DIREKTE HERLEITUNG DER LICHTGESCHWINDIGKEITSFORMELN

VON

J. SARW

DORPAT 1927

C. Mattiesen, Dorpat.

1. Einleitung.

Die übliche Herleitung der Lichtgeschwindigkeitsformeln, die für die bewegten Körper zum erstenmal von H. A. Lorentz[1]) durchgeführt wurde, muss wohl als indirekt bezeichnet werden. Denn direkt beobachtet man Beziehungen zwischen den endlichen Werten der elektromagnetischen Grössen, aus diesen Beobachtungen leitet man die Maxwellschen Differentialgleichungen her, und erst die Integration dieses Systems partieller Differentialgleichungen liefert den Ausdruck für die Lichtgeschwindigkeit in ruhenden Körpern, woraus dann endlich der Ausdruck für diejenige in bewegten Körpern folgt. Im folgenden werden die bezüglichen Beobachtungsresultate der Elektrodynamik in zwei Sätzen ausgedrückt und aus diesen Sätzen die Lichtgeschwindigkeitsformel für ruhende Körper hergeleitet. Für die Herleitung der Formeln der Lichtgeschwindigkeit in bewegten Körpern braucht man den Wert der Ableitung der Dielektrizitätskonstante nach der Schwingungsperiode. Diesen Wert erhält man aus direkten Messungen des Brechungsindexes.

2. Die beiden Hauptsätze.

Werden die gewöhnlichen Begriffe der Kraftlinien, der Maxwellschen Spannungen, der Dielektrizitätskonstante und der magnetischen Permeabilität vorausgesetzt und nennt man zur Vereinfachung des Ausdruckes die Beträge der elektrischen Verschiebung D und der magnetischen Induktion B Dichten der bezüglichen Kraftlinien, so kann man alle bisherigen Beobachtungsresultate über das wechselseitige Verhalten der elektrischen und magnetischen Kraftlinien in folgenden Sätzen[2])

---

1) H. A. Lorentz, Versuch einer Theorie der elektrischen und optischen Erscheinungen in bewegten Körpern, 1895, p. 101.

2) J. Sarw, Elekter (Tartu, 1911), p. 45.

zusammenfassen (deren qualitativer Inhalt bereits im Jahre 1831 Faraday[3]) eigen gewesen ist).

I. *Wo magnetische Kraftlinien senkrecht zu ihrer Richtung sich fortbewegen, da werden elektrische Kraftlinien induziert, und zwar so,*

dass 1) ihre Richtung zu der der magnetischen Kraftlinien wie auch zur Richtung ihrer Fortbewegung senkrecht ist und dann vertikal nach oben weist, wenn nordwärts gerichtete magnetische Kraftlinien sich westwärts fortbewegen,

und dass 2) ihre Dichte der Geschwindigkeit der induzierenden magnetischen Kraftlinien proportional und im leeren Raum bei der Geschwindigkeit von

$$c = 3 \,.\, 10^{10} \frac{\mathrm{cm}}{\mathrm{s}}$$

der Dichte dieser induzierenden Kraftlinien genau gleich ist.

II. *Wo elektrische Kraftlinien senkrecht zu ihrer Richtung sich fortbewegen, da werden magnetische Kraftlinien induziert, und zwar so,*

dass 1) ihre Richtung zu der der elektrischen Kraftlinien wie auch zur Richtung ihrer Fortbewegung senkrecht ist und dann nordwärts weist, wenn vertikal nach oben gerichtete elektrische Kraftlinien sich westwärts fortbewegen,

und dass 2) ihre Dichte der Geschwindigkeit der induzierenden elektrischen Kraftlinien proportional und im leeren Raum bei der Geschwindigkeit von

$$c = 3 \,.\, 10^{10} \frac{\mathrm{cm}}{\mathrm{s}}$$

der Dichte dieser induzierenden Kraftlinien genau gleich ist.

Diese Hauptsätze der Elektrodynamik bedürfen einiger Bemerkungen, von denen wir hier nur die folgende anzuführen brauchen.

Bemerkung. Die Dichte der in einem Körper induzierten Kraftlinien ist der relativen Geschwindigkeit der induzierenden Kraftlinien proportional.

