

**EXISTIERT EINE OBERE GRENZE FÜR
DIE DICHTEN DER MATERIE UND DER
ENERGIE ?**

VON

WILHELM ANDERSON

TARTU 1936

I. TEIL.

Die prinzipielle Seite der vorliegenden Frage.

Literatur über die vorliegende Frage.

Noch vor 15 Jahren schien die Antwort auf diese Frage sehr einfach zu lauten: die Kompression eines jeden Körpers sei gleichbedeutend mit einem Aneinanderschieben seiner Moleküle (resp. Atome). Ein solches Aneinanderschieben könne aber nur bis zur gegenseitigen Berührung der Moleküle ausgeführt werden; jeder weiteren Kompression müsse der Körper einen unendlich großen Widerstand entgegensetzen, da ja die Moleküle „selbstverständlich“ inkompressibel seien. Übrigens wurde eine gewisse Kompressibilität der Moleküle dennoch für möglich gehalten; diese sei aber so gering, daß selbst bei $p = \infty$ das Volumen des Moleküls nur etwas kleiner als bei $p = 0$ sei. Noch im Jahre 1924 sagte J. J. van Laar über die Amagatschen Versuche mit Wasserstoff: „Wie man sieht, ist sogar bei fast 3000 Atm. das Volum noch 1.7 mal größer als das kleinste Volum (etwa $600 \cdot 10^{-6}$), welches erst bei $p = \infty$ erreicht werden kann“¹⁾. An einer anderen Stelle sagt er: „... demnach wird nur bei hohen Temperaturen vielleicht eine gewisse Volumverkleinerung der Moleküle merkbar sein“²⁾.

Es ist auffallend, daß selbst die Bohrsche Theorie den Glauben an die Inkompressibilität der Atome nicht erschüttern konnte. Nach dieser Theorie ist nur ein verschwindend kleiner Teil des Atomvolums tatsächlich von Materie eingenommen (nämlich vom Kern und von den Elektronen); alles übrige ist leerer Raum. Trotzdem wurde geglaubt, daß dieser beinahe leere Raum sogar einem unendlich großen Druck widerstehen könne. Etwa 3 Jahre nach Aufstellung der Bohrschen Theorie

1) J. J. van Laar, Die Zustandsgleichung von Gasen und Flüssigkeiten, S. 16, Leipzig 1924.

2) Ebenda, S. 70.

äußerte Eddington die Meinung, daß $\rho = 1,5$ als maximale mögliche Dichte der Sonnengase betrachtet werden kann¹⁾.

Inzwischen gewann die Meinung Oberhand, daß im Innern der Sterne die Gase stark ionisiert sein müssen. Es ist erstaunlich, daß selbst diese Meinung den Glauben an die Inkompressibilität der Atome noch nicht erschütterte, wenigstens vorläufig nicht. Die einzige Konsequenz, die man sich aus der Ionisationstheorie zu ziehen getraute, bestand nur in der Herabsetzung des mittleren Molekulargewichts der Sternngase. Im Jahre 1921 schreibt Eddington: „Meine ersten Rechnungen in dieser Theorie wurden unter der Annahme $m = 54$ ausgeführt (entsprechend dem Molekulargewicht des einatomigen Eisendampfes). Ich wurde jedoch von Newall, Jeans und Lindemann unabhängig darauf hingewiesen, daß aller Voraussicht nach bei den hohen Temperaturen im Innern der Sterne eine starke Ionisation stattgefunden hat, indem zahlreiche Elektronen vom Atom abgesprungen sind, und da diese alle als unabhängige Moleküle bei der Berechnung des mittleren Molekulargewichts zu rechnen sind, so wurde dieses stark herabgesetzt. Besonders Mr. Jeans hat mich davon überzeugt, daß dies wahrscheinlich ist“²⁾. Dies alles hat jedoch Eddington nicht verhindert, am Schlusse desselben Aufsatzes zu schreiben: „Maximale Kompressibilität der Materie: $\rho_0 = 4,0$ für $m = 2,8$; $\rho_0 = 3,3$ für $m = 4$ “³⁾. Erst etwa 3 Jahre später ändert Eddington seine Meinung: „It appears that in the interior of a star the atoms of moderate atomic weight are stripped down to the K level, and have radii of the order of 10^{-10} cm . . . The maximum density, corresponding to contact of these reduced atomic spheres must be at least 100,000, and any star with mean density below 1000 ought to behave as a perfect gas“⁴⁾. Weiter glaubt Eddington seine neuen Ansichten gegen einen möglichen Einwand verteidigen zu müssen, der vom heutigen Standpunkt sehr naiv erscheinen würde: „It may be asked: Does the removal of outer electrons necessarily reduce the effective size of the atom? Perhaps it is only the boundary stone, not the

1) A. S. Eddington, Monthly Notices Roy. Astron. Soc. **77**, 32, 1916.

2) A. S. Eddington, ZS. f. Phys. **7**, 370, 1921.

3) Ebenda, S. 397.

