

**ENERGIEVERLUSTE IM EISENBLECH  
BEI NIEDERFREQUENTER  
UMMAGNETISIERUNG**

VON

**ARNOLD TUDEBERG**

TARTU 1936



Da gewisse Energiemengen, die in den Eisenteilen von Wechselstrommaschinen durch Ummagnetisierungsprozesse zu Wärme degradiert werden, durch von außen aufgewandte Energie zu decken sind und daher den Wirkungsgrad der Maschinen herabsetzen, so pfllegt man sie bekanntlich als Eisenverluste zu bezeichnen.

Wenn die magnetische Induktion in einem mit elektrischem Leitvermögen begabten Körper zeitlichen Änderungen unterworfen ist, werden in diesem Körper elektrische Ströme induziert; es ist also stets mit der Erzeugung Joulescher Wärme durch die induzierten Wirbelströme im Eisenkern bei dessen Ummagnetisierung zu rechnen. Ferner wird bei jedem Magnetisierungszyklus zur Überwindung der molekularen Kräfte der umzu-richtenden Elementarmagnete im Eisen Arbeit geleistet, die sich zum Teil ebenfalls in Wärme umsetzt; es ist dies die sogenannte Hysteresearbeit. Der gesamte Eisenverlust setzt sich also aus zwei voneinander gut unterscheidbaren Teilen zusammen: dem Wirbelstromverlust und dem Hystereseverlust.

Die Berechnung der Eisenverluste zählt zu jenen Kapiteln der allgemeinen Elektrotechnik, in denen man trotz zahlreicher älterer und neuerer Untersuchungen immer noch zu keinem befriedigenden Abschluß gelangt zu sein scheint. Vor mehr als 40 Jahren hat Steinmetz<sup>1</sup> für diese Berechnung eine Formel gegeben, die bisher am meisten benutzt worden ist. Die Steinmetzsche Formel drückt den Eisenverlust ( $H$ ) durch die Ummagnetisierungsfrequenz ( $\nu$ ) und den Höchstwert ( $B$ ) der Induktion zweigliedrig aus:

$$H = \eta B^{1.6} + \epsilon \nu B^2,$$

wobei das erste Glied dem Hystereseverlust, das zweite dem Wirbelstromverlust Rechnung tragen soll — und enthält nur

<sup>1</sup> *Chas. Proteus Steinmetz*: Einige Bemerkungen über Hysteresis. Elektrotechnische Zeitschrift (= ETZ) **12** (1891), S. 62 f. — Experimentelle Bestimmungen des Energieverlustes durch Hysteresis und seiner Abhängigkeit von der Intensität der Magnetisierung. ETZ **13** (1892), S. 43—48 u. 55—59. — Das Gesetz der magnetischen Hysteresis und verwandte Phänomene des magnetischen Kreislaufes. ETZ **13** (1892), S. 519—522, 531—534, 545—550, 563—566, 575—579, 587—591, 599—602.

zwei Materialkonstanten,  $\eta$  und  $\varepsilon$ . Im Laufe der Zeit sind nun beträchtliche Abweichungen von diesem Gesetz festgestellt worden, in dem Sinne, daß die Koeffizienten  $\eta$  und  $\varepsilon$  eigentlich keine Konstanten sind<sup>2</sup> und auch der Exponent 1·6 nicht für alle Eisensorten gleich gut paßt<sup>3</sup>. Vidmar<sup>4</sup> ist der Meinung, daß dieser Exponent — mindestens für hochlegierte Bleche — durch einen wesentlich größeren zu ersetzen sei, und rechnet der Einfachheit halber mit der zweiten Potenz der Maximalinduktion. Den Steinmetzschens Wirbelstromkoeffizienten  $\varepsilon$  hat man übrigens auf Grund theoretischer Erwägungen auch durch andere physikalische Charakteristiken ausgedrückt<sup>5</sup>, jedoch mangelt es diesen Ausdrücken entweder an theoretischer Strenge oder an praktischer Anwendbarkeit.

Über die Größenverhältnisse der beiden Verlustarten gehen die Angaben der verschiedenen Autoren weit auseinander. Nach Steinhaus<sup>6</sup> beträgt der Hystereseverlust in einem hochlegierten Eisenblech 1·06 und der Wirbelstromverlust 0·16 Watt pro kg bei einer Frequenz von 50 sec<sup>-1</sup> und der Maximalinduktion 10<sup>4</sup> Gauß; nach Vidmar<sup>7</sup> wird unter gleichen Umständen ein hochlegiertes Blech etwa 0·5 Watt/kg Hystereseverlust und 0·8 Watt/kg Wirbelstromverlust aufweisen. Auf 8 Watt Leistungsverlust durch Wirbelströme kommen also — bei ein und derselben Blechsorte und unter denselben physikalischen Ver-

<sup>2</sup> A. Ebeling u. Erich Schmidt: Über magnetische Eigenschaften der neueren Eisensorten und den Steinmetzschens Koeffizienten der magnetischen Hysterese. ETZ 18 (1897), S. 276—278. — F. Niethammer: Magnetische Hysterese und Wirbelströme. ETZ 19 (1898), S. 669—671 u. 688—690. — W. Peukert: Über die Trennung der Eisenverluste bei Wechselstromtransformatoren. ETZ 20 (1899), S. 674—677. — A. Kühns: Beitrag zur Untersuchung der Wirbelströme in Eisenblechen. ETZ 27 (1906), S. 901—906.

<sup>3</sup> F. Stroude, The Electrician 69 (1912), S. 606 [referiert in ETZ 34 (1913), S. 302 unter dem Titel: Eine Nachprüfung des Steinmetzschens Exponenten für Transformatorenblech, legiertes Blech und Gußeisen].

<sup>4</sup> Milan Vidmar: Vorlesungen über die wissenschaftlichen Grundlagen der Elektrotechnik (Berlin 1928), S. 148 f.

<sup>5</sup> E. Kittler u. W. Petersen: Allgemeine Elektrotechnik 2 (Stuttgart 1909), S. 449 f. — G. Benischke: Die wissenschaftlichen Grundlagen der Elektrotechnik, 6. Aufl. (Berlin 1922), S. 281 f. — Die Abhängigkeit der Eisenverluste von der Kurvenform. ETZ 22 (1901), S. 52—57.

<sup>6</sup> Handbuch der Physik (herausgegeben von H. Geiger u. K. Scheel), 15 (Berlin 1927), S. 182 u. 188.

<sup>7</sup> Op. cit.<sup>4</sup>, S. 149.

hältnissen — bei dem einen Verfasser 53, bei dem anderen nur 5 Watt Hystereseverlust.

Im folgenden wollen wir, vom Induktionsgesetze ausgehend, zunächst kurz die Messung der maximalen magnetischen Induktion im Eisen bei einem einfachen Magnetisierungszyklus besprechen, sodann zur Bestimmung des Wirbelstromverlustes eine Formel ableiten und daraus einige Folgerungen ziehen. Ferner werden wir eine Anordnung zur Messung des gesamten Eisenverlustes bei Wechselstrommagnetisierung betrachten und ein einfaches Verfahren zur Ermittlung des Hystereseverlustes finden. Es wird sich zeigen, daß bei den in der Technik vorkommenden Maximalinduktionen das Verhalten eines Bleches hinsichtlich der beiden Verlustarten durch übliche Materialkonstanten — die Dichte, den spezifischen elektrischen Widerstand und die zwei Verlustziffern — und räumliche Abmessungen mit hinreichender Genauigkeit charakterisiert ist; es wird auch möglich sein, die beiden Verluste aus diesen Daten zu berechnen.

## § 1. Induktionsgesetz. Maximalinduktion.

Bezeichnet man die elektrische Feldstärke und die magnetische Induktion — beides auf das Maxwellsche elektromagnetische Maßsystem bezogen —, wie üblich, mit  $\mathfrak{E}$  und  $\mathfrak{B}$ , so schreibt sich die zweite Maxwellsche Feldgleichung bekanntlich in der Form:

$$\frac{\partial \mathfrak{B}}{\partial t} = - \operatorname{rot} \mathfrak{E}. \quad (1)$$

Es sei  $C$  irgendeine geschlossene Kurve,  $ds$  ihr vektorielles Bogenelement,  $F$  ein beliebiges, von  $C$  berandetes Flächenstück und  $df$  sein (entsprechend gerichtetes vektorielles) Flächenelement; durch Integration und Anwendung des Stokesschen Satzes ergibt sich dann aus (1):

$$\int_F \frac{\partial \mathfrak{B}}{\partial t} df = - \int_F \operatorname{rot} \mathfrak{E} df = - \int_C \mathfrak{E} ds, \quad (2)$$

eine allgemeine Beziehung zwischen der zeitlichen Änderung des Induktionsflusses und der induzierten elektrischen Potentialdifferenz. Wenn nun  $C$  eine einfache ebene Kurve ist und

der Vektor  $\mathfrak{B}$  in allen innerhalb der Kurve  $C$  liegenden Punkten dieser Ebene immer den gleichen, nur von der Zeit abhängigen Wert hat und stets senkrecht zur Ebene steht, vereinfacht sich die Gleichung (2) zu:

$$q \cdot \frac{dB}{dt} = - \int_C \mathfrak{E} ds, \quad (3)$$

indem man für  $F$  dieses von  $C$  umschlossene Ebenenstück wählt, seinen Flächeninhalt mit  $q$  bezeichnet und unter  $B$  die Komponente von  $\mathfrak{B}$  in der Richtung der Normale dieser Ebene versteht (es ist also  $\mathfrak{B} = B \mathfrak{n}$ , wenn  $\mathfrak{n}$  den Einheitsvektor der Normale bedeutet). Schließt sich aber die Kurve  $C$  erst nach  $w$ -maligem Umlauf um dasselbe ebene Flächenstück — repräsentiert sie also eine flache Spule aus  $w$  Windungen —, so hat man anstatt (3):

$$w q \frac{dB}{dt} = - \int_C \mathfrak{E} ds \quad (4)$$

zu schreiben, weil ja in der Gleichung (2) einer solchen Kurve  $C$  ein  $w$ -blättriges Flächenstück  $F$  entspricht.

