дополнительные частные приращения аргументов на счет аргумента, рассмотренного последним по очереди. (З. И. Аксенова).

---

[2] И. А. Верховский. Анализ производственно-финансовой деятельности автохозяйств. Москва, 1960, стр. 22 и сл.

[3] З. И. Аксенова. Автомобильные грузовые перевозки (Экономический анализ). Автотрансиздат, Москва, 1960, стр. 157. З. И. Аксенова. Вопросы экономики перевозок грузов. Москва, 1964, стр. 155 и сл.