MAJANDUSSTATISTILISTE MUDELITE INTERPRETEERIMISEST

J. Vainu

Rahanduse ja krediidi kateeder

Majandusnähtuste analüüsimiseks konstrueeritud mudelid võib jaotada kolme põhilisse klassi:

1) polünoom

$$y = a_0 + a_1x_1 + a_2x_2 + \ldots + a_{11}x_1^2 + a_{12}x_2^2 +$$
$$+ \ldots + a_{1n}x_n^2 + \ldots + a_{kj}x_ix_j + \ldots ; \quad (1)$$

2) astmefunktsioon

$$y = a_0 x_1^{a_1} x_2^{a_2} \ldots x_n^{a_n}; \quad (2)$$

3) funktsioon

$$y = \bar{y}_0 f(x_1) f(x_2) \ldots f(x_3). \quad (3)$$

Tähtsal kohal majandusnähtuste analüüsimisel modelleerimise kaudu on konstrueeritud mudelite interpreteerimine. Konstrueerida võib praktiliselt piiramatul hulgal mudeleid, kuid tulemused osutuvad nulliks, kui uurija ei oska mudeleid lahti mõtestada, aru saada nende majanduslikust sisust. Seega on välistatud keeruliste funktsioonide kasutamine modelleerimisel, sest mida keerulisem on kasutatav funktsioon, seda raskem on seletada saadud tulemusi.

Majandusstatistiliste mudelite interpreteerimisel ei tohi unustada, et tegemist on korrelatsioonimudelitega, s. t. me kirjeldame ja analüüsime mudeli abil ainult nähtustevahelisi seoseid, mitte põhjuslikke sõltuvusi. Ka saame uuritava nähtuse karakteristikud — mudeli parameetrid — ainult teatava tõenäosusega, kuna mudel kajastab ainult väikese arvu kvantitatiivsete tegurite seost resultaatnähtusega. Peale mudelis kajastunud tegurite mõjutab nähtuste kujunemist veel terve rida tegureid, mille mõju me otseselt ei saa ega oska mõõta.

Mudeli interpreteerimine kujutab endast mudeli (resp. majandusnähtuse) käitumise selgitamist leitud parameetrite põhjal. Põhiliseks probleemiks on vastamine küsimusele: kuidas muutub resultaatnähtus üksikute mõjutegurite muutumisel?

A. A. Frenkel kasutab majandusstatistiliste mudelite interpreteerimiseks elastsus- ja β-koefitsiente.[1] Elastsuskoefitsiendid näitavad, mitu protsenti muutub resultaatnähtus faktornähtuse üheprotsendilisel muutumisel.

β-koefitsiendid näitavad, millise osa võrra oma standardhälbest muutub resultaatnähtus faktornähtuse muutumisel oma standardhälbe võrra.

Mõlemad koefitsiendid on konstrueeritud eeldusel, et muutuvana vaadeldakse ainult ühte tegurit, kusjuures teised tegurid on konstantsed, s. t. eeldatakse tegurite isoleeritud muutumist ja leitakse nende isoleeritud mõjuulatused.

Teatavasti võivad üksiktegurite absoluutsed mõjuulatused avalduda kahes osas: esiteks iga teguri isoleeritud mõjuulatusena ja teiseks iga teguri ja ülejäänud tegurite kombineerumisel tekkinud täiendava osajuurdekasvuna.

Seega nii elastsus- kui ka β-koefitsiendid ei anna meile täielikku pilti resultaatnähtuse dünaamika kohta faktornähtuste muutumisel, sest argumentide koosmõju jääb alati arvesse võtmata.

Et õigesti mõista üksikute tegurite osa resultaatnähtuse formeerumisel, tuleb jaotada resultaatnähtuse juurdekasv tegurite vahel, s. t. tuleb leida tegurite absoluutsed mõjuulatused. Olemasolevad funktsiooni juurdekasvu jaotusviisid põhinevad indeksimeetodil. Lähtudes tegurite (argumentide) muutumise järjekorra käsitlemisest, eristatakse ahelasendusmeetodit, mille kasutamine eeldab tegurite vaatlemist üksteise järel muutuvaina, ja meetodit, mis eeldab üksiktegurite vaatlemist samaaegselt muutuvaina.

