ÜBER DIE ANWENDBARKEIT VON SAHA'S IONISATIONSFORMEL BEI EXTREM HOHEN TEMPERATUREN

VON

WILHELM ANDERSON

TARTU 1937

K. Mattiesens Buchdruckerei Ant.-Ges., Tartu 1937.

Solange ein Gas nicht entartet ist und keine Druckionisation vorliegt, und solange die Geschwindigkeiten der Partikelchen keine relativistischen sind, kann der Ionisationsgrad x des Gases nach Saha's bekannter Formel:

$$\log_{10}\left(\frac{x^2}{1-x^2}P\right) = -\frac{5040\,\psi}{T} + \frac{5}{2}\log_{10} T - 6{,}18 \qquad (1)$$

berechnet werden, wo P den Druck (in Atmosphären) und ψ das Ionisationspotential (in Volt) bedeutet. Diese Formel ist nicht ganz genau; trotzdem wird allgemein angenommen, daß sie annähernd richtige Resultate in allen Fällen ergebe, wo die obenerwähnten Bedingungen erfüllt sind. Ist aber eine solche Ansicht auch richtig, und wird nicht Saha's Formel selbst bei Abwesenheit von Entartung und von relativistischen Geschwindigkeiten in gewissen Fällen zu gröblich falschen Resultaten führen? — Der Untersuchung dieser Frage ist die vorliegende Schrift gewidmet.

Um ein nichtangeregtes Wasserstoffatom zu ionisieren, ist es notwendig, ihm eine Energiemenge von 13,53 e-Volt zuzuführen. Dadurch wird das Elektron von der tiefsten Quantenbahn in unendliche Entfernung übergeführt. Wenn umgekehrt das Elektron aus unendlicher Entfernung auf die tiefste Quantenbahn hinabfällt, werden 13,53 e-Volt ausgestrahlt. Eine solche Energiemenge wird ausgestrahlt, wenn die kinetische Energie des Elektrons in unendlicher Entfernung gleich Null gewesen ist. Sollte aber diese anfängliche kinetische Energie beispielsweise 8 e-Volt betragen haben, so ist die ausgestrahlte Energiemenge gleich $13{,}53 + 8 = 21{,}53$ e-Volt. Denn wäre sie bloß gleich den „normalen" 13,53 e-Volt, so müßte das Elektron auf der tiefsten Quantenbahn eine überschüssige kinetische Energie von 8 e-Volt beibehalten. Diese überschüssige Energie ist jedoch unzureichend, um das Elektron wieder in unendliche Entfernung zu bringen. Diese

8 e-Volt reichen nicht einmal aus, um das Elektron von der Grundbahn auf die nächste Quantenbahn zu heben (denn dazu wären 10,15 e-Volt nötig). Der einzige Ausweg aus der Schwierigkeit besteht darin, daß die überschüssigen 8 e-Volt zusammen mit den „normalen“ 13,53 e-Volt ausgestrahlt werden, so daß die gesamte ausgestrahlte Energie 21,53 e-Volt beträgt

Nehmen wir aber jetzt an, daß die kinetische Anfangsenergie des Elektrons 15 e-Volt betrage (also mehr als 13,53). Auch in einem solchen Falle wäre es denkbar, daß das Elektron unter Ausstrahlung von $13{,}53 + 15 = 28{,}53$ e-Volt auf der tiefsten Quantenbahn eingefangen wird. Es wäre aber auch denkbar, daß das Elektron beim Hinabfallen auf die tiefste Quantenbahn nur die „normalen“ 13,53 e-Volt ausstrahlt, so daß es eine überschüssige Energie von 15 e-Volt beibehält. Von letzterer verbraucht das Elektron 13,53 e-Volt, um sich wieder in unendliche Entfernung zu begeben. Dort wäre die kinetische Energie des Elektrons gleich $15 - 13{,}53 = 1{,}47$ e-Volt. Die anfänglichen 15 e-Volt kinetischer Energie hätten sich auf solche Weise in 13,53 e-Volt strahlender und 1,47 e-Volt kinetischer Energie verwandelt. Welchen von diesen beiden Wegen wird nun das Elektron in Wirklichkeit einschlagen? — Um diese Frage zu beantworten, wollen wir untersuchen, wie sich in einem analogen Falle das klassisch strahlende Elektron verhalten würde.

