

**KRITIK DER ANSICHTEN VON B. JUNG
ÜBER DIE OBERE GRENZDICHTER DER
HIMMELSKÖRPER**

VON

WILHELM ANDERSON

TARTU 1937

Unter der Annahme, daß die Eigenenergie einer (homogenen) Kugel nicht negativ sein darf, gelangt A. Haas zu der Formel:

$$Mc^2 - \frac{3}{5} \frac{GM^2}{R} \geq 0.$$

Andererseits ist:

$$M = \frac{4}{3} \pi R^3 \rho.$$

Das Eliminieren von R ergibt:

$$\rho \leq \frac{125}{36 \pi} \frac{c^6}{G^3 M^2}. \quad (1)$$

G. I. Pokrowski nimmt an, daß der Grenzwert des Oberflächenpotentials gleich $-c^2$ sei, daß also

$$\frac{GM}{R} \leq c^2$$

sein müsse. Daraus ergibt sich:

$$\rho \leq \frac{3}{4 \pi} \frac{c^6}{G^3 M^2}. \quad (2)$$

Ich verschärfte Pokrowski's Annahme durch die Forderung, daß selbst im Zentrum des Sterns das Gravitationspotential den Grenzwert $-c^2$ nicht überschreiten dürfe. Eine solche Forderung führt zu der Formel:

$$\rho \leq \frac{2}{9 \pi} \frac{c^6}{G^3 M^2}. \quad (3)$$

Bedeutend früher (im Jahre 1923) hatte ich die Forderung aufgestellt, daß die Kontraktionsenergie nicht imaginär werden dürfe. Meine damalige Theorie führt zu der Formel:

$$\rho \leq \frac{125}{72 \pi} \frac{c^6}{G^3 M^2}. \quad (4)$$

Neuerdings untersuchte N. R. Sen die Beziehung zwischen Masse und Dichte einer homogenen Kugel nach den Methoden der allgemeinen Relativitätstheorie. Für den Grenzfall läßt sich nach Sen's Theorie die Gleichung

$$\varrho = \frac{(0,526)^2}{16 \pi} \frac{c^6}{G^3 M^2} \quad (5)$$

ableiten ¹⁾.

Nach Einstein ist

$$\frac{\kappa \varrho}{2} = \frac{1}{R^2}$$

und

$$M = 4 \pi^2 \frac{R}{\kappa},$$

wo M die Masse des Universums bedeutet, ϱ seine durchschnittliche Dichte und R den Krümmungsradius des Raumes ²⁾. Außerdem ist

$$\kappa = \frac{8 \pi G}{c^2}.$$

Eliminiert man aus diesen drei Gleichungen R und κ , so erhält man:

$$\varrho = \frac{\pi}{16} \frac{c^6}{G^3 M^2}. \quad (6)$$

Die Formeln (1), (2), (3), (4), (5) und (6) sind bis auf den abweichenden Zahlenfaktor identisch. Sie alle können mit gleichem Rechte sowohl auf das Universum als Ganzes, wie auch auf einzelne Sterne angewandt werden.

Unlängst erhebt B. Jung Einwände gegen die Ableitung der Formeln von Haas und von Pokrowski: „Daß diesen Betrachtungen ein Fehlschluß zugrunde liegt, scheint bisher entgangen zu sein. Das Versehen liegt darin, daß zwar die Eigenenergie, die der Masse M zukommt, richtig (relativistisch) angesetzt wird,

¹⁾ Vgl. W. Anderson, Publ. de l'Observatoire Astronomique de l'Université de Tartu **29**, [= Acta et Commentationes Universitatis Tartuensis (Dorpatensis) A **29**,] S. 28 ff., 1936. Dort finden sich auch die entsprechenden Literaturnachweise.

²⁾ A. Einstein, Berl. Ber. 1917, S. 152.

nicht aber die Gravitationsenergie³⁾. Jung berechnet vor allem die Schwerebeschleunigung, die eine homogene Kugel von dem Radius R und von der Dichte ρ auf eine äußere Kugelschale (mit den Radien R und $R + dR$) ausübt. Er weist darauf hin, daß die Gesamtmasse M der Kugel sich zusammensetzt „aus der materiellen Masse M_m und der Masse, die der negativen Gravitationsenergie entspricht“. In gleicher Weise muß, nach Jungs Ansicht, auch die Masse dM der Kugelschale berechnet werden, wodurch sich die Differentialgleichung

$$dM = 4\pi\rho R^2 dR - 4\pi\rho R^2 \frac{GM}{c^2 R} dR \quad (7)$$

ergibt. Die Lösung dieser linearen Differentialgleichung ist:

$$M = 4\pi\rho \frac{\int R^2 e^{-\frac{2\pi\rho G}{c^2} R^2} dR}{e^{-\frac{2\pi\rho G}{c^2} R^2}}. \quad (8)$$

Jung weist nun darauf hin, daß die Gesamtmasse M (also auch die Gesamtenergie Mc^2) mit wachsendem R dauernd zunehme; von einem Negativwerden des Energieinhaltes sei keine Rede.

Auf Jungs Einwände kann folgendes erwidert werden.

Wenn x die gegenseitige Entfernung zweier Massen M und m bedeutet, so ist die entsprechende Newtonsche Anziehungskraft gleich $\frac{GMm}{x^2}$. Zur Überführung der Masse m aus der Entfernung r bis in eine unendlich große Entfernung muß die Arbeit

$\int_r^\infty \frac{GMm}{x^2} dx$ geleistet werden. Dann, und nur dann, wenn Mm

konstant ist, dürfen wir schreiben:

$$\int_r^\infty \frac{GMm dx}{x^2} = GMm \int_r^\infty \frac{dx}{x^2} = \frac{GMm}{r}. \quad (9)$$

Beim freien Fallen der kleinen Masse m auf die große Masse M nimmt die potentielle Gravitationsenergie ab, aber im

³⁾ B. Jung, Astron. Nachrichten **261**, 87, 1936.

selben Maße steigt die kinetische Energie an, so daß m (und auch M) unverändert bleibt. Deshalb haben wir auch das Recht, beim freien Fallen die Beziehung (9) anzuwenden. Anders ist es, wenn während des Fallens auch nur ein Teil der entstehenden kinetischen Energie durch Ausstrahlung oder auf irgendeine andere Weise entfernt wird. In einem solchen Falle nimmt die Masse m ständig ab, so daß Mm nicht konstant bleiben kann. Dann darf aber (9) nicht mehr angewandt werden.

Bei Jung fällt die unendlich kleine Masse $m = 4\pi\sigma R^2 dR$ aus der Unendlichkeit bis zur Entfernung R vom Kugelzentrum, wobei eine Umwandlung von potentieller Gravitationsenergie in kinetische stattfindet. Dann, und nur dann, wenn diese kinetische Energie während des Fallens auf keine Weise entfernt wird, bleibt $m = 4\pi\sigma R^2 dR$ konstant, wodurch wir berechtigt werden (9) zu benutzen. Dann, und nur dann, dürfen wir sagen, daß die Gravitationsenergie um $\frac{4\pi\sigma R^2 dR \cdot GM}{R}$ abgenommen hat, also die kinetische Energie (die anfangs gleich Null gewesen war) um ebensoviel zugenommen. Wenn wir jetzt (d. h. nach Beendigung des Fallens) die gesamte entstandene kinetische Energie (die der Masse $\frac{4\pi\sigma R^2 dR \cdot GM}{Rc^2}$ äquivalent ist) restlos entfernen, so erhalten wir in der Tat Jungs Differentialgleichung (7). Jungs Gleichung setzt also einen solchen Prozeß der Sternbildung voraus, wo jede unendlich dünne Kugelschale durch ein Herabfallen aus der Unendlichkeit der entsprechenden Masse $4\pi\sigma R^2 dR$ gebildet wird, wobei während des Herabfallens kein Energieverlust durch Ausstrahlung (oder auf irgendeine andere Weise) stattfindet. Erst nach Beendigung des Fallens muß die entstandene kinetische Energie $\frac{4\pi\sigma R^2 dR \cdot GM}{R}$ restlos entfernt werden. Erst danach fällt aus der Unendlichkeit die nächste (unendlich kleine) Portion Masse, und so weiter.

