EINE NICHTEUKLIDISCHE DEUTUNG DER RELATIVISTISCHEN WELT

VON

J. NUUT

TARTU 1935

K. Mattiesens Buchdr. Ant.-Ges., Tartu, 1935.

Der grosse Fortschritt, den die Physik der Relativitätstheorie verdankt, beruht im wesentlichen auf einer Geometrisierung des vierdimensionalen weltgeschehens. Wo die klassische Physik zur „Erklärung" der Phänomene gezwungen ist mit „Kräften" mehr oder weniger willkürlichen Charakters zu operieren, genügt von einem höheren Standpunkte aus eine Deutung auf Grund gewisser geometrischer Eigenschaften einer Riemannschen Mannigfaltigkeit. Als äusserst fruchtbar erweist sich hierbei die Einbettung einer Mannigfaltigkeit in eine andere von höherer Dimensionszahl, — eine jedem Geometer wohlbekannte Tatsache.

Im nachfolgenden soll eine Deutung des relativistischen Weltbildes behandelt werden, die sich ergibt, wenn man als vierdimensionale Bezugsmannigfaltigkeit einen vierdimensionalen hyperbolischen (Lobatschewsky'schen) Raum wählt. Schon V. Varičak hat bemerkt, dass die Geschwindigkeiten gemäss der speziellen Relativitätstheorie sich wie gewisse Vektoren eines hyperbolischen Raumes addieren. Es stellt sich nun aber heraus, dass das Phänomen der Expansion des Weltalls damit in Zusammenhang gebracht und gewissermassen als eine folgerichtige Ergänzung der speziellen Relativitätstheorie aufgefasst werden kann. Zugleich ordnet sich auch die Gravitation in die benutzte Deutung ein. Im Interesse der Anschaulichkeit soll bei all dem zunächst der Weltraum als zweidimensional angesehen werden, dabei beständig als im grossen euklidisch. Der Übergang zum dreidimensionalen euklidischen Weltraum bietet dann nur der Anschauung Schwierigkeiten, vollzieht sich aber formal ohne Komplikationen.

Es erscheint zunächst verlockend, die Bewegung von Massenpunkten in einem zweidimensionalen im grossen euklidischen Raum E'_2 vom Standpunkt eines aussenstehenden dreidimensionalen Beobachters, der einem den E'_2 enthaltenden streng euklidischen E_3 angehört, folgendermassen zu deuten:

Eine unendliche Ebene E'_2 mit gewissen an den Gummi erinnernden elastischen Eigenschaften, jedoch ohne Schwere, befindet sich in einem homogenen Schwerefeld senkrecht zu den Kraftlinien dieses Feldes. Diese Ebene markiert eine Niveaufläche des genannten Schwerefeldes. Sind dann auf diese Gummifläche gewisse schwere Massenpunkte verteilt, die sich reibungslos auf der Fläche unter dem Einfluss des Schwerefeldes bewegen können, so werden zunächst in der Nachbarschaft dieser Massenpunkte Einbuchtungen (mit Krümmung verknüpfte Dehnungen) auf der Fläche entstehen, was dann, dank dem Schwerefelde, eine relative Bewegung der Massenpunkte längs der nun nicht mehr genau euklidischen Gummifläche zur Folge haben wird. Diese Bewegungen werden von einem dem E'_2 selbst angehörigen Beobachter dahin gedeutet werden können, dass die Massenpunkte sich gegenseitig anziehen, m. a. W., der Beobachter wird in seinem Raume E'_2 die Wirkungen eines zweidimensionalen Gravitationsfeldes konstatieren. Unter gewissen Voraussetzungen über die Elastizität der tragenden Fläche dürfte eine genügende Annäherung an das Newton'sche Anziehungsgesetz erreichbar sein, wenigstens solange man in gewissen Schranken verbleibt.