4) A. S. Eddington, Monthly Notices Roy. Astron. Soc. **84**, 320, 1924.

boundary, that disappears. The answer seems to be given clearly by physical experiments. An α particle is a helium atom which has lost its "boundary stones", and it appears that it thereby loses its former boundary. It can now enter other atoms, and behaves in every way as a simple charged nucleus with no trace of that resisting boundary which prevents neutral helium gas from being compressed beyond a certain density. It seems clear that the effective size of the atom is determined by the existing peripheral electrons — as we should expect theoretically". — Wenn wir das hier Gesagte erwägen, kommen wir zu dem Schlusse, daß Eddington sich immer noch nicht getraut den letzten Schritt zu tun. Er gibt zwar zu, daß durch genügenden Druck sehr hohe Dichten erzielt werden können, aber dazu müssen vorher die Peripherieelektronen von ihren normalen Plätzen entfernt werden. Ohne dies könne das Atomgerüst selbst bei $p = \infty$ nicht zusammenbrechen. Keine Temperaturionisation — keine Kompressibilität! Solche Ansichten brachten Eddington bald vor ein schwieriges Problem. Nehmen wir an, daß ein heißer Stern mit genügender Gasionisation ein sehr kleines Volumen, also eine sehr hohe Dichte erreicht hat. Was wird nun geschehen, wenn er im Verlaufe der Zeit einmal abkühlt, wenn also die Temperaturionisation aufhört? — Ein kalter Stern von extrem hoher Dichte ist nach Eddington unmöglich. Der Stern müßte sich beim Kaltwerden sehr stark ausdehnen, wobei eine ungeheure Arbeit gegen die Gravitationskräfte zu leisten wäre. Die dazu notwendige Energiemenge kann aber der Stern von nirgends erhalten. Was wird also geschehen? — Eddington entschließt sich zu einer geradezu verzweifelten Lösung: „The star will need energy in order to cool“¹⁾).

Nach Bridgman²⁾ kann ein Gas auch bei niedriger Temperatur durch genügenden Druck ionisiert werden. Das Quantengerüst der Atome leistet einen zwar großen, aber dennoch endlichen Widerstand gegen äußeren Druck; im Innern der Sterne kann es daher zusammenbrechen.

Fowler entwickelt in seinem Aufsatz: „On Dense Matter“³⁾

1) A. S. Eddington, *The Internal Constitution of the Stars*, Cambridge 1926, S. 172.

2) P. W. Bridgman, *Phys. Rev.* (2) **29**, 188, 1927.

3) R. H. Fowler, *Monthly Not. Roy. Astron. Soc.* **87**, 114, 1926.

den Gedanken einer „Entartung“ des Elektronengases im Innern der Sterne. Sogar beim absoluten Nullpunkt besitzen die Elektronen hohe Geschwindigkeiten, als ob der Stern ein einziges Riesenmolekel darstellte. Über die obere Grenze der Dichte äußert sich Fowler folgendermaßen: „The density of such ‘energetic’ matter is the only limited *a priori* by the ‘sizes’ of electrons and atomic nuclei. The ‘volumes’ of these are perhaps 10^{-14} of the volume of the corresponding atoms, so that densities up to 10^{14} times that of terrestrial materials may not be impossible. Since the greatest stellar densities are of an altogether lower order of magnitude, the limitations imposed by the ‘sizes’ of the nuclei and electrons can be ignored in discussion of stellar densities”.

Fowler war nicht der erste, der den Elektronen eine Nullpunktsenergie zuschrieb. Im Jahre 1924 hat Frenkel eine Metalltheorie entwickelt, wo es u. a. heißt: „In solcher Weise werden die Valenzelektronen „freie“ Elektronen... Man muß beachten, daß sie nicht „frei“ im eigentlichen Sinne werden... Aber sie werden von der Alleinherrschaft bestimmter Atome emanzipiert; sie gehören nicht mehr den individuellen Atomen an, sondern dem von diesen gebildeten Kollektiv“¹⁾. Und an einer weiteren Stelle: „Beim absoluten Nullpunkt muß jedes Valenzelektron sich auf einer bestimmten, regulären, das ganze Metall durchdringenden Quantenbahn bewegen“²⁾.

Heutzutage zweifelt niemand mehr daran, daß bei genügend hohem Druck die Struktur der Atome zusammenbricht. Uns interessiert jedoch die Frage, bis zu welcher maximalen Dichte die zusammengebrochenen Atomtrümmer komprimiert werden können, und ob eine solche endliche maximale Dichte überhaupt existiert. Oben haben wir gesehen, daß nach Fowler eine solche Dichte von der Größenordnung 10^{14} sein müßte. Die Kompression kann nach Fowler so lange fortgesetzt werden, bis die Kerne und die Elektronen einander berühren. Die Kerne und die Elektronen selbst hält Fowler offenbar für absolut inkompressibel, ohne jedoch eine solche Ansicht klar auszusprechen und zu begründen.

Chandrasekhar sagt: „Now ρ_{max} must at lowest estimate

1) J. Frenkel, ZS. f. Phys. **29**, 218 f., 1924.

2) Ebenda, S. 230.

be of the order of 10^{12} grams cm^{-3} "1). Weiter zitiert er Fowlers oben erwähnte Meinung.

Milne sagt: „The next simplest equation of state is that of homogeneous incompressible material $\rho = \rho_{max}$, where ρ_{max} is the maximum density of which matter is capable“ 2). Und an einer weiteren Stelle: „We must suppose ρ_{max} to be given by known physical properties of material such as the radii of electrons and nuclei“ 3).