3. Die Lichtgeschwindigkeit in ruhenden Körpern.

Die Gesamtheit der elektrischen und der magnetischen Kraftlinien — das elektromagnetische Feld — wird in einem Körper unverändert bleiben, solange die Maxwellschen

3) M. Faraday, Experimentaluntersuchungen über Elektrizität 256—264 (Ostwald's Klassiker Nr. 81).

Spannungen im Gleichgewicht stehen. Wird dieses Gleichgewicht gestört, so werden die Kraftlinien infolge der Spannungen in Bewegung gesetzt. Eins der einfachsten Beispiele einer solchen Störung hätte man vor sich, wenn aus einer kreisförmigen Parzelle der ungeladenen Erdoberfläche plötzlich eine gewisse Quantität negativer Elektrizität herausschiessen würde. Dann hätte man im Augenblick des Herausschiessens in der Luft über der Erdoberfläche eine vertikale zylindrische Säule von elektrischen Kraftlinien. Im Inneren einer solchen Säule herrschen Maxwellsche Spannungen, während von aussen kein Druck auf die Seitenfläche der Säule stattfindet. Darum würden von dem Augenblick des hypothetischen Entstehens einer solchen Säule an, ihre äusseren Teile sich nach allen horizontalen Richtungen in Bewegung setzen. Diese Bewegung würde anfangs beschleunigt sein, aber endlich gleichförmig werden. Das folgt aus den beiden Hauptsätzen der Elektrodynamik folgendermassen.

Es sei die Dichte der westwärts forteilenden elektrischen Kraftlinien D, ihre Geschwindigkeit v, die magnetische Permeabilität der Luft μ, die Dielektrizitätskonstante ε und die in den Hauptsätzen angeführte Konstante c. Dann werden laut dem ersten Hauptsatze nordwärts gerichtete magnetische Kraftlinien induziert mit der Dichte

$$B = \mu \frac{Dv}{c}.$$

Denkt man sich einen Beobachter, der die forteilenden elektrischen Kraftlinien mit derselben westwärts gerichteten Geschwindigkeit v begleitet und seine eigene Bewegung nicht bemerkt, so bewegen sich für ihn die induzierten magnetischen Kraftlinien ostwärts mit der Geschwindigkeit v, und laut dem zweiten Hauptsatze hat er induzierte, vertikal nach unten gerichtete elektrische Kraftlinien mit der Dichte

$$D_1 = \frac{\varepsilon B v}{c} = \frac{\varepsilon \mu D v^2}{c^2}$$

vor sich.

Wird die infolge der Maxwellschen Spannungen wachsende Geschwindigkeit endlich so gross, dass die Dichte der neuen elektrischen Kraftlinien der Dichte der ursprünglichen D gleich wird, so wird

$$D_1 = \varepsilon \mu D \cdot \frac{v^2}{c^2} = D,$$

woraus folgt

$$\varepsilon\mu v^2 = c^2,$$

d. h.

$$(1) \qquad \boxed{v = \frac{c}{\sqrt{\varepsilon\mu}}}$$

Dann wird auch die Beschleunigung der ursprünglichen Kraftlinien ein Ende finden. Denn die einander entgegengerichteten und mit gleicher Dichte an derselben Stelle auftretenden Kraftlinien werden zusammen keine Maxwellschen Spannungen und überhaupt kein Zeichen von ihrer Existenz mehr geben.

Diese Geschwindigkeit (1) ist die konstante Geschwindigkeit, womit sich die Störung des elektromagnetischen Feldes in einem ruhenden Körper mit der Dielektrizitätskonstante ε und mit der magnetischen Permeabilität μ fortpflanzt. In einem anderen Körper werden in dieser Formel nur die Werte der Dielektrizitätskonstante ε und der magnetischen Permeabilität μ andere sein.

Wenn eine Reihe solcher Störungen des elektromagnetischen Feldes einander folgen, so spricht man von elektromagnetischen Wellen. Bei regelmässigen Wellen hat man eine bestimmte Wellenlänge λ — die Entfernung zwischen zwei einander folgenden Störungen. Besteht das einfarbige Licht aus regelmässigen elektromagnetischen Wellen, so ist die Formel (1) eben die gesuchte Formel für die Lichtgeschwindigkeit in ruhenden Körpern. Nun haben bekanntlich in einem und demselben Körper verschiedenfarbige Lichtgattungen auch verschiedene Fortpflanzungsgeschwindigkeiten. Daraus schliesst man, dass ein und derselbe Körper für verschiedene Wellenlängen verschiedene Werte von ε und μ hat.

