

**ÜBER DAS PROBLEM DER VORHERSAGE
DES NÄCHTLICHEN TEMPERATUR-
MINIMUMS**

VON

ALFRED KÄRSNA

TARTU 1934

Das Problem der Vorhersage des nächtlichen Temperaturminimums ist seit ungefähr einem halben Jahrhundert immer wieder in der meteorologischen Literatur behandelt worden. Im Jahre 1884 gab Lang als erster eine Regel, mit deren Hilfe man feststellen konnte, ob das nächtliche Minimum unter 0° herabsinken werde. Durch genaue Untersuchung des Beobachtungsmaterials stellte er fest, dass das nächtliche Temperaturminimum sich nicht wesentlich vom Taupunkt des vorhergehenden Abends entfernen kann, und dass aus diesem Grunde bei einem Taupunkt über 0° keine Frostgefahr vorhanden ist. Letzteres ist dadurch zu erklären, dass beim Fallen der Temperatur bis zum Taupunkt sich der Wasserdampf zu kondensieren beginnt, wobei die frei werdende latente Wärme ein weiteres Sinken der Temperatur verhindert.

Der Taupunkt (τ) kann eindeutig nach der absoluten Feuchtigkeit (e) bestimmt werden, die letztere aber ihrerseits nach den Angaben des trockenen und feuchten Thermometers (t und t_m). Folglich können wir in einem Koordinatensystem, bei dem t und t_m als Achsen genommen werden, eine Kurve so ziehen, dass auf der einen Seite derselben sich alle Punkte für die Temperaturpaare befinden, welche einen Taupunkt unter 0° liefern, und auf der anderen alle, denen ein Taupunkt über 0° entspricht. Falls also der Punkt auf der einen Seite der Kurve liegt, ist Nachtfrost zu erwarten, im anderen Falle aber nicht. Analoge Diagramme kann man für die Temperatur des trockenen Thermometers (t) und die relative Feuchtigkeit (R) zeichnen, u. s. w.

Im folgenden Jahre (1885) fand Kammermann eine neue Methode zur Bestimmung des nächtlichen Temperaturminimums, die darauf beruht, dass die Differenz zwischen der Angabe des feuchten Thermometers am Abend oder um die Mittagszeit und dem Temperaturminimum der folgenden Nacht mehr oder weniger konstant ist, wobei die genannte Differenz sich mit dem Beobachtungsort ändert. Die Kammermann'sche Regel ($M = t_m + a$) hat den Vorzug, dass sie schon um die Mittagszeit das Temperaturminimum der kommenden Nacht zu bestimmen ermöglicht.

Die Genauigkeit der nach den Mittagsbeobachtungen gestellten Prognose weicht nur um ein geringes von derjenigen nach den Abendbeobachtungen ab.

Die beiden Regeln werden bis zum heutigen Tage in ihrer ursprünglichen oder in einer verbesserten Form angewandt. Im allgemeinen ist die Kammermann'sche Formel beliebter, weil sie Resultate mit ungefähr gleichgrossen Fehlern bietet. Dagegen kommen bei Anwendung der Lang'schen Regel bei niedrigen Feuchtigkeitswerten, je nach den Eigentümlichkeiten des Beobachtungsortes, grosse Abweichungen, gewöhnlich bis 3° , vor (durchschnittlich 1.5° — 2.0°). Es sind jedoch auch Fälle zu verzeichnen, in denen der Fehler 11° beträgt. Die grossen Abweichungen sind meist negativ, d. h. sie kommen bei ausserordentlich grosser Abkühlung vor.

Im Jahre 1921 versuchte Ångström die Kammermann'sche Regel zu erweitern, indem er in die Gleichung noch die Angabe des trockenen Thermometers hineinnahm ($M = at + bt_m + c$). Bei der empirischen Bestimmung der Koeffizienten erhält man $a \approx 0$ und $b \approx 1$. Folglich weicht die Gleichung in dieser neuen Form nicht wesentlich von der Kammermann'schen ab. In erweiterter Form ist die Gleichung nach dem Beobachtungsmaterial von 5 Jahren für Tartu (1925—1930) von Liedemann als $M = 0.03 t + 0.82 t_m - 0.41$ bestimmt worden, was ebenfalls als Bestätigung des zuletzt Gesagten dienen kann.

Im Jahre 1930 versuchte Less die Qualität der erhaltenen Resultate zu heben, indem er die Beobachtungsdaten entsprechend den verschiedenen Winden, der Bewölkung und den Jahreszeiten in Gruppen einteilte und für jede eine bestimmte Korrektur berechnete.

Die folgende Tab. 1 enthält die von Less erhaltene, in Prozenten ausgedrückte Zahl der Abweichungen der mit Hilfe des Taupunktes (i) und des feuchten Thermometers (k) bestimmten Minima von den wirklich aufgetretenen.

Tab. 1.

	Frühling		Sommer		Herbst		Winter	
	i	k	i	k	i	k	i	k
$\leq 1^\circ$	44	68	33	59	59	56	63	52
$\leq 2^\circ$	72	89	58	88	81	87	88	95
$\leq 3^\circ$	84	95	76	97	92	97	96	98

Nach diesen Resultaten, welche als die besten bis zum heutigsten Tage erzielten gelten können, beträgt bei Anwendung der Taupunkt- bzw. der Kammermann'schen Regel durchschnittlich die Zahl der Fehler bis zu 1°, 2°, 3" — 50, 75, 87 und 59, 90, 97%.

Schon im Jahre 1909 erklärte Schmidt die Aufstellung einer genauen Prognose für unmöglich. Er machte darauf aufmerksam, dass die nächtliche Abkühlung auf zweierlei Arten vor sich geht: erstens durch Ausstrahlung (statische) und zweitens durch die Bewegung der Luftmassen (dynamische), wie durch warme und kalte Winde, vertikale Luftströmungen, Niederschläge u. s. w. Die statische Abkühlung ist mehr oder weniger durch lokale Einflüsse bedingt, wie durch die Lufttemperatur, Bewölkung, relative Feuchtigkeit u. and.; die Faktoren, welche die dynamische Abkühlung hervorrufen, können jedoch nicht an Ort und Stelle bestimmt werden, so z. B. der horizontale und vertikale Temperaturgradient. Die von Schmidt aufgestellten Probleme wurden später (1918) von Defant untersucht, der feststellte, dass in den ersten Abendstunden hauptsächlich statische Abkühlung durch Ausstrahlung stattfindet, nachher aber die Wirkung anderer Einflüsse auf die Abkühlung das Übergewicht erhält.

Nachdem schon Schmidt auf die Kompliziertheit des Abkühlungsprozesses und damit auf die Unmöglichkeit einer erfolgreichen Prognose des Temperaturminimums nach den Abendbeobachtungen allein hingewiesen hat, ist bis heute nicht festgestellt worden, welche Genauigkeit der Prognosen bei Berücksichtigung aller an der Abkühlung teilnehmenden Faktoren erreicht werden kann. Wie in der Taupunktregel, so auch in der des feuchten Thermometers wird nur die Feuchtigkeit berücksichtigt. Es liegt jedoch nahe, auch den Einfluss anderer meteorologischer Elemente, wie z. B. des Luftdrucks, der Bewölkung u. s. w., in Betracht zu ziehen. In der vorliegenden Arbeit ist versucht worden, das Problem der Vorhersage des nächtlichen Temperaturminimums von diesem Standpunkt aus zu lösen.