Ein solcher Prozeß entspricht aber gar nicht den wirklichen Verhältnissen. Beim wirklichen Kontraktionsprozeß eines Sterns erfolgt ein ununterbrochener Massenverlust durch Ausstrahlung, aber ein Teil der kinetischen Energie verbleibt im Stern. Sogar beim absoluten Nullpunkt der Temperatur verbleibt im Stern

kinetische Nullpunktsenergie, die beim Kontraktionsprozeß auf Kosten der potentiellen Gravitationsenergie entstanden ist. Es ist daher klar, daß Jungs Differentialgleichung (7) einem sehr künstlichen und äußerst unnatürlichen Prozeß entspricht.

Will man bei der Kontraktion eines homogenen Sterns den Massenverlust durch Ausstrahlung berücksichtigen, so muß man folgendermaßen verfahren.

Die anfängliche Gesamtmasse M_∞ sei bis zur Unendlichkeit zerstreut. Die endgültige Gesamtmasse M_R bilde eine homogene Kugel vom Radius R und von der Dichte ρ_R . In einem Zwischenstadium sei die Gesamtmasse M_x und bilde eine homogene Kugel vom Radius x und von der Dichte ρ_x . Selbstverständlich ist

$$M_\infty > M_x > M_R.$$

Wir fassen ins Auge die Gesamtmasse M_x mit dem Radius x . Eine innere Kugelschale habe die Radien y und $y + dy$. Die Masse dieser Kugelschale ist $4\pi y^2 \rho_x dy$. Die auf diese Masse wirkende Newtonsche Gravitationskraft ist gleich

$$\frac{G \cdot 4\pi y^2 \rho_x dy \cdot \frac{4}{3} \pi y^3 \rho_x}{y^2} = \frac{16 \pi^2 G \rho_x^2 y^3 dy}{3}.$$

Verkürzt sich der Radius x um dx , so verschiebt sich unsere Kugelschale gegen das Kugelzentrum um $\frac{y dx}{x}$, wobei die Newtonsche Gravitationskraft die Arbeit:

$$\frac{16 \pi^2 G \rho_x^2 y^3 dy}{3} \cdot \frac{y dx}{x} = \frac{16 \pi^2 G \rho_x^2 y^4 dy dx}{3x}$$

leistet. Diese Arbeit verwandelt sich in kinetische Energie. Die gesamte in der Kugel auf diese Weise entstandene kinetische Energie ist gleich

$$\begin{aligned} \int_{y=0}^{y=x} \frac{16 \pi^2 G \rho_x^2 y^4 dx dy}{3x} &= \frac{16 \pi^2 G \rho_x^2 x^5 dx}{5 \cdot 3x} = \\ &= \frac{3}{5} \left(\frac{4\pi x^3 \rho_x}{3} \right)^2 \frac{G dx}{x^2} = \frac{3}{5} \frac{GM_x^2 dx}{x^2}. \end{aligned}$$

(Wir könnten diesen Ausdruck auch durch Differenzieren der potentiellen Gravitationsenergie $-\frac{3}{5} \frac{GM_x^2}{x}$ gewinnen.) Nehmen wir an, daß der Bruchteil α dieser kinetischen Energie ausgestrahlt wird (also $1 - \alpha$ im Stern verbleibt). Bezeichnen wir den dadurch entstandenen Massenverlust durch $-dM_x$, so können wir schreiben:

$$dM_x = \alpha \cdot \frac{3}{5} \frac{GM_x^2 dx}{x^2 c^2}.$$

Daraus erhalten wir:

$$\int_{M_R}^{M_\infty} \frac{dM_x}{M_x^2} = \int_R^\infty \alpha \cdot \frac{3}{5} \frac{G dx}{x^2 c^2}.$$

Der Einfachheit halber nehmen wir an, daß α konstant sei. Dann ergibt die Integration:

$$\frac{1}{M_R} - \frac{1}{M_\infty} = \frac{3 G \alpha}{5 R c^2},$$

oder:

$$\frac{G M_R}{R} = \frac{5 c^2}{3 \alpha} \left(1 - \frac{M_R}{M_\infty}\right). \quad (10)$$

Das Gravitationspotential im Zentrum einer homogenen Kugel erreicht den kritischen Wert $-c^2$, sobald das Oberflächenpotential den Wert $-\frac{G M_R}{R} = -\frac{2}{3} c^2$ erreicht hat. Eliminiert man $\frac{G M_R}{R}$ aus der letzten Gleichung und aus (10), so erhält man:

$$\frac{2}{3} c^2 = \frac{5 c^2}{3 \alpha} \left(1 - \frac{M_R}{M_\infty}\right),$$

oder:

$$\frac{M_R}{M_\infty} = 1 - \frac{2 \alpha}{5}. \quad (11)$$

Die gesamte während der Kontraktion ausgestrahlte Masse ist also gleich

$$M_\infty - M_R = 0,4 \alpha M_\infty = \frac{0,4 \alpha}{1 - 0,4 \alpha} M_R.$$

Erfolgt die Kontraktion ohne Energieverlust durch Ausstrahlung, so ist $\alpha = 0$ zu setzen, und (11) ergibt dann $M_R = M_\infty$, wie dies auch zu erwarten war. Wird hingegen die gesamte bei der Kontraktion entstandene kinetische Energie ausgestrahlt, so ist $\alpha = 1$ zu setzen, und (11) ergibt dann:

$$\frac{M_R}{M_\infty} = 1 - \frac{2}{5} = \frac{3}{5}.$$

Es möge z. B. die anfängliche Masse eines (sehr großen) Nebels $M_\infty = 10^{45} g$ betragen; dann beträgt $M_R = \frac{3}{5} M_\infty = 6 \cdot 10^{44} g$. Dieser Wert in (3) eingeführt ergibt für den Grenzfall:

$$\rho = 4,83 \cdot 10^{-7} g \cdot cm^{-3}.$$

Wenn sich also unser Nebel bis zur Dichte von $4,83 \cdot 10^{-7} g \cdot cm^{-3}$ zusammenballt, so erreicht in seinem Zentrum das Gravitationspotential den kritischen Wert $-c^2$.

Wird bei der Kontraktion die Hälfte der entstandenen kinetischen Energie ausgestrahlt, so ist $\alpha = \frac{1}{2}$ zu setzen, und (11) ergibt in diesem Falle:

$$\frac{M_R}{M_\infty} = 1 - \frac{1}{5} = \frac{4}{5}.$$

Ist wiederum $M_\infty = 10^{45} g$, so wird $M_R = \frac{4}{5} M_\infty = 8 \cdot 10^{44} g$ sein, und dann ergibt (3) für den Grenzfall:

$$\rho = 2,72 \cdot 10^{-7} g \cdot cm^{-3}.$$

Erfolgt die Kontraktion ganz ohne Ausstrahlung (ist also $\alpha = 0$), so ist $M = M_R = M_\infty = 10^{45}$ in (3) zu setzen, und dies ergibt für den Grenzfall:

$$\rho = 1,74 \cdot 10^{-7} g \cdot cm^{-3}.$$

Wir sehen also, daß Massenverlust durch Ausstrahlung die Entstehung des kritischen Gravitationspotentials ($-c^2$) keinesfalls verhindern kann. Ist die Masse des Nebels sehr groß, so entsteht das kritische Gravitationspotential schon bei sehr geringer Dichte.