Das Verhältnis $\frac{c}{v}$ heisst Brechungsindex und wird häufig mit n bezeichnet, so dass man nach (1) hat

$$(2) \qquad n = \sqrt{\varepsilon\mu}.$$

Die Dichte der elektrischen Kraftlinien besteht bekanntlich aus zwei Teilen: aus der elektrischen Kraft

$$(3) \qquad E = \frac{D}{\varepsilon},$$

die man in den Körper hineinbringen muss, um dort die Dichte

D zu erhalten, und aus dem übrigen Teil — der dielektrischen Polarisation

$$(4) \qquad P = D - \frac{D}{\varepsilon} = (\varepsilon - 1) E,$$

die von dem Körper selbst herstammt, also

$$(5) \qquad D = E + P.$$

Ebenso besteht die Dichte der magnetischen Kraftlinien aus zwei Teilen: aus der magnetischen Kraft

$$H = \frac{B}{\mu},$$

und aus der Magnetisierung

$$M = B - \frac{B}{\mu} = (\mu - 1) H,$$

die von dem Körper selbst herstammt, also

$$B = H + M.$$

Es liegt nun der Gedanke nahe, dass bei anderen Wellen, wo die veränderliche elektrische oder magnetische Kraft in der einzelnen Welle eine andere Zeit auf einen Körperpunkt wirkt, die Polarisation oder die Magnetisierung an jenem Punkte auch vielleicht in einem anderen Masse stattfindet. Darum ist es natürlich anzunehmen, dass ε, μ und somit n eben von der Schwingungsperiode $T = \frac{\lambda}{v}$ abhängen.

4. Die Formel von Fresnel.

Möge der Körper, in den die elektromagnetischen Wellen von der Länge λ aus dem leeren Raum hineintreten und in dem sie sich mit der Geschwindigkeit v fortpflanzen, selbst in derselben Richtung eine Geschwindigkeit u besitzen. Dann werden laut dem ersten Hauptsatze von den mit der Dichte D fortschreitenden elektrischen Kraftlinien magnetische Kraftlinien induziert, die für einen die elektrischen Kraftlinien mit derselben Geschwindigkeit begleitenden Beobachter neue, den ursprünglichen entgegengerichtete elektrische Kraftlinien induzieren. Hier hat man aber die Dichte D nach (5) in ihre Bestandteile (3) und (4) zu zerlegen. Denn der zweite Teil (4)

$$P = (\varepsilon - 1) E = \frac{\varepsilon - 1}{\varepsilon} D,$$

der von dem mit der Geschwindigkeit u in derselben Richtung fortbewegten Körper selbst herstammt, wird ja nur die Geschwindigkeit $v-u$ haben, und die von diesem Teil induzierten magnetischen Kraftlinien werden natürlich von dem Körper mit der Geschwindigkeit u mitgeführt. Also wird hier der begleitende Beobachter neue, den ursprünglichen entgegengerichtete elektrische Kraftlinien vor sich haben mit der Dichte

$$D_1 = D \cdot \frac{v^2}{c^2} + (\varepsilon - 1) D \frac{(v-u)^2}{c^2}$$

(wenn man, wie üblich, nur solche Körper betrachtet, wo man

$$\mu = 1$$

annehmen darf).

Die Fortpflanzung der elektromagnetischen Störungen wird nur dann ihre Beschleunigung einbüssen müssen, wenn diese Dichte D_1 derjenigen der ursprünglichen Linien D gleich geworden ist:

$$D_1 = \frac{Dv^2}{c^2} + \frac{(\varepsilon - 1) D (v-u)^2}{c^2} = D,$$

woraus folgt

$$v^2 + (\varepsilon - 1)(v-u)^2 = c^2,$$

so dass

$$(6) \qquad v = \frac{\varepsilon - 1}{\varepsilon} u + \sqrt{\left[\left(\frac{\varepsilon - 1}{\varepsilon}\right)^2 - \frac{\varepsilon - 1}{\varepsilon}\right] u^2 + \frac{c^2}{\varepsilon}} =$$