Nun wird aber zugleich die Gummifläche E'_2 von den auf sie drückenden Massenpunkten in der Richtung des Schwerefeldes im E_3 mitbewegt werden, wobei sie dieser Bewegung einen Widerstand entgegensetzt, da sie ja selbst schwerefrei sein soll. Dieser Gesamtbewegung der Fläche E'_2 entspricht eine Verschiebung der Niveauebene des dreidimensionalen Schwerefeldes. Der mitgeführte zweidimensionale Beobachter wird die Geschwindigkeitsänderung dieser Verschiebung zu den Bewegungserscheinungen der Massen im E'_2 in Beziehung setzen können. Er kann einen Parameter, genannt „Zeit", einführen, dessen Zuwachs dt proportional ist dem Geschwindigkeitszuwachs dv der „fallenden" Niveaufläche, die übrigens, infolge der lokalen Krümmungen, diesen Namen nicht mehr mit mathematischer Strenge beanspruchen darf. Auf diesen Parameter t kann der Beobachter dann die Kinematik seines E'_2 beziehen. In jedem einzelnen Massenpunkt ist der zugehörige Beobachter berechtigt, gerade sein Niveau als das normale anzusehen und den Zuwachs der Fallgeschwindigkeit gerade seines Massenpunktes zur Zeitmessung zu verwenden, auch darf er annehmen, dass gerade sein Massenpunkt sich nur in der Richtung der Schwerelinien des E_3 verschiebt, auf dem E'_2 aber in Ruhe verweilt. Jeder Beobachter wird also seine eigene Raum- und Zeitrechnung anwenden können; zu bemerken wäre, dass letztere u. a. von der lokalen Krümmung des E'_2 beeinflusst wird.

Ein Massenpunkt wird auf die Gummifläche einen zusätzlichen Druck ausüben, d. h. eine lokale Krümmungsänderung bewirken, sobald man annimmt, dass er eine momentane Geschwindigkeit hat, die nicht in der Richtung des dreidimensionalen Gravitationsfeldes liegt; m. a. W, die als Masse beurteilte Grösse (die Ursache der Krümmung) wird mit wachsender relativer Geschwindigkeit wachsen.

Konkret denkende zweidimensionale Physiker werden die Gummifläche als Äther bezeichnen, obgleich sie ihn nicht materiell erfassen können, da er vom dreidimensionalen Schwerefeld nicht direkt beeinflusst wird und sich dadurch von der Materie der beobachtbaren Massenpunkte wesentlich unterscheidet. Zu abstrakterem Denken neigende zweidimensionale Mathematiker werden diesen Äther als überflüssig ablehnen und vom stellenweise gekrümmten Raum E'_2 schlechtweg reden. Jede Störung oder Krümmungsänderung an irgendeiner Stelle der Gummifläche wird sich in diesem E'_2 auf kürzesten Wegen ausbreiten; die geodätischen Linien, die den Ausbreitungsweg vorschreiben, werden durch lokale Krümmungen (Massennähe) in dem von Einstein geforderten Sinne abgelenkt werden.

So verführerisch solch ein Bild auch ist, verbleiben doch folgende Unzuträglichkeiten mit unserem derzeitigen Weltbild:

1) Es sind zusätzliche Hypothesen etwa vom Charakter der Lorentz'schen Kontraktionshypothese erforderlich, um die Konstanz der Ausbreitungsgeschwindigkeit der Störungen im E'_2 für dort relativ bewegte Beobachter zu sichern.

2) Das Phänomen der grossen positiven Radialgeschwindigkeiten entfernter Nebelgebilde (die sogenannte Expansion des Weltalls) wird von dem Bilde nicht erfasst.