Wenn ein Elnktron mit sehr großer Anfangsgeschwindigkeit v_a neben einem Atomkern vorbeifliegt, so beschreibt es annähernd eine Hyperbel. Die Geschwindigkeit des Elektrons bleibt nicht konstant, sondern erreicht ihren maximalen Wert v_p im „Perihel“. Doch diese Geschwindigkeitsänderung ist bei großen Anfangsgeschwindigkeiten relativ gering (d. h. $\frac{v_p - v_a}{v_a}$ ist ein kleiner Bruch), so daß man die durchschnittliche Geschwindigkeit v ohne großen Fehler gleich v_p oder auch gleich v_a setzen kann. Die gesamte nach der klassischen Theorie ausgestrahlte Energiemenge ist dann gleich

$$Q = \frac{2\pi Z^4 e^{10}}{c^3 m^4 \sigma^5 v^5}, \tag{2}$$

wo Z die Ordnungszahl des Atomkerns bedeutet, σ das aus dem Brennpunkt auf die Asymptote gefällte Lot, m die Masse des Elektrons, e seine Ladung, und c die Lichtgeschwindigkeit[1]). Je kleiner v ist, desto mehr strahlt das Elektron aus. Bei genügend kleiner Anfangsgeschwindigkeit wird der Energieverlust durch Ausstrahlung so groß sein, daß die kinetische Energie $\frac{1}{2} m v_p^2$ im „Perihel" nicht mehr ausreicht, um das Elektron wieder in unendliche Entfernung zu bringen. Das Elektron wird daher „eingefangen". Es muß also (bei gegebenem σ) eine bestimmte „kritische" Anfangsgeschwindigkeit existieren, unterhalb deren das Elektron eingefangen wird, oberhalb aber nicht. In ganz roher Annäherung könnte man mit Eddington[2]) annehmen, daß die kritische Geschwindigkeit v der Gleichung

$$\frac{1}{2} m v^2 = \frac{2 \pi Z^4 e^{10}}{c^3 m^4 \sigma^5 v^5} \tag{3}$$

entspreche. Dies wäre aber aus verschiedenen Gründen eine äußerst ungenaue Methode, so daß wir auf sie verzichten.

Wenn die (auf eine unendliche Entfernung bezogene) Anfangsgeschwindigkeit des Elektrons unendlich klein ist, und wenn das Elektron nicht die Fähigkeit hätte auszustrahlen, so müßte es um den Kern eine Parabel beschreiben. Die kinetische Energie im „Perihel" würde genau ausreichen, um das Elektron wieder in unendliche Entfernung zu bringen. Nach der klassischen Theorie jedoch verliert ein beschleunigtes Elektron Energie durch Ausstrahlung, weshalb in unserem Falle die kinetische Energie im „Perihel" unzureichend wird, um das Elektron wieder in unendliche Entfernung zu bringen. Statt ganz wegzufliegen, beginnt das Elektron um den Kern zu rotieren. Diese Bewegung ist aber nach der klassischen Theorie ebenfalls von Energieverlust durch Ausstrahlung begleitet. Das Elektron wird sich daher mehr und mehr dem Kern nähern, es wird also in Orte mit immer tieferem und tieferem elektrischem Potential gelangen, bis es schließlich auf das denkbar tiefste Potential hinabgesunken ist (das wir durch $-\psi$ Volt bezeichnen wollen) und dort zur Ruhe kommt (denn ein ewiges Rotieren um den Kern läßt die klassische Theorie selbst-

[1]) Vgl. A. S. Eddington, Der innere Aufbau der Sterne, Berlin 1928, S. 279.

[2]) A. S. Eddington, ebenda.

verständlich nicht zu). Die gesamte ausgestrahlte Energie beträgt ψ e-Volt oder $\frac{\psi e}{300}$ Erg.

Ist die Anfangsgeschwindigkeit v_a von Null verschieden, jedoch kleiner als die „kritische“, so wird das Elektron ebenfalls eingefangen, wobei aber der Prozeß des Einfangens länger dauern wird. Die gesamte dabei ausgestrahlte Energiemenge beträgt jetzt $\frac{1}{2} m v_a^2 + \frac{\psi e}{300}$, sie ist also größer als früher. (Doch die Ausstrahlung pro Zeiteinheit ist jetzt geringer als früher.) Je größer die Anfangsgeschwindigkeit ist, desto größer ist die gesamte ausgestrahlte Energiemenge. Diese Regel gilt aber nur unterhalb der „kritischen“ Anfangsgeschwindigkeit. Ein Elektron mit „kritischer“ Anfangsgeschwindigkeit wird nicht eingefangen, sondern fliegt weg in unendliche Entfernung, wo es zur Ruhe kommt. Dies bedeutet, daß im Falle der „kritischen“ Anfangsgeschwindigkeit das Elektron dort zur Ruhe kommt, wo das elektrische Potential gleich Null ist; bei nur etwas kleinerer Anfangsgeschwindigkeit aber dort, wo das Potential den denkbar tiefsten Wert $-\psi$ besitzt.