Drückt man die in der Gleichung (4) enthaltenen Größen im praktischen Maßsystem aus, also die magnetische Induktion  $B$  in Gauß (= 1 elektromagn. CGS-Einheit) und die durch das rechtsstehende Linienintegral dargestellte elektrische Potentialdifferenz oder elektromotorische Kraft  $e$  in Volt (=  $10^8$  elektromagn. CGS-Einheiten), so erhält man:

$$w q \frac{dB}{dt} = - e \cdot 10^8. \quad (5)$$

Nimmt nun die Induktion  $B$  zur Zeit  $t_1$  den Wert  $B_1$  und zur Zeit  $t_2$  den Wert  $B_2$  an, so folgt aus (5) durch Integration:

$$B_2 - B_1 = - \frac{10^8}{w q} \int_{t_1}^{t_2} e dt. \quad (6)$$

Die Gleichung (6) kann zur Bestimmung der Maximalinduktion  $B$  eines einfachen Magnetisierungszyklus etwas umgeformt werden. Die Induktion  $B$  durchläuft während der einen Hälfte eines einfachen Zyklus die Werte von  $-B$  bis  $B$  monoton, und während der anderen Hälfte dieselben Werte in

umgekehrter Reihenfolge; vollzieht sich eine der beiden Hälften in der Zeit von  $t_1$  bis  $t_2$ , so gilt nach (6):

$$B = \frac{10^8}{2 w q} \left| \int_{t_1}^{t_2} e dt \right|. \quad (7)$$

Wie gesagt, nimmt  $B$  zu den Zeiten  $t_1$  und  $t_2$  seine Extremwerte an und verläuft zwischen  $t_1$  und  $t_2$  monoton; folglich wird nach (5) der Integrand  $e$  in (7) an beiden Integrationsgrenzen verschwinden und im Innern des Integrationsintervalls ein beständiges Vorzeichen haben.

Wenn wir also einen Eisenkörper wiederholt ummagnetisieren und dafür sorgen, daß die Induktion in einer senkrecht zur Feldrichtung stehenden Ebene homogen ist (d. h. in allen Punkten dieses Querschnitts die Momentanwerte der Induktion gleich sind), so können wir zur Messung der dort herrschenden Maximalinduktion eine daselbst um den Körper gewickelte flache Spule verwenden, in der Weise, daß wir den zeitlichen Verlauf der induzierten elektromotorischen Kraft registrieren und ihr Zeitintegral über eine Halbwelle<sup>8</sup> bilden. Damit wir es mit einem einfachen Magnetisierungszyklus zu tun haben, soll die induzierte elektromotorische Kraft während der betreffenden Welle genau einen Vorzeichenwechsel erleiden und ihr Zeitintegral, einmal über die eine Halbwelle, das andere Mal über die andere Halbwelle sich erstreckend, den gleichen Absolutbetrag haben.

## § 2. Wirbelstromverlust.

Wir betrachten einen  $b$  cm breiten Streifen aus  $d$  cm starkem Blech ( $d < b$ ), in dessen Innerem eine räumlich homogene zeitlich veränderliche Induktion  $\mathfrak{B}$  herrscht. Der Vektor  $\mathfrak{B}$  möge stets die Längsrichtung des Streifens haben, so daß in den Rechnungen nur seine auf diese Richtung fallende Komponente  $B$

<sup>8</sup> Es ist dabei vollkommen gleichgültig, ob die beiden Hälften des Magnetisierungszyklus gleich lange dauern oder nicht, ob also die beiden durch einen Vorzeichenwechsel getrennten Halbwellen der induzierten elektromotorischen Kraft zu gleichen oder ungleichen Zeitintervallen gehören.

auftreten wird. Alle Punkte innerhalb des Blechstreifens, deren kleinste Entfernung von der Oberfläche des Streifens mindestens

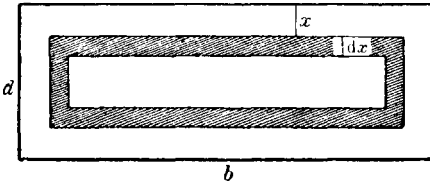


Abb. 1.

$x$  und höchstens  $x + dx$  cm beträgt ( $x < \frac{1}{2} d$ ), bilden eine Schicht; der Querschnitt dieser Schicht ist ein von zwei Rechtecken begrenztes (in Abb. 1 schraffiertes) Flächenstück. Wenn die magnetische Induktion sich mit der Zeit

ändert, wird in dieser Elementarschicht die elektromotorische Kraft

$$- (b - 2x)(d - 2x) \frac{dB}{dt} \cdot 10^{-8} \quad (8)$$

induziert, da ja in ihrem beliebigen Querschnitt (senkrecht zu der Längsrichtung) ein Stromfaden das gleiche ebene Flächenstück vom Inhalt  $(b - 2x)(d - 2x)$  umschlingt<sup>9</sup>. Der spezifische Widerstand (in  $\Omega \frac{\text{mm}^2}{\text{m}}$  gemessen) des Blechmaterials sei mit  $\rho$  bezeichnet. In der betrachteten Blechschicht wird ein Strom kreisen und Joulesche Wärme erzeugen.

Wir denken uns nun durch zwei Querschnitte ein Stück von der Länge  $l$  cm aus dem Blechstreifen herausgeschnitten, das also die Form eines Quaders mit den Kantenlängen  $l$ ,  $b$  und  $d$  hat, und berechnen den durch die Wärmeerzeugung verursachten Leistungsverbrauch im ausgeschnittenen Teil der betrachteten Elementarschicht. Die Länge der Strombahn ist  $2(b - 2x + d - 2x)$  cm und der Querschnittsinhalt  $l dx$  cm<sup>2</sup>, der Widerstand (in  $\Omega$ ) daher

$$\frac{2(b + d - 4x) \cdot 10^{-2}}{l dx \cdot 10^2} \cdot \rho = 2\rho \cdot \frac{b + d - 4x}{l dx} \cdot 10^{-4}. \quad (9)$$

<sup>9</sup> Die Annahme, daß die Wirbelstrombahnen durch derartige Schichten darstellbar sind, entspricht der Vorstellung, daß in gleicher Tiefe unterhalb der Oberfläche überall gleiche Stromdichte herrscht. Hingegen stößt die Vorstellung, daß die Strombahn dem Querschnittsrand des Streifens ähnlich ist (wie z. B. bei Kittler, *op. cit.*<sup>5</sup>, S. 450 oder bei Vidmar, *op. cit.*<sup>4</sup>, S. 145: Abb. 94), auf die Schwierigkeit, daß im Falle  $d \ll b$  die Stromdichte an den kürzeren Seiten dieser Bahn unverhältnismäßig kleiner ist als an den längeren Seiten, wofür eigentlich jeder erfaßbare Grund fehlt; nach der Annahme, daß die Wirbelstrombahnen lauter Rechtecke mit den Seiten  $b$  und  $d - 2x$  sind (wie etwa bei Kittler, *ibid.* S. 449), wird aber die Stromdichte an den kürzeren Seiten der Bahn unendlich groß.

Aus der elektromotorischen Kraft (8) und dem Widerstand (9) folgt die Stromstärke<sup>10</sup>

$$\frac{(b-2x)(d-2x)}{b+d-4x} \cdot \frac{l dx}{2\varrho} \cdot \frac{dB}{dt} \cdot 10^{-4}$$

und somit die auf Wärmeezeugung verbrauchte Elementarleistung (in Watt)

$$\frac{(b-2x)^2(d-2x)^2}{b+d-4x} \cdot \frac{l}{2\varrho} \cdot \left(\frac{dB}{dt}\right)^2 \cdot 10^{-12} \cdot dx. \quad (10)$$

Der gesamte Leistungsverbrauch im ausgeschnittenen Quader setzt sich additiv aus den in allen möglichen Schichten gebildeten Beiträgen (10) zusammen und drückt sich folglich durch das Integral

$$\int_0^{\frac{d}{2}} \frac{(b-2x)^2(d-2x)^2}{b+d-4x} \cdot \frac{l}{2\varrho} \cdot \left(\frac{dB}{dt}\right)^2 \cdot 10^{-12} \cdot dx$$

aus. Der Leistungsverbrauch pro Volumeinheit (1 cm<sup>3</sup>) des Bleches beträgt demnach

$$\begin{aligned} & \frac{1}{l b d} \int_0^{\frac{d}{2}} \frac{(b-2x)^2(d-2x)^2}{b+d-4x} \cdot \frac{l}{2\varrho} \cdot \left(\frac{dB}{dt}\right)^2 \cdot 10^{-12} \cdot dx \\ &= \left\{ \frac{1}{2 b d} \int_0^{\frac{d}{2}} \frac{(b-2x)^2(d-2x)^2}{b+d-4x} dx \right\} \cdot \frac{10^{-12}}{\varrho} \cdot \left(\frac{dB}{dt}\right)^2. \end{aligned}$$

In den geschweiften Klammern steht ein Faktor, der nur von

<sup>10</sup> Es wäre verkehrt, die Stromstärke hier, wie sonst üblich, der Differentialgleichung eines allgemeinen (kapazitätsfreien) Stromkreises

$$L \frac{di}{dt} + R i - e = 0$$

(worin  $i$  die Stromstärke,  $e$  die aufgedrückte Spannung,  $R$  den Ohmschen Widerstand,  $L$  die Induktivität und also das Glied  $L \frac{di}{dt}$  die „Extraspannung“ bedeutet) zu entnehmen, da das durch den Strom hervorgerufene magnetische Feld von demjenigen Felde, wo die „aufgedrückte“ Spannung induziert wird, im Falle eines Wirbelstromkreises gar nicht trennbar ist. Vielmehr summieren sich die durch Wirbelströme hervorgebrachte magnetische Feldstärke und die primäre (äußere) magnetische Feldstärke vektoriell, und erst der resultierenden Feldstärke entspricht die Induktion  $B$ ; die durch den Ausdruck (8) gegebene elektromotorische Kraft übernimmt daher die Rolle der Differenz von „Klemmenspannung“ und „Extraspannung“.

der Blechstärke  $d$  und der Breite  $b$  abhängt; wir wollen diesen Faktor kurz mit  $K_{b,d}$  bezeichnen:

$$K_{b,d} = \frac{1}{2bd} \int_0^d \frac{(b-2x)^2 (d-2x)^2}{b+d-4x} dx. \quad (11)$$

Ist nun  $\delta$  die Dichte (in  $\frac{g}{cm^3}$ ) des Blechmaterials, so berechnet sich der Leistungsverbrauch pro Kilogramm zu

$$K_{b,d} \cdot \frac{10^{-9}}{q\delta} \cdot \left(\frac{dB}{dt}\right)^2.$$

Wenn insbesondere  $B$  eine periodische Funktion der Zeit und  $\nu$  die Frequenz (Periodenzahl in einer Sekunde) ist, beträgt der Leistungsumsatz pro kg im Mittel

$$K_{b,d} \cdot \frac{10^{-9}}{q\delta} \cdot \nu \int_{t_0}^{t_0 + \frac{1}{\nu}} \left(\frac{dB}{dt}\right)^2 dt = V^{(w)} \quad (12)$$

( $t_0$  ist ein beliebiger Zeitpunkt). Diesen Mittelwert  $V^{(w)}$  pflegt man Wirbelstromverlust zu nennen.