Beide hier genannten Schwierigkeiten verschwinden, wenn man sich den dreidimensionalen Aussenbeobachter als in einem hyperbolischen Raum L_3 befindlich, das homogene Schwerefeld durch Schwerelinien, die ein Bündel Lobatschewsky'scher Parallelen im L_3 bilden, ersetzt, und die Gummifläche als eine zu diesem Parallelenbündel gehörige Lobatschewsky'sche

Grenzkugel (Sphäre mit unendlich grossem Radius und Mittelpunkt im gemeinsamen Schnittpunkt der Parallelen) denkt. Allerdings wird hierbei aus später zu nennenden Gründen eine konstante Fallgeschwindigkeit dieser Grenzkugel im L_3 postuliert werden müssen. Zur besseren Übersicht erinnere ich an folgende bekannte Tatsachen:

Nach Cayley-Klein ist die hyperbolische (Lobatschewsky'sche) Geometrie gleichbedeutend mit einer Metrik, bei der die unendlich-fernen Elemente durch eine feste Fläche zweiter Ordnung, die man stets als Kugelfläche annehmen darf, gegeben sind. Schreibt man ihre Gleichung in homogenen Koordinaten in der Gestalt

$$x^2+y^2+z^2-c^2\,t^2=0, \tag{1}$$

so bedeutet c den Radius dieser Kugelfläche. Geht man zu unhomogenen Koordinaten v_x, v_y, v_z über, wo

$$v_x=\frac{x}{t}, \quad v_y=\frac{y}{t}, \quad v_z=\frac{z}{t},$$

so wird diese Gleichung

$$v_x^2+v_y^2+v_z^2-c^2=0. \tag{2}$$

Interpretiert man hierauf v_x, v_y, v_z als rechtwinklige Koordinaten eines Punktes P, so sind die rechtwinkligen Projektionen des Vektors OP, dessen Länge r ist (wobei O den Koordinatenanfang bezeichnet), durch

$$v_x=c\ \mathrm{th}\frac{r_x}{c}, \quad v_y=c\ \mathrm{th}\frac{r_y}{c}, \quad v_z=c\ \mathrm{th}\frac{r_z}{c} \tag{3}$$

bestimmt; hierin bedeuten r_x, r_y, r_z die mit Vorzeichen versehenen Längen der Projektionen von r, das Symbol th den Hyperbeltangens. Die Länge r selbst ist dann durch

$$c^2\ \mathrm{th}^2\frac{r}{c}=v_x^2+v_y^2+v_z^2 \tag{4}$$

gegeben. Bezeichnet man $c\ \mathrm{th}\frac{r}{c}$ mit v, so ist also

$$v^2=v_x^2+v_y^2+v_z^2. \tag{5}$$

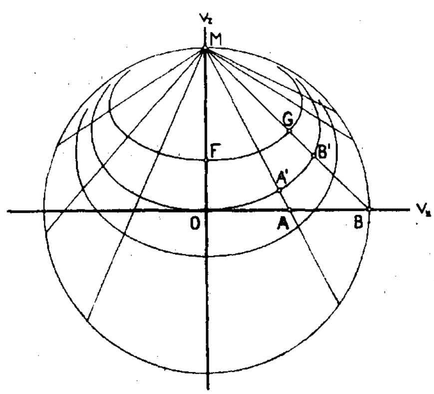
Die geometrische Summe zweier Vektoren OP, OQ ist mittels der Koordinaten von P und Q als ein neuer Vektor OR wohl-bestimmt, sobald man die Reihenfolge, in der die Addition auszuführen ist, kennt. Auf die entsprechenden Formeln, die sich übrigens aus denen der sphärischen Trigonometrie auf bekannte Weise ergeben, brauche ich nicht näher einzugehen. Ich begnüge mich mit dem Hinweis, dass die Vektoraddition sich auf gewisse Verrückungen und Drehungen der Koordinatenachsen reduzieren lässt, analytisch dadurch definiert, dass diese Koordinatentransformationen eine Gruppe linearer gebrochener Substitutionen bilden, denen gegenüber die quadratische Form (2) sich invariant verhält. Aus diesem Umstand folgt sofort, dass die solchermassen bestimmte Vektoraddition wesentlich identisch ist mit der Addition der Geschwindigkeiten nach der speziellen Relativitätstheorie, wenn v, v_x, v_y, v_z gewisse Geschwindigkeiten, resp. ihre Projektionen auf ein rechtwinkliges Achsenkreuz bedeuten, und c die Lichtgeschwindigkeit ist. Man braucht demnach bloss die in (2) eingehende Grösse c als Lichtgeschwindigkeit zu deuten, um eine ein-eindeutige Beziehung zwischen Vektoradditionen im L_3 und Geschwindigkeitsadditionen nach Einstein zu fixieren. Varičak hat die rechnerischen Einzelheiten seinerzeit durchgeführt, ohne auf den tieferen Grund hinzuweisen. Jeder Strecke $OP = r$ des L_3 entspricht eine in Richtung und Grösse durch (3) und