Stoner sagt: „On a naïve view as to the “sizes” of electrons and nuclei (with radii some 10^{-5} times that of atoms) densities of the order of 10^{14} or 10^{15} would not be impossible“ 4). Und in einem späteren Aufsatz: „Under certain conditions it may be necessary to introduce a further equation of state, corresponding to matter at the highest density of which it is capable, but this need not be considered here“ 5).

Kothari sagt: „It is obvious that ρ could not increase above a certain maximum value ρ_0 . The order of ρ_0 may be comparable to 10^{13} gm./cm.³, for n could be of the order of 10^{39} , as the electrons and nuclei have radii of the order of 10^{-13} cm.“ 6).

Sen sagt: „... if the material has the maximum density of matter, say $3 \cdot 10^{12}$...“ 7).

Einmal habe auch ich mich für die Existenz einer oberen Grenzdichte ausgesprochen, freilich sehr vorsichtig: „Ich persönlich glaube ebenfalls, daß es eine „Grenzdichte“ geben muß; ich vermag aber nicht zu sagen, wie groß sie ist“ 8).

Ausführlicher behandelt unsere Frage Pokrowski 9). Es könne eine Reihe von Tatsachen vorgeführt werden, welche seiner Meinung nach auf die Möglichkeit der Existenz einer oberen Grenze für die Energiedichte deuten. Sollte man der Masse der Atomkerne einen energetischen Ursprung zuschreiben,

1) S. Chandrasekhar, Monthly Not. Roy. Astron. Soc. **91**, 463, 1931.

2) E. A. Milne, Monthly Not. R. A. S. **91**, 35, 1930.

3) Ebenda, S. 49.

4) E. C. Stoner, Phil. Mag. (7) **7**, 64, 1929.

5) E. C. Stoner, Monthly Not. R. A. S. **92**, 662, 1932.

6) D. S. Kothari, Phil. Mag. (7) **11**, 1131, 1931.

7) N. R. Sen, Monthly Not. R. A. S. **94**, 551, 1934.

8) W. Anderson, ZS. f. Phys. **56**, 856, 1929.

9) G. I. Pokrowski, ZS. f. Phys. **51**, 730, 1928.

so wäre ihr Radius $r = \frac{2e^2}{3mc^2}$; für die schwersten Atomkerne ergibt dies etwa $\log r = -14,2$, während die direkten Beobachtungen nicht weniger als $-12,5$ ergeben. Diesen beträchtlichen Unterschied glaubt Pokrowski folgendermaßen erklären zu können. Bei $\log r = -12,5$ sei die Energiedichte schon so groß, daß eine weitere Verdichtung bis $\log r = -14,2$ zur Unmöglichkeit werde, da das Prinzip der Superposition der Energiedichten hier offenbar nicht mehr gültig sei. Mit anderen Worten: die Dichte der Materie in den Atomkernen stellt die obere Grenze der Dichte überhaupt dar. Pokrowski glaubt diese Grenze gleich $10^{13 \pm 1}$ ansetzen zu können. Natürlich bedingt eine obere Grenze der Dichte auch eine obere Grenze der Temperatur. Letzteres glaubt Pokrowski noch auf eine ganz andere Art beweisen zu können. Bei einer Temperatur von etwa $3 \cdot 10^{12}$ Grad ist die Energiedichte in den Atomkernen gleich der Dichte der umgebenden strahlenden Energie; die Teilchen werden sozusagen „aufgelöst“ in dem umgebenden Raume, so daß die Existenz diskreter Materieteilchen aufhöre, und deshalb könne man, wie Pokrowski meint, von einer noch höheren Temperatur nicht sprechen. Hat die Temperatur eine obere Grenze, so muß auch die Schwingungsfrequenz ν eine obere Grenze haben. Nach verschiedenen Methoden erhält Pokrowski Werte zwischen $\log \nu = 22,4$ und $\log \nu = 23,9$. Eine dieser Methoden ist unabhängig von der Masse und Dichte der Atomkerne, nämlich die Berechnung von ν auf Grund der Theorie des „Zeitatomismus“ von Robert Lévi. Letzterer glaubt nämlich, daß die Zeit aus unteilbaren „Zeitatomen“ bestehe, die er „Chronone“ nennt. Die Dauer eines Chronons soll $4,5 \cdot 10^{-24}$ Sekunden betragen. Da keine Schwingung kürzere Zeit als ein „Chronon“ dauern kann, so ergibt sich für ν eine obere Grenze, wobei $\log \nu = 23,4$ ist. In einem anderen Artikel ¹⁾ glaubt Pokrowski die Theorie des Zeitatomismus im Spektrum der Höhenstrahlung bestätigt zu finden. Diese Theorie verlangt nämlich, daß jede Wellenlänge ein ganzzahliges Vielfaches von $1,35 \cdot 10^{-13}$ cm sei. Es sei sehr schwer, eine solche Hyperfeinstruktur im sichtbaren Spektrum, im Röntgenspektrum oder im gewöhnlichen γ -Spektrum zu entdecken, da hier die Wellenlängen zu groß seien. Wohl aber sei dies möglich im Spektrum

1) G. I. Pokrowski, ZS. f. Phys. 51, 737, 1928.