Werden nun mehrere Blechstreifen von der betrachteten Art bei Verwendung dünner isolierender Zwischenlagen übereinandergeschichtet, also zu einem Bündel mit rechteckigem Querschnitt (vom Flächeninhalt  $q$ ), und wird um dieses Paket eine aus  $w$  Windungen bestehende Spule gewickelt, so kann man diese Spule zur Messung der durch (12) gegebenen Größe  $V^{(w)}$  benutzen. Es wird bei periodischer Änderung von  $B$  (die Induktion sei im ganzen Bündel homogen) in der Spule die elektromotorische Kraft

$$- w q \frac{dB}{dt} \cdot 10^{-8}$$

induziert, deren Effektivwert  $E$  bekanntlich durch die Gleichung

$$\begin{aligned} E^2 &= \nu \int_{t_0}^{t_0 + \frac{1}{\nu}} w^2 q^2 \left(\frac{dB}{dt}\right)^2 \cdot 10^{-16} dt \\ &= w^2 q^2 \nu \cdot 10^{-16} \int_{t_0}^{t_0 + \frac{1}{\nu}} \left(\frac{dB}{dt}\right)^2 dt \end{aligned}$$

gegeben ist. Somit ergibt sich aus (12) die folgende Beziehung:

$$V^{(w)} = K_{b,d} \cdot \frac{10^7}{\varrho \delta w^2 q^2} \cdot E^2. \quad (13)$$

Wenn die Größen  $b$ ,  $d$ ,  $\varrho$ ,  $\delta$  und  $q$  bekannt sind, reduziert sich also die Bestimmung des Wirbelstromverlustes  $V^{(w)}$  auf die Messung der effektiven elektromotorischen Kraft, die in einer an dem Blechpaket angeordneten Spule induziert wird; natürlich muß man dabei die Windungszahl  $w$  der Spule kennen.

Die Größen  $b$  und  $d$  gehen die Beziehung (13) durch das Integral ein, das wir nach (11) mit  $K_{b,d}$  bezeichnet haben; nach Ausführung der Integration erhalten wir:

$$K_{b,d} = \frac{(b-d)^4}{128 b d} \log \operatorname{nat} \left( \frac{b+d}{b-d} \right) - \frac{1}{64} (b^2 - 4bd + d^2).$$

Setzen wir sodann für den Logarithmus seine Maclaurinsche Reihe ein, die im Falle  $d \ll b$  sehr rasch konvergiert — es ist nämlich

$$\log \operatorname{nat} \left( \frac{b+d}{b-d} \right) = \log \operatorname{nat} \left( 1 + \frac{2d}{b-d} \right) = \frac{2d}{b-d} - \frac{1}{2} \left( \frac{2d}{b-d} \right)^2 + \frac{1}{3} \left( \frac{2d}{b-d} \right)^3 - \dots,$$

so ergibt sich:

$$K_{b,d} = \frac{d^2}{12} \left( 1 - \frac{d}{b} + \frac{3d^2}{5b(b-d)} - \dots \right).$$

Für einen 10 cm breiten Streifen aus 1 mm starkem Blech ist z. B.

$$K_{10,0.1} = 8.2505 \cdot 10^{-4};$$

für 3 cm breite Streifen, wie sie etwa im Epsteinschen Eisenprüfer verwendet werden, wird aber

$$K_{3,0.1} = 8.0610 \cdot 10^{-4}.$$

Der Unterschied ist ziemlich gering; der Quotient der beiden Zahlen beträgt 1.0235, die relative Abweichung (auf  $K_{3,0.1}$  bezogen) daher 2.35%. Ist der Blechstreifen so breit, daß der Quotient  $\frac{d}{b}$  gegenüber 1 vernachlässigbar klein ist, so wird man anstatt  $K_{b,d}$  einfach den Grenzwert

$$\lim_{b \rightarrow \infty} K_{b,d} = \frac{d^2}{12}$$

benutzen können; wir bezeichnen diesen Wert mit  $K_{\infty,d}$ . Für 1 mm starkes Blech ist beispielsweise  $K_{\infty,0.1} = 8.3333 \cdot 10^{-4}$ .

Zum Vergleiche seien hier noch die Koeffizienten  $K_{3,d}$ ,  $K_{10,d}$  und  $K_{\infty,d}$  und ihre prozentuellen Unterschiede für die gebräuchlichsten Blechstärken 0·5 mm und 0·35 mm (d. h. für  $d = 0·05$  bzw. 0·035) notiert.

$$\begin{aligned} K_{3,0·05} &= 2·0490 \cdot 10^{-4} \\ K_{10,0·05} &= 2·0729 \cdot 10^{-4}, & K_{10,0·05} / K_{3,0·05} - 1 &= 1·17 \% \\ K_{\infty,0·05} &= 2·0833 \cdot 10^{-4}, & K_{\infty,0·05} / K_{3,0·05} - 1 &= 1·67 \% \\ \\ K_{3,0·035} &= 1·0090 \cdot 10^{-4}, \\ K_{10,0·035} &= 1·0173 \cdot 10^{-4}, & K_{10,0·035} / K_{3,0·035} - 1 &= 0·82 \% \\ K_{\infty,0·035} &= 1·0208 \cdot 10^{-4}, & K_{\infty,0·035} / K_{3,0·035} - 1 &= 1·17 \% \end{aligned}$$

Wir wollen nun das Ergebnis (13) auf den konkreten Fall eines Epsteinapparates spezialisieren und mit einem Zahlenbeispiel belegen.

Im Epsteinschen Eisenprüfapparat verwendet man vier Blechpakete, je von 50 cm Länge und 2·5 kg Gewicht; der Flächeninhalt  $q$  des Querschnitts berechnet sich daher aus der Dichte  $\delta$  auf Grund der Gleichung  $50 q \delta = 2500$  zu  $q = \frac{50}{\delta}$ . Die Breite der Blechstreifen beträgt 3 cm, die Sekundärwicklung des Apparates enthält insgesamt 600 Windungen, also  $b = 3$ ,  $w = 600$ . Setzen wir diese Daten in die Formel (13) ein, so nimmt sie folgende Form an:

$$V^{(w)} = \frac{K_{3,d}}{90} \cdot \frac{\delta}{\rho} \cdot E^2. \quad (14)$$

Beispiel. Haben wir im Epsteinapparat ein 0·35 mm starkes Material von der Dichte  $7·53 \frac{\text{g}}{\text{cm}^3}$  und vom spezifischen Widerstand  $0·632 \Omega \frac{\text{mm}^2}{\text{m}}$ , so ist

$$V^{(w)} = \frac{1·009 \cdot 10^{-4}}{90} \cdot \frac{7·53}{0·632} \cdot E^2 = 1·336 \cdot 10^{-5} \cdot E^2.$$

Bei einer periodischen Ummagnetisierung dieses Bleches möge die in der Sekundärwicklung induzierte elektromotorische Kraft den Effektivwert 120 Volt erhalten; dann beträgt der Wirbelstromverlust  $V^{(w)}$

$$1·336 \cdot 10^{-5} \cdot 1·44 \cdot 10^4 = 0·192$$

Watt pro Kilogramm.

### § 3. Eine Anordnung zur Verlustmessung.

Zur Berechnung des Wirbelstromverlustes in einem Blechstreifen nach (13) resp. (14) benötigt man, außer der Kenntnis der Materialkonstanten  $\varrho$  und  $\delta$  und der räumlichen Abmessungen  $d$  und  $b$  des Streifens, nur noch eine Messung des Effektivwertes  $E$  der elektromotorischen Kraft, die in einer an das Blechpaket (von bekanntem Querschnitt) angeordneten Spule (von bekannter Windungszahl) induziert wird. Da hingegen der Hystereseverlust bei einfachen Magnetisierungszyklen vom Maximalwert der magnetischen Induktion abhängt und, als Leistungsverbrauch aufgefaßt, sich auch mit der Ummagnetisierungsfrequenz ändert, wird es bei einer Untersuchung der Eisenverluste beider Art auf die gleichzeitige Messung folgender Größen ankommen:

Frequenz  $\nu$  (die Periodenzahl in einer Sekunde),

Maximalinduktion  $B$ ,

Effektivwert  $E$  der induzierten elektromotorischen Kraft und der gesamte Leistungsverlust (Wattverbrauch)  $W$  in einem Probekörper, dessen Materialkonstanten  $\varrho$ ,  $\delta$  und Charakteristiken  $d$ ,  $b$  der räumlichen Unterteilung bekannt sind.