Zu diesem Zweck sind die Beobachtungsdaten des Met. Obs. der Universität zu Tartu aus den Jahren 1921—30 und zur Kontrolle der erhaltenen Resultate noch diejenigen des Jahres 1931 verwendet worden. Da die Bearbeitung des ganzen genannten Beobachtungsmaterials zu weit führen würde (die Zahl der Beobach-

tungen beträgt $> 75\,000$), musste eine gewisse Einschränkung des Materials vorgenommen werden. Um die allgemeine Gesetzmässigkeit der Erscheinungen hervortreten zu lassen, wäre es nicht ratsam die Zahl der Jahre zu vermindern, da der Verlauf der meteorologischen Elemente in den einzelnen Jahren mehr den Charakter des Zufälligen trägt. Darum wurde aus dem vorliegenden Beobachtungsmaterial jedes Jahres ein Teil der Daten in folgender Weise gewählt:

1. Es blieben diejenigen Tage, an welchen die Temperatur des Abends unter 0° war, aus, denn wir haben uns in vorliegender Arbeit die Prognose der Nachtfröste zur Aufgabe gestellt, der Wert des Minimums jedoch bei kaltem Wetter ist von diesem Standpunkt aus praktisch nicht so wichtig.

2. Es blieben alle Tage, an welchen das Minimum der Nacht 4° oder mehr betrug, aus, da solche Tage bei der Prognose des Nachtfrostes ebenfalls keine Bedeutung haben.

3. Das Beobachtungsmaterial wurde aus der Zeit vom 1. April bis zum 31. Oktober gewählt, weil die übrige Zeit schon zum Winter gehört und bei der Untersuchung unseres Problems unwesentlich ist.

Das ausgewählte Beobachtungsmaterial umfasst 461 Tage, d. h. 13% aller Tage der genannten 10 Jahre. Von diesen fallen 42% auf den April, 20% auf den Mai, 3% auf den Juni, 10% auf den September und 25% auf den Oktober, somit 65% auf den Frühling und 35% auf den Herbst. Im Juli und August ist während der betreffenden 10 Jahre kein Tag gewesen, an dem das nächtliche Temperaturminimum unter 4° gesunken wäre.

Bevor wir zur Untersuchung des Einflusses der anderen meteorologischen Elemente auf das Temperaturminimum übergehen, wollen wir die Güte der schon vorhandenen Formeln prüfen.

Bei Anwendung der Taupunktregel hat es sich erwiesen, dass der abendliche Taupunkt mit dem Minimum der Nacht im allgemeinen nicht zusammenfällt. Es entstehen nach beiden Seiten Abweichungen, die meist zwischen 1.5° und 2.0° liegen, jedoch manchmal auch 6° — 7° erreichen. Die mittlere Differenz zwischen dem Minimum und dem Taupunkt ändert sich ausserdem von Jahr zu Jahr. Tab. 2 enthält die Differenzen der genannten Mittelwerte und den mittleren Fehler, wobei als mittlerer Fehler das arithmetische Mittel der absoluten Werte der Abweichungen, welches annähernd dem wahrscheinlichen Fehler gleich ist

(= $\frac{7}{6}$ w. F.), angenommen wurde. Wie die Tabelle zeigt, fällt das nächtliche Temperaturminimum im Mittel um 0.3° unter den Taupunkt des Abends. Bei Verwendung der eigenen Konstanten jedes Jahres ist das Mittel aus den einzelnen Fehlern gleich 1.7° . Da sich die Konstante in den einzelnen Jahren durchschnittlich um 0.5° ändert, erhält man bei Verwendung ein und derselben mittleren Konstanten für alle Jahre den wahrscheinlichen Fehler $1.7 \cdot \frac{6}{7} + 0.5 \cdot \frac{1}{10} \approx 1.5$. Im letzteren Falle würde somit die Taupunktregel $M = T_{21} - 0.3$ den wahrscheinlichen Fehler 1.5° ergeben.

Tab. 2.

1921	-0.4	1.8
1922	-0.6	1.5
1923	-0.4	1.7
1924	-1.0	1.8
1925	-0.1	1.5
1926	-1.1	1.5
1927	-0.4	1.6
1928	0.1	1.5
1929	0.3	2.1
1930	1.3	1.7
	<hr/>	
	-0.3	1.7

Tab. 3.

1921	-2.3	1.3
1922	-2.1	1.1
1923	-2.1	1.2
1924	-2.0	1.2
1925	-2.1	1.1
1926	-2.1	1.3
1927	-1.8	1.3
1928	-1.8	1.3
1929	-1.7	1.4
1930	-1.7	1.0
	<hr/>	
	-2.0	1.2

Bei Anwendung der Kammermann'schen Regel erhält man zwischen der Angabe des feuchten Thermometers am Abend und dem nächtlichen Temperaturminimum die mittlere Differenz von 2.0° (Tab. 3), wobei diese sich von Jahr zu Jahr in den Grenzen von 0.2° ändert. Bei Anwendung der eigenen Konstanten jedes Jahres beträgt der mittlere Fehler 1.2° . Die Formel des feuchten Thermometers $M = t_m - 2.0$ ergibt dann den wahrscheinlichen Fehler $1.2^\circ \cdot \frac{6}{7} + 0.2 \cdot \frac{1}{18} \approx 1.1$, also ein bedeutend besseres Resultat, als die Taupunktregel.

In der Gleichung $M = \tau + a$ ist vorausgesetzt worden, dass der Taupunkt und das Minimum sich um ein und dieselbe Grösse ändern. Hätten wir die Gleichung als Gerade in der $M\tau$ -Ebene dargestellt, so wäre ihr Steigungsmass gleich 1. Es ist anzunehmen, dass die gegebene Gleichung die Beziehung zwischen M und τ nicht genügend genau zum Ausdruck bringt. Wenn wir von einer Gleichung höheren Grades absehen und einen linearen

Zusammenhang zwischen M und τ voraussetzen, so ist der allgemeine Ausdruck für diesen $M = a\tau + b$. Diese Gleichung kann freilich nur durch zwei Wertpaare befriedigt werden, wir stellen jedoch zur Bedingung, a und b seien so gewählt, dass die Summe der Quadrate der Abweichungen der errechneten Grössen von den wirklichen Minimumtemperaturen einen möglichst kleinen Wert erhalte. Nach der Korrelationstheorie gilt in diesem Fall die Gleichung

$$M - M_0 = r \cdot \frac{\delta M}{\delta \tau} (\tau - \tau_0);$$

hier bedeutet: M_0 — das mittlere Minimum, τ_0 — den mittleren Taupunkt, $\delta M = \sqrt{\frac{\sum \Delta M_i^2}{N}}$ und $\delta \tau = \sqrt{\frac{\sum \Delta \tau_i^2}{N}}$ die quadratischen Mittel aus den Abweichungen des Minimums, bzw. des Taupunkts

von ihren mittleren Werten und $r = \frac{\sum \Delta M_i \cdot \Delta \tau_i}{\sqrt{\sum \Delta M_i^2 \cdot \sum \Delta \tau_i^2}}$ den Kor-

relationskoeffizienten zwischen M und τ .

Die Berechnung ergibt: $M_0 = 1.0$, $\tau_0 = 1.2$, $\delta M = 1.86$, $\delta \tau = 2.92$ und $r = 0.64$; daraus folgt $a = 0.41$ und ferner

$$M = 0.4\tau + 0.5,$$

falls diese Genauigkeit genügt. Nach den erhaltenen Grössen kann man, ohne das Minimum zu berechnen, den wahrscheinlichen Fehler bestimmen:

$$q_M = 0.674 \delta M \sqrt{1 - r^2} = 0.96.$$

Fig. 1 zeigt die Zusammengehörigkeit von M und τ und liefert die graphische Darstellung der beiden Gleichungen.