Ist die Anfangsgeschwindigkeit kleiner als die „kritische“, so beginnt der Prozeß mit einer kinetischen Energie gleich $\frac{1}{2} m v_a^2$ und einer potentiellen gleich Null, so daß die anfängliche Gesamtenergie gleich $\frac{1}{2} m v_a^2 + 0 = \frac{1}{2} m v_a^2$ ist. Am Ende des Prozesses ist die kinetische Energie gleich Null und die potentielle gleich $-\frac{\psi e}{300}$, so daß die gesamte Energie gleich $0 + \left(-\frac{\psi e}{300}\right) = -\frac{\psi e}{300}$ ist. Die ausgestrahlte Energiemenge ist gleich der Energiedifferenz am Anfang und am Ende des Prozesses, d. h. gleich $\frac{1}{2} m v_a^2 - \left(-\frac{\psi e}{300}\right) = \frac{1}{2} m v_a^2 + \frac{\psi e}{300}$.

Wollen wir jetzt aber annehmen, daß die Anfangsgeschwindigkeit v_a gleich der kritischen ist. Der Prozeß beginnt mit einer kinetischen Energie gleich $\frac{1}{2} m v_a^2$ und einer potentiellen gleich Null, also mit einer Gesamtenergie gleich $\frac{1}{2} m v_a^2$. Der

Prozeß endet mit einer kinetischen Energie gleich Null und einer potentiellen gleich Null, also mit einer Gesamtenergie ebenfalls gleich Null. Die ausgestrahlte Energiemenge ist gleich der Energiedifferenz am Anfang und am Ende des Prozesses, d. h. gleich $\frac{1}{2} mv_a^2 - 0 = \frac{1}{2} mv_a^2$. Dicht unterhalb der „kritischen" Anfangsgeschwindigkeit ist aber die ausgestrahlte Energiemenge gleich $\frac{1}{2} mv_a^2 + \frac{\psi e}{300}$. Daraus folgt, daß wenn die Anfangsgeschwindigkeit den „kritischen" Wert überschreitet, die ausgestrahlte Energiemenge sich sprungweise um $\frac{\psi e}{300}$ Erg verringert. Beim weiteren Steigen der Anfangsgeschwindigkeit wird nach (2) die ausgestrahlte Energiemenge weiter abnehmen, jedoch kontinuierlich.

Wir können erwarten, daß die wirklichen Elektronen sich in dieser Hinsicht bis zu einem gewissen Grade ähnlich den „klassischen" verhalten. Danach muß es eine gewisse „kritische" Anfangsgeschwindigkeit (und also auch eine „kritische" Anfangsenergie) geben, bei deren Überschreitung die (wirklichen) Elektronen von den Atomkernen (oder von den Atomionen) nicht mehr eingefangen werden können.

Fällt ein (wirkliches) Elektron mit der anfänglichen kinetischen Energie gleich Null auf die tiefste Quantenbahn so strahlt es $\frac{\psi e}{300}$ Erg aus, wo ψ das Ionisationspotential bedeutet. Ist hingegen die anfängliche kinetische Energie des Elektrons von Null verschieden und genügt sie der Bedingung $\frac{1}{2} mv_a^2 < \frac{\psi e}{300}$, so wird die ausgestrahlte Energiemenge $\frac{1}{2} mv_a^2 + \frac{\psi e}{300}$ betragen. Unser Elektron muß auf solche Weise eingefangen werden, weil nach „normaler" Ausstrahlung von $\frac{\psi e}{300}$ Erg die überschüssige Energie auf der tiefsten Quantenbahn ungenügend ist, um das Elektron wieder in unendliche Entfernung zu bringen. Deshalb muß $\frac{1}{2} mv_a^2$ zusammen mit $\frac{\psi e}{300}$ ausgestrahlt werden.