Abb. 2 zeigt schematisch eine Anordnung<sup>11</sup> zur gleich-

<sup>11</sup> Bei den vom Verfasser im elektrotechnischen Laboratorium des Staatlichen Materialprüfungsamtes, Tallinn, ausgeführten Messungen wurden folgende Instrumente benutzt:

als A — zwei dynamometrische Amperemeter, Nr. 2076 565 von *Siemens & Halske* für Stromstärken über 1 bis 5 Ampere und Nr. 2004 382 von *S. & H.* für Stromstärken von 1 Ampere und darunter,

W — Wattmeter für Eisenmessungen Nr. 2345 390 von *S. & H.*, mit Vorwiderständen *S. & H.* 1922 161 und *S. & H.* 1922 524 auf einem Kompensator kalibriert (für drei Meßbereiche),

V — dynamometrisches Voltmeter Nr. 714 385 von *Hartmann & Braun*,

P — Epsteinapparat Nr. 2235 622 von *S. & H.*,

O — Siemens-Oszillograph Nr. 2112 908 von *S. & H.*,

$\bar{V}$  — Drehspulvoltmeter Nr. 1748 493 von *S. & H.*,

$\bar{A}$  — ebensolches Amperemeter Nr. 1445 087 von *S. & H.*,

H — eine Stimmgabel mit großer Direktionskraft und daher konstanter (von etwaigen Schwankungen des Erregerstromes unabhängiger) Schwingungsfrequenz; auf Grund gleichzeitiger oszillographischer Aufnahme ihrer Unterbrechungskurven mit verschiedenen Wechselstromkurven wurde die Schwingungsfrequenz auf  $452.0 \text{ sec}^{-1}$  bestimmt (die Frequenz des Wechselstroms wurde dabei jeweils an der Generatorwelle mit zwei Tachometern gemessen).

zeitigen Messung der erwähnten Größen. Durch die Primärwicklung des Epsteinischen Eisenprüfers P wird über das Ampere-meter A und die Stromspule des Wattmeters W ein Wechselstrom hindurchgeschickt, dessen Frequenz und Stromstärke reguliert werden können; damit die Frequenz keine störenden Schwankungen aufweise, verwendet man als Stromquelle einen

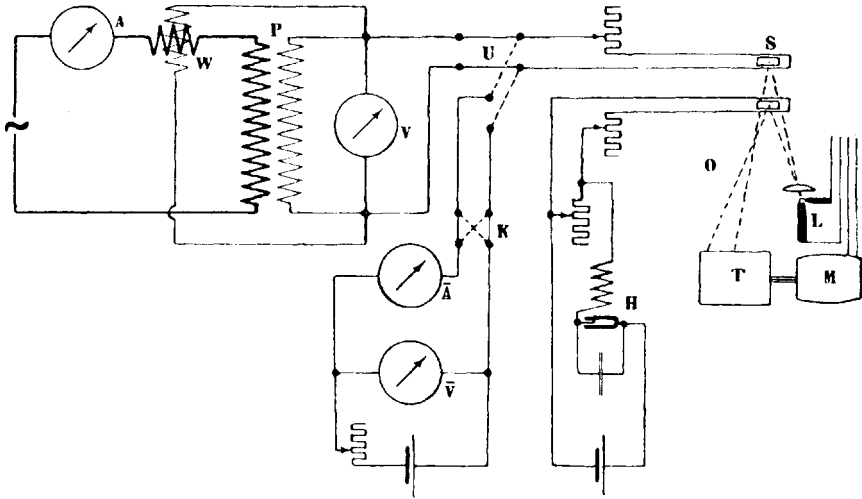


Abb. 2.

Generator, dessen Antriebsmotor durch eine Akkumulatoren-batterie gespeist wird. An die Klemmen der Sekundärwicklung des Epsteinapparates sind ein Voltmeter V, die Spannungsspule des Wattmeters W und die Meßschleife S eines Siemens-Oszillographen parallel geschaltet. Von dem Oszillographen O sind noch gezeigt: die Lichtquelle L, die photographische Trommel T und ihr Antriebsmotor M. Die oszillographische Aufnahme der induzierten Spannung dient einerseits zur Messung der Ummagnetisierungsfrequenz  $\nu$  und andererseits zur Bestimmung der Maximalinduktion  $B$ ; auf jedes Oszillogramm werden dafür eine Zeitmaßkurve und zwei Spannungsmaßgerade aufgetragen. Die Zeitkurve wird (durch eine andere Meßschleife des Oszillographen) von einem periodisch unterbrochenen Gleichstrom geliefert, der also über einen kalibrierten Stimmgabel-Unterbrecher (Wagnerschen Hammer) H geleitet ist. Nach der gleichzeitigen Aufnahme der Spannungskurve und der Zeitkurve wird

die Meßschleife  $S$  (mit demselben Vorwiderstande wie bei der Aufnahme der Spannungskurve) durch den Umschalter  $U$  in den Gleichstromkreis einer Batterie eingeschaltet; gleichzeitig mit der Aufnahme einer Maßgeraden wird nunmehr die ihr entsprechende Spannung am Voltmeter  $\bar{V}$  abgelesen<sup>12</sup>; mit Hilfe des Kommutators  $K$  schaltet man die Meßschleife in umgekehrter Richtung ein und wiederholt die Aufnahme. Beidemal wird auch die zugehörige Stromstärke mit dem Amperemeter  $\bar{A}$  gemessen.

### F r e q u e n z.

Es sei  $N$  die bekannte Frequenz des Stimmgabel-Unterbrechers und  $\lambda_N$  die Länge einer Periode der Zeitmaßkurve auf dem Oszillogramm; einer Zeiteinheit (1 sec) entspricht daher auf der Zeitachse eine Strecke von der Länge  $N\lambda_N$ . Wenn nun die in der Sekundärwicklung des Epsteinapparates induzierte elektromotorische Kraft  $e_2$  in einem Intervall (der Zeitachse) von der Länge  $\lambda$  genau eine Welle bildet, so beträgt ihre Periodendauer  $\frac{\lambda}{N\lambda_N}$  sec und die Frequenz also (in sec<sup>-1</sup> gemessen)

$$\nu = \frac{N\lambda_N}{\lambda}. \quad (15)$$

### M a x i m a l i n d u k t i o n.

Gemäß der Formel (7) in § 1 läuft die Messung der Maximalinduktion  $B$  darauf hinaus, das über eine Halbwelle sich erstreckende Zeitintegral von  $e_2$  auszuwerten. Wenn der zeitliche Verlauf von  $e_2$  durch ein Oszillogramm bereits graphisch dargestellt ist, braucht man bloß das entsprechende Flächenstück (das von der Zeitachse und einer Halbwelle begrenzt ist) zu planimetrieren und das Meßergebnis — es sei dies etwa  $P$  cm<sup>2</sup> — in passenden Einheiten (elektromotorische Kraft mal Zeit) auszudrücken. Die Einheit in der Zeitrichtung ist, wie wir bei der Besprechung der Frequenzmessung gefunden haben,  $N\lambda_N$ . Die Einheit in der Spannungsrichtung ergibt sich aus folgender Überlegung. Es sei  $h$  die Entfernung zwischen den beiden Spannungsmaßgeraden auf dem Oszillogramm und  $e'$ ,  $e''$  seien die entsprechenden am Voltmeter  $\bar{V}$  abgelesenen Spannungen; daher

<sup>12</sup> Der Spannungsabfall im Amperemeter  $\bar{A}$  ist vernachlässigbar gering (in der Regel bleibt er unterhalb der Ablesegenauigkeit des Voltmeters  $\bar{V}$ ).

erhält man  $\frac{h}{e' + e''}$  cm Ausschlag in der Spannungsrichtung auf je 1 Volt Spannungsabfall in demjenigen Stromzweige, der aus der Meßschleife  $S$  und ihrem Vorschaltwiderstande besteht. Mit der Einheit  $\frac{h}{e' + e''}$  könnte folglich die Klemmenspannung  $e_k$  dieses Stromzweiges gemessen werden; jedoch stimmt die Klemmenspannung  $e_k$  nicht mit der induzierten elektromotorischen Kraft  $e_2$  überein, sondern es wird zwischen ihnen mit guter Annäherung eine Proportionalität stattfinden. Das wollen wir zeigen und den Proportionalitätsfaktor berechnen.

Der Sekundärstromkreis besteht aus der Sekundärwicklung des Epsteinapparates und drei Zweigen; wir bezeichnen mit  $i_2$  den Momentanwert der Stromstärke in der Sekundärwicklung des Apparates und mit  $r_2$  den Ohmschen Widerstand der Wicklung, mit  $i_v, r_v$  die Stromstärke bzw. den Widerstand des Voltmeterzweiges, mit  $i_w, r_w$  die entsprechenden Größen des Wattmeterzweiges und mit  $i_s, r_s$  diejenigen des Meßschleifenzweiges; ferner schreiben wir der Kürze halber  $\frac{1}{R}$  für den Leitwert  $\frac{1}{r_v} + \frac{1}{r_w} + \frac{1}{r_s}$  und  $\frac{1}{r}$  für  $\frac{1}{r_2} + \frac{1}{r_v} + \frac{1}{r_w} + \frac{1}{r_s}$ .

Es ist nun einerseits

$$i_2 = i_v + i_w + i_s;$$

da die Kapazitäten und Induktivitäten der einzelnen Stromzweige gegenüber ihren Ohmschen Widerständen vernachlässigbar klein sind (die in diesen Zweigen enthaltenen Spulen der Meßinstrumente sind ja eisenfrei), drückt sich demnach  $i_2$  durch die an den Abzweigungsklemmen herrschende Spannung  $e_k$  folgendermaßen aus:

$$i_2 = \frac{e_k}{R}.$$

Andererseits besteht zwischen der Stromstärke  $i_2$  und der induzierten elektromotorischen Kraft  $e_2$  die Beziehung:

$$i_2 = \frac{e_2}{r_2 + R}.$$

Folglich ist

$$e_2 = e_k \cdot \frac{r_2 + R}{R} = e_k \left( 1 + \frac{r_2}{R} \right) = e_k \cdot \frac{r_2}{r}. \quad (16)$$

Mit Rücksicht auf diese Beziehung zwischen  $e_2$  und  $e_k$  finden wir als Einheit zur Messung der elektromotorischen Kraft  $e_2$  auf dem Oszillogramm die Strecke  $\frac{h}{e' + e''} \cdot \frac{r}{r_2}$  cm. Aus dem Inhalt  $P$  cm<sup>2</sup> des planimetrierten Flächenstückes ergibt sich nun, wenn man auf die Einheit  $N\lambda_N \cdot \frac{h}{e' + e''} \cdot \frac{r}{r_2}$  cm<sup>2</sup> übergeht, nach der Formel (7) der Wert

$$\frac{10^8}{2 w q} \cdot \frac{P}{N\lambda_N} \cdot \frac{e' + e''}{h} \cdot \frac{r_2}{r}$$

für die Maximalinduktion  $B$ . Dieser Wert bedarf allerdings noch einer kleinen Korrektur; denn bei der Formel (7) war vorausgesetzt, daß die Spule dicht um den Probekörper gewickelt ist, die Sekundärwicklung des Epsteinapparates umschlingt aber außer dem zu prüfenden Eisenblech auch die Luftschichten zwischen den einzelnen Blechstreifen sowie zwischen Blechpaket und Spule. Der dadurch verursachte Fehler wird mithin um so größer sein, je größere magnetische Feldstärke in den erwähnten Luftschichten herrscht, je größer also die Stromstärke  $i_1$  in der Primärwicklung des Apparates ist. Nach Gumlich<sup>13</sup> beträgt das Korrektionsglied (in Gauß)  $-\gamma J_1$ , wobei  $J_1$  den Effektivwert der Stromstärke  $i_1$  bedeutet und der Faktor

$$\gamma = \begin{cases} 6 & \text{für unlegiertes Blech} \\ 7 & \text{„ schwachlegiertes „} \\ 8 & \text{„ mittellegiertes „} \\ 9 & \text{„ hochlegiertes „} \end{cases}$$

zu setzen ist.