Da die Werte von M , die grösser sind als 4^0 , nicht in Betracht gezogen wurden, ist in unserem Falle das Steigungsmass der Regressionsgeraden kleiner als dasjenige einer Geraden, die man für alle Wertpaare des ganzen Jahres erhalten hätte. Jedoch ist bei Anwendung der ersten Gleichung die Übereinstimmung der gewählten Werte eine bessere. Die nach der Gleichung berechneten Minima ergaben den wahrscheinlichen Fehler von 0.95 , d. h. denselben Wert, zu dem die theoretische Betrachtung führte. Die Berechnungen zeigten, dass die Zahl der Abweichungen nach der positiven und der negativen Seite ungefähr dieselbe war ($+225$, -218), und desgleichen die Zahl der Abweichungen in den Gren-

zen der einzelnen Temperaturstufen von $0^{\circ} - 1^{\circ}$ usw. (z. B. $(0^{\circ} - 1^{\circ}) + 121, -125$). Fig. 2 gibt uns ein Bild der Verteilung der Abweichungen, welche bei einer genügend grossen Zahl sich der Gauss'schen Kurve nähern müssen, und Fig. 3 das der Verteilung der Abweichungen der nach der Regel des feuchten Thermometers erhaltenen Werte der Temperaturminima. Es ist ersichtlich,

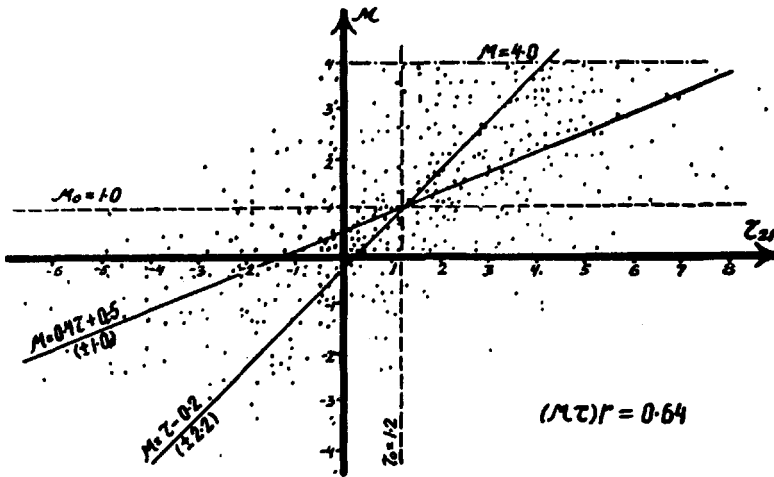


Fig. 1.

dass die Formel $M = 0.4\tau + 0.5$ bessere Resultate ergibt, da die Zahl der kleineren Fehler zugenommen hat. Tab. 4 zeigt

Tab. 4.

	$\leq 1^{\circ}$	$\leq 2^{\circ}$	$\leq 3^{\circ}$
$M = t_m - 2.0$	49	85	96
$M = 0.4\tau + 0.5$	57	86	98

die bei der Anwendung der beiden Formeln erhaltene Verteilung der Fehler in Prozenten nach den einzelnen Stufen von Grad zu Grad.

Bei der Kammermann'schen Formel $M = t_m + a$ ist es ebenso wie bei der Taupunktformel vorausgesetzt, dass a konstant ist. Schon eine oberflächliche Betrachtung der Beobachtungen zeigt jedoch, dass a keine Konstante ist, sondern mit t_m zunimmt. Nimmt man nun an, dass a von t_m linear abhängig ist, so besteht die Beziehung $a = b \cdot t_m + c$, und bei Einsetzung in die frühere Gleichung:

$$M = (1 + b)t_m + c.$$

Um die Zahlenwerte der Koeffizienten zu erhalten, genügt das Bestimmen der Korrelation zwischen M und t_m . Die Gleichung der erhaltenen Regressionsgeraden ist somit die gesuchte. Um die Veränderlichkeit der Korrektur des feuchten Thermometers graphisch zum Ausdruck zu bringen, ist die Korrelation zwischen a und t_m berechnet und in Fig. 4 dargestellt worden.

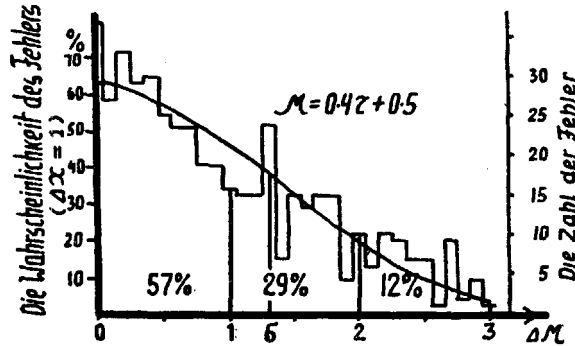


Fig. 2.

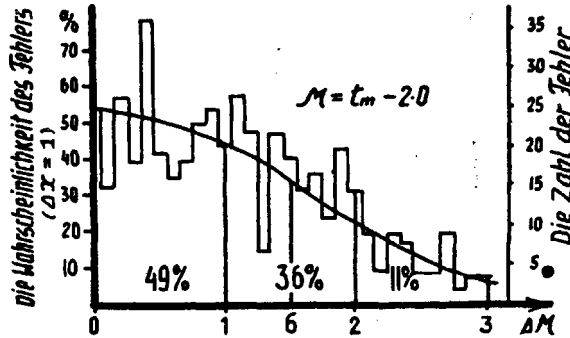


Fig. 3.

Die Berechnung ergab: $\delta a = 1.55$, $\delta t_m = 2.37$ und $r = -0.61$, daraus folgt $a = -0.4 t_m - 0.8$, oder nach Einsetzung in die frühere Gleichung:

$$M = 0.6 t_m - 0.8.$$

Der wahrscheinliche Fehler ist in diesem Falle $\sigma_M = 0.83$. Der sich aus den Abweichungen der nach der Formel erhaltenen Minima ergebende Fehler betrug gleichfalls 0.83.

Folglich liefert die Gleichung in dieser Form noch bessere Resultate, denn der wahrscheinliche Fehler ist von 0.96 auf 0.83

gefallen. Die Verteilung der Fehler (Fig. 5) zeigt, dass die Zahl der kleinen Fehler wiederum zugenommen hat. Analog dem Vorhergehenden ist in der folgenden Tabelle 5 die Verteilung nach den Stufen der Fehler in Prozenten gegeben.

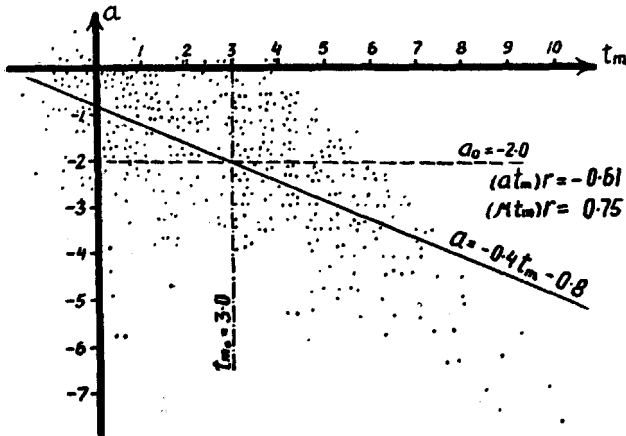


Fig. 4.

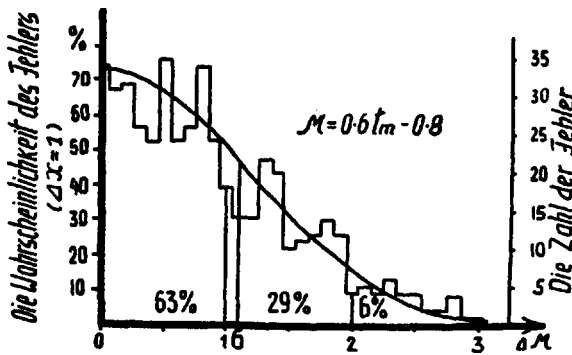


Fig. 5.

Tabelle 5.