Bevor wir weitergehen, wollen wir untersuchen, ob (vom Standpunkt unserer elementaren Theorie) sich auch reine strahlende Energie im Gravitationsgleichgewicht befinden könne.

Ein solches Gleichgewicht verlangt, daß in jedem Punkte der Strahlungsdruck gleich dem Gravitationsdruck sei. Der Einfachheit halber nehmen wir statt dessen an, daß im Gleichgewichtsfalle der durchschnittliche Strahlungsdruck gleich dem durchschnittlichen Gravitationsdruck sein muß. Außerdem nehmen wir an, daß die strahlende Energie eine homogene Kugel von der Dichte ρ $g \cdot cm^{-3}$ bilde. In einem solchen Falle ist der Strahlungsdruck an allen Punkten ein und derselbe: $p = \frac{1}{3} \rho c^2$; ebenso groß ist natürlich auch der durchschnittliche Strahlungsdruck. Der durchschnittliche Gravitationsdruck einer homogenen Kugel ist bekanntlich gleich $\frac{3}{20 \pi} \frac{GM^2}{R^4}$. Im Falle des Gleichgewichts muß also

$$\frac{1}{3} \rho c^2 = \frac{3}{20 \pi} \frac{GM^2}{R^4}$$

sein. Andererseits ist

$$\frac{4}{3} \pi R^3 \rho = M.$$

Eliminiert man ρ aus den beiden Gleichungen, so erhält man:

$$R = \frac{3}{5} \frac{GM}{c^2}. \quad (12)$$

Also existiert eine Gleichgewichtslage tatsächlich, und (12) gibt die Größe des „Gleichgewichtsradius“ an. Ist aber dies Gleichgewicht stabil oder labil? — Machen wir den Radius R etwas kürzer als der Gleichgewichtsradius ist, so steigt die Dichte ρ und also auch der Strahlungsdruck $\frac{\rho c^2}{3}$ umgekehrt proportional R^3 , aber der durchschnittliche Gravitationsdruck $\frac{3}{20 \pi} \frac{GM^2}{R^4}$ umgekehrt proportional R^4 , also schneller. Der Gravitationsdruck, der jetzt Übergewicht erhalten hat, wird eine weitere Kontraktion der Kugel verursachen, wodurch das relative Übergewicht des Gravitationsdruckes noch mehr steigen wird, usw. Unsere Kugel muß schließlich in einen Punkt zusammenstürzen.

— Wenn wir den Radius etwas größer machen als der Gravitationsradius ist, so erhält der Strahlungsdruck das Übergewicht; dies bewirkt eine weitere Ausdehnung, wodurch das relative Übergewicht des Strahlungsdruckes ein noch größeres wird, usw.

Wir sehen also, daß das Gravitationsgleichgewicht reiner strahlender Energie ein labiles ist.

Das Volumen einer gegebenen Menge strahlender Energie im freien Raume wird sich mit Lichtgeschwindigkeit ausdehnen, wenn diese Ausdehnung durch keinen Gravitationsdruck verhindert wird. Je mehr sich nun unsere aus strahlender Energie bestehende Kugel ausdehnt (also je mehr sie sich vom Gravitationsgleichgewicht entfernt), desto mehr tritt der Gravitationsdruck in den Hintergrund, desto schneller wächst also der Radius der Kugel. Man kann annehmen, daß nach genügend langer Zeit der Radius mit Lichtgeschwindigkeit wächst. Im Gleichgewichtszustande ist nach (12) der Radius gleich $\frac{3GM}{5c^2}$; t Sekunden nach der Störung des Gleichgewichts sei seine Länge gleich R_t . Es ist klar, daß

$$\frac{3GM}{5c^2} < R_t < \frac{3GM}{5c^2} + ct \quad (13)$$

sein muß. Wir wollen annehmen, daß unsere expandierende Kugel immer homogen bleibe. Außerdem wollen wir voraussetzen, daß t genügend groß sei. Dann können wir sagen, daß der Radius R_t in jeder Sekunde sich um c vergrößert, daß also jedes cm des Radius um $\frac{c}{R_t}$ cm in der Sekunde zunimmt. Mit anderen Worten: jeder Punkt, der sich in der Entfernung 1 cm vom Zentrum befindet, entfernt sich vom letzteren mit der Geschwindigkeit:

$$a = \frac{c}{R_t}. \quad (14)$$

Beträgt die Entfernung des Punktes vom Zentrum l cm, so ist die zentrifugale Geschwindigkeit gleich:

$$la = \frac{lc}{R_t}.$$

Es ist nicht schwer einzusehen, daß auch wenn der Beobachter sich nicht im Zentrum, sondern in einem anderen (inneren) Punkte der Kugel befindet, er trotzdem genau dieselbe Expan-

sion um sich herum beobachten wird. Wir wollen annehmen, daß der Beobachter sich in irgendeinem inneren Punkte A befindet, dessen Entfernung vom Kugelzentrum C offenbar gleich der Geraden AC ist. Es sei B irgendein anderer innerer Punkt, dessen Entfernung vom Kugelzentrum gleich BC ist. Der Punkt A (mit dem Beobachter) entfernt sich vom Kugelzentrum mit der Geschwindigkeit $AC \cdot a$, der Punkt B hingegen — mit der Geschwindigkeit $BC \cdot a$. Dies bedeutet, daß im Verlaufe einer Sekunde sowohl AC als auch BC sich um das $(1 + a)$ -fache vergrößern. Mit anderen Worten: AC ändert sich proportional BC . Sowohl A als auch B verschieben sich längs den entsprechenden Radien, weshalb der Winkel $\sphericalangle ACB$ konstant bleibt. Unter solchen Bedingungen muß sich aber auch AB proportional AC und BC ändern; also auch AB vergrößert sich im Verlaufe einer Sekunde um das $(1 + a)$ -fache. Dem Beobachter in A wird es daher scheinen, daß sich der Punkt B mit der Geschwindigkeit $AB \cdot a$ von A entferne.

Aus (13) und (14) ergibt sich:

$$\frac{c}{3 \frac{GM}{5 c^2}} > a > \frac{c}{3 \frac{GM}{5 c^2} + ct},$$

oder:

$$\frac{c^3}{0,6 GM} > a > \frac{c^3}{0,6 GM + c^3 t}. \quad (15)$$

Nehmen wir z. B. an, daß die Masse unserer Kugel gleich der Masse des Universums sei, also gleich $2 \cdot 10^{55}$ g. Nehmen wir ferner an, daß seit Störung des Gleichgewichts ebensoviel Zeit verflossen ist, als unser Universum existiert (nach der „kurzen“ Zeitskala). Auf Grund der Radioaktivität der Meteorite schätzt Öpik das Alter des Universums auf ungefähr 3 Milliarden Jahre⁴⁾, was $9,468 \cdot 10^{16}$ Sekunden ausmacht. Setzt man $M = 2 \cdot 10^{55}$, $t = 9,468 \cdot 10^{16}$, $c = 3 \cdot 10^{10}$ und $G = 6,66 \cdot 10^{-8}$ in (15) ein, so erhält man:

$$\begin{aligned} a &< 3,378 \cdot 10^{-17} \text{ cm} \cdot \text{sec}^{-1} \text{ pro cm,} \\ a &> 8,046 \cdot 10^{-18} \text{ cm} \cdot \text{sec}^{-1} \text{ pro cm,} \end{aligned}$$

oder:

$$\left. \begin{aligned} a &< 1041 \text{ km} \cdot \text{sec}^{-1} \text{ pro megaparsec,} \\ a &> 248 \text{ km} \cdot \text{sec}^{-1} \text{ pro megaparsec.} \end{aligned} \right\} \quad (16)$$

⁴⁾ E. Öpik, Popular Astronomy 41, 79, 1933.