Der endgültige Wert der Maximalinduktion ist daher

$$B = \frac{10^8}{2 w q} \cdot \frac{P}{N\lambda_N} \cdot \frac{e' + e''}{h} \cdot \frac{r_2}{r} - \gamma J_1. \quad (17)$$

Wirbelstromverlust.

Zwischen dem Effektivwert  $E_2$  der (in der Sekundärwicklung) induzierten elektromotorischen Kraft und der effektiven

<sup>13</sup> Handbuch der Physik (herausgegeben von H. Geiger u. K. Scheel) 16 (Berlin 1927), S. 743.

Klemmenspannung  $E_k$  besteht dieselbe Beziehung wie zwischen den Momentanwerten:

$$E_2 = E_k \cdot \frac{r_2}{r}.$$

In der Formel (13) tritt aber der Effektivwert derjenigen elektromotorischen Kraft auf, die in einer dicht um das Blechpaket gewickelten Spule induziert würde, wenn die einzelnen Blechstreifen auch noch dicht aufeinander gepreßt (also unter Verwendung verschwindend-dünner Isolierschichten zusammengepackt) wären. Entsprechend der von Gumlich angegebenen Korrektur bei  $B$ , hat man für  $E$  in (13) etwa  $E_2 \left(1 - \frac{\gamma J_1}{B + \gamma J_1}\right)$  oder einfacher  $E_2 \left(1 - \frac{\gamma J_1}{B}\right)$  einzusetzen. Es wird somit

$$V^{(w)} = K_{b,d} \cdot \frac{10^7}{\varrho \delta w^2 q^2} \cdot E_2^2 \left(1 - \frac{\gamma J_1}{B}\right)^2$$

oder, wenn wir  $E_2$  durch  $E_k$  ausdrücken und die (wegen  $r_2 \ll R$  und  $\gamma J_1 \ll B$ ) belanglosen Glieder weglassen,

$$V^{(w)} = K_{b,d} \cdot \frac{10^7}{\varrho \delta w^2 q^2} \cdot E_k^2 \left(1 + \frac{2r_2}{R} - \frac{2\gamma J_1}{B}\right). \quad (18)$$

In den meisten Fällen wird allerdings das Glied  $-\frac{2\gamma J_1}{B}$  gegenüber der Summe  $1 + \frac{2r_2}{R}$  vernachlässigbar klein sein.

Der gesamte Leistungsverbrauch im Probekörper.

Da der am Wattmeter  $W$  abgelesene Wert  $W_a$  sich auf die Klemmenspannung  $e_k$  — anstatt auf die induzierte elektromotorische Kraft  $e_2$  — bezieht, beträgt der mittlere Leistungsverbrauch, gemäß (16),

$$W_a \cdot \frac{r_2}{r}.$$

Davon wird ein Teil im Ohmschen Widerstand des Sekundärstromkreises für Wärmeerzeugung verbraucht, nämlich

$$\begin{aligned} & \frac{E^2}{r_2 + R} \\ &= \frac{E_k^2 r_2^2}{r^2 (r_2 + R)} = \frac{E_k^2 r_2}{r} \cdot \frac{r_2}{r_2 + R} \cdot \frac{1}{r} = \frac{E_k^2 r_2}{r} \cdot \frac{r_2}{r_2 + R} \left(\frac{1}{r_2} + \frac{1}{R}\right) \\ &= \frac{E_k^2 r_2}{r} \cdot \frac{r_2}{r_2 + R} \cdot \frac{R + r_2}{r_2 R} = \frac{E_k^2}{R} \cdot \frac{r_2}{r}. \end{aligned}$$

Der Leistungsverlust im Probematerial ist daher

$$W = W_a \cdot \frac{r_2}{r} - \frac{E_k^2}{R} \cdot \frac{r_2}{r} = \left( W_a - \frac{E_k^2}{R} \right) \frac{r_2}{r}. \quad (19)$$

Hystereseverlust.

Bezeichnen wir den Leistungsverlust pro 1 kg Eisenblech als Eisenverlust  $V$ , so gilt  $V = 0.1 W$ , da der Epsteinapparat 10 kg Probematerial aufnimmt. Nach Subtraktion des aus Formel (18) berechneten Wirbelstromverlustes  $V^{(w)}$  verbleibt der durch Hysterese verursachte Leistungsverlust pro kg — der Hystereseverlust

$$V^{(h)} = 0.1 W - V^{(w)}. \quad (20)$$

Resultate.

Wir drücken nun in (17), (18) und (19) die Hilfsgrößen  $r$  und  $R$  durch  $r_2$ ,  $r_v$ ,  $r_w$  und  $r_s$  aus und setzen (wie am Schluß des vorigen Paragraphen)  $b = 3$ ,  $q = \frac{50}{\delta}$  und  $w = 600$ . Die erhaltene Formelgruppe

$$\left\{ \begin{array}{l} \nu = \frac{N \lambda_N}{\lambda} \\ B = \frac{P \delta \cdot 10^4}{6 N \lambda_N} \cdot \frac{e' + e''}{h} \cdot \left( 1 + \frac{r_2}{r_v} + \frac{r_2}{r_w} + \frac{r_2}{r_s} \right) - \gamma J_1 \\ V^{(w)} = \frac{K_{3,d}}{90} \cdot \frac{\delta}{\rho} \cdot E_k^2 \left( 1 + \frac{2r_2}{r_v} + \frac{2r_2}{r_w} + \frac{2r_2}{r_s} - \frac{2\gamma J_1}{B} \right) \\ V^{(h)} = 0.1 W - V^{(w)} \end{array} \right.$$

$$\gamma = \begin{cases} 6 & \text{für } \delta \approx 7.80 \\ 7 & \text{„ } \delta \approx 7.75 \\ 8 & \text{„ } \delta \approx 7.65 \\ 9 & \text{„ } \delta \approx 7.55 \end{cases}$$

$$W = \left[ W_a - E_k^2 \left( \frac{1}{r_v} + \frac{1}{r_w} + \frac{1}{r_s} \right) \right] \left( 1 + \frac{r_2}{r_v} + \frac{r_2}{r_w} + \frac{r_2}{r_s} \right)$$

gestattet eine indirekte Messung der zusammengehörenden Werte von  $\nu$ ,  $B$ ,  $V^{(w)}$  und  $V^{(h)}$ , da sie diese Größen durch diejenigen ausdrückt, die entweder 1) bei der geschilderten Meßanordnung beobachtbar bzw. aus Meßergebnissen berechenbar oder 2) für

die verwendete Apparatur konstant sind, oder 3) für das zu prüfende Material als bekannt vorausgesetzt resp. auf anderem Wege gemessen werden können.

Zu der ersten Klasse gehören die Größen  $\lambda_N$ ,  $\lambda$ ,  $P$  und  $h$ , die man dem betreffenden Oszillogramm entnimmt, sodann  $e'$ ,  $e''$ ,  $J_1$ ,  $E_k$  und  $W_a$ , die an den Meßinstrumenten  $\bar{V}$ ,  $A$ ,  $V$  und  $W$  abgelesen werden, und schließlich  $r_s$ , welches man als Quotienten der an  $\bar{V}$  und  $\bar{A}$  abgelesenen Werte findet. Zu der zweiten Klasse gehören  $N$ ,  $r_2$ ,  $r_v$  und  $r_w$ , und zu der dritten:  $d$ ,  $\varrho$  und  $\delta$ . Übrigens hängt  $\varrho$  merklich von der Temperatur ab, und da die Erwärmung des Probematerials eben das Charakteristische bei einer Verlustmessung ist, so hat man nebst  $\varrho$  auch seinen Temperaturkoeffizienten zu bestimmen. Durch passende Abkühlungspausen läßt sich auch erreichen, daß die sämtlichen Einzelmessungen einer Verlustmessungsreihe unter praktisch gleicher Temperatur ausgeführt werden; man hat dann also  $\varrho$  bloß einmal bei derselben Temperatur zu messen.

### A n h a n g.

Zum Schluß seien einige Ergebnisse der auf geschilderte Weise ausgeführten Messungen notiert. Die Wiedergabe aller rechnerischen Einzelheiten würde zu viel Platz beanspruchen und überdies wenig interessant sein; auch hätte es eigentlich keinen Zweck, Messungsprotokolle einer größeren Menge von Materialien an dieser Stelle zusammenzuhäufen. Wir wollen uns daher auf zwei Beispiele beschränken, und zwar die erhaltenen zusammengehörigen Werte von  $\nu$ ,  $B$ ,  $V^{(w)}$ ,  $V$  und  $V^{(h)}$  tabulieren.

Tabelle 1.

Material: ein Dynamoblech von Klasse III;  $d = 0.05$ ,  $\varrho = 0.481$ ,  $\delta = 7.66$ .

$\nu$	$B$	$V^{(w)}$	$V$	$V^{(h)}$
60.2	$1.139 \cdot 10^4$	0.503	2.804	2.301
59.7	$0.907 \cdot 10^4$	0.314	1.811	1.497
50.0	$1.355 \cdot 10^4$	0.507	3.122	2.615
49.8	$1.056 \cdot 10^4$	0.301	1.929	1.628
39.7	$1.443 \cdot 10^4$	0.376	2.706	2.330
39.8	$1.102 \cdot 10^4$	0.212	1.661	1.449

Tabelle 2.

Material: ein Transformatorblech von Klasse IV;  $d = 0.035$ ,  
 $q = 0.637$ ,  $\delta = 7.54$ .