	$\leq 1^0$	$\leq 2^0$	$\leq 3^0$
$M = 0.6 t_m - 0.8$	63	92	98

Da bei den vorliegenden Berechnungen hauptsächlich das Beobachtungsmaterial des Frühlings und des Herbstes verwendet worden ist, können die gewonnenen Resultate gut mit den von Less nach der einfachen Kammermann'schen Regel erhaltenen und entsprechend dem Einfluss anderer meteorologischer Elemente

verbesserten verglichen werden. Für den Frühling und den Herbst hat Less die entsprechenden Zahlen 62, 88, 96 erhalten. Dies zeigt, dass die nach der Korrelationsmethode erhaltene Gleichung des feuchten Thermometers etwas bessere Resultate gibt.

Die entsprechenden von Less nach der Taupunktregel erhaltenen Zahlen sind: 51, 77, 88; diese Ergebnisse sind auch etwas schlechter als die hier gegebenen Resultate der verbesserten Taupunktregel.

Man könnte noch weiter eine Verbesserung der Gleichung vornehmen, wenn man die gestellte Bedingung, der Zusammenhang solle linear sein, wegliesse. Doch wie die graphische Darstellung der Korrelation zeigt, sind die Punkte derart um die Regressionsgerade zerstreut, dass die Notwendigkeit eines Polynoms höheren Grades oder einer Exponentialfunktion fortfällt.

Wie schon früher erwähnt, kann man die in den beiden Formeln in Betracht gezogene Feuchtigkeit nicht als den einzigen das Temperaturminimum bestimmenden Faktor annehmen. Um feststellen zu können, wieviele und in welchem Masse beeinflussende Faktoren es noch gibt, muss man das Problem weiter fassen und als solch einen Faktor jedes meteorologische Element und seine erste Ableitung untersuchen (es scheint z. B. dass, falls die Bewölkung zunimmt, auch ein höheres Minimum zu erwarten ist). Zur Charakterisierung der Ableitung kann man die Differenz zwischen der Mittags- und Abendbeobachtung, die sogenannte mittlere Ableitung, nehmen. Bei einer derartigen Behandlung kommen in Betracht:

1. p (Luftdruck)
2. Δp (Veränderung des Luftdrucks von 13^h bis 21^h)
3. t (Lufttemperatur)
4. Δt
5. W (Windrichtung)
6. ΔW
7. V (Windgeschwindigkeit)
8. ΔV
9. P (Bewölkung)
10. ΔP
11. e (absolute Feuchtigkeit)
12. Δe
13. R (relative Feuchtigkeit)
14. ΔR
15. S (tägliche Regenmenge).

Die Gleichung, welche diese Veränderlichen verbindet, kann als eine lineare angenommen werden. Sie könnte im allgemeinen gewiss auch höheren Grades sein, jedoch wurde hier der Einfachheit der Berechnungen wegen darauf verzichtet, um so mehr als die graphische Darstellung der Korrelation gezeigt hat, dass eine Gerade zu vollständig befriedigender Genauigkeit führt.

Bezeichnet man die Veränderlichen mit $x_1, x_2, x_3 \dots$, so erhält man als gesuchte Gleichung für das Minimum:

$$M = a_1x_1 + a_2x_2 \dots + a_nx_n.$$

Da eine der Variablen (z. B. x_1) t ist, so erhält man eine Gleichung von der Form

$$M = a_1t + a_2x_2 + \dots + a_nx_n \text{ oder}$$

$$M = t + \underbrace{(a_1-1)t + a_2x_2 + \dots + a_nx_n}_{\text{Abkühlung}}$$

$$\text{kürzer: } M = t + T.$$

Darin gibt T an, um wieviel sich die Abendtemperatur bis zum Minimum verändert hat (im allgemeinen ist T meist negativ):

$$T = a_1t + a_2x_2 + a_nx_n.$$

Nach der Korrelationsmethode kann man das vorhergehende M oder das folgende T bestimmen.

Es ist bekannt, dass alle beeinflussenden Faktoren nicht direkt auf das Minimum, sondern auf die Abkühlung einwirken, letztere aber mit der Abendtemperatur zusammen bestimmen das Minimum der Nacht. Deshalb ist eine bessere Korrelation zwischen den einzelnen Faktoren mit T zu erwarten, als mit M , und dadurch genauere Werte für die Koeffizienten, da der Fehler von $\sqrt{1-r^2}$ abhängig und desto kleiner ist, je grössere Werte r erhält.

Schon aus der graphischen Darstellung wurde es klar, dass eine grosse Zahl der Variablen fortfällt, da die Korrelationsfelder gleichmässig von Punkten bedeckt waren. Die wegzulassenden Grössen sind:

1. S (tägliche Regenmenge)
2. V (Windgeschwindigkeit)
3. ΔV
4. Δp (Veränderung des Luftdrucks)

5. e (absolute Feuchtigkeit)
6. Δe
7. ΔR (Veränderung der relativen Feuchtigkeit)
8. W (Windgeschwindigkeit).

Alle diese Grössen ergaben sehr kleine Korrelationsfaktoren, doch zur allseitigen Beleuchtung der Frage ist es notwendig, einige von ihnen genauer zu betrachten.

Der Koeffizient der Niederschläge $r = -0.08 (\pm 0.03)$ zeigt, dass einer grösseren Tagesmenge der Niederschläge eine grössere Abkühlung in der folgenden Nacht entspricht. Jedoch ist die Zahl solcher Fälle fast ebenso gross, wie diejenige mit der entgegengesetzten Erscheinung. Die Untersuchung der Abkühlung an Tagen mit und ohne Niederschlag hat gezeigt, dass sie im ersteren Falle geringer ist. An niederschlagslosen Tagen betrug sie 3.7° , an Tagen mit Niederschlag 2.8 , ein Umstand, der dadurch zu erklären ist, dass bei Niederschlagslosigkeit die Nacht klar, bei Niederschlägen immer bewölkt ist. Rechnet man die Abende mit der Bewölkung ≤ 5 als klar und die übrigen als bewölkt, so hat es sich erwiesen, dass nach klaren Abenden die Abkühlung 4.2° , nach bewölkten Abenden 3.0° war. Daraus ist zu ersehen, dass der Niederschlag keinesfalls die Abkühlung begünstigt, sondern sie eher verhindert. Die mittlere Abkühlung an bewölkten Tagen mit Niederschlag beträgt 2.8° , an trockenen bewölkten Tagen 3.0° , und der negative Korrelationsfaktor könnte wohl unter dem Einfluss einzelner grosser Niederschlagsmengen entstanden sein. Dass an trockenen Tagen die Abkühlung grösser ist, wird, wie wir später sehen werden, durch die geringe Feuchtigkeit verursacht. Bei getrennter Betrachtung der Frühlings- und Herbstperiode sieht man, dass die Abkühlung an Tagen mit Niederschlag in beiden dieselbe ist, 2.8° , dagegen beträgt an trockenen Tagen die mittlere Abkühlung im Frühling 4.0 , im Herbst 2.8 (mehr bewölkte Nächte). Sondern wir noch klare und bewölkte Abende, so ist im Frühling im Falle klarer Abende die Abkühlung 4.6° , im Falle bewölkter Abende 3.3° , im Herbst — im ersteren Falle 3.1° , im letzteren 2.3° . Dieses zeigt, dass bei trockenem Wetter im Frühling die Abkühlung am grössten ist, im Herbst ist sie bei klarem Himmel grösser, bei bewölktem jedoch kleiner als an Tagen mit Niederschlag. Folgende Tabellen geben einen Überblick über die erhaltenen Ergebnisse.

Tab. 6.

	Ohne Niederschlag	Mit Niederschlag
Frühling	4·0	2·8
Herbst	2·8	2·8
Bewölkt	3·0	2·8
Klar	4·2	—
Mittel	3·7	2·8

Tab. 7.

	Frühling	Herbst
Mit Niederschlag	2·8	2·8
Ohne „	4·0	2·8
Bewölkt	3·3	2·3
Klar	4·6	3·1
Mittel	3·4	2·8

Der Einfluss der Windrichtung auf die Abkühlung muss noch gesondert erwähnt werden. Da hier die Regressionskurve periodisch ist, kann die Korrelation nicht linear sein. Die Korrelationskurve (Fig. 6) ist auf graphischem Wege bestimmt worden.