$$v = c \ \mathrm{th}\ \frac{r}{c} \tag{6}$$

definierte Geschwindigkeit v. Hierbei wäre noch zu berücksichtigen, dass es nur einer nichteuklidischen Bewegungstransformation im L_3 bedarf, um einen beliebigen Punkt in den Koordinatenanfang O zu bringen. Die mit der Strecke OP konjugierte Geschwindigkeit kann hiernach an der Klein'schen Kugel direkt mit dem Zirkel in Bruchteilen der Lichtgeschwindigkeit gemessen werden, sobald man den Radius dieser Kugel zur Einheit nimmt.

Nun ist es aber möglich, die der Länge OP entsprechende Geschwindigkeit im L_3 selbst durch eine gewisse Länge zu messen. Es existiert nämlich im L_3 eine Fläche (zweiter Ordnung) mit der bemerkenswerten Eigenschaft, dass die auf dem Netz ihrer geodätischen Linien entwickelte Geometrie genau die euklidische ist. Man erhält diese Fläche, die Grenzkugel, als Fläche, die jede Gerade eines Parallelenbündels im L_3 rechtwinklig schneidet. Die Grenzkugel liegt symmetrisch in bezug auf jede der zu ihr konjugierten Parallelen und hat u. a. noch die wichtige Eigenschaft, dass jede von ihr konstanten Abstand zeigende Fläche wiederum eine Grenzkugel für dasselbe Parallelenbündel darstellt. Zwei Grenzkugeln sind stets kongruent, jedoch entsprechen sich in dieser Kongruenz durchaus nicht etwa die auf ein und derselben Parallelgeraden zu liegen kommenden Punkte. Die Schnittpunkte zweier Parallelen des Bündels mit der Grenzkugel entfernen sich voneinander, wenn die Grenzkugel vom unendlich fernen Scheitelpunkt des Parallelenbündels abrückt. Das System der Niveauflächen eines Parallelenbündels im L_3 besteht aus Grenzkugeln. Wird eine Gummifläche E'_2 von der Gestalt der Grenzkugel von Massenpunkten mitgeführt, die einem Schwerefeld folgen, dessen Kraftlinien das zugehörige Lobatschewsky'sche Parallelenbündel bilden, so werden diejenigen Massenpunkte, die sich so weit voneinander entfernt befinden, dass sie nicht durch die gegenseitig bedingten Einbuchtungen der Niveaufläche von der Parallelenrichtung abgelenkt werden, den Linien des Schwerefeldes im L_3 folgend, sich nach und nach unbeschränkt voneinander entfernen. Dieses zweidimensionale Weltall wird also das Phänomen der Expansion zeigen, dabei aber für sich allein betrachtet im grossen (d. h. bis auf lokale Krümmungen) alle Eigenschaften eines euklidischen Raumes aufweisen.