Was den Gleichgewichtsradius unserer Kugel anbetrifft, so ist er nach (12) gleich

$$R = \frac{3 \cdot 6,66 \cdot 10^{-8} \cdot 2 \cdot 10^{55}}{5 \cdot 9 \cdot 10^{20}} = 8,88 \cdot 10^{26} \text{ cm.}$$

Wie wir sehen, ist das Verhalten unserer aus reiner strahlender Energie bestehenden Kugel sehr ähnlich dem Verhalten unseres Universums. So z. B. sei daran erinnert, daß nach den Beobachtungen von Hubble

$$\alpha = 560 \text{ km} \cdot \text{sec}^{-1} \text{ pro megaparsec}$$

beträgt, was sich mit (16) im Einklang befindet.

Trotzdem besteht ein wesentlicher Unterschied zwischen der Expansion unserer Kugel und der Expansion des Universums (wenigstens nach der traditionellen Auffassung). Es wird ja gewöhnlich angenommen, daß der Radius des Universums sich alle 1300 Millionen Jahre verdoppelt. Der Radius unserer Kugel hingegen wächst mit t nur einfach linear; deshalb muß sich α (nach unserer Auffassung) im Verlaufe der Zeit mehr und mehr verringern.

Gehen wir jetzt zum allgemeineren Falle eines homogenen Himmelskörpers über. Es sei im letzteren

$$\text{Gasdruck} + \text{Strahlungsdruck} = A \rho^k,$$

wo A und k konstant sind. Im Gleichgewichtsfalle muß $A \rho^k$ gleich dem durchschnittlichen Gravitationsdruck sein, es muß also

$$A \rho^k = \frac{3}{20 \pi} \frac{GM^2}{R^4} = \frac{1}{5} \left(\frac{4 \pi}{3} \right)^{1/3} GM^{2/3} \rho^{4/3}$$

sein. Es ist leicht einzusehen, daß bei $k > \frac{4}{3}$ das Gleichgewicht ein stabiles ist, und bei $k < \frac{4}{3}$ ein labiles. Bei $k = \frac{4}{3}$ ist ein Gleichgewicht nur dann möglich, wenn

$$A = \frac{1}{5} \left(\frac{4 \pi}{3} \right)^{1/3} GM^{2/3}$$

ist. Das entsprechende Gleichgewicht ist dann weder stabil noch labil, sondern indifferent, da es ja von ρ nicht abhängt.

Nach J. von Neumann ist die ultra-extremste Zustandsgleichung einer jeden Materie $p = \frac{\rho c^2}{3}$. Eine solche Ansicht ist schon vor Neumann von mir ausgesprochen und begründet worden⁵⁾. Aus dem oben Gesagten folgt, daß das Gravitationsgleichgewicht von Materie im ultra-extremsten Zustande nur ein labiles sein kann.

Nach A. Haas kann die Kontraktion eines (homogenen) Himmelskörpers nur so lange andauern, bis

$$Mc^2 = \frac{3}{5} \frac{GM^2}{R}$$

geworden ist. Die dabei erreichte Dichte entspricht dem Gleichheitszeichen in (1). Wir können diese Gleichung auch folgendermaßen schreiben:

$$\rho^{1/3} = \frac{5}{3} \left(\frac{3}{4\pi} \right)^{1/3} \frac{c^2}{GM^{2/3}}. \quad (17)$$

Wir fragen nun: wie groß wird in diesem Grenzfalle die Summe des Gasdruckes und des Strahlungsdruckes sein, wenn dabei Gravitationsgleichgewicht besteht? -- Die erwähnte Summe muß gleich sein dem durchschnittlichen Gravitationsdruck, es muß also die Gleichung:

$$\begin{aligned} \text{Gasdruck} + \text{Strahlungsdruck} &= \frac{1}{5} \left(\frac{4\pi}{3} \right)^{1/3} GM^{2/3} \rho^{4/3} = \\ &= \frac{1}{5} \left(\frac{4\pi}{3} \right)^{1/3} GM^{2/3} \rho^{1/3} \rho \end{aligned}$$

bestehen. Ersetzt man $\rho^{1/3}$ durch seinen Wert aus (17), so erhält man:

$$\begin{aligned} \text{Gasdruck} + \text{Strahlungsdruck} &= \\ &= \frac{1}{5} \left(\frac{4\pi}{3} \right)^{1/3} GM^{2/3} \cdot \frac{5}{3} \left(\frac{3}{4\pi} \right)^{1/3} \frac{c^2}{GM^{2/3}} \cdot \rho = \frac{\rho c^2}{3}. \end{aligned}$$

Natürlich setzen wir dabei voraus, daß die Kontraktion ohne Übergang von Energie zwischen dem Himmelskörper und der Außenwelt stattfindet.

⁵⁾ Vgl. W. Anderson, l. c. S. 24 ff.

Ein solches Resultat darf uns nicht verwundern. Wenn die Kontraktion ohne Ausstrahlung erfolgt, so verbleibt die entstandene kinetische Energie im Stern, so daß seine Gesamtmasse

$$\left(M - \frac{3}{5} \frac{GM^2}{Rc^2} \right) + \frac{3}{5} \frac{GM^2}{Rc^2} = M$$

konstant bleibt. Wir können $\frac{3}{5} \frac{GM^2}{Rc^2}$ als kinetische Masse bezeichnen und $\left(M - \frac{3}{5} \frac{GM^2}{Rc^2} \right)$ als Ruhemasse. Je mehr der Stern sich verdichtet, desto größer wird seine kinetische Masse und desto kleiner seine Ruhemasse. Schließlich muß letztere gleich Null werden, so daß der Stern nur aus kinetischer Masse bestehen wird, wie dies bei reiner strahlender Energie der Fall ist. Es ist daher auch nicht verwunderlich, wenn dann der Druck der Sternmaterie mit dem Drucke strahlender Energie identisch wird, nämlich gleich $\frac{qc^2}{3}$. Wir wissen aber schon, daß in einem solchen Falle das Gravitationsgleichgewicht ein labiles sein muß.

Bei den tatsächlich existierenden Himmelskörpern sind die Berechnungen natürlich sehr viel komplizierter. Trotzdem kann nicht daran gezweifelt werden, daß auch bei ihnen eine fortschreitende Verdichtung schließlich zu einem labilen Gravitationsgleichgewichtszustand führen muß. Dieser labile Zustand wird bei desto geringerer Dichte eintreten, je größer die Masse des Sterns ist. Die geringste Störung des erwähnten labilen Gleichgewichts muß entweder zur Expansion oder zur weiteren Verdichtung des Himmelskörpers führen. Im letzteren Falle muß die kinetische Masse weiterwachsen. Damit dabei die Gesamtmasse M unverändert bleibe, sind wir nolens volens gezwungen anzunehmen, daß die Ruhemasse negativ wird. Über die Möglichkeit einer negativen Ruhemasse habe ich mich schon früher geäußert⁶⁾. Schließlich muß der Himmelskörper in einen Punkt zusammenfallen. Was geschieht aber weiter? — Am nächstliegenden wäre wohl anzunehmen, daß im erwähnten Punkte eine Art Reflexion eintrete: die Geschwindigkeiten keh-

⁶⁾ W. Anderson, l. c. S. 59 f.

ren ihre Richtungen um, so daß der Himmelskörper sich wieder ausdehnt. Wir sind aber dabei gezwungen anzunehmen, daß die Dichte im erwähnten Punkte den Wert $\rho = \infty$ erreicht habe, freilich nur auf unendlich kurze Zeit. Ob ein derartiges „ungewöhnliches“ Ereignis auch tatsächlich bei irgendeinem Himmelskörper stattgefunden hat, ist natürlich eine ganz andere Frage. Vielleicht ist seit dem „Anfang der Welt“ noch nicht genug Zeit verflossen, damit ein (genügend großer) Himmelskörper sich bis zu dem labilen Gleichgewichtszustande verdichten könnte. Vielleicht aber wird das oben beschriebene Zusammenbrechen der labil gewordenen Himmelskörper durch irgendeinen neuen Faktor verhindert. Man könnte z. B. an eine Art von „kosmischer Repulsion“ denken, oder auch an J. Nuut's „kinematische Expansion“ des Raumes⁷⁾. Solche Faktoren stellen aber wiederum etwas „Ungewöhnliches“ dar⁸⁾.