$$= \frac{\varepsilon - 1}{\varepsilon} u + \frac{c}{\sqrt{\varepsilon}} \left(1 - \frac{\varepsilon - 1}{2\varepsilon} \frac{u^2}{c^2} + \cdots\right),$$

wo alle weiteren Glieder höhere Potenzen von $\frac{u}{c}$ enthalten. Ist die Geschwindigkeit des Körpers u klein genug im Vergleich zu

$$c = 3 \,.\, 10^{10},$$

so kann man in (6) auch das letzte hingeschriebene Glied vernachlässigen. Dann hat man

$$(7) \qquad \boxed{v = \frac{c}{\sqrt{\varepsilon}} + \frac{\varepsilon - 1}{\varepsilon} u = \frac{c}{n} + \frac{n^2 - 1}{n^2} u}$$

Dies wäre die Formel von Fresnel[4]), wenn

$$\varepsilon = n^2$$

hier im bewegten Körper denselben Wert hätte, wie im ruhenden Körper. Denn dann wäre ja das erste Glied hier nach (1) die Geschwindigkeit im ruhenden Körper und das zweite Glied der aus der Bewegung des Körpers herstammende Zuwachs der Wellengeschwindigkeit mit dem Fresnelschen Fortführungskoeffizienten

$$(8) \qquad \frac{\varepsilon-1}{\varepsilon} = \frac{n^2-1}{n^2}.$$

Nun hat aber Lorentz[5]) schon längst gezeigt, dass im bewegten Körper die Schwingungsperiode und infolgedessen der Brechungsindex sich um soviel verändern, dass die sich daraus ergebende Veränderung des ersten Gliedes der rechten Seite von (7) im Vergleich mit dem zweiten Gliede bemerkbar wird. Also ist (7) nicht identisch mit derjenigen Formel von Fresnel, die durch die Versuche von Michelson und Morley[6]) bestätigt sein soll, Zeeman's[7]) Ergebnisse aber nicht befriedigt.

5. Die Lichtgeschwindigkeit in bewegten Körpern.

Wie oben (Seite 7) durch Sperrdruck hervorgehoben wurde, ist es natürlich anzunehmen, dass der Brechungsindex eben von der Schwingungsperiode

$$(9) \qquad T = \frac{\lambda}{v}$$

abhängt. Beim Eintritt eines Wellensystems in einen ruhenden Körper bleibt die Periode unverändert. Denn am Orte des Eintritts aus dem leeren Raum in den Körper hat ja die Periode für den Körper denselben Wert wie für den leeren Raum.

In einem mit der Geschwindigkeit u in der Wellenrichtung fortbewegten Körper wird das aus dem leeren Raum mit der Periode T eintretende Wellensystem eine neue Periode

4) Ann. de chim. et de phys. (2) 9 p. 57 (1818).
5) L. c. (s. oben, Fussn. 1).
6) Amer. J. of Sc. 31 p. 377 (1886).
7) Arch. Néerl. (III A), X p. 132 (1927).

$$(10)\qquad T_1 = T \cdot \frac{c}{c-u} = T\left(1+\frac{u}{c}+\frac{u^2}{c^2}+\cdots\right)$$

haben. Denn die durch einen bestimmten Ort in einer Sekunde hindurchziehenden Wellen hätten im leeren Raum eine Strecke von der Länge c eingenommen. Ein an diesem Orte ruhender Körper hätte in einer Sekunde alle diese Wellen empfangen. Aber der in der Wellenfortschreitungsrichtung mit der Geschwindigkeit u fortbewegte Körper wird von diesen Wellen diejenigen, welche sich auf der von ihm zurückgelegten Strecke von der Länge u befinden, nicht empfangen.