der Höhenstrahlung. Pokrowski benutzt drei von Millikan und Cameron veröffentlichte Wellenlängen: $8 \cdot 10^{-13}$ cm, $3,8 \cdot 10^{-12}$ cm und $6,34 \cdot 10^{-12}$ cm. Pokrowski findet nun, daß die erste sehr nahe mit $6,1,35 \cdot 10^{-13} = 8,1 \cdot 10^{-13}$ cm übereinstimmt, die zweite mit $28,1,35 \cdot 10^{-13} = 3,78 \cdot 10^{-12}$ cm und die dritte mit $47,1,35 \cdot 10^{-13} = 6,35 \cdot 10^{-12}$ cm. Somit haben sich tatsächlich alle drei als ganzzahlige Vielfache von $1,35 \cdot 10^{-13}$ cm erwiesen. Diese Übereinstimmung findet Pokrowski ausgezeichnet, hält es aber dennoch für möglich, daß wir es hier mit einem bloßen Spiel des Zufalls zu tun haben.

Auch Suzuki beschäftigt sich ausführlich mit unserer Frage. Er sagt: „With the progress of science, it has been found that the various physical quantities have a upper or lower limit, for example the zero degree of absolute temperature, electrons and protons as the primordial smallest matter, light-velocity as the fastest velocity of matter ever attainable, the finite dimension of time-space by the theory of relativity and so on... Now I am going to say that the energy-density has also the upper limit“¹⁾. Dabei kommt aber Suzuki zu der Überzeugung, daß eine obere Grenzdichte mit der Relativitätstheorie unvereinbar sei. Nach letzterer kann die Geschwindigkeit eines materiellen Körpers zwar nie der Lichtgeschwindigkeit gleich werden, aber beliebig nahe an sie heranreichen, wodurch die kinetische Energie beliebig groß werden kann. Wenn jedoch die kinetische Molekularenergie beliebig groß werden kann, so gilt dasselbe auch von der Temperatur und also auch von der Energiedichte. Zur Rettung der Existenz einer oberen Grenzdichte sieht sich daher Suzuki gezwungen, die Relativitätstheorie „etwas“ abzuändern. Er nimmt die Grenzgeschwindigkeit nicht gleich c , sondern gleich V_m an, wobei $V_m < c$ ist. Die maximale mögliche Temperatur erhält er aus der Gleichung:

$$\frac{m_0 c^2}{\sqrt{1 - \frac{V_m^2}{c^2}}} - m_0 c^2 = \frac{3}{2} k T_m.$$

Die Existenz einer oberen Temperaturgrenze T_m bedingt natürlich auch die Existenz einer oberen Schwingungsgrenze ν_m . Suzuki weist darauf hin, daß beim Compton-Effekt unter

1) Seitarô Suzuki, Proc. Physico-Math. Soc. of Japan (3) 10, 175, 1928.

gewissen Bedingungen die Frequenz ν des einfallenden Lichtquants sich erhöht. Damit dasselbe nicht auch mit ν_m geschehe, sieht sich Suzuki gezwungen, die Gültigkeit des Compton-Effekts in solchen extremen Fällen zu bezweifeln: „Anyhow it must be concluded that Compton's effect does not hold good at an extremely high frequency of a quantum and a rapid velocity of an electron“. In einem anderen Aufsatz verlangt Suzuki die Abänderung der Lorentz-Transformation bei hohen Geschwindigkeiten, damit die Existenz einer oberen Grenzdichte möglich werde: „... it is rather Lorentz's transformation which is to be modified at the extreme high velocity, but not the notion of the existence of the upper limit of density of energy“¹⁾. In einem späteren Aufsatz (in deutscher Sprache) sagt Suzuki²⁾: „Für diese Hypothese bietet, wie schon bemerkt, die Relativitätstheorie vielleicht die größte Schwierigkeit. Zur Zeit mangelt es meines Erachtens an einem entscheidenden Experiment, das klar zeigen könnte, ob die Relativitätstheorie wirklich bis zur Lichtgeschwindigkeit selbst genau gilt, oder ob diese Theorie falsch ist... Ich bin der Meinung, daß die Annahme einer oberen Grenze der Energiedichte selbst vom klassischen Standpunkt aus berechtigt erscheint“. Hier beschreibt (vom klassischen Standpunkt aus) Suzuki folgendes Gedankenexperiment. In einem Gefäß mit absolut unschmelzbaren und undurchsichtigen Wänden ist Gas eingeschlossen, welches einer adiabatischen Kompression unterworfen wird. Diese Kompression kann bis zum Endstadium fortgesetzt werden, welches eine dichte Packung von Elektronen und Protonen ohne nennenswerte Zwischenräume darstellt. Eine weitere Kompression sei unmöglich, da die Konstituenten als absolut inkompressibel und starr anzusehen seien. „Auf die Frage, ob dieses Energiepaket so viel Licht absorbiert, daß es noch dichter wird, muß geantwortet werden, daß das Lichtquantum auch Dimensionen hat; so daß die Lichtabsorption, selbst wenn sie tatsächlich vorkommt, im wesentlichen kein Ansteigen der Energiedichte hervorruft.“ Wenn ein leeres Gefäß immer mehr erwärmt wird, steigt in seinem Innern die Energiedichte der Hohlraumstrahlung. Bei sehr hohen Temperaturen beginnt die strahlende Energie sich in Elektronen und Protonen zu ver-

1) Seitarō Suzuki, Proc. of the Imperial Academy (Japan) 5, 64, 1929.