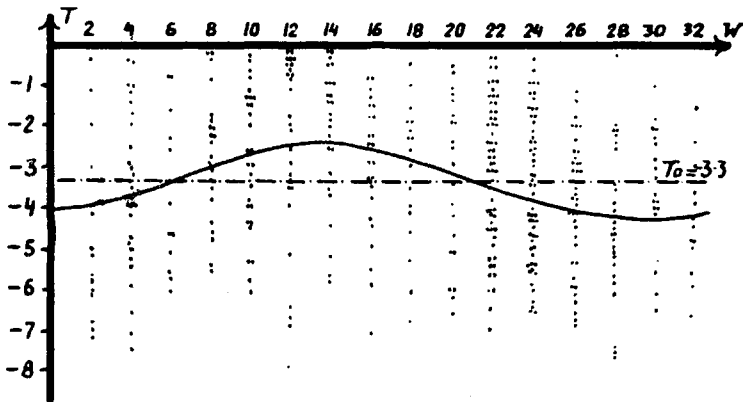


Fig. 6.

Die harmonische Näherungskurve der mittleren Abkühlung zeigt, dass eine grössere Abkühlung bei *W* bis *NE*-Winden stattfindet, was auch natürlich ist, da die genannten Winde auf der Rückseite der Zyklone herrschen und aus dem Norden kühlere Luft zu uns bringen. Eine geringere Abkühlung findet bei *E* bis *SSW*

Winden statt, da diese aus einer Gegend kommen, in der in allen Jahreszeiten ausser dem Winter eine höhere Temperatur herrscht.

Bei den 7 übriggebliebenen Veränderlichen können noch einige Kürzungen vorgenommen werden. ΔW (die Veränderung der Windrichtung) scheint graphisch eine Korrelation zu ergeben. Wie bekannt, beeinflussen den Korrelationsfaktor besonders stark gerade die von der Mitte fern liegenden Punkte, jedoch hat sich in unserem Falle die Mehrzahl der Punkte zur Mitte verschoben, und es kann der Wert des Koeffizienten zufällig durch den Einfluss der kleinen Zahl der weitliegenden Punkte entstanden sein (Fig. 7), oder mit anderen Worten: die Wirkung der Ver-

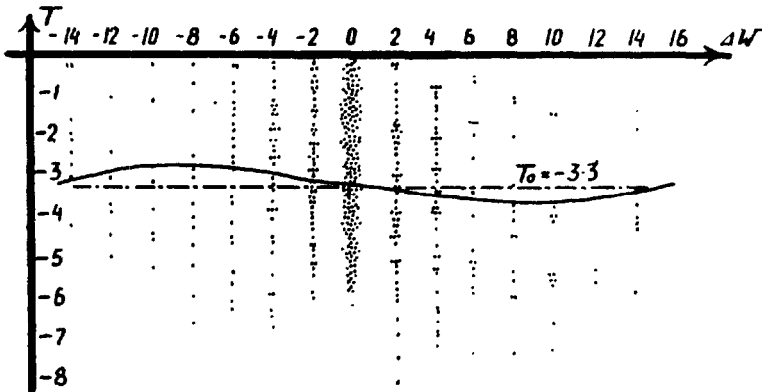


Fig. 7.

änderung der Windrichtung ist klein, weil diese selten zur Geltung kommt. Schliesslich ist es auch einleuchtend, dass der Einfluss der Änderung der Windrichtung nicht immer mit demselben Zeichen behaftet sein wird, wie es bei anderen Veränderlichen der Fall ist. Wenn sich erwiesen hat, dass bei grösserer Bewölkung geringere Abkühlung stattfindet, so kann man dieses als eine Tatsache hinnehmen, die immer besteht. Nicht so ist es mit dem Winde. Wie Fig. 7 zeigt, wird mit Zunahme der Windrichtung die Abkühlung grösser, aber es ist dennoch gewiss, dass die Änderung der Windrichtung nicht immer in diesem Sinne wirkt. Wenn der *W*-Wind sich nach rechts dreht, kann man eine grössere Abkühlung erwarten, dieses kann man aber bei *E*- und *SE*-Winden nicht behaupten. Eine Korrelation scheint zu bestehen, aber nur deshalb, weil an den aus dem Beobachtungsmaterial ausgewählten Tagen die Abkühlung gross war, und

in der Mehrzahl der Fälle Tiefdruckgebiete nördlich von uns vorbeiziehen, und deshalb an den genannten Tagen die Drehung des Windes nach rechts öfter erfolgte. Daher ist es natürlich, dass in diesem Falle die Drehung des Windes nach rechts und die grössere Abkühlung zusammenfallen (das Zusammenfallen ist übrigens nicht allzu gross).

Als letztes fällt ΔP fort (Änderung der Bewölkung). Wie Fig. 8 zeigt, ist auf dem Korrelationsfelde die Verteilung der Punkte unregelmässig. Sehr dicht liegen die Punkte an den Stellen, wo die Änderung der Bewölkung gleich Null ist, daher

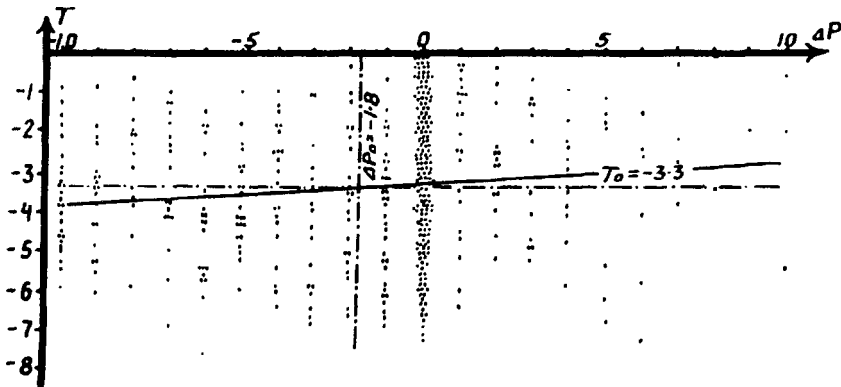


Fig. 8.

ist der Einfluss dieser Veränderlichen nicht einheitlich. Es ist beinahe schon aus der Zeichnung zu ersehen, dass der Korrelationsfaktor genügend klein sein wird. Wie die Bearbeitung des Materials gezeigt hat, fällt eine andere Variable mit einem grösseren Korrelationsfaktor fort. Die graphische Darstellung von ΔP zeigt, dass bei Zunahme der Bewölkung eine kleinere Abkühlung zu erwarten ist, was auch ganz von selbst klar sein musste.

Da die übriggebliebenen Veränderlichen bedeutende Korrelationen ergaben, mussten sie in die Gleichung hineingenommen werden. Diese sind folgende:

- t — Temperatur
- R — relative Feuchtigkeit
- P — Bewölkung
- p — Luftdruck
- Δt — Änderung der Temperatur.