Also hat sich im bewegten Körper die Periode um den Betrag

$$(11)\qquad \Delta T = T_1 - T = T\left(\frac{u}{c}+\frac{u^2}{c^2}+\cdots\right)$$

verändert. Hat man aus diesbezüglichen Messungen den Brechungsindex als Funktion der Schwingungsperiode ermittelt, so wird man in der Formel von Fresnel statt n einzusetzen haben

$$n_1 = n + \Delta n = n + \frac{dn}{dT}\Delta T.$$

Gewöhnlich wird der Brechungsindex als Funktion der Wellenlänge im leeren Raum behandelt. Nach (9) hat man in diesem Falle ($v = c$)

$$dT = \frac{d\lambda}{c},$$

folglich ist

$$\frac{dn}{dT} = c\,\frac{dn}{d\lambda},$$

und somit nach (9) und (11)

$$n_1 = n + \lambda\frac{dn}{d\lambda}\left(\frac{u}{c}+\frac{u^2}{c^2}+\cdots\right),$$

d. h.

$$(12)\qquad \Delta n = n_1 - n = \frac{\lambda u}{c}\cdot\frac{dn}{d\lambda} + \frac{\lambda u^2}{c^2}\cdot\frac{dn}{d\lambda} + \cdots$$

Die Veränderung des ersten Gliedes der rechten Seite in (7) nach n ist

$$(13)\qquad \Delta\left(\frac{c}{n}\right)=\frac{d\frac{c}{n}}{dn}\Delta n=-\frac{c\lambda}{n^2}\cdot\frac{dn}{d\lambda}\left(\frac{u}{c}+\frac{u^2}{c^2}+\cdots\right),$$

und die Veränderung des zweiten

$$\Delta\left(\frac{n^2-1}{n^2}u\right)=\frac{2u}{n^3}\Delta n=\frac{2u\lambda}{n^3}\cdot\frac{dn}{d\lambda}\left(\frac{u}{c}+\frac{u^2}{c^2}+\cdots\right).$$

Hieraus sieht man, dass in der ganzen Veränderung nur das erste Glied der rechten Seite (13) von der Ordnung der Körpergeschwindigkeit u ist und darum alle anderen Glieder fortgelassen werden dürfen.

Also erhält man für die Lichtgeschwindigkeit v in einem Körper mit dem Brechungsindex n und mit der eigenen Geschwindigkeit von derselben Richtung u aus (7) und (13) den Ausdruck

$$(14)\qquad \boxed{v=\frac{c}{n}+\frac{n^2-1}{n^2}u-\frac{\lambda u}{n^2}\frac{dn}{d\lambda}}$$

6. Die Formel von Lorentz.

Die Formel (14) gilt nur für formfeste Körper. Für eine in Röhren fliessende Flüssigkeit wie im Versuche von Fizeau[8]) bedarf sie einer Änderung. Die Veränderung der Schwingungsperiode wird hier nämlich anders stattfinden als dort. Hier treten die Wellen in die in den Enden der Röhren ruhende Flüssigkeit, erhalten dort ohne Periodenveränderung die Geschwindigkeit

$$v_0=\frac{c}{n}$$

und erleiden eine Periodenveränderung erst bei der Zunahme der Geschwindigkeit von v_0 bis zur endgültigen Geschwindigkeit v_1. Für den Verlauf dieser Periodenveränderung erhält man wie (10):

$$vdT=Tdu.$$

Während der Zunahme der Geschwindigkeit der Flüssigkeit von 0 bis u wächst hier die Lichtgeschwindigkeit v von v_0 bis zur endgültigen Geschwindigkeit

$$v_1=v+\Delta v$$

8) Ann. de chim. et de phys. (3) 57 p. 385 (1859).

und die Schwingungsperiode T vom Anfangswerte T_0 bis zum endgültigen Werte

$$T_1 = T_0 + \Delta T.$$

Es ist also hier

$$\frac{T_0}{v_0 + \Delta v}\, du \leqq dT \leqq \frac{T_0 + \Delta T}{v_0}\, du$$

und darum

$$\frac{T_0}{v_0}\, u - \frac{T_0 \Delta v}{v_0^2}\, u + \cdots \leqq \Delta T \leqq \frac{T_0}{v_0}\, u + \frac{\Delta T}{v_0}\, u \leqq \frac{T_0}{v_0}\, u + \frac{T_0}{v_0^2}\, u^2 + \cdots,$$

d. h. (wenn man die Glieder höherer Ordnung in $\frac{u}{v_0}$ fortlässt) anstatt (11)

$$\Delta T = \frac{T_0}{v_0}\, u = \frac{n T_0}{c}\, u.$$

Hier hat man gegen (11) den Zusatzfaktor n und darum statt (12)

$$\Delta n = \frac{n \lambda u}{c} \frac{dn}{d\lambda},$$

und endlich statt (14) die Formel von Lorentz[9])

$$\boxed{v = \frac{c}{n} + \frac{n^2 - 1}{n^2}\, u - \frac{\lambda u}{n} \frac{dn}{d\lambda}}$$

Diese Formel hat Zeeman[10]) für das Wasser experimentell geprüft und bestätigt.