Ahelasendusmeetodi kasutamine ei anna elastsus- ja β-koefitsientidega võrreldes mingit efekti, sest ikkagi vaadeldakse tegureid isoleeritult muutuvatena. Funktsiooni juurdekasvu jaotamiseks argumentide samaaegse muutumise korral on pakutud mitmeid võtteid, kuid need kas ei rahulda kõiki nõudeid või on väheefektiivsed.[2]

Ilmselt ei saa anda kindlat reeglit või valemit funktsiooni juurdekasvu jaotamiseks ja lähtuda tuleb iga kord konkreetse funktsiooni tüübist.

Vaatleme nüüd lähemalt artikli alguses toodud funktsioone.

1. Funktsioon esitub ilmutatud kujul argumentide astmete summana.

Sellisel juhul on funktsiooni juurdekasvu jaotamine argumentide vahel lihtne. Võtame argumentide x_i $(i = \overline{1, n})$ mingid väär-

---

[1] А. А. Френкель, Математический анализ производительности труда, М., 1968, с. 57, 69.

tused x_i^0 ja anname neile juurdekasvud Δx_i. Funktsiooni $y = F(x_i)$ juurdekasv

$$\Delta y = \Delta F(x_i) = F(\overset{0}{x_1} + \Delta x_1, \overset{0}{x_2} + \Delta x_2, \ldots, \overset{0}{x_n} + \Delta x_n) -$$
$$- F(\overset{0}{x_1}, \overset{0}{x_2}, \ldots, \overset{0}{x_n}).$$

Kui funktsioon esitub ilmutatud kujul argumentide astmete summana, siis langeb ära argumentide koosmõjude jaotamise vajadus, kuna koosmõjusid ei esine.

Võib juhtuda, et juurdekasvud $\overline{\Delta x_2, \Delta x_n}$ on võrdsed nulliga, s. t. argumendid $\overline{x_2, x_n}$ jäävad muutumatuiks; siis funktsioon $F(x_i)$ saab osajuurdekasvu

$$\Delta(x_1)y = F(\overset{0}{x_1} + \Delta x_1, \overset{0}{x_2}, \ldots, \overset{0}{x_n}) - F(\overset{0}{x_1}, \overset{0}{x_2}, \ldots, \overset{0}{x_n}).$$

Analoogiliselt saame ka teised osajuurdekasvud:

$$\Delta(x_2)y = F(\overset{0}{x_1}, \overset{0}{x_2} + \Delta x_2, \overset{0}{x_3}, \ldots, \overset{0}{x_n}) - F(\overset{0}{x_1}, \overset{0}{x_2}, \ldots, \overset{0}{x_n});$$
$$\Delta(x_i)y = F(\overset{0}{x_1}, \overset{0}{x_2}, \ldots, \overset{0}{x_i} + \Delta x_i, \ldots, \overset{0}{x_n}) -$$
$$-F(\overset{0}{x_1}, \overset{0}{x_2}, \ldots, \overset{0}{x_i}, \ldots, \overset{0}{x_n}). \qquad (4)$$

Näide: Funktsiooni $u = 2x^2 - y^2$ täisjuurdekasv on

$$\Delta u = \Delta(2x^2 - y^2) = 2(x + \Delta x)^2 - (y + \Delta y)^2 - (2x^2 - y^2) =$$
$$= 4x\Delta x + 2\Delta x^2 - 2y\Delta y - \Delta y^2.$$

Osajuurdekasvud on

$$\Delta(x)u = 4x\Delta x + 2\Delta x^2;$$
$$\Delta(y)u = -2y\Delta y - \Delta y^2.$$

2. Funktsioon esitub ilmutatud kujul argumentide astmete korrutisena.

Antud juhul on funktsiooni juurdekasvude jaotamine argumentide vahel tunduvalt raskem, kuna eelmises punktis kasutatud võtet otse rakendades saame rea argumentide koosmõjusid.

Nüüd rakendame võtet, mida tihti kasutatakse funktsiooni parameetrite leidmiseks vähimruutude meetodil: anname funktsioonile logaritmilis-lineaarse kuju.