Früher habe ich meine Ansichten über die Grenzdichte sehr kategorisch formuliert: „In keinem Punkte eines Himmelskörpers kann das Gravitationspotential den kritischen Wert $-c^2$ überschreiten“. Jetzt ziehe ich folgende mildere Formulierung vor: „In keinem Punkte eines Himmelskörpers kann das Gravitationspotential den kritischen Wert $-c^2$ überschreiten, ohne daß etwas „Ungewöhnliches“ passiert“.

Ich möchte noch daran erinnern, daß alles über die Himmelskörper Gesagte auch für das Universum als Ganzes gültig ist. Wir müssen daher annehmen, daß am „Anfang der Welt“, wo sich das Universum noch im Gravitationsgleichgewicht befand, die Ruhemasse gleich Null gewesen ist. Dies bedeutet, daß damals alle „materiellen“ Teilchen bis zu einem gewissen Grade sich wie Lichtquanten benahmten (die ja auch keine merkliche Ruhemasse, sondern nur kinetische Masse besitzen). In gewissem Sinne haben wir daher das Recht zu behaupten, daß „am Anfang der Welt nur Licht existiert habe“.

Wir wissen schon, daß bei einem derartigen „Lichtstadium“ der Materie das Gravitationsgleichgewicht labil sein muß: die geringste Störung dieses Gleichgewichts wird zu einer Kontrak-

⁷⁾ J. Nuut, Acta et Comm. Univ. Tartuensis (Dorpatensis) A 29₃ und 29₆ (1935).

⁸⁾ Ich möchte noch darauf aufmerksam machen, daß bei allen unseren Berechnungen wir immer nur einen euklidischen Raum vorausgesetzt haben.

tion oder zu einer Expansion führen. Wir wollen letzteres annehmen. Außerdem nehmen wir an, daß zwischen dem expandierenden Universum und dem außerhalb des Universums befindlichen Raume kein Energieübergang stattfindet. Zur Zeit des anfänglichen (labilen) Gleichgewichts war die kinetische Masse des Universums gleich $\frac{3 GM^2}{5 Rc^2}$ und die Ruhemasse gleich

$$M - \frac{3 GM^2}{5 Rc^2} = 0, \text{ wo } R \text{ den Gleichgewichtsradius bedeutet.}$$

Bei der Expansion steigt die Ruhemasse auf Kosten der kinetischen Masse. In unendlich ferner Zukunft wird sich unser Universum bis zur Unendlichkeit ausgedehnt haben, wobei sich die kinetische Masse um $\frac{3 GM^2}{5 Rc^2}$ verringert haben wird und die Ruhemasse um ebensoviel vergrößert. Dann wird die kinetische Masse gleich

$$\frac{3 GM^2}{5 Rc^2} - \frac{3 GM^2}{5 Rc^2} = 0$$

sein, und die Ruhemasse gleich

$$\left(M - \frac{3 GM^2}{5 Rc^2} \right) + \frac{3 GM^2}{5 Rc^2} = M.$$

Während des „Lichtstadiums“ (d. h. während des labilen Gravitationsgleichgewichts) ist die durchschnittliche „Molekulargeschwindigkeit“ der Partikelchen gleich der Lichtgeschwindigkeit. Bei der fortschreitenden Expansion verringert sich diese durchschnittliche Molekulargeschwindigkeit mehr und mehr und wird schließlich bei unendlicher Expansion gleich Null. Wie groß ist aber die augenblickliche durchschnittliche Molekulargeschwindigkeit der Partikelchen des Universums? —

Wir wollen wiederum annehmen, daß seit der Störung des (labilen) Gravitationsgleichgewichts 3 Milliarden Jahre = $9,468 \cdot 10^{16}$ Sekunden verflossen sind. Der Gleichgewichtsradius ist gleich $R = 8,88 \cdot 10^{26}$ cm (siehe oben S. 13), daher ist der augenblickliche Radius des Universums

$$R_t < R + ct = 8,88 \cdot 10^{26} + 3 \cdot 10^{10} \cdot 9,468 \cdot 10^{16} = 3,7284 \cdot 10^{26}.$$

Also ist jedenfalls

$$R_t < 4,2 R.$$

Die zur Expansion von R bis R_t verbrauchte kinetische Energie ist gleich

$$\frac{3 GM^2}{5 R} - \frac{3 GM^2}{5 R_t} < \frac{3 GM^2}{5 R} - \frac{3 GM^2}{5 \cdot 4,2 R} = \frac{16}{21} \cdot \frac{3 GM^2}{5 R} = \frac{16}{21} Mc^2.$$

Diese verbrauchte kinetische Energie ist natürlich nicht spurlos verschwunden, sondern hat sich in potentielle Gravitationsenergie verwandelt, wodurch die Ruhemasse (die anfangs gleich Null war) sich entsprechend vergrößert hat. Diese Ruhemasse wird jetzt aber immerhin noch kleiner sein als $\frac{16}{21} M$. Die im Universum verbliebene kinetische Energie ist daher größer als

$$Mc^2 - \frac{16}{21} Mc^2 = \frac{5}{21} Mc^2.$$

Wenn die Masse m eines Partikelchens des Universums im Durchschnitt aus $\frac{16 m}{21}$ Ruhemasse und $\frac{5 m}{21}$ kinetischer Masse bestehen würde, so könnte man die entsprechende durchschnittliche Geschwindigkeit v_m aus der Gleichung

$$\frac{5 mc^2}{21} = \frac{16 mc^2}{21} \left(\frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v_m^2}{c^2}}} - 1 \right)$$

berechnen. Wir erhalten:

$$\frac{v_m}{c} = 0,648.$$

Doch ist die kinetische Masse nicht gleich, sondern größer als $\frac{5 m}{21}$; deshalb muß

$$\frac{v_m}{c} > 0,648 \quad (18)$$

sein. Wir sehen also, daß die heutige durchschnittliche Molekulargeschwindigkeit der Partikelchen des Universums zwar nicht mehr (wie „am Anfang der Welt“) gleich der Lichtgeschwindigkeit ist, aber immerhin noch recht nahe an sie heranreicht.

Heutzutage dehnt sich unser Universum mit einer Geschwindigkeit aus, die ebenfalls recht nahe an Lichtgeschwindigkeit heranreicht. Doch in ferner Zukunft wird sich die Expansionsgeschwindigkeit (im Gegensatz zur Expansionsgeschwindigkeit einer aus „wahrer“ strahlender Energie, d. h. aus Photonen bestehenden Kugel) mehr und mehr verringern. Bei unendlich großer Expansion sinkt die Expansionsgeschwindigkeit (sowie auch die durchschnittliche Molekulargeschwindigkeit der Partikelchen des Universums) bis auf Null⁹⁾.

Natürlich wird es in jedem beliebigen Augenblick Partikelchen geben, deren Geschwindigkeiten größer oder kleiner, sogar sehr viel kleiner als die durchschnittliche Geschwindigkeit sind. Während der Expansion werden die schnelleren Partikelchen größere Wege durchlaufen als die langsameren. Es findet also eine Diffusion der Partikelchen statt, entsprechend ihren Geschwindigkeiten. Dies ist genau dieselbe Erscheinung wie bei dem bekannten „kinematischen“ Weltmodell von E. A. Milne.