Da mit T die Zunahme der Temperatur bezeichnet wurde, ist der Wert von T meist negativ, denn es kommen nur selten Fälle vor, in denen die Temperatur während der Nacht steigt. Schon ein intuitives Nachdenken führt zu den Folgerungen, dass

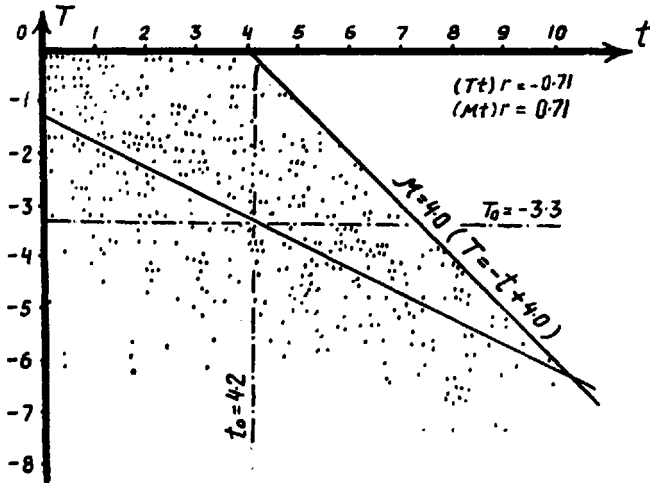


Fig. 9.

bei grösserem t auch stärkere Abkühlung zu erwarten ist, somit kleinere Werte von T (die Korrelation muss negativ sein) (Fig. 9),

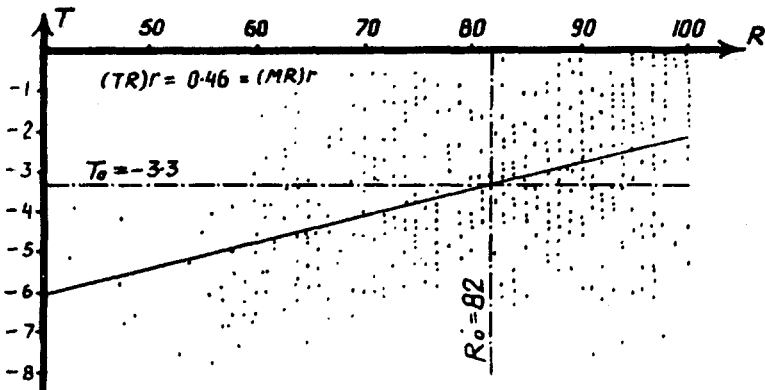


Fig. 10.

bei grösseren R — eine schwächere Abkühlung, folglich grössere Werte von T (die Korrelation muss positiv sein) (Fig. 10), bei grösseren P — auch grössere T (die Korrelation ist positiv)

(Fig. 11), bei grösseren p — kleinere T (die Korrelation ist negativ) (Fig. 12) und bei grösseren Δt (wenn die Temperatur wenig fällt) — grössere T (kleine Abkühlung) (Fig. 13). Während die 4

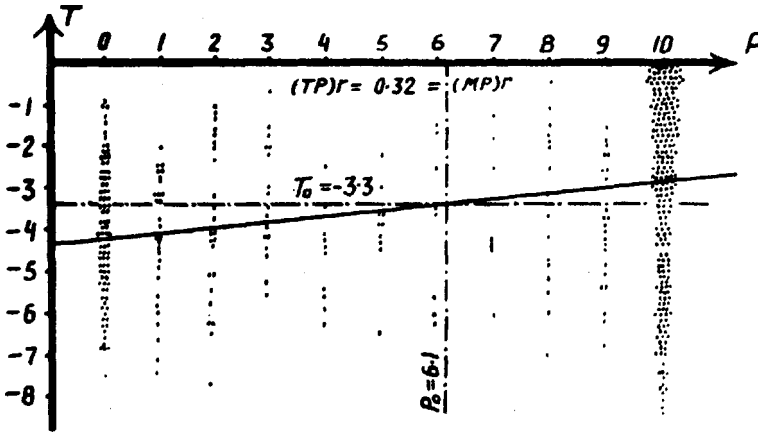


Fig. 11.

ersten Variablen die statische Abkühlung beeinflussen, muss die letzte, wenn auch nur in einem geringen Mass, einen Teil der dynamischen Abkühlung charakterisieren. Es ist allgemein be-

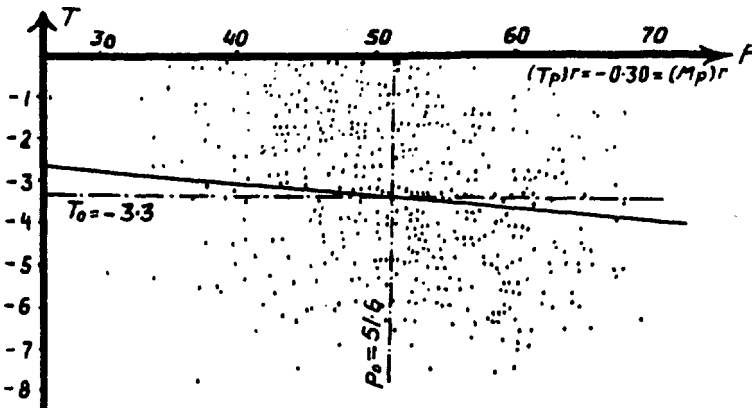


Fig. 12.

kannt, dass die Temperatur auch von den Eigenschaften der herrschenden Winde abhängig ist und sich mit ihnen ändert. Wenn in der Richtung, aus welcher die Winde kommen, der Temperaturgradient positiv ist, kann man eine Erwärmung erwarten und umgekehrt. Es ist selbstverständlich, dass der Wind

auf die nächtliche Abkühlung einen Einfluss ausübt, und zwar proportional dem Temperaturgradienten und der Windgeschwindigkeit. Da aber die Wetterkarte es nicht ermöglicht, mit genügender Genauigkeit die Windgeschwindigkeit und den Temperaturgradienten der Beobachtungspunkte zu bestimmen, konnte man nicht in dieser Weise den Einfluss des Windes untersuchen und musste sich mit einem weniger genauen Wege begnügen. Es musste angenommen werden, dass der genannte Einfluss auf die Temperatur nicht erst am Abend, sondern schon

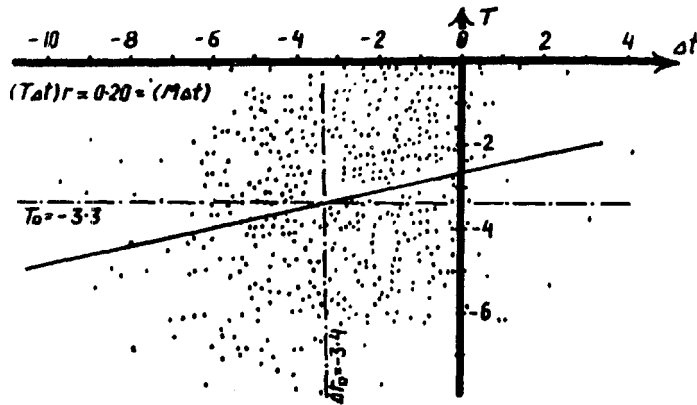


Fig. 13.

am Nachmittag beginnt, und seine Grösse mit der Temperaturdifferenz der Mittags- und Abendbeobachtung in Verbindung steht. Im Falle eines übernormalen Sinkens der Temperatur von Mittag bis Abend ist es wahrscheinlich, dass die Abkühlung von dynamischen Faktoren beeinflusst wird, und bei einer fortgesetzten Wirkung derselben auch eine tiefere Temperatur in der Nacht zu erwarten ist. Dieses ist freilich nicht ganz richtig, da bei der Änderung von Δt auch statische Faktoren mitspielen.

Zur Bestimmung der Koeffizienten der gesuchten Gleichung mussten die Korrelationsfaktoren zwischen allen einzelnen Veränderlichen gefunden werden. Von den 36 Korrelationskoeffizienten brauchten nur 15 berechnet zu werden, weil $r_{ik} = r_{ki}$ und $r_{ii} = 1$. Zuerst wurden die Korrelationskoeffizienten zwischen T und den einzelnen Veränderlichen bestimmt. Bei der Berechnung der Koeffizienten zwischen den einzelnen Veränderlichen untereinander wurde zur Kontrolle des Zeichens die Regel benutzt, nach der die Zeichen der Koeffizienten zwischen den Veränder-

lichen aus denen der vorhergehenden Koeffizienten abzuleiten sind. In Tab. 8 sind die genannten Korrelationsfaktoren gegeben.

Tab. 8.