$\nu$	$B$	$V^{(w)}$	$V$	$V^{(h)}$
59.8	$1.238 \cdot 10^4$	0.223	2.427	2.204
59.8	$0.950 \cdot 10^4$	0.131	1.394	1.263
50.0	$1.436 \cdot 10^4$	0.222	2.738	2.516
49.7	$1.304 \cdot 10^4$	0.177	2.259	2.082
49.9	$1.115 \cdot 10^4$	0.129	1.590	1.461
49.3	$0.988 \cdot 10^4$	0.098	1.222	1.124
39.8	$1.456 \cdot 10^4$	0.152	2.271	2.119

#### § 4. Hystereseverlust.

Die Energiemenge, die bei einem einfachen Magnetisierungszyklus infolge der Hysterese des Materials in Wärme umgesetzt wird, bezeichnen wir als Hysteresearbeit. Nach dem bekannten Warburgschen Gesetze ist die Hysteresearbeit (pro Volumeinheit des Materials) gleich dem Flächeninhalt derjenigen Hystereseschleife, die dem Magnetisierungszyklus entspricht. Wenn nun die molekularen Umrichtungsvorgänge eine sehr geringe Zeit beanspruchen, so wird bei einer niederfrequenten periodischen Ummagnetisierung in jeder Periode dieselbe Hystereseschleife einmal durchlaufen wie bei einem sehr lange dauernden Zyklus mit gleicher Maximalinduktion. Dann wird also die Hysteresearbeit von der Frequenz unabhängig sein und daher der durch Hysterese verursachte mittlere Leistungsverlust (Hystereseverlust)  $V^{(h)}$  den Faktor  $\nu$  enthalten. Die Hysteresearbeit  $a_h$  (in Joule pro kg), die man folglich aus  $V^{(h)}$  und  $\nu$  berechnen kann:

$$a_h = \frac{V^{(h)}}{\nu},$$

wird nunmehr — bei ein und demselben Material, unter konstantgehaltener Temperatur — nur noch von der Maximalinduktion  $B$  abhängen. Wollen wir für diese Abhängigkeit eine funktionale Beziehung in irgendeiner Form aufstellen, so haben wir zu beachten, daß eine solche Beziehung den folgenden

Bedingungen genügen muss — was ja im Hinblick auf den physikalischen Inhalt der Größen  $B$  und  $a_h$  ohne weiteres klar ist:

1) sie ordnet einem jeden nichtnegativen  $B$  einen nichtnegativen Wert  $a_h$  zu,

2)  $a_h$  verschwindet für  $B = 0$  und wächst mit wachsendem  $B$  monoton und stetig.

So einfach und selbstverständlich diese Forderungen auch sind, schließen sie dennoch z. B. die Möglichkeit aus, daß die von Richter<sup>14</sup> angegebene Formel

$$a_h = \alpha B + \beta B^2$$

eine allgemeine Gültigkeit besitze; denn für den Koeffizienten  $\alpha$  kann man aus den Messungen verschiedener  $B$  und der zugehörigen  $a_h$  sowohl einen positiven als auch (bei manchen Materialien) einen negativen Wert erhalten<sup>15</sup>, mit einem negativen  $\alpha$  liefert aber der Ausdruck  $\alpha B + \beta B^2$  bei hinreichend kleinem  $B$  einen negativen Wert.

Wir versuchen im folgenden die Hysteresearbeit  $a_h$  einer Potenz der Maximalinduktion  $B$  proportional zu setzen, wobei wir den Proportionalitätsfaktor sowie auch den Exponenten als von Material zu Material variierend ansehen. Hinsichtlich der technischen Anwendungen — in der Wechselstromtechnik kommen am häufigsten die Frequenz  $50 \text{ sec}^{-1}$  und Maximalinduktionen von Größenordnung  $10^4$  Gauß vor — ist es bequemer den Ansatz in der Form

$$a_h = \frac{\chi}{50} \cdot (B \cdot 10^{-4})^\xi \quad (21)$$

zu schreiben, wonach der Hystereseverlust (Leistungsverlust in Watt pro kg)  $V^{(h)}$  folgendermaßen ausdrückbar wäre:

$$V^{(h)} = \chi \cdot \frac{\nu}{50} \cdot (B \cdot 10^{-4})^\xi \quad (22)$$

Den Konstanten  $\chi$  und  $\xi$  kann übrigens eine einfache physikalische Bedeutung beigelegt werden.  $\chi$  ist der Hystereseverlust bei der Frequenz  $50 \text{ sec}^{-1}$  und der Maximalinduktion

<sup>14</sup> *Rudolf Richter*: Ein Vorschlag zur Darstellung der Hysteresewärme. ETZ 31 (1910), S. 1241—1246.

<sup>15</sup> Daß das wirklich der Fall ist, kann durch Beispiele nachgewiesen werden. Die im folgenden, allerdings für andere Zwecke, angeführten Beispiele zeigen das bereits.

$10^4$  Gauß;  $\zeta$  ist der Proportionalitätsfaktor der kleinen relativen Zuwächse von Hystereseverlust und Maximalinduktion (bei konstanter Frequenz):

$$\frac{dV^{(h)}}{V^{(h)}} = \zeta \cdot \frac{dB}{B},$$

bzw. derjenigen von Hysteresearbeit und Maximalinduktion. Die Formel (21) ist eine Erweiterung der Steinmetzschen Hystereseformel; nach dem Steinmetzschen Gesetze müßte der Quotient der kleinen relativen Zuwächse von  $a_h$  und  $B$ , d. h. die logarithmische Ableitung  $\frac{d(\log a_h)}{d(\log B)}$ , ebenfalls konstant sein, aber dazu noch für alle Eisensorten den gleichen Wert 1.6 besitzen.

Zur Prüfung der Formel (21) bedienen wir uns der am Schluß des vorangehenden Paragraphen tabulierten Meßergebnisse  $v$ ,  $B$  und  $V^{(h)}$  an zwei Materialien. Um einen Vergleich mit der Genauigkeit der Richterschen und der Steinmetzschen Formel zu ermöglichen, sind nebst den Konstanten  $\chi$  und  $\zeta$  auch die Konstanten  $\alpha^*$  und  $\beta^*$  für die Formel

$$50 a_h = \alpha^* (B \cdot 10^{-4}) + \beta^* (B \cdot 10^{-4})^2 \quad (23)$$

und die Konstante  $\eta^*$  für die Formel

$$50 a_h = \eta^* (B \cdot 10^{-4})^{1.6} \quad (24)$$

nach der Methode der kleinsten Quadrate berechnet, und zwar aus der Bedingung, daß die Summe der Quadrate der relativen Abweichungen jeweils minimal sein muß<sup>16</sup>; die nach den drei Formeln (21), (23) und (24) berechneten Werte von  $50 a_h$  sind sodann mit den gemessenen Werten verglichen.

<sup>16</sup> Bezeichnet man die gemessenen zusammengehörigen Werte von  $B \cdot 10^{-4}$  und  $50 a_h$  kurz mit  $x_i$  und  $y_i$ , so ergibt sich im Falle von  $n$  gemessenen Wertepaaren ( $i$  durchläuft die Zahlen 1, 2, ...,  $n$ ):

$$\log \chi = \frac{\sum (\log x_i)^2 \sum \log y_i - \sum \log x_i \sum \log x_i \log y_i}{n \sum (\log x_i)^2 - (\sum \log x_i)^2},$$

$$\zeta = \frac{n \sum \log x_i \log y_i - \sum \log x_i \sum \log y_i}{n \sum (\log x_i)^2 - (\sum \log x_i)^2},$$

$$\alpha^* = \frac{\sum \frac{x_i}{y_i} \sum \frac{x_i^4}{y_i^2} - \sum \frac{x_i^2}{y_i} \sum \frac{x_i^3}{y_i^2}}{\sum \frac{x_i^2}{y_i^2} \sum \frac{x_i^4}{y_i^2} - \left( \sum \frac{x_i^3}{y_i^2} \right)^2}, \quad \beta^* = \frac{\sum \frac{x_i^2}{y_i} \sum \frac{x_i^2}{y_i^2} - \sum \frac{x_i}{y_i} \sum \frac{x_i^3}{y_i^2}}{\sum \frac{x_i^2}{y_i^2} \sum \frac{x_i^4}{y_i^2} - \left( \sum \frac{x_i^3}{y_i^2} \right)^2}, \quad \eta^* = \frac{\sum \frac{x_i^{1.6}}{y_i}}{\sum \frac{x_i^{3.2}}{y_i^2}}.$$

Tabelle 3.<sup>17</sup>

$B \cdot 10^{-4}$	$50 a_h$	$\chi = 1.5006, \zeta = 1.8339$		$\alpha^* = 0.27758,$ $\beta^* = 1.22216$		$\eta^* = 1.5482$	
		$\chi(B \cdot 10^{-4})^{\zeta}$	$A_1$	$\alpha^*(B \cdot 10^{-4}) +$ $+\beta^*(B \cdot 10^{-4})^2$	$A_2$	$\eta^*(B \cdot 10^{-4})^{1.6}$	$A_3$
0.907	1.254	1.254 6	+ 0.05 0/0	1.257 2	+ 0.25 0/0	1.324 3	+ 5.62 0/0
1.056	1.635	1.658 3	+ 1.42	1.656 0	+ 1.29	1.689 2	+ 3.31
1.102	1.820	1.793 1	- 1.48	1.790 1	- 1.65	1.808 5	- 0.63
1.139	1.911	1.905 1	- 0.31	1.901 7	- 0.49	1.906 6	- 0.23
1.355	2.615	2.619 5	+ 0.17	2.620 0	+ 0.19	2.517 2	- 3.74
1.443	2.935	2.939 9	+ 0.17	2.945 4	+ 0.35	2.783 8	- 5.15
		$\sqrt{\frac{\sum A_1^2}{6}} = \sigma_1 = 0.853 0/0$		$\sigma_2 = 0.899 0/0$		$\sigma_3 = 3.73 0/0$	

Tabelle 4.