Bei allen unseren Untersuchungen haben wir der Einfachheit halber immer angenommen, daß die expandierende Kugel homogen bleibt. Dann muß jedes Kubikzentimeter

$$n = \frac{N}{\frac{4}{3} \pi R_t^3} = \frac{3 N}{4 \pi R_t^3}$$

Partikelchen enthalten, wenn N die Gesamtzahl der im Universum vorhandenen Partikelchen bedeutet. Das Volumen einer

⁹⁾ Es sei hier vor Verwechslung der Expansionsgeschwindigkeit mit der durchschnittlichen Molekulargeschwindigkeit gewarnt. Während des anfänglichen „Lichtstadiums“ war die Ruhemasse der Universums gleich Null, und die durchschnittliche Molekulargeschwindigkeit seiner Partikelchen gleich der Lichtgeschwindigkeit. Dagegen war die Expansionsgeschwindigkeit gleich Null, da sich unser Universum damals in einem (freilich labilen) Gravitationsgleichgewicht befand. Nachdem die Expansion begonnen hat, wächst ihre Geschwindigkeit mehr und mehr, während die durchschnittliche Molekulargeschwindigkeit abzunehmen beginnt. Schließlich erreicht die Expansionsgeschwindigkeit ihren Maximalwert, der recht nahe der Lichtgeschwindigkeit ist. Auch die durchschnittliche Molekulargeschwindigkeit wird immer noch recht nahe der Lichtgeschwindigkeit sein. Bei noch weiterer Expansion wird sowohl die Expansionsgeschwindigkeit als auch die durchschnittliche Molekulargeschwindigkeit mehr und mehr sinken, um schließlich bei unendlicher Ausdehnung des Universums gleich Null zu werden.

Wir haben andererseits angenommen, daß die Expansionsgeschwindigkeit einer aus „wahrer“ strahlender Energie (d. h. aus Photonen) bestehenden Kugel

inneren Kugelschale mit den Radien r und $r + dr$ ist gleich $4\pi r^2 dr$, und dieses Volumen enthält

$$n \cdot 4\pi r^2 dr = \frac{3N}{4\pi R_t^3} \cdot 4\pi r^2 dr = \frac{3Nr^2 dr}{R_t^3} \quad (19)$$

Partikelchen. Die Expansionsgeschwindigkeiten dieser Partikelchen liegen zwischen $v = ra$ und $v + dv = (r + dr)a = ra + dr \cdot a$. Aus diesen Gleichungen ergibt sich:

$$r = \frac{v}{a} \quad \text{und} \quad dr = \frac{dv}{a}$$

Führt man diese Werte in (19) ein, so erhält man:

$$\frac{3Nr^2 dr}{R_t^3} = \frac{3Nv^2 dv}{a^3 R_t^3},$$

oder im Hinblick auf (14):

$$N_v^{v+dv} = \frac{3Nv^2 dv}{a^3 R_t^3} = \frac{3Nv^2 dv}{c^3},$$

wo N_v^{v+dv} die im Universum vorhandene Gesamtzahl jener Partikelchen bedeutet, deren Expansionsgeschwindigkeiten zwischen v und $v + dv$ liegen. Es ist natürlich klar, daß die gewonnene

selbst nach unendlich großer Ausdehnung gleich der Lichtgeschwindigkeit bleibt. Dies läßt sich erklären, wenn man annimmt, daß im unendlich ausgedehnten Zustande die Ruhemasse der Kugel gleich Null sei und die kinetische Masse gleich M . Zur Zeit des (labilen) Gravitationsgleichgewichts hingegen muß die Ruhemasse negativ sein, nämlich gleich $-\frac{3GM^2}{5Rc^2}$, und die kinetische Masse gleich $M + \frac{3GM^2}{5Rc^2}$. Also auch in diesem Falle ist die Gesamtmasse gleich M .

Bei einer unendlichen Expansion nimmt die kinetische Masse um $\frac{3GM^2}{5Rc^2}$ ab und die Ruhemasse um ebensoviel zu. Da auf diese Weise die Ruhemasse der Photonen niemals positiv werden kann, so liegt auch kein Grund vor für das Abrücken ihrer Geschwindigkeiten von der gewöhnlichen Lichtgeschwindigkeit. Ob sich aber eine nur aus Photonen bestehende Kugel auch tatsächlich in alle Ewigkeiten mit Lichtgeschwindigkeit ausdehnen wird, ist natürlich eine andere Frage, auf die wir jedoch nicht näher eingehen wollen.

Man darf auch nicht die Expansionsgeschwindigkeit mit dem Expansionskoeffizienten α verwechseln. Selbst wenn die Expansionsgeschwindigkeit tatsächlich in alle Ewigkeiten konstant und gleich der Lichtgeschwindigkeit bleiben sollte, wird sich α im Verlaufe der Zeit trotzdem mehr und mehr verringern, wie ja dies aus (14) klar hervorgeht.

Gleichung nur so lange gültig bleibt, als das Universum sich annähernd mit Lichtgeschwindigkeit ausdehnt. In genügend ferner Zukunft wird unsere Gleichung schließlich versagen.

Wie verhält sich aber die oben abgeleitete Verteilung der Expansionsgeschwindigkeiten zu der Maxwell'schen Verteilung der Molekulargeschwindigkeiten? —

Natürlich kann die gewöhnliche Maxwell'sche Formel nicht ohne weiteres angewandt werden bei durchschnittlichen Molekulargeschwindigkeiten, die nahe an Lichtgeschwindigkeit herankommen. Wollen wir aber trotzdem versuchen, die Maxwell'sche Formel auf die Partikelchen des Universums anzuwenden, wobei wir ihre durchschnittliche (quadratische) Geschwindigkeit der Einfachheit halber genau gleich der Lichtgeschwindigkeit setzen. Wir erhalten dann:

$$N_v^{v+dv} = \frac{4}{\sqrt{\pi}} \sqrt{\frac{27}{8}} \frac{Nv^2 e^{-\frac{3}{2} \frac{v^2}{c^2}}}{c^3} dv.$$

Ist die individuelle Geschwindigkeit v merklich kleiner als die durchschnittliche Geschwindigkeit, so wird $e^{-\frac{3}{2} \frac{v^2}{c^2}}$ nur wenig verschieden von 1 sein. Wir können daher annähernd schreiben:

$$N_v^{v+dv} = \frac{4}{\sqrt{\pi}} \sqrt{\frac{27}{8}} \cdot \frac{Nv^2 dv}{c^3} = 1,38 \cdot \frac{3 Nv^2 dv}{c^3}.$$

Stellen wir noch einmal die erhaltenen Formeln zusammen:

Verteilungsgesetz der Expansionsgeschwindigkeiten: |

$$N_v^{v+dv} = \frac{3 Nv^2 dv}{c^3}.$$

Maxwell'sches Verteilungsgesetz der Molekulargeschwindigkeiten: |

$$N_v^{v+dv} = 1,38 \cdot \frac{3 Nv^2 dv}{c^3}.$$

(20)

Wir sehen, daß die Verteilung der Expansionsgeschwindigkeiten sich von der Maxwell'schen Verteilung nur unwesentlich unterscheidet. Der ganze Unterschied besteht nur in einem konstanten Zahlenfaktor.

Gegen Milne's „kinematisches“ Weltmodell macht A. Haas folgenden Einwand: „Die Milnesche Idee begegnet allerdings der Schwierigkeit, daß — unter der Voraussetzung einer gleichmäßigen Verteilung der Nebel in dem teleskopisch erreichbaren Raume — von Anfang an die höheren Geschwindigkeiten viel häufiger als die niedrigeren hätten sein müssen; eine derartige Geschwindigkeitsverteilung wäre völlig von den sonst in der Physik bekannten verschieden“¹⁰⁾. Vom Standpunkt unserer Theorie jedoch muß dieser Einwand als hinfällig betrachtet werden: wir haben ja soeben gesehen, daß zwischen der Verteilung der Expansionsgeschwindigkeiten und der Maxwellschen Verteilung gar kein besonders großer Antagonismus besteht.