Die beistehende Figur zeigt einen Zentralschnitt $v_y = 0$ der Klein'schen Kugel, mehrere Parallelen eines Bündels mit dem Scheitel M und mehrere durch zugehörige Grenzkugeln erzeugte



Schnittkurven (Grenzkreise) FG, $OA'B'$ usw. Infolge der Kongruenz der Grenzkugeln bedeutet es keine Einschränkung der

Allgemeinheit, wenn man sich auf den durch O gehenden Grenzkreis $OA'B'$ konzentriert. Die Gleichung des durch den Punkt F mit den Koordinaten 0 und ζ gehenden Grenzkreises FG lautet

$$(c-\zeta)\, v_x^2 + 2cv_z^2 - 2c(c+\zeta)\, v_z + 2c^2\zeta = 0, \tag{7}$$

also die Gleichung des Grenzkreises $OA'B'$, wo $\zeta = 0$ ist:

$$v_x^2 + 2v_z^2 - 2cv_z = 0. \tag{8}$$

Für die Länge ds eines Bogenelements im zugehörigen L_3 gilt, wenn wie in unserem Falle $dv_y = 0$ angenommen ist,

$$ds^2 = c^2 \frac{(v_x dv_x + v_z dv_z)^2 - (v_x^2 + v_z^2 - c^2)(dv_x^2 + dv_z^2)}{(v_x^2 + v_z^2 - c^2)^2}. \tag{9}$$

Hat der Punkt A in der Figur die Koordinaten v und 0, so folgt aus (8) und (9) für die Länge s des Grenzkreisbogens OA':

$$s = v. \tag{10}$$

Dies bezeugt, dass ein zweidimensionaler Beobachter auf der Grenzkugel in O eine in der Tangentialrichtung seines E'_2 durch einen Vektor OA gegebene Geschwindigkeit v auffassen darf als Strecke, die in der Zeiteinheit auf einer durch O gehenden geodätischen Linie zurückgelegt werden kann. Für den aussenstehenden dreidimensionalen Beobachter ist der Grenzkreisbogen $OA' = s$ natürlich länger, als die geradlinige Entfernung $OA' = r$, was aus der nach (9) sich ergebenden Relation

$$\operatorname{ch} \frac{r}{c} = 1 + \frac{s^2}{2c^2} \tag{11}$$

sofort ersichtlich wird.

Geht der Punkt A nach B, so wird $v = c$ (Lichtgeschwindigkeit). Die Einstein'sche Addition der Geschwindigkeiten (solange die lokale Krümmung des E'_2 vernachlässigt werden kann) überträgt sich auf die Grenzkugel, d. h. auf den E'_2, der aber selbst euklidisch ist. Es gilt also in diesem E'_2, wenn man die Geschwindigkeit als einen Grundbegriff auffasst, die Kinematik der speziellen Relativitätstheorie, solange keine durch Massen bedingte Krümmungen störend einwirken. Es ist dies eine Folge dessen, dass der euklidische E'_2 in einen nichteuklidischen L_3 eingebettet wurde. Die oben erwähnte erste Schwierigkeit ist damit beseitigt.

Es ist prinzipiell möglich, den Parameter „Zeit“ aus der Kinematik wenigstens formal zu eliminieren, indem man postuliert, dass der Begriff der Entfernung einen wohldefinierten eindeutigen Sinn haben soll. Geschwindigkeiten können dann stets auf der Skala eines Spektroskopes durch Strecken gemessen werden, was nicht notwendig eine explizite Zeitmessung voraussetzt. Damit steht im Einklang, dass die Lorentztransformation sehr wohl als Geschwindigkeitstransformation (unhomogener Koordinaten) und nicht notwendig als Transformation von Raum und Zeit (homogene Koordinaten) aufgefasst werden kann. Der Parameter „Zeit“ würde bei einer solchen Darstellung eine abgeleitete Grösse bedeuten, was er ja auch eigentlich tatsächlich ist. Da eine solche Kinematik aber den Gepflogenheiten widerspricht, so erscheint es natürlicher, ein Zeitdifferential dt explizite einzuführen.