	<i>T</i>	<i>t</i>	<i>R</i>	<i>P</i>	<i>p</i>	Δt
<i>T</i>	1	-0.71	0.46	0.32	-0.30	0.20
<i>t</i>	-0.71	1	-0.34	-0.18	0.19	-0.15
<i>R</i>	0.46	-0.34	1	0.40	-0.36	0.23
<i>P</i>	0.32	-0.18	0.40	1	-0.40	0.41
<i>p</i>	-0.30	0.19	-0.36	-0.40	1	-0.23
Δt	0.20	-0.15	0.23	0.41	-0.23	1

Nach der Korrelationstheorie hat die Regressionsgleichung einer Funktion mehrerer Variablen folgende Form:

$$X_1 = -\frac{R_{12}}{R_{11}} \cdot \frac{\delta_1}{\delta_2} \cdot X_2 - \frac{R_{13}}{R_{11}} \cdot \frac{\delta_1}{\delta_3} \cdot X_3 \dots - \frac{R_{1n}}{R_{11}} \cdot \frac{\delta_1}{\delta_n} \cdot X_n = -\frac{\delta_1}{R_{11}} \sum_{i=2}^n \frac{R_{1i}}{\delta_i} X_i.$$

Hierin ist R_{1i} eine Unterdeterminante der ersten Reihe und der i -ten Kolumne der Determinante R . Die Determinante R wird aus den Korrelationsfaktoren folgendermassen zusammengestellt:

$$R = \begin{vmatrix} r_{11} & r_{12} & \cdot & \cdot & \cdot & r_{1n} \\ r_{21} & r_{22} & \cdot & \cdot & \cdot & r_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ r_{n1} & r_{n2} & \cdot & \cdot & \cdot & r_{nn} \end{vmatrix}.$$

Da $r_{ii} = 1$ und $r_{ik} = r_{ki}$, ist die Determinante symmetrisch, wobei jedes Glied längs der Diagonale eine 1 ist. Inhaltlich ist dieses nichts anderes, als die in Tab. 8 gegebenen Korrelationsfaktoren in der Form einer Determinante geschrieben.

δ_i ist das quadratische Mittel aus den Abweichungen von den Mittelwerten der i -ten Veränderlichen:

$$\delta_i = \sqrt{\frac{\sum \Delta X_i^2}{N}}.$$

Die Berechnung ergab:

$$\begin{array}{ll} R = 0.202 & \delta_1 = 1.86 \\ R_{11} = 0.478 & \delta_2 = 2.66 \\ R_{12} = 0.292 & \delta_3 = 13.2 \\ R_{13} = -0.0872 & \delta_4 = 4.34 \\ R_{14} = -0.0483 & \delta_5 = 7.79 \\ R_{15} = 0.0370 & \delta_6 = 2.22 \\ R_{16} = -0.0030. & \end{array}$$

So erhalten wir für A_{1i} $\left(A_{1i} = -\frac{R_{1i}}{R_{11}} \cdot \frac{\delta_1}{\delta_i} \right)$ folgende Werte:

$$\begin{aligned} A_{12} &= -0.427 \\ A_{13} &= 0.0257 \\ A_{14} &= 0.0433 \\ A_{15} &= -0.0180 \\ A_{16} &= 0.0053. \end{aligned}$$

Da die Mittelwerte der Variablen folgende sind:

$$\begin{aligned} X_1^0 &= -3.3 \\ X_2^0 &= 4.2 \\ X_3^0 &= 82 \\ X_4^0 &= 6.1 \\ X_5^0 &= 51.6 \\ X_6^0 &= -3.4, \end{aligned}$$

so erhalten wir die Formel:

$$\begin{aligned} T + 3.3 &= -0.427(x_1 - 4.2) + 0.0257(x_2 - 82) + 0.0433(x_3 - 6.1) \\ &\quad - 0.0180(x_4 - 51.6) + 0.0053(x_5 + 3.4), \end{aligned}$$

oder nach Einführung der früher gebrauchten Bezeichnungen:

$$T = -0.427t + 0.0257R + 0.0433P - 0.0180p + 0.0053\Delta t - 2.9.$$

Weil $M = t + T$, deshalb

$$\underline{M = 0.57t + 0.026R + 0.043P - 0.018p - 2.9,}$$

wenn wir die Koeffizienten mit der nötigen Genauigkeit nehmen (der Koeffizient von Δt fällt gleichfalls fort, da erst die Veränderung der Temperatur um 20° eine Änderung des Minimums um 0.1° hervorruft).

Der mit Hilfe der Formel bestimmte wahrscheinliche Fehler

$$\text{ist } \varrho = 0.674 \delta_1 \sqrt{\frac{R}{R_{11}}} = 0.82^\circ.$$

Der allgemeine Korrelationsfaktor nach der Formel

$$r = \sqrt{1 - \frac{R}{R_{11}}} \text{ ist } 0.76.$$

Mit Hilfe der gegebenen Formel wurden aus dem ganzen Beobachtungsmaterial die Minimumtemperaturen und der dabei entstandene Fehler berechnet. Der aus den Daten erhaltene wahrscheinliche Fehler betrug 0.81° .

Bei der Untersuchung der einzelnen Jahre hat es sich erwiesen, dass das arithmetische Mittel aus den einzelnen Abweichungen für die ganze Zeitspanne fast gleich Null war (0.03°) und sich in den einzelnen Jahren um 0.2° geändert hat; dieses zeigt, dass die einzelnen Jahrgänge nicht ein und denselben Charakter tragen.

Betrachten wir den Einfluss der einzelnen Veränderlichen, so sehen wir, dass der Löwenanteil daran der Temperatur zufällt. Von 0° bis 12° schwankend, ändert sie das nächtliche Temperaturminimum ungefähr um 7° und beeinflusst die Temperaturabnahme bis zu 5° . Als nächstes kommt die relative Feuchtigkeit in Betracht. Zwischen 40% und 100% schwankend (der am öftesten vorkommende Prozentsatz), ändert sie das Minimum ungefähr um 1.5° . An dritter Stelle steht der Luftdruck. Sich von 740 mm bis 770 mm ändernd, ruft er die Schwankungen des Minimums von 0.6° hervor. Erst an vierter Stelle steht die Bewölkung, welcher das intuitive Nachdenken eine viel grössere Rolle zugebracht hatte. Bei klarem und ganz bewölkttem Himmel unterscheiden sich die Minima um 0.4° . Dabei darf man aber nicht vergessen, dass die Bewölkungsdaten den Abendbeobachtungen entnommen wurden und ihre Grössen bei der Bestimmung des Minimums nicht wesentlich sind, denn während der Nacht kann die Bewölkung sich sehr stark verändern. Viel grösser wäre die Wirkung der mittleren Bewölkung der Nacht auf das Minimum, es fehlen uns jedoch die entsprechenden Daten.

Der Koeffizient von Δt ist in der Gleichung so klein, dass man ihn ausser Acht lassen kann. Dieses zeigt, dass bei der Temperaturänderung vom Mittag bis zum Abend dieselben statischen Ursachen massgebend sind und das Herauslesen der dynamischen Ursachen aus ihr fast ausgeschlossen ist. Selbstverständlich würde der aus den Wetterkarten entnommene Temperaturgradient zu besseren Ergebnissen führen, doch, wie schon vorher erwähnt, musste der Unvollkommenheit der Wetterkarten wegen davon abgesehen werden.

Beim Betrachten des Einflusses der einzelnen Veränderlichen wird es klar, warum in den bisherigen Formeln nur die Feuchtigkeit berücksichtigt wurde. Die Temperatur und die relative Feuchtigkeit spielen bei der Bestimmung des nächtlichen Temperaturminimums die Hauptrolle. Daher ist auch die Gleichung nicht viel besser, als die verbesserte Kammermann'sche Formel (der

wahrscheinliche Fehler ist von 0·83 auf 0·81 gesunken). Dasselbe zeigt die graphische Darstellung der Verteilung der Fehler (Fig. 14).