Freilich ist die räumliche Geschwindigkeitsverteilung in beiden Fällen eine völlig verschiedene. Bei der Expansion ordnen sich die Partikelchen so, daß ihre Geschwindigkeiten proportional den Entfernungen vom Zentrum sind, und gerichtet sind diese Geschwindigkeiten vom Zentrum weg. Daraus folgt, daß die Bewegungszustände zweier in der Nachbarschaft befindlicher Partikelchen nur wenig verschieden sind. Mit anderen Worten: die relative Geschwindigkeit eines Partikelchens hinsichtlich der Nachbarpartikelchen ist gering. Keine derartige räumliche Ordnung existiert in einem gewöhnlichen Gase: hier können auch die in der nächsten Nachbarschaft befindlichen Partikelchen die verschiedensten relativen Geschwindigkeiten aufweisen.

Wir haben zwar angenommen, daß bei der Expansion die Homogenität gewahrt bleibt: trotzdem verlangt das Gesetz des Zufalls, daß in jedem Moment bald hier bald dort kleine zufällige Abweichungen von der entsprechenden mittleren Dichte auftreten. An einer Stelle werden die Partikelchen zufällig etwas mehr zusammengedrängt sein, an einer anderen etwas weniger. Wenn nun irgendwo sich zufällig eine beträchtlich stärkere Verdichtung ausbildet, so wird letztere eine merklich verstärkte Newtonsche Anziehungskraft auf die Nachbarpartikelchen ausüben, wobei nicht vergessen werden darf, daß die relativen Geschwindigkeiten dieser Nachbarpartikelchen nur gering sind. Die rein zufällig entstandene Verdichtung kann sich dank den hereinstürzenden Nachbarpartikeln bedeutend vergrößern. Dieser Verdichtungsprozeß hat auf den Bewegungszustand des Schwer-

¹⁰⁾ A. Haas, Kosmologische Probleme der Physik, Leipzig 1934, S. 58.

punkts der sich verdichtenden Masse natürlich keinen Einfluß. Da wir bei der Expansion annähernde Homogenität voraussetzen, so werden die an verschiedenen Stellen entstandenen Verdichtungen nicht sehr verschiedene Massen besitzen.

Zur Zeit des labilen Gravitationsgleichgewichts (zur Zeit des „Lichtstadiums“) des Universums bewegten sich die Partikelchen mit Lichtgeschwindigkeit und völlig ungeordnet hin und her. Eine Entstehung von großen lokalen Verdichtungen war damals undenkbar. Erst während der Expansion bildete sich die bekannte Ordnung in der räumlichen Geschwindigkeitsverteilung aus, wodurch die Entstehung großer lokaler Verdichtungen (Himmelskörper) möglich wurde. Dabei darf man aber natürlich nicht denken, daß die erwähnte Ordnung sich sofort nach Beginn der Expansion in voller Strenge eingestellt habe. In Wirklichkeit wird dieser Prozess allmählich vor sich gegangen sein. Je weiter die Expansion fortschritt, desto größer wurde die Zahl der Partikelchen, die „sich genügend der Ordnung unterworfen hatten“, desto geringer wurde die Zahl derer, deren Bewegungen man noch als „ungeordnet“ zu betrachten gezwungen war. Auch heutzutage, wo bereits die meisten Partikelchen „sich der Ordnung genügend unterworfen haben“ (und sich, als weitere Folge davon, meistens zu Himmelskörpern verdichtet haben), wird es noch eine gewisse Anzahl „ungeordneter“ Partikelchen geben, die nach allen Seiten hin und her fliegen¹¹⁾. Die durchschnittliche Geschwindigkeit dieser Partikelchen ist nach (18) größer als $0,648 c$ ¹²⁾. Diese Partikelchen sind dem-

¹¹⁾ Was die Natur dieser Partikelchen anbetrifft, so wäre am nächstliegenden ein Gemisch von Neutronen, Protonen, Elektronen und Positronen anzunehmen, und vielleicht noch von negativen Protonen (über letztere vgl. Ioan I. Placinteanu, „Sur l'existence du proton à charge négative; constitution du noyau de l'isotope de H_2 “, Extrait du Bulletin de la Société Roumaine de Physique Vol. 35, Nr. 60. — Août — Octobre 1933).

¹²⁾ Der „geordnete“ Zustand unterscheidet sich vom „ungeordneten“ nicht durch die Größe der Molekulargeschwindigkeiten, sondern nur durch ihre räumliche Verteilung.

Die kinetische Energie eines mit $0,648 c = 1,944 \cdot 10^{10} \text{ cm} \cdot \text{sec}^{-1}$ Geschwindigkeit sich bewegenden Protons (oder Neutrons) ist gleich $4,67 \cdot 10^{-4} \text{ Erg} = 294$ Millionen Volt-Elektronen. Die kinetische Energie eines mit gleicher Geschwindigkeit sich bewegenden Elektrons (oder Positrons) ist beinahe 2000 mal kleiner.

Es ist jedoch durchaus wahrscheinlich, daß sich unter den „ungeordneten“ Partikelchen des Universums bereits eine weitgehende Äquipartition der kine-

nach als „Überreste des anfänglichen Lichtstadiums des Universums“ anzusehen. Es wäre verlockend, diese „ungeordneten“ Partikelchen mit den Partikelchen der kosmischen Höhenstrahlung zu identifizieren. Nach P. Kunze kommen kosmische Partikelchen von über einer Milliarde Volt-Elektronen nur selten vor. Das schnellste Partikelchen, welches er noch gut messen konnte, hatte eine Energie von 2,66 Milliarden Volt-Elektronen¹³⁾. Dies sind Zahlen von ähnlicher Größenordnung, wie wir sie für unsere „ungeordneten“ Partikelchen berechnet haben (vgl. die Fußnote 12). Dagegen gelangt L. G. H. Huxley zu beträchtlich höheren kinetischen Energien für die kosmische Strahlung¹⁴⁾. Es darf aber dabei

tischen Energie eingestellt hat. Wir wollen außerdem die vereinfachende Annahme machen, daß im Universum die Zahl der „ungeordneten“ leichten Partikelchen (der Elektronen und Positronen) gleich der Zahl der „ungeordneten“ schweren (der Protonen und Neutronen) sei. In einem solchen Falle wird die durchschnittliche kinetische Energie einer jeden Art immerhin noch größer als $\frac{294}{2} = 147$ Millionen Volt-Elektronen sein.

Nehmen wir aber an, daß die durchschnittliche kinetische Energie der „ungeordneten“ Partikelchen genau 147 Millionen Volt-Elektronen betrage. Setzen wir außerdem die gewöhnliche Maxwellsche Streuung der individuellen kinetischen Energie um ihren Durchschnittswert voraus. Dann werden z. B. unter 10^{12} Partikelchen sich $7,4 \cdot 10^9$ solcher finden, deren individuelle kinetische Energien größer sind als 588 Millionen Volt-Elektronen. Bei $5,9 \cdot 10^6$ Partikelchen werden diese Energien mehr als 1,32 Milliarden Volt-Elektronen betragen, und bei nur 210 Partikelchen mehr als 2,35 Milliarden. Nehmen wir ferner an, daß auf eine Fläche von 10 cm^2 jede Sekunde 100 „ungeordnete“ Partikelchen fallen (was einen Energiestrom von $2,3 \cdot 10^{-3} \text{ Erg} \cdot \text{cm}^{-2} \cdot \text{sec}^{-1}$ bedeutet). Außerdem wollen wir noch annehmen, daß die von uns vorausgesetzte normale Maxwellsche Energieverteilung weder durch ein absorbierendes Medium, noch auf irgendeine andere Weise beeinflußt werde. Dann wird durchschnittlich alle 1,4 Sekunden ein Partikelchen von über 588 Millionen Volt-Elektronen auf die erwähnte Fläche fallen. Alle 28 Minuten fällt ein Partikelchen von über 1,32 Milliarden Volt-Elektronen, und alle 6,7 Jahre eins von über 2,35 Milliarden. Man darf jedoch dabei nicht vergessen, daß die tatsächliche durchschnittliche kinetische Energie der Partikelchen des Universums nicht gleich, sondern größer als 147 Millionen Volt-Elektronen ist.