Wenn man dieses dt wie vorhin proportional der Geschwindigkeitsänderung der Niveaufläche ansetzte, so würde der Verlauf der Prozesse nach t wesentlich von der Geschwindigkeit der Niveaufläche in einem Anfangsmoment $t = 0$ abhängen. Es ist dies eine Folge der Einstein'schen Geschwindigkeitsaddition, resp. der Eigenschaften der nichteuklidischen Strecken. Umgekehrt würden dann Beobachtungen im E'_2 einen Rückschluss auf die Geschwindigkeit der Niveaufläche gestatten. Soll derartiges aus begreiflichen Gründen vermieden werden, so ist man gezwungen die Bewegung der Niveaufläche im L_3 als gleichförmig anzusehen, d. h. ihre Geschwindigkeitsänderung ständig gleich 0 anzunehmen. Man hat sich dabei das Bild so zu denken, dass die Bewegung der Niveaufläche sofort aufhören würde, wenn der Druck der Massenpunkte plötzlich aufhörte; es wäre also sozusagen der Bewegung der Niveaufläche ein starker „Reibungswiderstand“ entgegengesetzt und dadurch der stationäre Zustand gleichförmiger Geschwindigkeit trotz beständig einwirkender Kräfte erzielt.

Bei einer gleichförmigen Verschiebung der Niveaufläche wird man im E'_2 den Zuwachs des Zeitparameters dt als proportional der Grösse der Verschiebung dq in der Normalenrichtung ansetzen. Dass diese „absolute“ Verschiebung im E'_2 bemerkbar wird (und zwar als Expansion), ist eine charakteristische geometrische Eigenschaft des L_3; im E_3 wäre dies für eine Niveauebene E'_2 nicht der Fall.

Verschiebt sich die Grenzkugel E'_2 um ein dq in der Normalenrichtung, so wächst die Länge s des Grenzkreisbogens OA zwischen zwei konstanten Parallelen um ein ds, das sich aus

$$-\frac{ds}{dq} = \frac{s}{c} \tag{12}$$

bestimmt. Eine solche Verschiebung der als starre Fläche gedachten Grenzkugel ist u. a. dadurch wesentlich verschieden von einer Verschiebung starrer Körper im E_3, dass höchstens e i n Punkt eine Gerade beschreiben kann; alle übrigen Punkte der Fläche beschreiben dann sicher krumme Linien (Abstandslinien). In dieser Eigentümlichkeit der starren Bewegung einer Fläche im L_3 dürfte ein Ansatz für den oben erwähnten Reibungswiderstand zu finden sein, doch soll hier darauf nicht weiter eingegangen werden.

Nimmt man in (12) $-dq$ als proportional dem Zeitdifferential dt an, setzt also $-dq = \gamma \cdot dt$, wo γ eine Konstante bedeutet, so bilden die Lagen der Grenzkugel nach jeweils gleichen Zeitintervallen dt ein System äquidistanter Niveauflächen des Schwerefeldes im L_3. Die Derivierte $\frac{ds}{dt}$ entspricht dann im E'_2 einer relativen Radialgeschwindigkeit der in O und A den Schwerelinien folgenden Massenpunkte. Der E'_2 selbst, d. h. eigentlich das ihm von einem Beobachter aufgeprägte Koordinatennetz, ändert sich nicht, da der E'_2 beständig sich selbst kongruent verbleibt.

Es ist in Übereinstimmung mit dem zur Zeit vorliegenden Beobachtungsmaterial diese relative Radialgeschwindigkeit der Massen im E'_2 nach (12) proportional ihrer jeweiligen Entfernung s:

$$\frac{ds}{dt} = \gamma \frac{s}{c}. \tag{13}$$

Durch Integration ergibt sich für einen endlichen Zuwachs Δs entsprechend einem endlichen Δt:

$$\log\left(1 + \frac{\Delta s}{s}\right) = \frac{\gamma}{c} \cdot \Delta t. \tag{14}$$