7. Die Versuche von Zeeman über die Lichtgeschwindigkeit im bewegten Quarz und Flintglas.

Von P. Zeeman zusammen mit Frl. A. Snethlage[11]) wurde die Lichtgeschwindigkeit im bewegten Quarz und von P. Zeeman zusammen mit W. de Groot, Frl. A. Snethlage und G. C. Dibbetz[12]) im bewegten Flintglas gemessen.

---

9) L. c. (s. oben, Fussn. 1).
10) Arch. Néerl. (III A), X p. 132.
11) L. c. p. 180.
12) L. c. p. 193.

Ein Büschel monochromatischer Strahlen wurde in üblicher Weise [13]) in zwei gespalten, und nachdem diese zwei Strahlenbüschel einen und denselben Weg (wie bei Fizeau zwei parallelliegende Röhren) in entgegengesetzten Richtungen durchlaufen hatten, wurden sie wieder vereinigt und die entstehenden Interferenzstreifen photographiert. An Stelle der einen in einer Röhre befindlichen bewegten Wassersäule des Fizeauschen Versuches hatte man eine Quarz-, beziehungsweise Flintglassäule, die in ihrer Längsrichtung mit einer Geschwindigkeit bis $\frac{994}{s}$ cm hin und her bewegt wurde. An Stelle der anderen Wassersäule hatte man ruhende Luft. Die Interferenzstreifen wurden während der maximalen Geschwindigkeit einmal in einer und das zweitemal in entgegengesetzter Richtung photographiert und die Lagendifferenz gemessen.

Es sei l die Länge der bewegten Säule, u ihre maximale Geschwindigkeit und v, c, n, λ wie oben. Beim Ruhen der Säule werden natürlich Interferenzstreifen vorhanden sein. Bei der Bewegung der Säule werden diese Streifen dann eine andere Lage einnehmen, wenn die Bewegung die Durchlaufszeit der beiden Büschel verschieden verändert.

Das durch die hinbewegte Säule hingehende Büschel wird durch die Bewegung eine Zeitveränderung erleiden erstens, weil bei der Bewegung der Säule die Lichtgeschwindigkeit in der Säule nach (14)

$$v_1 = \frac{c}{n} + \frac{n^2-1}{n^2} u - \frac{\lambda u}{n^2} \frac{dn}{d\lambda}$$

die Ruhegeschwindigkeit

$$v_0 = \frac{c}{n}$$

um

$$v_1 - v_0 = \frac{u}{n^2}\left(n^2 - 1 - \lambda \frac{dn}{d\lambda}\right)$$

übertrifft, und zweitens, weil bei der Bewegung der Lichtweg in der Säule um

$$\frac{lv_1}{v_1-u} - l = l\left(\frac{u}{v_1} + \frac{u^2}{v_1^2} + \cdots\right) = \frac{lu}{v_1} + \frac{lu^2}{v_1^2} + \cdots = \frac{lun}{c} + \cdots$$

13) L. c. p. 136.

länger wird. Der Zuwachs der Geschwindigkeit vermindert die Durchlaufszeit um

$$\frac{ln}{c}-\frac{l}{v_1}=l\left(\frac{n}{c}-\frac{1}{\frac{c}{n}+\frac{u}{n^2}\left(n^2-1-\lambda\frac{dn}{d\lambda}\right)}\right)=\frac{ln}{c}\left[\frac{u}{nc}\left(n^2-1-\lambda\frac{dn}{d\lambda}\right)+\cdots\right].$$