2) Seitarō Suzuki, Phys. ZS. 31, 618, 1930.

wandeln, bis wir wieder eine dichte Packung ohne nennenswerte Zwischenräume erhalten. Weiter weist Suzuki auf die beobachtete Tatsache hin, daß die Frequenz verschiedener Strahlen nicht über eine gewisse Grenze hinausgeht: „Selbst die stark durchdringenden Strahlen von Kolhörster und Millikan scheinen Anzeichen zu geben, daß sie keine unendlich große Frequenz besitzen“.

Die Existenz einer oberen Grenzdichte folgt auch aus der von Ambarzumian und Iwanenko entwickelten Theorie der Quantelung des Raumes. Nach dieser Theorie stellt der Raum ein Punktgitter dar, wobei die Elektronen nur in den Gitterpunkten sich befinden können, nicht aber dazwischen. „Aus unseren Annahmen folgt unmittelbar die Existenz einer maximalen Packung des Raumes durch die Elektronen. Vorläufig sind wir dazu gezwungen, auch für die Protonen dasselbe Punktgitter anzunehmen“¹⁾. An einer weiteren Stelle heisst es: „Es entsteht natürlich die Frage, ob die Zeit auch gequantelt sein soll. Die Antwort scheint notwendig positiv zu lauten. Ganz abgesehen von der notwendigen Symmetrie, legt die Existenz einer minimalen Entfernung auch die Annahme einer minimalen Wellenlänge nahe, sowohl für das Licht als auch für die Materie; und somit kommen wir zur Existenz einer maximalen Frequenz“²⁾.

Kritik der in der Literatur geäußerten Ansichten.

Wir beginnen mit Pokrowski. Sein Hauptargument beruht darauf, daß der Bau der Atomkerne dem des klassischen Elektrons ähnele, so daß der Kernradius nach der Formel $r = \frac{2 e^2}{3 m c^2}$ berechnet werden könne. Die Diskrepanz zwischen dem so berechneten und dem beobachteten Radius deutet Pokrowski als Anzeichen dafür, daß die Dichte im Kern ihren oberen Grenzwert bereits erreicht habe. Nun wissen wir heutzutage, daß von einem derartigen „klassischen“ Aufbau der Atomkerne überhaupt keine Rede sein kann, also auch keine Rede von irgendwelcher Diskrepanz im oben erwähnten Sinne. Somit hängen alle darauf fußenden Berechnungen der maximalen Frequenz in der Luft. Auch wird man kaum Pokrowskis Ansicht zustimmen können, daß bei $3 \cdot 10^{12}$ Grad die materiellen Teilchen „sich sozu-

1) V. Ambarzumian und D. Iwanenko, ZS. f. Phys. **64**, 565, 1930.

2) Ebenda, S. 567.

sagen auflösen“ in der umgebenden Hohlraumstrahlung, und daß dadurch eine noch höhere Temperatur unmöglich werde. Die Hohlraumstrahlung stellt ja nicht etwas absolut Kontinuierliches dar, sondern eine Ansammlung von Energiequanten $h\nu$, deren durchschnittliche (kinetische) Masse proportional der Temperatur steigt. Auch die materiellen Teilchen werden einen mit der Temperatur steigenden Massenzuwachs erhalten. Es ist daher gar nicht einzusehen, warum $3 \cdot 10^{12}$ Grad die obere Temperaturgrenze darstellen soll. Aber selbst wenn wir annehmen, daß bei einer gewissen Temperatur jeder Unterschied zwischen Materie und Hohlraumstrahlung verschwindet, warum soll dadurch eine noch höhere Temperatur unmöglich geworden sein? — Wenn wir z. B. eine Flüssigkeit mit ihrem Dampf bis zur kritischen Temperatur erwärmen, so verschwindet jeder Unterschied zwischen Flüssigkeit und Dampf. Aber dies bedeutet noch lange nicht, daß dadurch eine höhere Temperatur unmöglich geworden sei! — Die obere Grenze von ν berechnet Pokrowski u. a. auch auf Grund des sog. „Zeitatomismus“, dessen Richtigkeit er durch Millikans und Camerons Wellenmessungen der Höhenstrahlung bestätigt zu finden glaubt. Nun dominiert heutzutage die Ansicht, daß die Höhenstrahlung in der Hauptsache gar keine Wellenstrahlung, sondern eine Korpuskularstrahlung ist: „Daß ein großer Teil der primären Ultrastrahlung korpuskularer Natur ist, darüber hat der sogen. „Breiteneffekt der Ultrastrahlung“ Aufschluß gegeben, die Tatsache, daß am Äquator etwa 12 bis 14% weniger Ultrastrahlungsintensität beobachtet wird als in höheren nördlichen und südlichen Breiten. Das kann nur dadurch zustande kommen, daß die aus dem Weltenraum kommende korpuskulare Ultrastrahlung nach den Polen abgelenkt wird, wenn sie sich dem Magnetfeld der Erde nähert“¹⁾. Eine Theorie, die auf den „gemessenen“ Wellenlängen der Ultrastrahlung basieren will, ist daher mehr als gewagt. Übrigens ist Pokrowski in seinen Schlußfolgerungen sehr vorsichtig, indem er erklärt: „Alles hier Gesagte erlaubt somit den Schluß zu ziehen, daß, wenn auch keine bestimmte Grenze für die Energiedichte existiert, doch das Auftreten von Energiedichten größer als 10^{13} g/cm³ äußerst unwahrscheinlich ist“²⁾.