Für $\Delta t = 1$ sec ergibt das Beobachtungsmaterial $\frac{\Delta s}{s} = 1{,}6 \cdot 10^{-17}$, woraus sich für das diesem Δt entsprechende $-\Delta q$ findet:

$$-\Delta q = 5 \cdot 10^{-7} \text{ cm}. \tag{15}$$

Die Verschiebung der Niveaufläche um 1 cm erfolgt also in ca. 2 Millionen Sekunden, d. h. ungefähr in 23 Tagen. Nimmt man an, dass diese Expansion sich auch im Planetensystem bemerkbar macht, so müsste man demnach immerhin ungefähr 10 000 Jahre warten, bevor der scheinbare Sonnendurchmesser sich für uns um 0,01 Bogensekunden verringert, vorausgesetzt natürlich, dass dieser Durchmesser selbst an der Expansion nicht teilnimmt, also in Einheiten c ungeändert bleibt. Die relativen Dimensionen der Planetenbahnen würden dabei ungeändert bleiben, da die Expansion bloss eine Ähnlichkeitstransformation im E'_2 bedeutet. Die Umlaufszeiten werden wachsen, u. zw. die Länge des Erdenjahres um ca. 4 Minuten in 10 000 Jahren.

Infolge der so gedeuteten Expansionserscheinung werden unsere Vorstellungen über relative Bewegung im E'_2 einer Korrektur bedürfen. Man wird dort nämlich nur dann von relativer Bewegung im eigentlichen Sinne sprechen können, wenn nicht beide Massenpunkte gleichzeitig genau den Schwerelinien folgen. Damit steht im Einklang, dass der Beobachter im Massenpunkt O und derjenige im Massenpunkt A' identisches Zeitmass $-\frac{1}{\gamma}\cdot dq$ werden verwenden können, ohne in Widersprüche verwickelt zu werden, sofern die längs dem Grenzkreis gemessene Entfernung OA' beider Punkte sich genau nach dem Expansionsgesetz (14) ändert. Ist solches aber nicht der Fall, so wird der sich als in Ruhe befindlich (d. h. beständig auf der Schwerelinie) denkende Beobachter dem Punkte A' eine zusätzliche Geschwindigkeitskomponente im E'_2 zuschreiben und umgekehrt; entsprechend dieser zusätzlichen Komponente wird eine wechselseitige Korrektur der Zeit- und Längenschätzung nach Einstein'schen Prinzipien ausgeführt werden müssen, um die Möglichkeit einer Bestimmung der absoluten Bewegungen längs der Fläche E'_2 auszuschalten. Diese zusätzliche Komponente allein kommt als eigentliche relative Geschwindigkeit im Sinne der Kinematik der speziellen Relativitätstheorie in Betracht, auf sie allein bezieht sich c als Höchstwert. Die Expansionsgeschwindigkeit im E'_2 ist sozusagen nicht mehr mechanischer, sondern geometrischer Natur und wird bei genügend grossem s den Wert c beliebig übersteigen. Trotz ihres rein geometrischen Charakters ist sie für Werte unterhalb c mit dem Spektroskop messbar, da ihr eine Verlängerung des Weges des Lichtstrahles $A'O$ im E'_2 entspricht; sie bedeutet aber keine Differenz der kinetischen Energie beider Massenpunkte im E'_2. Das klassische Trägheitsgesetz ist nur in erster Annäherung für „kleine" Gebiete gültig.

Im L_8 in gerader Richtung gemessen beträgt der Zuwachs dr der Distanz OA'

$$dr = \frac{-2\,dq}{\sqrt{1+4\,c^2\,s^{-2}}}, \tag{16}$$

was bei unendlich wachsendem s beständig absolut wachsend dem Grenzwert $-2\,dq$ zustrebt. Ob hinter diesem r eine physikalische Realität steckt, bleibt eine offene Frage.

Die Expansion des Weltalls wird durch die angewandte Deutung so tiefgreifend erfasst, dass man wohl mit Recht behaupten darf, diese Expansion sei eine konsequente Ergänzung zur geforderten Konstanz der Lichtgeschwindigkeit.

Ich möchte zusammenfassend auf folgendes aufmerksam machen:

1) Die Expansion des Weltalls lässt sich folgerichtig als Expansion der Massenverteilung deuten. Man bedarf keiner mystisch anmutenden Raumexpansion, etwa im Sinne einer veränderlichen Raumkrümmung. Die Expansion wird bemerkbar, obgleich sie eine Ähnlichkeitstransformation bedeutet: sie wird bemerkbar, weil die Strecke c, die den L_8 definiert, sich nicht ändert.