Ist aber $\frac{1}{2} m v_a^2 = \frac{\psi e}{300}$, so besitzt das Elektron (nach normaler Ausstrahlung von $\frac{\psi e}{300}$ Erg) auf der tiefsten Quantenbahn eine überschüssige Energie von $\frac{\psi e}{300}$ Erg, die genau dazu ausreicht, um das Elektron wieder in unendliche Entfernung zu bringen. Da das Elektron jetzt imstande ist in die Unendlichkeit wegzufliegen, wird es auch tatsächlich wegfliegen (genau so, wie ein klassisch strahlendes Elektron, welches im „Perihel" noch genug kinetische Energie besitzt, um in unendliche Entfernung zu fliegen, auch tatsächlich wegfliegt; keinesfalls wird ein solches Elektron seine überschüssige kinetische Energie dazu benutzen, um sie restlos in strahlende Energie zu verwandeln!). Auf diese Weise wird das Elektron nur die „normalen" $\frac{\psi e}{300}$ Erg ausstrahlen. Dicht unterhalb der „kritischen" Anfangsenergie (die gleich $\frac{1}{2} m v_a^2 = \frac{\psi e}{300}$ zu setzen ist) wird das Elektron eingefangen, wobei $\frac{1}{2} m v_a^2 + \frac{\psi e}{300} = \frac{\psi e}{300} + \frac{\psi e}{300} = \frac{2\,\psi e}{300}$ Erg ausgestrahlt wird. Daraus folgt, daß wenn die Anfangsenergie (und also auch die Anfangsgeschwindigkeit) den „kritischen" Wert überschreitet, die ausgestrahlte Energiemenge sich sprungweise um $\frac{\psi e}{300}$ Erg verringert. Dies ist genau dieselbe Regel wie im „klassischen" Falle (s. oben). Doch im letzteren Falle nimmt die ausgestrahlte Energiemenge bei weiter steigender Anfangsgeschwindigkeit kontinuierlich ab. Dies könnte man quantentheoretisch vielleicht so deuten, daß bei sehr großer Geschwindigkeit des Elektrons die ausgestrahlte Energie nicht Zeit hat sich genügend zu entfernen und deshalb von dem fortfliegenden Elektron teilweise wieder absorbiert wird. Auf diese Weise gelangt ein entsprechend weniger energiereiches Quantum $h\nu$ zur endgültigen Ausstrahlung.

Die durchschnittliche kinetische Energie nichtentarteter freier Elektronen ist gleich $\frac{3}{2} kT$, wenn die Geschwindigkeiten keine relativistischen sind, und gleich $3\,kT$ bei relativistischen Geschwindigkeiten[3]). Soll nun (im nichtrelativistischen Falle) $\frac{3}{2}kT$ gleich der „kritischen" Anfangsenergie sein, so muß die Gleichung

$$\frac{3}{2}kT = \frac{1}{2}mv_a^2 = \frac{\psi e}{300}$$

erfüllt sein. Daraus läßt sich die entsprechende „kritische" Ionisationstemperatur zu

$$T = \frac{\psi e}{450\,k} \tag{4}$$

berechnen. Im relativistischen Falle haben wir:

$$3\,kT = \frac{\psi e}{300}$$

und

$$T = \frac{\psi e}{900\,k}. \tag{5}$$

Setzt man $e = 4{,}77.10^{-10}$ und $k = 1{,}372.10^{-16}$, so erhält man aus (4) und (5):

$$T = 7{,}726.10^3\,\psi \text{ [nichtrelativistisch]}, \tag{6}$$

$$T = 3{,}863.10^3\,\psi \text{ [relativistisch]}. \tag{7}$$

Saha's Formel (1) basiert auf der Annahme eines reversiblen Prozesses:

Neutrales Atom $\rightleftarrows$ Ion + Elektron — Bindungsenergie,

wobei stillschweigend vorausgesetzt wird, daß die Begegnung eines Ions mit einem Elektron unter Ausstrahlung der Bindungsenergie gleichbedeutend sei mit der Entstehung eines neutralen Atoms. In Wirklichkeit aber ist diese stillschweigende Voraussetzung nur unterhalb der „kritischen"

[3]) Vgl. W. Anderson, „Existiert eine obere Grenze für die Dichte der Materie und der Energie?", Acta et Comm. Universitatis Tartuensis (Dorpatensis) A XXIX$_9$, Tartu 1936, S. 90.