Angesichts des Gesagten kann man das oben gestellte Problem als gelöst betrachten: denn in der vorliegenden Arbeit ist gezeigt worden, welche meteorologischen Elemente bei der Bestimmung des Temperaturminimums massgebend sind, ausserdem ist eine Funktion gefunden worden, die bessere Resultate liefert, und endlich ist auch die Genauigkeit der auf diesem Wege erhaltenen Daten festgestellt worden. Die Resultate haben sich im Vergleich mit den nach der Kammermann'schen Regel erhaltenen und um ein wenig auch im Vergleich mit den Resultaten von

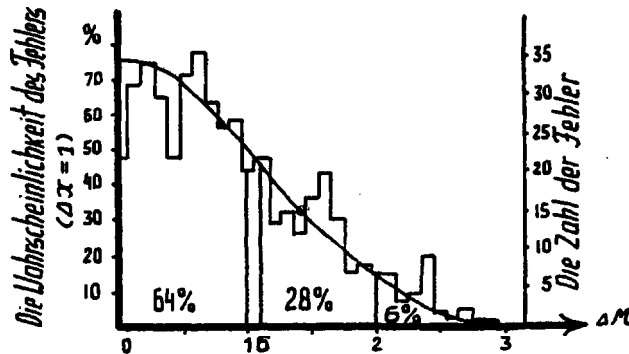


Fig. 14.

Less verbessert. Die in der vorliegenden Arbeit angewandte Methode hat im Vergleich mit den zuletzt genannten den Vorzug, dass man den beobachteten Grössen entsprechend nach der gegebenen Tabelle sofort die Minima finden kann, ohne zu analysieren, in welche Kategorie sich der gegebene Fall einreihen lässt und welche Korrektur anzuwenden ist.

Da alle in der Gleichung vorkommenden Grössen für die statische Abkühlung charakteristisch sind, so ist gleichzeitig dadurch gezeigt worden, welche Genauigkeit man auf dem genannten Wege erreichen kann. Die grössten positiven Fehler reichen bis 2°, die negativen dagegen bis 5°. Dieses zeigt, dass unter aussergewöhnlichen Bedingungen eine starke Abkühlung stattfinden kann.

Hier seien noch einige Worte über Einschränkungen im Zusammenhang mit den gestellten Bedingungen

1) Die Gleichung hat die Form eines Polynoms

2) Die Gleichung ist linear

gesagt.

Die erste Bedingung könnte Grund zu Widerspruch geben, denn man könnte auch annehmen, dass einige Glieder die Produkte oder Potenzen der Veränderlichen enthalten. Das gegebene Polynom entspricht aber der einfachsten Form der gesuchten Gleichung, falls wir bei ihrer Zusammenstellung als Voraussetzung folgendes annehmen:

a) Unabhängig von der Verbindung mit den anderen Variablen beeinflusst eine jede Variable bei ihrer Veränderung nach der einen Richtung auch die Abkühlung nur nach ein und derselben Richtung.

b) Wenn mehrere Variable bei irgendeiner bleibenden Richtung der Veränderung die Abkühlung in ein und derselben Richtung beeinflussen, so wird das gleichzeitige Auftreten der Wirkung der Variablen die Richtung der Abkühlung nicht ändern, sondern nur ihre Intensität vergrößern.

Solange die Frage nicht gelöst ist, wie intensiv die Abkühlung bei der Gesamtwirkung verschiedener dieselbe beeinflussender Faktoren vor sich geht, liegt kein Grund vor, von dem gegebenen Polynom abzuweichen. Es ist jedoch fast unmöglich diese Wirkung festzustellen, da die noch unbekanntenen Faktoren der dynamischen Abkühlung sehr störend wirken. Dasselbe sieht man bei der Betrachtung der sich stark widersprechenden Daten, denn es läge ja nahe zu denken, dass bei der Zusammenwirkung zweier die Abkühlung fördernder Faktoren kein Grund zur Abschwächung der Abkühlung vorläge, das letztere ist jedoch nach dem Beobachtungsmaterial öfters der Fall.

In bezug auf die zweite Bedingung sei gesagt, dass keine Notwendigkeit vorliegt dem Polynom eine andere Form zu geben, denn die Korrelationsfelder haben gezeigt, dass die Gerade sich hier am besten zur Regressionskurve eignet.

Solange man von den die dynamische Abkühlung bestimmenden Größen keinen Gebrauch machen kann (hierher würden gehören: die Angaben der Windrichtung und -geschwindigkeit, der Temperatur und Feuchtigkeit in einem möglichst dichten Netz von um 200—300 km entfernten Punkten um den Beobachtungsort herum, ferner dieselben Angaben in vertikaler Richtung bis zur Höhe von einigen Kilometern, und auch die vertikale Kom-

ponente des Windes) ist wenig Hoffnung vorhanden, auf Grund der vorhandenen Daten genauere Prognosen des Minimums zu erhalten.

Zum Schluss noch ein kleiner Versuch der Verbesserung des vorausbestimmten Minimums durch Berücksichtigung der während der Nacht herrschenden Bewölkung. Hierbei sei ausgegangen von drei Arten der Bewölkung: falls dieselbe am Abend und am Morgen unter 5 war, wird die Nacht als klar betrachtet; wenn beide gleich 10 waren — war die Nacht bewölkt; die übrigen Nächte werden zu den halbbewölkten gerechnet.

Die Bearbeitung des Materials zeigte, dass die in Betracht gezogene Bewölkung zu einem besseren Erfolge kaum etwas beitrug. Es erwies sich nämlich, dass bei klarem Himmel das Minimum durchschnittlich um 0.2° tiefer sank, als es mit Hilfe der Formel vorausgesagt wurde; bei halbbewölktem Himmel war das Minimum dagegen um 0.1° und bei ganz bewölktem Himmel um 0.2° höher. Die Berechnung der Abweichungen ergab, dass der wahrscheinliche Fehler um 0.01° kleiner wurde, somit 0.80° betrug.

Bei der Prüfung der Genauigkeit der Formel am Beobachtungsmaterial des Jahres 1931 erwies sich, dass bei $M < 4^{\circ}$ das Mittel der absoluten Werte der Fehler bei Anwendung der Kammermann'schen Regel 1.3, bei Anwendung der verbesserten Taupunktregel 1.2° und bei Anwendung der verbesserten Kammermann'schen und der allgemeinen Formel 1.0° betrug. Für die vorhergehenden 10 Jahre sind die entsprechenden Zahlen folgende: 1.4, 1.2, 1.1 und 1.0 (also ungefähr dieselben).

In allen diesen Fällen wurde ein Minimum vorausgesagt, das ungefähr um 0.4° höher als das wirklich beobachtete lag.

Da die Formel für $M < 4^{\circ}$ abgeleitet wurde und es bei einer Vorhersage des Minimums noch unbestimmt ist, wie tief die Temperatur fällt, muss die Genauigkeit der Formel noch danach geprüft werden, welchen Wert des Minimums die Formel ergab.

Bei einem vorhergesagten Minimum unter 3° betrug das Mittel aus den absoluten Werten der Fehler 1.3° , wobei von allen Abweichungen 71% positiv waren; und die mittlere Abweichung war 1.1° , also um 0.7° höher als die nach der Formel erhaltene Abkühlung (die Differenz ist dadurch zu erklären, dass zu den Fällen, in denen das vorausbestimmte Minimum unter 3° lag, auch solche gehören, in denen das wirkliche Minimum

grösser als 4° war, somit solche, die bei den Berechnungen nicht in Betracht gezogen wurden).

Im Falle des vorausgesagten Minimums unter 2° betrug das Mittel aus den absoluten Werten der Fehler 1.2 ; 59% aller Abweichungen waren positiv, und die mittlere Abweichung war 0.6° (um 0.2° höher).

Ferner ist festgestellt worden, dass bei niedrigen Temperaturen das wahre Minimum unter das vorhergesagte fällt, bei höheren dagegen das Gegenteil eintritt.