$B \cdot 10^{-4}$	$50 a_h$	$\chi = 1.1708, \zeta = 2.1519$		$\alpha^* = -0.20922,$ $\beta^* = 1.38036$		$\eta^* = 1.2784$	
		$\chi(B \cdot 10^{-4})^{\zeta}$	$A_1$	$\alpha^*(B \cdot 10^{-4}) +$ $+\beta^*(B \cdot 10^{-4})^2$	$A_2$	$\eta^*(B \cdot 10^{-4})^{1.6}$	$A_3$
0.950	1.056	1.048 4	- 0.72 0/0	1.047 0	- 0.85 0/0	1.177 6	+ 11.51 0/0
0.988	1.140	1.140 8	+ 0.07	1.140 7	+ 0.06	1.253 9	+ 10.00
1.115	1.464	1.479 8	+ 1.03	1.482 8	+ 1.28	1.521 6	+ 3.93
1.238	1.843	1.853 5	+ 0.57	1.856 6	+ 0.74	1.798 9	- 2.40
1.304	2.095	2.072 7	- 1.06	2.074 4	- 0.99	1.954 8	- 6.70
1.436	2.516	2.550 7	+ 1.38	2.546 0	+ 1.19	2.280 8	- 9.35
1.456	2.662	2.627 7	- 1.29	2.621 6	- 1.52	2.331 9	- 12.39
		$\sqrt{\frac{\sum A_1^2}{7}} = \sigma_1 = 0.979 0/0$		$\sigma_2 = 1.043 0/0$		$\sigma_3 = 8.78 0/0$	

Aus den Tabellen 3 und 4 ersieht man, daß im Bereich der Maximalinduktion  $B$  von etwa 9000 Gauß bis 15000 Gauß die Formel (21) den Verlauf der Hysteresearbeit  $a_h$  mit völlig

<sup>17</sup> Es ist

$$A_1 = \frac{\chi(B \cdot 10^{-4})^{\zeta}}{50 a_h} - 1, \quad A_2 = \frac{\alpha^*(B \cdot 10^{-4}) + \beta^*(B \cdot 10^{-4})^2}{50 a_h} - 1, \quad A_3 = \frac{\eta^*(B \cdot 10^{-4})^{1.6}}{50 a_h} - 1$$

$$\text{und } \sigma = \sqrt{\frac{\sum A_i^2}{n}}$$

befriedigender Genauigkeit beschreibt, und daher auch die Formel (22) den Verlauf des Hystereseverlustes  $V^{(h)}$ . Die Formel (21) und die Richtersche Formel (23) leisten — in diesem Bereich — offenbar ungefähr gleiches<sup>18</sup>, während die Steinmetz'sche Formel (24) weit zurückbleibt. Die mittlere relative Abweichung der nach (21) und (23) berechneten Werte von den gemessenen  $a_h$  beträgt in den beiden Serien nur ca 1%; dies ist übrigens ein Zeichen dafür, daß die gemessenen Werte von  $a_h$  selbst kaum mehr als um 1% ungenau sein können.<sup>19</sup>

Ob nun die Formel (21) auch in längeren Bereichen von  $B$  ebensogut arbeitet, kann freilich nur die Praxis lehren. Wir prüfen sie hier noch an einer Folge zusammengehöriger Wertepaare  $a'_h$  und  $B$ , die von Richter nach den „statischen“ Messungen<sup>20</sup> von Gumlich und Rose<sup>21</sup> tabuliert sind.<sup>22</sup>

<sup>18</sup> Gewiß darf man bei einem hochlegierten Material, für welches der Koeffizient  $\alpha^*$  negativ ist, nach der Richterschen Formel keine Extrapolation bis zu sehr kleinen Induktionen vornehmen; in unserem zweiten Beispiel (Tabellen 2 und 4) wird der nach (23) berechnete Wert von  $a_h$  schon bei  $B = 1516$  Gauß verschwinden und im Intervall  $0 < B < 1516$  negativ sein.

<sup>19</sup> Der Verfasser hat insgesamt an sieben verschiedenen (legierten) Blechproben Verlustmessungen auf geschilderte Weise ausgeführt und Meßergebnisse durchgerechnet. Die mittlere relative Abweichung  $\sigma_1$  lag stets zwischen 0.8% und 1.8%. Als runder Mittelwert von  $\zeta$  ergab sich:

für schwachlegierte Bleche (Klasse II)	$\zeta \approx 1.7$
„ mittellegierte „ „ III	$\zeta \approx 1.85$
„ hochlegierte „ „ IV	$\zeta \approx 2.1$

<sup>20</sup> Messungen nach der ballistischen Methode.

<sup>21</sup> E. Gumlich u. P. Rose: Über die Magnetisierung durch Gleichstrom und Wechselstrom. ETZ 26 (1905), S. 503—509.

<sup>22</sup> Wir greifen aus den von Richter nach den Messungen von Gumlich und Rose untersuchten Materialien das am höchsten legierte Blech heraus (op. cit.<sup>14</sup>, S. 1245: Tabelle 8); eine einfache Abschätzung zeigt, daß dieses Material nach der heutigen Klassifikation nur ein „schwachlegiertes“ Blech (also zur Klasse II gehörig) gewesen sein kann. Eines der von Richter notierten Wertepaare lautet  $B = 10^4$ ,  $a'_h = 2.92 \cdot 10^5$  (Erg pro cm<sup>3</sup>); bei  $B = 10^4$  wäre daher die Hysteresearbeit  $a_h = 2.92 \cdot 10^{-4} \cdot \frac{1000}{\delta}$  (Joule pro kg) und der Koeffizient  $\chi$  für die Formel (21) mithin:

$$\chi = 50 \cdot 2.92 \cdot \frac{0.1}{\delta} = \frac{14.6}{\delta}.$$

Die Dichte  $\delta$  war sicherlich zwischen 7.5 und 7.9, so daß man also  $1.85 < \chi < 1.95$  findet. Für schwachlegierte Bleche ist eben  $\chi \approx 2$ , für mittellegierte  $\chi \approx 1.5$  und für hochlegierte  $\chi \approx 1.1$ .

Die Angaben  $a'_h$  bedeuten die Hysteresearbeit in Erg, bezogen auf eine Volumeinheit ( $\text{cm}^3$ ) des Materials.

Zur bequemeren Handhabung schreiben wir die Formeln (21), (23) und (24) in der Form:

$$a'_h \cdot 10^{-3} = \chi' (B \cdot 10^{-4})^\xi \quad (21')$$

$$a'_h \cdot 10^{-3} = \alpha' (B \cdot 10^{-4}) + \beta' (B \cdot 10^{-4})^2 \quad (23')$$

$$a'_h \cdot 10^{-3} = \eta' (B \cdot 10^{-4})^{1.6} \quad (24')$$

und bestimmen den Exponenten  $\xi$  und die Koeffizienten  $\chi'$ ,  $\alpha'$ ,  $\beta'$ ,  $\eta'$  wiederum aus der Minimumforderung der Quadratsumme der relativen Abweichungen.

Tabelle 5.

$B \cdot 10^{-4}$	$a'_h \cdot 10^{-3}$	$\chi' = 2.9331, \xi = 1.6881$		$\alpha' = 0.71917, \beta' = 2.18365$		$\eta' = 2.8784$	
		$\chi' (B \cdot 10^{-4})^\xi$	$A_1$	$\alpha' (B \cdot 10^{-4}) + \beta' (B \cdot 10^{-4})^2$	$A_2$	$\eta' (B \cdot 10^{-4})^{1.6}$	$A_3$
0.4	0.626	0.624 5	-0.230%	0.637 0	+1.770%	0.664 4	+6.140%
0.6	1.248	1.238 3	-0.78	1.217 6	-2.43	1.271 1	+1.85
0.8	1.988	2.012 5	+1.23	1.972 9	-0.76	2.014 1	+1.31
1.0	2.920	2.933 1	+0.45	2.902 8	-0.59	2.878 4	-1.43
1.2	3.960	3.990 2	+0.76	4.007 5	+1.20	3.853 3	-2.69
1.4	5.250	5.176 1	-1.41	5.286 8	+0.70	4.931 2	-6.07
		$\sigma_1 = 0.9080\%$		$\sigma_2 = 1.4080\%$		$\sigma_3 = 3.850\%$	

Wie aus der obigen Tabelle ersichtlich, sind hier — in einem etwa doppelt so langen Bereich wie vorhin — die Formeln (21) und (23) ebenfalls gut brauchbar. Die Formel (21) ist dabei wieder etwas genauer als die Richtersche Formel (23). Gewiß kann es manchmal vorkommen — wenigstens bei einer geeigneten Verteilung der Meßfehler —, daß die Verhältnisse umgekehrt liegen; dennoch ist es sehr wahrscheinlich, daß die Formel (21) durchschnittlich eine genauere Berechnung von  $a_h$  gestattet.

## § 5. Methode zur Berechnung der Eisenverluste.

Bekanntlich pflegt man ein Eisenblech hinsichtlich der in ihm bei Ummagnetisierung auftretenden Energieverluste durch die sogenannten Verlustziffern zu charakterisieren. Als Verlustziffer  $V_{10}$  bzw.  $V_{15}$  bezeichnet man den Mittelwert des Leistungsverlustes (in Watt pro kg) bei einer derartigen periodischen Ummagnetisierung des Bleches, daß die induzierte Spannung (zeitlich) rein sinusförmig verläuft und die Frequenz  $50 \text{ sec}^{-1}$  und die Maximalinduktion  $10^4$  Gauß bzw.  $1 \cdot 5 \cdot 10^4$  Gauß beträgt; das Blech soll dabei in 3 cm breiten Streifen verwendet werden und die magnetische Induktion soll die Längsrichtung der Streifen haben.<sup>23</sup>

Wir wenden uns nun der Frage zu, ob und wie sich die Größen  $\chi$ ,  $\xi$  bzw.  $\alpha^*$ ,  $\beta^*$  aus den Verlustziffern  $V_{10}$  und  $V_{15}$  berechnen lassen. Dazu bemerken wir zunächst, daß  $V_{10}$  und  $V_{15}$  sich aus Hystereseverlust und Wirbelstromverlust zusammensetzen, und schreiben:

$$V_{10} = V_{10}^{(h)} + V_{10}^{(w)},$$

$$V_{15} = V_{15}^{(h)} + V_{15}^{(w)}.$$

Nach § 2 reicht zur Bestimmung des Wirbelstromverlustes die Kenntnis der Dichte  $\delta$ , des spezifischen Widerstandes  $\rho$ , der Blechstärke  $d$ , der Breite  $b$  und des Effektivwertes  $E$  derjenigen elektromotorischen Kraft aus, die in einer aus  $w$  Windungen (je mit dem „Windungsquerschnitt“  $q$ ) bestehenden Spule induziert wird. Bezeichnet man mit  $f$  den Formfaktor der induzierten elektromotorischen Kraft, d. h. den Quotienten

$$\left| \frac{\int_{t_1}^{t_2} (t_2 - t_1) \int_{t_1}^{t_2} e^2 dt}{\int_{t_1}^{t_2} e dt} \right| = f$$

( $t_1$  und  $t_2$  sind dabei zwei aufeinanderfolgende Nullstellen von  $e$  und grenzen eine Halbwelle ein), so drückt sich  $E$  durch die

<sup>23</sup> Normalien für die Prüfung von Eisenblech. (Gültig ab 1. Juli 1914.) ETZ 35 (1914), S. 512.