Ionisationstemperatur zutreffend[4]), oberhalb hingegen verläuft jede Begegnung eines Ions mit einem Elektron ohne daß letzteres vom ersteren eingefangen werde, selbst wenn bei der Begegnung die Bindungsenergie ausgestrahlt wird. Es ist daher klar, daß Saha's Formel nur unterhalb der „kritischen" Ionisationstemperatur angewendet werden darf.

Die „kritische" Ionisationstemperatur des Wasserstoffs ist nach (6) gleich

$$T = 7{,}726 . 10^3 . 13{,}53 = 105000^0 \text{ (rund gerechnet).}$$

Unterhalb dieser Temperatur kann der Ionisationsgrad x durch genügenden Druck beliebig herabgesetzt werden, entsprechend Saha's Formel. Oberhalb von 105000^0 hingegen bleibt Wasserstoff unter jedem beliebigen Druck völlig ionisiert. Man könnte bildlich sagen, daß bei 105000^0 die Elektronengeschwindigkeiten einen „parabolischen" Charakter haben; bei noch höherer Temperaturen — einen „hyperbolischen". Dieser Charakter hängt ausschließlich von ψ und von der kinetischen Energie, d. h. von der Temperatur ab, und keinesfalls vom Drucke (solange wenigstens keine Druckionisation eingetreten ist). Unterhalb von 105000^0 ist das Einfangen von Elektronen prinzipiell möglich, doch seine Häufigkeit hängt von der Häufigkeit günstiger Begegnungen, d. h. von der Dichte und also auch vom Drucke, ab. Oberhalb von 105000^0 hingegen kann die Häufigkeit der Begegnungen so groß sein, wie sie will: alle müssen „ungünstig" verlaufen wegen des „hyperbolischen" Charakters der Elektronengeschwindigkeiten, wodurch das Einfangen zu einer prinzipiellen Unmöglichkeit wird. Bei der Ableitung von Saha's Formel ist nur der (vom Drucke abhängige) „Häufigkeitsfaktor" der günstigen Begegnungen in Betracht gezogen worden, keinesfalls aber der andere (vom Drucke unabhängige) Faktor, der den Elektronengeschwindigkeiten einen „hyperbolischen" Charakter mitteilt, sobald die Temperatur eine bestimmte Höhe überschreitet. Es ist daher klar, daß Saha's Formel nur unterhalb der „kritischen" Ionisationstemperatur angewendet werden darf. In der beigefügten Tabelle sind einige „kritische" Ionisationstemperaturen zusammengestellt.

[4]) Zusammen mit der Bindungsenergie wird in diesem Falle zwangsweise auch die kinetische Anfangsenergie des Elektrons ausgestrahlt.

	Ionisations-potential	„Kritische" Ionisations-temperatur
$Cs \rightleftarrows Cs_{+}$ + Elektron	3,87 Volt	29900°
$Ca \rightleftarrows Ca_{+}$ + Elektron	6,09 „	47100
$Ca_{+} \rightleftarrows Ca_{++}$ + Elektron	11,82 „	91300
H $\rightleftarrows$ Proton + Elektron	13,53 „	105000
$He \rightleftarrows He_{+}$ + Elektron	24,47 „	189000
$He_{+} \rightleftarrows$ Heliumkern + Elektron	54,14 „	418000
25-faches Eisenion $\rightleftarrows$ Eisenkern + Elektron	9150 „	$7{,}07.10^7$
Proton $\rightleftarrows$ Neutron + Positron	$1{,}53.10^6$ „	$5{,}9.10^9$

Es wird heute ziemlich allgemein angenommen, daß das Proton aus einem Neutron und einem Positron besteht. Es wäre jedoch aus verschiedenen Gründen sehr schwierig, eine Protonenzertrümmerung experimentell nachzuweisen [5]. Den Massendefekt können wir rund gerechnet gleich der 3-fachen Elektronenmasse setzen, was eine Bindungsenergie von $3.9.10^{-28}.9.10^{20} = 2{,}43.10^{-6}$ Erg $= 1{,}53.10^6$ e-Volt repräsentiert. Die „kritische" Ionisationstemperatur muß nach (7) berechnet werden, da in unserem Falle die Geschwindigkeiten der Positronen bereits relativistisch sind. Wir erhalten $5{,}9.10^9$, oder rund gerechnet 6 Milliarden Grad. [Die Formel (6) würde den doppelten Wert ergeben.] Dies bedeutet, daß bei einer Temperatur von über 6 Milliarden Grad die Neutronen und Positronen sich unter keinem Druck zu Protonen vereinigen können. Ohne Protonen können aber die Atomkerne nicht aufgebaut werden. Daraus folgt, daß bei 6 Milliarden (oder mehr) Grad nur freie Neutronen, Positronen (und Elektronen) existieren können. Bei dieser Temperatur kann die Entstehung von Atomkernen durch keinen Druck erzwungen werden.