1) E. Regener, „Neues von der Ultrastrahlung“, Umschau **39**, 993, 1935.

2) G. I. Pokrowski, ZS. f. Phys. **51**, 736, 1928.

Gegen eine so formulierte Schlußfolgerung läßt sich wohl kaum etwas einwenden.

Was Suzuki anbetrifft, so sind seine Hauptargumente für die Existenz einer oberen Grenzdichte folgende:

1) das Auftreten einer oberen oder unteren Grenze in vielen anderen Fällen (z. B. der absolute Nullpunkt der Temperatur, die obere Grenzgesewindigkeit c u. s. w.);

2) das Nichtauftreten beliebig großer Energiequanten (resp. kinetischer Energien der Korpuskel) in der Höhenstrahlung;

3) das Gedankenexperiment (vom klassischen Standpunkt aus) mit den für absolut inkompressibel gehaltenen Elektronen und Protonen.

Als eine Art „Gegenleistung“ für seine drei Argumente verlangt Suzuki eine „kleine“ (?) Abänderung der Relativitätstheorie, der Lorentz-Transformation, des Compton-Effekts... Ist dies aber nicht ein etwas zu hoher Preis für Suzukis „drei Argumente“? — Das erste dieser Argumente darf wohl kaum als übermäßig zwingend angesehen werden. Was das zweite Argument anbetrifft, d. h. das Nichtauftreten beliebig großer Energiequanten, so beweist es noch nicht die prinzipielle Unmöglichkeit solcher Energiequanten. Es kann ja sein, daß bloß die dazu notwendigen Bedingungen in dem Weltenraume fehlen. So z. B. werden wir auf unserer Erdoberfläche nirgends eine Temperatur von 10 Millionen Grad finden. Dies bedeutet aber doch nicht etwa die prinzipielle Unmöglichkeit einer solchen Temperatur, sondern bloß das Fehlen der dazu notwendigen Bedingungen auf der Erdoberfläche. Was schließlich das dritte Argument anbetrifft, so beruht dies auf der Annahme, daß die Elektronen und Protonen absolut inkompressible Körper von bestimmten Dimensionen seien. Diese Annahme ist nach Suzukis Meinung eine Selbstverständlichkeit, die weder eines Beweises, noch irgendwelcher Begründung bedürfe (genau so, wie vor 15 Jahren die Atome als „selbstverständlich“ inkompressibel angesehen wurden). Eine gewisse Entschuldigung für eine solche Annahme kann man vielleicht darin erblicken, daß die Kompression eines kontinuierlichen Gebildes, wie das Elektron, der menschlichen Vorstellungskraft größere Schwierigkeiten bietet, als die Kompression eines aus mehr oder weniger weit voneinander getrennten Partikelchen bestehenden diskontinuierlichen Gebildes. Ich muß jedoch auf das Licht-

quant hinweisen, dem man eine kontinuierliche Struktur genau mit demselben Recht zuschreiben kann, wie dem Elektron (heutzutage wird wohl kaum jemand daran glauben, daß das Lichtquant aus einer Wolke getrennter ultrakleiner Partikelchen bestehe). Trotzdem benimmt sich ein solches kontinuierliches Gebilde nicht wie ein absolut starrer Körper, sondern läßt sich beim Dopplereffekt verkürzen oder verlängern. Wir sehen also, daß eine kontinuierliche Struktur an sich noch kein genügender Grund für die Inkompressibilität ist.

In einem früheren Aufsatz habe ich die Frage über die Kompressibilität des klassischen Elektrons untersucht, dessen Radius gleich

$$r = a \frac{e^2}{mc^2} \quad (1)$$

ist, wo der Zahlenfaktor a von der Verteilung der Elektrizität im Elektron abhängt. Diese Untersuchung hat nun gezeigt, daß der Widerstand eines solchen klassischen Elektrons gegen äußeren Druck überwunden wird, sobald letzterer den Wert

$$p = \frac{m^4 c^6}{4 \pi a^3 e^6} \quad (2)$$

erreicht¹⁾. Andererseits ist die Dichte im Elektron (da $m = \frac{4}{3} \pi r^3 \rho$ ist) gleich

$$\rho = \frac{3m}{4\pi r^3}. \quad (3)$$

Aus (1) und (3) ergibt sich:

$$\rho = \frac{3m^4 c^6}{4\pi a^3 e^6}; \quad (4)$$

aus (2) und (4):

$$p = \frac{\rho c^2}{3}, \quad (5)$$

also genau dieselbe Gleichung wie für die Hohlraumstrahlung. Wenn $a = \frac{2}{3}$ ist, so ergibt sich $\rho = 3,26 \cdot 10^{10} \text{ g.cm}^{-3}$ und $p = 9,76 \cdot 10^{30} \text{ Dyn.cm}^{-2}$. Damit sich nun das Elektron nicht unbegrenzt ausdehne, ist man gezwungen die Existenz einer besonderen Kraft anzunehmen (und dies ist ein schwerwiegender Vor-

1) ZS. f. Phys. 56, 855, 1929.

wurf, den man der klassischen Elektronentheorie machen kann), die einem äußeren Druck von $9,76 \cdot 10^{30}$ Dyn. cm⁻² äquivalent wäre. Jedenfalls kann die Widerstandskraft des klassischen Elektrons gegen äußeren Druck nicht größer als $\frac{e c^2}{3}$ sein, also nicht größer als die Widerstandskraft der Hohlraumstrahlung von gleicher Dichte.