Maximalinduktion  $B$  nach der Gleichung (7) folgendermaßen aus:

$$E = 2 w q B \cdot 10^{-8} \cdot \frac{f}{t_2 - t_1},$$

oder, da ja  $t_2 - t_1 = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\nu}$  ist,

$$E = 4 w q \nu f B \cdot 10^{-8}. \quad (25)$$

Der Wirbelstromverlust beträgt somit nach (13):

$$\begin{aligned} V^{(w)} &= K_{b,d} \cdot \frac{1.6 \cdot 10^{-8}}{\rho \delta} \cdot \nu^2 f^2 B^2 \\ &= K_{b,d} \cdot \frac{4000}{\rho \delta} \cdot f^2 \left(\frac{\nu}{50}\right)^2 (B \cdot 10^{-4})^2. \end{aligned} \quad (26)$$

Auf Grund der Definition von  $V_{10}$  und  $V_{15}$  kann der Anteil  $V_{10}^{(w)}$  bzw.  $V_{15}^{(w)}$  mit den Daten  $b = 3$ ,  $\nu = 50$ ,  $f = \pi \sqrt{0.125}$  und  $B = 10^4$  bzw.  $B = 1.5 \cdot 10^4$  aus der Gleichung (26) berechnet werden; es ergibt sich

$$\left. \begin{aligned} V_{10}^{(w)} &= 500 \pi^2 \cdot \frac{K_{3,d}}{\rho \delta} = K_{3,d} \cdot \frac{4.934.8}{\rho \delta} \\ V_{15}^{(w)} &= 1125 \pi^2 \cdot \frac{K_{3,d}}{\rho \delta} = K_{3,d} \cdot \frac{11.103.3}{\rho \delta} \end{aligned} \right\} \quad (27)$$

Den Hystereseverlust  $V^{(h)}$  erhält man dann bei  $\nu = 50$  und  $B = 10^4$  bzw.  $1.5 \cdot 10^4$  ohne weiteres als

$$\left. \begin{aligned} V_{10}^{(h)} &= V_{10} - V_{10}^{(w)} \\ V_{15}^{(h)} &= V_{15} - V_{15}^{(w)}. \end{aligned} \right\} \quad (28)$$

Aus diesen zwei Werten des Hystereseverlustes können aber die zwei nötigen Konstanten  $\chi$  und  $\xi$  ermittelt werden<sup>24</sup>; es ist einfach

$$\left. \begin{aligned} \chi &= V_{10}^{(h)}, \\ \xi &= \frac{1}{\log 1.5} \log \frac{V_{15}^{(h)}}{V_{10}^{(h)}} = 5.6789 (\log V_{15}^{(h)} - \log V_{10}^{(h)}). \end{aligned} \right\} \quad (29)$$

<sup>24</sup> Freilich könnte man statt dessen auch die Koeffizienten  $\alpha^*$  und  $\beta^*$  für die Richtersche Formel bestimmen:

$$\begin{aligned} \alpha^* &= 3 V_{10}^{(h)} - \frac{4}{3} V_{15}^{(h)}, \\ \beta^* &= \frac{4}{3} V_{15}^{(h)} - 2 V_{10}^{(h)}. \end{aligned}$$

Somit sind wir zu dem Ergebnis gelangt, daß aus den Größen  $d$ ,  $\varrho$ ,  $\delta$ ,  $V_{10}$  und  $V_{15}$  sowohl der Wirbelstromverlust  $V^{(w)}$  als auch der Hystereseverlust  $V^{(h)}$  (mithin also der gesamte Eisenverlust  $V$ ) für gegebene  $\nu$ ,  $B$ ,  $f$  und  $b$  berechenbar ist. Die Berechnungsmethode, auf den Beziehungen (22), (26), (27), (28) und (29) fußend, läßt sich folgendermaßen zusammenfassen.

Materialkonstanten:

Dichte  $\delta \frac{\text{g}}{\text{cm}^3}$

spezifischer Widerstand  $\varrho \frac{\Omega \text{mm}^2}{\text{m}}$  (bei der Betriebstemperatur)

Verlustziffern  $V_{10}$  und  $V_{15} \frac{\text{Watt}}{\text{kg}}$  bei gegebener Blechstärke  $d$  cm.

Betriebsdaten:

Frequenz  $\nu \text{ sec}^{-1}$

Maximalinduktion  $B$  Gauß

Formfaktor (der induzierten Spannung)  $f$

Breite (der Blechstreifen)  $b$  cm.

Berechnungsformel:

$$V = \frac{4000 K_{b,d}}{\varrho \delta} \cdot f^2 \left( \frac{\nu}{50} \right)^2 (B \cdot 10^{-4})^2 + z \cdot \frac{\nu}{50} \cdot (B \cdot 10^{-4})^{\zeta}.$$

Hilfsgrößen:

$$K_{b,d} = \frac{d^2}{12} \left( 1 - \frac{d}{b} + \frac{3 d^3}{5 b (b-d)} - \dots \right)$$

$$z = V_{10} - \frac{4935 K_{3,d}}{\varrho \delta}$$

$$\zeta = 5.679 (\log V_{15}^{(h)} - \log z)$$

$$V_{15}^{(h)} = V_{15} - \frac{11103 K_{3,d}}{\varrho \delta}.$$

Für die Blechstärken 0.1, 0.05 und 0.035 cm können die

Koeffizienten  $K_{b,d}$  und die zu benutzenden Vielfachen von  $K_{3,d}$  der folgenden Tabelle entnommen werden.

$d$	0.1	0.05	0.035
$K_{\infty,d}$	$8.333 \cdot 10^{-4}$	$2.083 \cdot 10^{-4}$	$1.021 \cdot 10^{-4}$
$K_{10,d}$	$8.251 \cdot 10^{-4}$	$2.073 \cdot 10^{-4}$	$1.017 \cdot 10^{-4}$
$K_{3,d}$	$8.061 \cdot 10^{-4}$	$2.049 \cdot 10^{-4}$	$1.009 \cdot 10^{-4}$
$4.934.8 K_{3,d}$	3.978	1.0111	0.4979
$11.103.3 K_{3,d}$	8.950	2.2750	1.1203

Die Ausführung der Rechnungen wollen wir an einem Zahlenbeispiel demonstrieren.

Beispiel.

Es habe ein hochlegiertes (0.35 mm starkes) Material die folgenden Charakteristiken:

$$\delta = 7.53, \quad \rho = 0.632, \quad d = 0.035, \quad V_{10} = 1.28, \quad V_{15} = 2.96,$$

und die Betriebsdaten seien:

$\nu = 60$ ,  $B = 1.35 \cdot 10^4$ ,  $f = 1.102$ ,  $b = 14$  (es werde also das Blech in 14 cm breiten Streifen verwendet).

Dann ist

$$\frac{1}{\rho \delta} = 0.210_1$$

und somit

$$\chi = 1.28 - 0.4979 \cdot 0.210_1 = 1.28 - 0.104_6 = 1.175,$$

$$V_{15}^{(h)} = 2.96 - 1.120 \cdot 0.210_1 = 2.96 - 0.235 = 2.725,$$

also

$$\xi = 5.679 \cdot \log \frac{2.725}{1.175} = 5.679 \cdot 2.31_9 = 2.07_5;$$

folglich lautet die Berechnungsformel:

$$\begin{aligned} V &= 0.4 \cdot 1.02 \cdot 0.210_1 \left( f \cdot \frac{\nu}{50} \cdot B \cdot 10^{-4} \right)^2 + 1.175 \cdot \frac{\nu}{50} \cdot (B \cdot 10^{-4})^{2.075} \\ &= 0.0857 \left( f \cdot \frac{\nu}{50} \cdot B \cdot 10^{-4} \right)^2 + 1.175 \cdot \frac{\nu}{50} \cdot (B \cdot 10^{-4})^{2.075}. \end{aligned}$$

Mit den Betriebsdaten ergibt sich daraus der Eisenverlust

$$\begin{aligned} &0.0857 \cdot (1.102 \cdot 1.2 \cdot 1.35)^2 + 1.175 \cdot 1.2 \cdot 1.35^{2.075} \\ &= 0.273 + 2.62_8 = 2.90 \end{aligned}$$

Watt pro kg.

## Schlußbemerkungen.

1. Wegen der Abhängigkeit des Wirbelstromverlustes  $V^{(w)}$  von der Breite  $b$  ist es wesentlich, die Verlustziffern bei einer bestimmten Breite (der Blechstreifen) zu definieren, wie dies durch die Ausführungsbestimmungen in den Normalien für Eisenprüfung geschehen ist<sup>25</sup>; bei der Berechnung kann man jedoch im Falle  $b > 10$  den Koeffizienten  $K_{b,d}$  für gewöhnliche Blechstärken fast ausschließlich durch  $K_{\infty,d}$  ersetzen.

2. Die in § 3 dargelegte Meßanordnung eignet sich gut zur absoluten Messung der Verlustziffern (also etwa zum Kalibrieren von Normalproben für die van Lonkhuyzensehe Vergleichsmethode), da sie keine Einstellung der Frequenz auf  $50 \text{ sec}^{-1}$  und keinen sinusförmigen Verlauf der induzierten Spannung erfordert. Denn wenn man die Größen  $\chi$  und  $\zeta$  für ein Material bestimmt hat (dafür genügt es eigentlich schon,  $\nu$  und  $V^{(h)}$  bei nur zwei möglichst verschiedenen  $B$  zu messen), so berechnen sich seine Verlustziffern aus den Beziehungen

$$V_{10} = \chi + V_{10}^{(w)}$$

$$V_{15} = \chi \cdot 1.5\zeta + 2.25 V_{10}^{(w)}$$

mit Hilfe von (27).

3. Der Verfasser ist den Herren Direktoren Prof. Dr.-Ing. O. Maddison und Dipl.-Ing. O. Reinwald zu großem Danke verpflichtet; ihr Entgegenkommen ermöglichte es ihm, für die nötigen experimentellen Untersuchungen die Laboratorien des Staatlichen Materialprüfungsamtes, Tallinn, zu benutzen. Auch möchte er den Herren Ing. A. Liefländer und Ing. E. Foht für ihre bereitwillige Mithilfe bei der Ausführung von Messungen seinen wärmsten Dank aussprechen.

<sup>25</sup> *Loc. cit.*<sup>23</sup>

## Inhaltsverzeichnis.

	Seite
Vorwort . . . . .	3
§ 1. Induktionsgesetz. Maximalinduktion . . . . .	5
§ 2. Wirbelstromverlust . . . . .	7
§ 3. Eine Anordnung zur Verlustmessung . . . . .	13
§ 4. Hystereseverlust . . . . .	21
§ 5. Methode zur Berechnung der Eisenverluste . . . . .	27
Schlußbemerkungen . . . . .	31

---