Olgu antud funktsioon

$$u = f(x, y, z) = x^A y^B z^C. \qquad (5)$$

---

[2] A. Isotamm. Nähtuse täisjuurdekasvu jaotamise metoodika. — TRÜ Toimetised. Majandusteaduslikke töid XIV. Tartu, 1970, lk. 20.

Logaritmides seda funktsiooni, saame

$\log u = A \log x + B \log y + C \log z.$

Teeme muutujate vahetuse:

$$U = \log u; \quad X = \log x; \quad Y = \log y; \quad Z = \log z. \tag{6}$$

Anname argumentidele juurdekasvud

$$X_1 = X_0 + \Delta X, \quad Y_1 = Y_0 + \Delta Y, \quad Z_1 = Z_0 + \Delta Z.$$

Funktsioon saab juurdekasvu $\Delta U = U_1 - U_0 =$

$$= AX_1 + BY_1 + CZ_1 - AX_0 - BY_0 - CZ_0 =$$
$$= A(X_1 - X_0) + B(Y_1 - Y_0) + C(Z_1 - Z_0).$$

Funktsiooni (6) osajuurdekasv argumendi X järgi on

$$\Delta(X)U = AX_1 + BY_0 + CZ_0 - AX_0 - BY_0 - CZ_0 =$$
$$= A(X_1 - X_0) = A(\log x_1 - \log x_0).$$

Kuna $A(\log x_1 - \log x_0) = \log\left(\frac{x_1}{x_0}\right)^A$, siis oleme saanud funktsiooni (5) kasvukoefitsiendi. Analoogiliselt saame ka teised kasvukoefitsiendid ja

$$\frac{u_1}{u_0} = \left(\frac{x_1}{x_0}\right)^A \cdot \left(\frac{y_1}{y_0}\right)^B \cdot \left(\frac{z_1}{z_0}\right)^C = i_x^A \cdot i_y^B \cdot i_z^C. \tag{7}$$

Funktsiooni (5) absoluutse juurdekasvu võime jagada proportsionaalselt kasvukoefitsientide logaritmidele. Tulemuseks saame funktsiooni (5) osajuurdekasvud kõigi argumentide järgi:

$$\Delta(x)u = \frac{\log i_x^A \cdot \Delta u}{\log i_x^A + \log i_y^B + \log i_z^C};$$

$$\Delta(y)u = \frac{\log i_y^B \cdot \Delta u}{\log i_x^A + \log i_y^B + \log i_z^C};$$

$$\Delta(z)u = \frac{\log i_z \cdot \Delta u}{\log i_x^A + \log i_y^B + \log i_z^C},$$

kusjuures individuaalindeksite väärtused peavad erinema ühest.

Juhul kui $i = 1$, siis see tähendab, et juurdekasvu antud argumendi järgi ei olnud ja vastav kasvukoefitsient tuleb jätta juurdekasvu jaotamisel kõrvale. Ka $\log(i = 1) = 0$.

Analoogiliselt toimub kasvukoefitsientide ja nendele vastavate absoluutsete juurdekasvude leidmine n argumendi korral.

3. Kui on tegemist funktsiooniga (3), siis esinevad mudelis paratamatult liikmed $a_{ij}x_ix_j$ mida võib seletada kui argumentide koosmõju.[3] Mida teha sellisel juhul?

Taolise mudel korral toimub argumentide täielike mõjuulatuste väljaselgitamine etappide kaupa.

1. Leiame argumentide isoleeritud mõjuulatused.
2. Leiame argumentide koosmõjude väärtused.
3. Koosmõjude väärtused jaotame proportsionaalselt argumentide kasvukoefitsientidele.
4. Summeerides argumendi isoleeritud mõjuulatuse ja koosmõjude antud argumendile vastavad osad, saame argumendi täieliku mõjuulatuse.