Man kann natürlich einwenden, daß das klassische Elektron nicht der Wirklichkeit entspreche, sondern von letzterer mehr oder weniger abweiche. Dies muß natürlich zugegeben werden, gleichzeitig muß aber auch vor etwa folgendem Gedankengang gewarnt werden:

„Das klassische Elektron ist kompressibel.“

Das wirkliche Elektron ist nicht das klassische.

Folglich ist das wirkliche Elektron inkompressibel.“

Dies wäre genau dasselbe, wie wenn jemand sagen wollte:

„Die Europäer sind sterblich.“

Die Neger sind keine Europäer.

Folglich sind die Neger unsterblich.“

Neuerdings haben Born und Infeld eine neue Elektronentheorie aufgestellt, wobei sie nicht von der gewöhnlichen Gleichung

$$L = \frac{1}{2} (H^2 - E^2)$$

ausgingen, sondern von einer erweiterten:

$$L = b^2 \left(\sqrt{1 + \frac{1}{b^2} (H^2 - E^2)} - 1 \right)$$

Hier bedeutet \mathbf{E} den elektrischen Vektor, \mathbf{H} den magnetischen, L die Funktion von Lagrange, und b stellt die obere Grenze des elektrischen Feldes dar ¹⁾. Diese obere Grenze bestimmen Born und Infeld zu $b = 9,18 \cdot 10^{15}$ e. s. u. „The enormous magnitude of this field justifies the application of the Maxwell's equations in their classical form in all cases, except those where the inner structure of the electron is concerned“ ²⁾. Wenn nun das elektrostatische Feld eine obere Grenze hat, so kann die elektrostatische Abstoßungskraft zweier gleichnamiger Elektrizitätsmengen bei fort-

1) M. Born und L. Infeld, Proc. Roy. Soc. London (A) **144**, 427, 1934.

2) Ebenda, S. 446 f.

dauernder Annäherung nicht unbegrenzt wachsen, sondern muß eine obere Grenze haben. Übersteigt die äußere Kraft diese obere Widerstandsgrenze, so können die gleichnamigen Elektrizitätsmengen beliebig nahe aneinander gebracht werden. Dies könnte nur verhindert werden durch das Auftreten hypothetischer Kräfte, die also nicht elektromagnetischer Natur wären. Born und Infeld wollen jedoch die Existenz solcher Kräfte nicht anerkennen, und weisen darauf hin, daß die Theorien von Heaviside, Searle, J. J. Thomson, Abraham und Lorentz gerade deshalb zusammengebrochen sind, weil sie die Existenz einer nichtelektromagnetischen Kraft anzunehmen gezwungen waren: „... they break down because they are compelled to introduce cohesive forces of non-electromagnetic origin“¹⁾. Hinsichtlich der Elektrizitätsverteilung bei ihrem Elektron sagen Born und Infeld: „... the true charge can be considered as concentrated in a point, but it is also possible to introduce a free charge with a spatial distribution law“²⁾.

Dies alles spricht nicht zugunsten einer Inkompressibilität der Elektronen. Jedenfalls kann man es nicht als bewiesene und abgemachte Tatsache betrachten, daß die Elektronen absolut starre Körper von bestimmten Dimensionen seien.

Aber selbst wenn wir letzteres auch annehmen, so wird das Endstadium in Suzukis Gedankenexperiment kein Gebilde von endlicher Dichte sein, wie er es glaubt. Wir wollen die Gleichung $p = \frac{\Re T}{v - b}$ benutzen, wo b das sogen. „Kovolumen“

bedeutet. Das Kovolumen ist keine absolut konstante Größe, sondern nimmt bei sehr hohen Drucken merklich ab, indem es gegen den Grenzwert b_1 konvergiert, welcher jenem Zustand entspricht, wo die Partikelchen in maximaler Packung einander schon berühren. Wir können also schreiben: $b_1 \leq b$, und daher:

$p \geq \frac{\Re T}{v - b_1}$. Es möge T_a die Anfangstemperatur bedeuten und v_a das Anfangsvolumen. Bei einer adiabaten Kompression muß T steigen, so daß die Anfangstemperatur T_a den kleinsten Wert von T darstellt. Die zur Kompression von $v = v_a$ bis $v = b_1$ (d.

1) Ebenda, S. 425.

2) Ebenda, S. 451.

h. bis zur gegenseitigen Berührung der Partikelchen) notwendige Arbeit ist gleich

$$\int_{b_1}^{v_a} p dv \geq \int_{b_1}^{v_a} \Re T dv > \int_{b_1}^{v_a} \frac{\Re T_a dv}{v - b_1} = \Re T_a \log \text{nat} (v - b_1) \Big|_{b_1}^{v_a} = \infty.$$

Wir haben durch unsere adiabate Kompression dem Gase eine unendlich große Energiemenge zugeführt; somit erhalten wir im Endstadium keine endliche Dichte, wie es Suzuki glaubt, sondern eine unendlich große.