Die Verlängerung des Lichtweges in der Säule verlängert die Durchlaufszeit um

$$\left(\frac{lun}{c}+\cdots\right)\left(\frac{1}{v_1}-\frac{1}{c}\right)=\left(\frac{lun}{c}+\cdots\right)\frac{n}{c}\left[1-\frac{1}{n}-\frac{u}{nc}\left(n^2-1-\lambda\frac{dn}{d\lambda}\right)+\cdots\right]=$$
$$=\frac{lun(n-1)}{c^2}+\cdots$$

Also erhält die Durchlaufszeit des hingehenden Strahlenbüschels den Zuwachs

$$\left[\frac{lun\,(n-1)}{c^2}-\frac{lu}{c^2}\left(n^2-1-\lambda\frac{dn}{d\lambda}\right)\right]+\cdots=\frac{lu}{c^2}\left(1-n+\lambda\frac{dn}{d\lambda}\right)+\cdots \tag{15}$$

Das herkommende Büschel hat in der Säule eine Lichtgeschwindigkeit

$$v_2=\frac{c}{n}-\frac{n^2-1}{n^2}u+\frac{\lambda u}{n^2}\frac{dn}{d\lambda}$$

und erhält daraus einen Zeitzuwachs

$$\frac{l}{v_2}-\frac{ln}{c}=\frac{lu}{c^2}\left(n^2-1-\lambda\frac{dn}{d\lambda}\right)+\cdots$$

Der Weg dieses Büschels wird kürzer um

$$l-\frac{lv_2}{v_2+u}=\frac{lu}{v_2}+\cdots=\frac{lun}{c}+\cdots$$

und darum die Durchlaufszeit kürzer um

$$\left(\frac{lun}{c}+\cdots\right)\left(\frac{1}{v_2}-\frac{1}{c}\right)=\frac{lun\,(n-1)}{c^2}+\cdots$$

Also erhält die Durchlaufszeit des herkommenden Strahlenbüschels im ganzen den Zuwachs

$$\left[\frac{lu}{c^2}\left(n^2-1-\lambda\frac{dn}{d\lambda}\right)-\frac{lun(n-1)}{c^2}\right]+\cdots=\frac{lu}{c^2}\left(n-1-\lambda\frac{dn}{d\lambda}\right)+\cdots \tag{16}$$

Dieser Zeitzuwachs ist nach dem allein in Betracht zu ziehenden Gliede absolut gleich dem (15), aber mit entgegengesetztem Zeichen. Die Differenz zwischen (16) und (15) ist also zweimal so gross wie (16) allein. Infolge dieser Differenz werden die Interferenzstreifen verschoben, und zwar um soviel Streifenbreiten, wieviel Perioden

$$T=\frac{\lambda}{c}$$

diese Zeitdifferenz ausmacht, d. h.

$$\left[\frac{2lu}{c^2}\left(n-1-\lambda\frac{dn}{d\lambda}\right)+\cdots\right]:\frac{\lambda}{c}=\frac{2lu}{c\lambda}\left(n-1-\lambda\frac{dn}{d\lambda}\right)+\cdots$$

Wenn man die Interferenzstreifen wie üblich photographiert, einmal während der Hinbewegung der Säule und das zweitemal während ihrer Rückbewegung, so wird man eine zweimal so grosse Verschiebung vor sich haben. Es sei diese Verschiebung, in Streifenbreiten ausgedruckt, Δ. Dann hat man die Formel

$$\boxed{\Delta=\frac{4lu}{c\lambda}\left(n-1-\lambda\frac{dn}{d\lambda}\right)}$$

wonach P. Zeeman und seine Mitarbeiter[14] die Formel (14) für Quarz und Flintglas experimentell geprüft und bestätigt haben.

8. Die Ergebnisse

der vorliegenden Arbeit sind die folgenden.

1. Man kann die beiden Hauptsätze der Elektrodynamik sehr elementar formulieren.

---

14) L. c. pp. 183, 184, 186, 199, 200.

2. Man kann die Geschwindigkeit der elektromagnetischen Wellen ohne Bezugnahme auf die Schwingungsgleichung herleiten.

3. Man hat den Brechungsindex als eben von der Schwingungsperiode abhängig anzunehmen.

4. Man kann sodann die Formeln von Fresnel, Lorentz und Zeeman auf rein klassischem Boden ableiten.