Mudeli interpreteerimisel tuleb lähtuda kõigi argumentide ühikulisest juurdekasvust, mis võimaldab reastada argumendid vastavalt nende mõju intensiivsusele. On selge, et argumentide järjestus sõltub sel juhul mingil määral baasiperioodiks saavutatud tasemest, kuid seda eredamalt torkavad silma faktorid, mida on vaja arendada esmajoones, s. t. mahajäänud faktorid. Vastavalt argumentide valiku põhimõtetele satuvad mudelisse sellised tegurid, mis kõik on oluliselt resultaatnähtusega seotud.[4] Seega omab tegurite «pingerea» ning tegurite mõjuulatuste väljaselgitamine majandusstatistilise modelleerimise seisukohalt erakordset tähtsust.

ОБ ИНТЕРПРЕТАЦИИ ЭКОНОМИКО-СТАТИСТИЧЕСКИХ МОДЕЛЕЙ

Я. Вайну

Резюме

При экономико-статистическом моделировании экономических явлений широкое применение найдут следующие типы функций:

$$y = a_0 + a_1x_1 + a_2x_2 + \ldots + a_{11}x_1^2 + a_{12}x_2^2 + \\ + \ldots + a_{1n}x_n^2 + \ldots + a_{kj}x_ix_j + \ldots ,$$

$$y = a_0 x_1^{a_1} x_2^{a_2} \ldots x_n^{a_n} \qquad (2)$$

$$y = \bar{y} f(x_1) f(x_2) \ldots f(x_n) \qquad (3)$$

После построения модели возникает необходимость интерпретации полученных результатов. В этих целях найдут применение коэффициенты эластичности и β-коэффициенты. По мнению автора, эти коэффициенты являются недостаточными для анализа сущности изучаемого явления, так как назван-

[3] Argumentide taoline koosmõju võib esineda ka mudelis (1).
[4] Vt. A. A. Френкель, op. cit.

ные коэффициенты характеризуют изолированное изменение аргументов. В действительности экономические факторы изменяются одновременно и при этом связаны между собой.

По мнению автора, обобщающими и точными характеристиками изучаемого явления являются показатели приращения функции за счет изменяющихся аргументов — частные приращения.

Определение частных приращений выполняется легко для моделей (1). Для определения частных приращений для модели (2) отсутствуют соответствующие методы. Автор предлагает метод, сущность которого состоит в следующем.

1°. Функции (2) дают логарифмическо-линейный вид. При функции

$$u=f(x, y, z)=x^A y^B z^C \tag{4}$$

получим

$$\log u=A\log x+B\log y+C\log z. \tag{5}$$

После перемены аргументов, где $\log u=U$, $\log x=X$, $\log y=Y$, $\log z=Z$, получим функцию

$$U=AX+BY+CZ.$$

2°. Даем аргументам приращения. Функция получит приращение

$$\begin{aligned}\Delta U&=U_1-U_0=AX_1+BY_1+CZ_1-AX_0-BY_0-CZ_0=\\&=A(X_1-X_0)+B(Y_1-Y_0)+C(Z_1-Z_0).\end{aligned}$$

Приращение функции за счет аргумента X имеет вид

$$\Delta^X U=A(X_1-X_0)=A(\log x_1-\log x_0).$$

3°. Так как $A(\log x_1-\log x_0)=\log\left(\frac{x_1}{x_0}\right)^A$, мы получили результат, по которому частные приращения функции (2) пропорциональны коэффициентам роста соответствующих аргументов.

4°. Значения частных приращений получаются по следующим формулам

$$\Delta_x u=\frac{\log(i_x)^A\cdot\Delta u}{\log(i_x)^A+\log(i_y)^B+\log(i_z)^C}, \tag{6}$$

$$\Delta_y u=\frac{\log(i_y)^B\cdot\Delta u}{\log(i_x)^A+\log(i_y)^B+\log(i_z)^C}, \tag{7}$$

$$\Delta_z u=\frac{\log(i_z)^C\cdot\Delta u}{\log(i_x)^A+\log(i_y)^B+\log(i_z)^C}, \tag{8}$$

при условии, что коэффициент роста не равняется единице.

5°. Если в модели имеются члены $a_{ij}x_k x_j$ (могут быть в моделях (1) и (3) типах), то их совместное влияние $a_{ij}\Delta x_i\Delta x_j$ разделяется на две части самостоятельно и пропорционально коэффициентам роста аргументов.