Außer den „geordneten“ und den „ungeordneten“ wird es im Universum selbstverständlich auch noch solche Partikelchen geben, die man als „halbgeordnet“ bezeichnen könnte. Auf die Eigenschaften solcher Partikelchen wollen wir jedoch hier nicht näher eingehen.

¹³⁾ P. Kunze, ZS. f. Phys. **80**, 559, 1933.

¹⁴⁾ L. G. H. Huxley, Phil. Mag. (7) **18**, 979, 1934.

nicht außer acht gelassen werden, daß Huxley seine hohen Zahlen nicht (wie Kunze) aus direkten Beobachtungen mit der Wilsonkammer erhalten hat, sondern nur auf Grund spekulativer Betrachtungen über die vermutliche Wirkung des irdischen Magnetfeldes auf die kosmische Strahlung¹⁵⁾. Auf eine weitere Durchmusterung der vorhandenen Literatur wollen wir jedoch verzichten.

Wenn „am Anfang der Welt“ das „Lichtstadium“ geherrscht hat, wenn also damals die Ruhemasse gleich Null war, so reicht die damalige kinetische Energie gerade aus, um das Universum vom anfänglichen (labilen) Gleichgewichtszustand bis zur Unendlichkeit auszudehnen. Die selbstverständliche Folge davon ist, daß während der ganzen Expansionsdauer die kinetische Energie eines jeden Partikelchens in jedem Moment genau groß genug ist, um das Partikelchen von seinem augenblicklichen Orte in eine unendliche Entfernung zu tragen. Diese Regel ist selbstverständlich unabhängig von dem Orte und von dem Bewegungszustand des Beobachters. Es möge der Beobachter in irgendeinem inneren Punkte *A* sich befinden, und das den Beobachter interessierende Partikelchen in einem (ebenfalls inneren) Punkte *B*. (Zwar können *A* und *B* ganz beliebige innere Punkte bedeuten, aber immerhin wollen wir annehmen, daß die Entfernen-

¹⁵⁾ Es sei hier daran erinnert, was für Überraschungen uns der Sonnenmagnetismus gebracht hat. So z. B. haben wir für den starken Magnetismus der Sonnenfleckte immer noch keine absolut befriedigende Erklärung. Außerdem verhält sich das magnetische Feld der Sonne gar nicht so, wie es sich „vernünftigerweise“ verhalten sollte, sondern nimmt mit der Entfernung von der Sonnenoberfläche „viel zu schnell“ ab. Um dies zu erklären, sind ganze Theorien aufgestellt worden (vgl. T. G. Cowling, „On the radial limitation of the Sun's magnetic field“, Monthly Not. Roy. Astron. Soc. **90**, 140, 1929). So suchte man nachzuweisen, daß die stark ionisierte Chromosphäre eine diamagnetische Wirkung ausübe, welche das magnetische Sonnenfeld teilweise neutralisiere. Es sei aber daran erinnert, daß auch unsere Erde von einer stark ionisierten atmosphärischen Oberschicht umgeben ist. Wie es nun mit dem irdischen Magnetfelde außerhalb dieser ionisierten Oberschicht tatsächlich bestellt ist, das kann niemand mit Bestimmtheit wissen. Allen Berechnungen über die Wirkung des irdischen Magnetfeldes auf die kosmische Strahlung sollte daher nicht ohne Mißtrauen begegnet werden. — Das andere Problem: wie groß die minimale kinetische Energie der Elektronen, der Protonen oder der Neutronen sein müsse, damit sie in merklicher Menge die irdische Atmosphäre durchdringen können, scheint bis jetzt ebenfalls noch nicht wirklich befriedigend gelöst worden zu sein.

gen dieser beiden Punkte vom Zentrum C beträchtlich kleiner sind als der augenblickliche Radius des Universums R_t . Wir wissen schon (siehe oben S. 12), daß es dem Beobachter in A scheinen wird, daß sich der Punkt B (mit dem Partikelchen) von A entferne, wobei diese Geschwindigkeit gleich $AB \cdot a$ sei. Wenn diese Geschwindigkeit beträchtlich kleiner als die Lichtgeschwindigkeit ist, so wird die scheinbare kinetische Energie des Partikelchens gleich $\frac{1}{2} m (AB \cdot a)^2$ sein, wo m die Masse des Partikelchens bedeutet. Diese augenblickliche relative kinetische Energie muß gerade ausreichen, um das Partikelchen aus dem augenblicklichen Aufenthaltsort in unendliche Entfernung von dem Beobachter in A tragen zu können¹⁶⁾. Wir können ohne merklichen Fehler behaupten, daß auf das Partikelchen ausschließlich die Newtonsche Anziehungskraft einer Kugel vom Radius AB und von der Masse $\frac{4}{3} \pi (AB)^3 \rho$ wirke. Wenn sich nun infolge der fortschreitenden Expansion des Universums die Entfernung des Punktes B (mit dem Partikelchen) von A vergrößert, so bleibt trotzdem die auf das Partikelchen wirkende Masse unverändert. Diese Masse wird die ganze Zeit hindurch genau so wirken, als ob sie im Punkte A konzentriert wäre. Unter solchen Umständen ist die zur unendlich weiten Entfernung des Partikelchens notwendige Arbeit gleich

$$\frac{G \cdot \frac{4}{3} \pi (AB)^3 \rho \cdot m}{AB} = \frac{4 \pi G (AB)^2 \rho m}{3}.$$

¹⁶⁾ Dies ist freilich nur bei idealer Homogenität des Universums streng richtig. Sollte sich hingegen um den Punkt A eine zufällige Verdichtung ausgebildet haben, so reicht die relative kinetische Energie $\frac{1}{2} m (AB \cdot a)^2$ nicht mehr aus, um das Partikelchen B bis zur Unendlichkeit von A zu entfernen. Dehnt sich nun das ganze Universum bis zur Unendlichkeit aus, so werden auch die Entfernungen AC und BC unendlich, nicht aber die Entfernung AB , die in alle Ewigkeiten endlich bleiben muß. Nur wenn auch um einen anderen Punkt D eine Verdichtung entsteht, die auf das Partikelchen B stärker wirkt als die Verdichtung um A , kann die Entfernung AB unendlich werden. Dafür bleibt aber dann BD in alle Ewigkeiten endlich. In einem solchen Falle wird also das Partikelchen B nicht mehr dem System A angehören, sondern dem System D .

Diese Arbeit muß genau gleich der augenblicklichen kinetischen Energie des Partikelchens sein, es muß also die Gleichung

$$\frac{1}{2} m (AB \cdot a)^2 = \frac{4 \pi G (AB)^2 \rho m}{3}$$

bestehen, oder:

$$a^2 = \frac{8 \pi G \rho}{3} = \frac{8 \pi G}{c^2} \cdot \frac{\rho c^2}{3},$$

oder:

$$\boxed{a^2 = \frac{1}{3} \kappa \rho c^2.} \quad (21)$$

Vor etwa 5 Jahren haben Einstein und de Sitter diese Formel aus den Friedmanschen Gleichungen deduziert¹⁷⁾. Nun haben wir dieselbe Formel auf ganz elementare Weise aus unserer Expansionstheorie des Universums abgeleitet.

¹⁷⁾ A. Einstein und W. de Sitter, Proc. Nat. Acad. of Sciences (Washington) **18**, 213, 1932.