Wenn keine „kritische" Ionisationstemperatur existieren würde, müßte Saha's Formel (1) in allen nichtentarteten und

[5]) Vgl. W. Anderson, l. c. S. 66 ff.

nichtrelativistischen Fällen anwendbar sein, also auch bei $\psi = 0$ und $T > 0$. In einem solchen Falle hätten wir:

$$\log_{10}\left(\frac{x^2}{1-x^2}P\right) = \frac{5}{2}\log_{10} T - 6{,}18,$$

also

$$0 < x < 1$$

bei jedem endlichen P. Dies würde bedeuten, daß bei $\psi = 0$ d. h. bei Abwesenheit jeder Bindekraft, ein Teil der Elektronen trotzdem gebunden und die Ionisation unvollständig bliebe. Ein solches Resultat ist offenbar absurd, und es hat seine Ursache darin, daß wir die Existenz der „kritischen" Ionisationstemperatur nicht in Betracht gezogen haben. Nach (6) ist bei $\psi = 0$ die „kritische" Ionisationstemperatur gleich

$$T = 7{,}726 \,.\, 10^3 \,\psi = 0.$$

Nun kann aber Saha's Formel (1) nur unterhalb der „kritischen" Ionisationstemperatur angewendet werden, also in unserem Falle nur unterhalb 0^0 abs. Eine solche Temperatur ist jedoch physisch unmöglich. Daraus folgt, daß bei $\psi = 0$ Saha's Formel überhaupt nicht angewendet werden darf. Wendet man sie aber trotzdem bei genau $T = 0$ an, so erhält man:

$$\log_{10}\left(\frac{x^2}{1-x^2}P\right) = -\frac{5040 \,.\, 0}{0} + \frac{5}{2}\log_{10} 0 - 6{,}18 = -\infty,$$

also:

$$\frac{x^2}{1-x^2}P = 0.$$

Saha's Formel bezieht sich nur auf ideale Gase, bei denen bei $T = 0$ auch $P = 0$ sein muß. Wir erhalten also:

$$\frac{x^2}{1-x^2} = \frac{0}{P} = \frac{0}{0}.$$

Dies bedeutet, daß x unbestimmt bleibt.

Wir haben die „kritische" Ionisationstemperatur so abgeleitet, als ob bei T die kinetische Energie eines jeden einzelnen Elektrons $\frac{3}{2}kT$ betrüge. In Wirklichkeit stellt $\frac{3}{2}kT$ bloß die durchschnittliche kinetische Energie dar. Deshalb wird die „kritische" Ionisationstemperatur in Wirklichkeit keinen absolut scharfen Temperaturpunkt darstellen, sondern wird mehr oder weniger „verwaschen" erscheinen: ganz so, wie auch die kritische Siedetemperatur einer Flüssigkeit nach genauen Messungen keinen absolut scharfen Temperaturpunkt darstellt, sondern mehr oder weniger „verwaschen" erscheint. „Ohne in die Erscheinungen in der Nähe des kritischen Zustandes tiefer eingedrungen zu sein, sieht man die kritische Isotherme vielfach als die Grenze an, oberhalb welcher der Stoff sich bereits im gasförmigen Zustande befinden soll, obgleich jedes Isothermennetz deutlich erkennen läßt, daß es ein Zwischengebiet gibt, wo die Materie weder gasförmig noch flüssig ist, sondern vielmehr beiden Zuständen zugleich angehört, und zwar noch viele Grade oberhalb der kritischen Temperatur" [6]. „Unzweifelhaft besteht die flüssige Phase fein verteilt noch oberhalb des kritischen Zustandes fort, wie dieses aus der Färbung des Rohrinhalts in der Durchsicht . . . hervorgeht" [7].