2) Man bedarf keiner im E'_2 wirkenden „Kräfte", um die Expansion zu deuten; das Schwerefeld im L_8 ergibt keine Tangentialkomponente auf der Grenzkugel. Die Expansion bedeutet keinen Zuwachs an kinetischer Energie, da der Druck der Massenpunkte an den einzelnen Stellen der Grenzkugel sich trotz der Radialgeschwindigkeit nicht ändert.

3) Die Expansion bewirkt eine ständige Abnahme der auf ein beliebiges Raumstück kommenden mittleren Massendichte. Das Weltall muss sich asymptotisch einem Zustand nähern, bei dem sämtliche Massenteilchen so isoliert sind, dass Lichtsignale von einem zum anderen nicht übermittelt werden können. Man könnte von einem „Lichttod" sprechen.

4) Man bedarf keiner ausgezeichneten Phase in der Massenverteilung des Weltalls. Die Dichte der Massenverteilung zeigt weder extremale, noch Anfangs- oder Endwerte, sondern bloss ständige Abnahme.

5) Die Gravitationserscheinungen im E'_2 tragen im Vergleich zur Expansion bloss den Charakter lokaler Störungen der sonst im L_3 gleichmässigen Krümmung der Grenzkugel. Die Geringfügigkeit dieser Störungen wird durch die Kleinheit der Ablenkung der Lichtstrahlen im Gravitationsfeld der Sonne bezeugt. Bildlich gesprochen, verhält sich die Gravitation zur Expansion ungefähr so, wie die Störungen der Planetenbahnen zu den Kepler'schen Gesetzen.

6) Ein euklidischer Raum E'_2 widerspricht nicht den Grundprinzipien der Relativitätstheorie, wenigstens dann nicht, wenn eine die Expansion berücksichtigende Korrektur vorgenommen wird. Ohne eine solche Korrektur dürfte die Relativitätstheorie in ihrer nun klassisch gewordenen Form bloss auf „kleine“ Gebiete anwendbar sein.

7) Die Mechanik im E'_2 lässt sich auf das Studium einer quadratischen Differentialform zurückführen, deren invariante Bedeutung darin liegt, das sie die von einem Massenpunkt im L_3 beschriebene Weltlinie definiert.

8) Bei eigentlicher relativer Bewegung im E'_2 werden sich Korrekturen in Zeit- und Längenmass aufzwingen. Es entspricht dies formal einer gewissen Korrektur des in der Normalenrichtung gemessenen $-dq$.

Eine Erweiterung der oben angedeuteten Betrachtungen auf den tatsächlichen Fall eines dreidimensionalen Weltraums begegnet formal keinen Schwierigkeiten; allerdings geht die Anschaulichkeit des Bildes dann verloren. In einem vierdimensionalen hyperbolischen Raum L_4 sei ein durch hyperbolische Parallelen definiertes Schwerefeld gegeben; das dreidimensionale Gebilde E'_3, das sämtliche Parallelen des Feldes orthogonal schneidet, ist dann in sich euklidisch. Es werde von Massenpunkten mitgeführt, die im erwähnten vierdimensionalen

Schwerefelde „fallen“. In den Umgebungen derjenigen Stellen des E'_3, wo die Massenpunkte auf den E'_3 „drücken“, entstehen Dehnungen und Spannungen, die geometrisch einer „Krümmung“ des E'_3 in der betreffenden Gegend gleichbedeutend sind, und gegenseitige Gravitationserscheinungen der Massen im E'_3 bewirken. Im grossen wird aber während des „Fallens“ eine durch die Divergenz des vierdimensionalen Schwerefeldes bedingte Expansionserscheinung sich Geltung verschaffen. Gravitation bedeutet für das Universum bloss eine lokale Störung der Expansion.

Tartu, April 1935.