Vom Standpunkt der Quantentheorie besteht für jedes Elektron eines ionisierten Gases eine bestimmte Wahrscheinlichkeit, im Verlaufe einer bestimmten Zeit von einem Ion eingefangen zu werden; es sei ω diese Wahrscheinlichkeit. Das Elektron wird nur dann eingefangen, wenn folgende zwei Ereignisse zusammentreffen: 1) das Elektron fällt auf die tiefste Quantenbahn [8] und 2) es besitzt auf dieser Quantenbahn eine ungenügende überschüssige Energie, um wieder in die Unendlichkeit zu fliegen (die gesamte überschüssige Energie muß daher zusammen mit der Bindungsenergie ausgestrahlt werden). Die Wahrscheinlichkeit des ersteren Ereignisses bezeichnen wir

---

[6] J. Wilip, „Experimentelle Studien über die Bestimmung von Isothermen und kritischen Konstanten", Acta et Comm. Universitatis Tartuensis (Dorpatensis) A VI$_2$, Tartu 1924, S. 4.

[7] Ebenda, S. 73.

[8] Der Einfachheit halber ignorieren wir die Existenz höherer Quantenbahnen, genau so, wie auch Saha sie ignoriert hat bei der Ableitung seiner Formel.

durch ω_1, diejenige des letzteren durch ω_2. Dann ist die Wahrscheinlichkeit des Einfangens gleich

$$\omega = \omega_1 \omega_2.$$

ω_1 kann sehr verschiedene Werte haben[9]), ω_2 hingegen nur zwei: 1 oder 0. Ist die Anfangsgeschwindigkeit kleiner als die „kritische", so ist die überschüssige Energie des Elektrons auf der tiefsten Quantenbahn nicht nur wahrscheinlich, sondern sicherlich ungenügend, um das Elektron wieder in unendliche Entfernung zu bringen. Wir haben also in diesem Falle $\omega_2 = 1$ zu setzen. Ist hingegen die Anfangsgeschwindigkeit größer als die „kritische", so fliegt das Elektron sicherlich weg. In diesem Falle haben wir $\omega_2 = 0$ zu setzen. Unterhalb der „kritischen" Anfangsgeschwindigkeit ist also die Wahrscheinlichkeit des Einfangens gleich

$$\omega = \omega_1 \omega_2 = \omega_1 . 1 = \omega_1 ;$$

oberhalb der „kritischen" Anfangsgeschwindigkeit hingegen gleich

$$\omega = \omega_1 \omega_2 = \omega_1 . 0 = 0.$$

Bei der Ableitung von Saha's Formel wird stillschweigend ω mit ω_1 identifiziert, was in Wirklichkeit aber nur unterhalb der „kritischen" Anfangsgeschwindigkeit der Elektronen zulässig ist.

Wenn die Anfangsgeschwindigkeit des Elektrons[10]) den „kritischen" Wert überschreitet, so fällt die Wahrscheinlichkeit des Einfangens dieses Elektrons sprungweise auf Null.

---

[9]) ω_1 hängt unter anderem von der Dichte des Gases, also auch vom Drucke ab.

[10]) Die (verhältnismäßig kleinen) Geschwindigkeiten der Ionen wollen wir der Einfachheit halber vernachlässigen.

Zusatznote.

Der Verfasser, Dr. phil. nat. Wilhelm Anderson, ist durch eine plötzlich eingetretene schwere Erkrankung zur Zeit verhindert, eine beabsichtigte Ergänzung zu der vorliegenden Arbeit [Acta et Comm. Univ. Tart. (Dorp.) A XXXIII.$_7$ = Publ. de l'Obs. Astr. de l'Univ. de Tartu 30.$_2$] druckfertig zu machen. Es handelt sich dabei hauptsächlich um den auf S. 9 der Arbeit eingeführten und weiterhin angewandten Begriff einer „kritischen" Ionisationstemperatur. Falls nämlich die vom Verfasser abgeleitete kritische oder maximale Geschwindigkeit für die Wiedervereinigung als richtig zu betrachten ist, folgt daraus, daß es eine im strengen Sinne kritische Temperatur nicht geben kann, da infolge der Maxwellschen Geschwindigkeitsverteilung ein gewisser Bruchteil der Geschwindigkeiten unterhalb des kritischen Wertes fallen muß. Die Wiedervereinigung ist bei hohen Temperaturen also wohl behindert, nicht aber ausgeschlossen.

Der Direktor der Sternwarte Tartu.