Wenden wir uns jetzt der Raumquantelung von Ambarzumian und Iwanenko zu. Wenn ein Raum sein Maximum an Elektronen und Protonen erhalten hat, so muß der Versuch ein neues Elektron einzuführen offenbar auf Widerstand seitens der Quantenstruktur des Raumes stoßen. Wo ist aber der Beweis, daß dieser Widerstand unendlich groß werden kann? — Früher hatte man ja auch geglaubt, daß die Quantenstruktur eines Atoms imstande sei einem unendlich großen äußeren Druck zu widerstehen; später hat sich diese Ansicht als irrig erwiesen. Wo ist der Beweis, daß Ambarzumians und Iwanenkos Quantenstruktur des Raumes nicht ebenfalls unter genügendem äußerem Druck zusammenbrechen wird? — Aber selbst wenn diese Struktur absolut fest wäre, so kann man doch den Elektronen „Molekulargeschwindigkeiten“ erteilen, welche nach der Relativitätstheorie beliebig nahe an c herantreiben können. Dadurch können wir im „Raume mit maximaler Packung“ beliebig hohe Dichten realisieren.

Auf Grund alles Gesagten glaube ich schließen zu dürfen, daß es bis jetzt noch niemandem gelungen ist, die Existenz einer oberen Grenzdichte zu beweisen.

Ist die Existenz einer oberen Grenzdichte möglich vom Standpunkt der speziellen Relativitätstheorie?

Suzuki gibt auf diese Frage eine negative Antwort (s. oben) und verlangt, daß zur Rettung der Existenz einer oberen Grenzdichte die Relativitätstheorie „etwas“ abgeändert werde. Mir scheint ein solches Verlangen kühn und seine Notwendigkeit nicht genügend motiviert zu sein. Auch führen die von Suzuki vorgeschlagenen Abänderungen der (speziellen) Relativitäts-

theorie zu großen Schwierigkeiten. Suzuki setzt die maximale mögliche Geschwindigkeit eines materiellen Körpers nicht gleich c , sondern gleich V_m , wo $V_m < c$ ist. Dabei setzt er jedoch voraus, daß die kinetische Energie eines mit der Geschwindigkeit V_m bewegten Körpers endlich sei! Was wird aber nun geschehen, wenn dieser Körper von hinten von einem Lichtstrahl getroffen wird? — Da die Differenz zwischen der Lichtgeschwindigkeit c und der Körpergeschwindigkeit V_m nach Suzuki eine endliche ist, so wird der Körper jede Sekunde einen endlichen Impuls in der Bewegungsrichtung erhalten und seine kinetische Energie einen endlichen Zuwachs. Da bei V_m die Masse des Körpers endlich ist, so muß auch der Geschwindigkeitszuwachs endlich sein. Dies widerspricht aber Suzukis Annahme, daß V_m die maximale mögliche Geschwindigkeit eines materiellen Körpers darstelle. Will man jedoch seine Annahme fallen lassen, so ist man dadurch gezwungen, auch die Hypothese einer oberen Grenzdichte aufzugeben. Und in der Tat: wenn die Körpergeschwindigkeit beliebig nahe an c heranreichen, also die kinetische Energie beliebig groß werden kann, so können beim Zusammenstoß zweier solcher Körper beliebig große Energiemengen in engem Raume konzentriert, also auch beliebig hohe Dichten erzielt werden.

Die Existenz einer oberen Grenzdichte müßte auch die Existenz einer oberen Grenze für die Temperatur (T_m) und für die Schwingungsfrequenz (ν_m) bedingen. Letzteres führt aber zu einem hoffnungslosen Konflikt mit dem Doppler-Effekt. Wenn wir Einsteins Formel für den Doppler-Effekt ¹⁾ auf ν_m anwenden, so erhalten wir:

$$\nu'_m = \nu_m \frac{1 - \frac{v}{c} \cos \varphi}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}.$$

Für $\varphi = 0$ ergibt dies:

$$\nu'_m = \nu_m \sqrt{\frac{1 - \frac{v}{c}}{1 + \frac{v}{c}}}.$$

Bewegt sich der Körper so, daß v negativ gerechnet werden

1) A. Einstein, Ann. d. Phys. (4) 17, 911, 1905.

muß, so ist $\nu'_m > \nu_m$, was aber der gemachten Annahme widerspricht, daß ν_m die maximale mögliche Frequenz darstelle.

Wenn ν_m die maximale mögliche Frequenz darstellt, so gibt es kein Strahlungsquant, dessen Energie größer als $h\nu_m$ wäre. Mögen nun solche maximale Quanten senkrecht auf einen idealen Spiegel fallen. Solange der Spiegel unbeweglich ist, muß die Energie sowohl jedes einfallenden als auch jedes reflektierten Quants gleich $h\nu_m$ sein. Bewegen wir aber den Spiegel gegen die Lichtquanten, so leisten wir Arbeit, da wir ja den Strahlungsdruck der einfallenden Quanten überwinden müssen. Das Gesetz der Erhaltung der Energie verlangt, daß die von uns geleistete Arbeit nicht spurlos verschwinde, sondern zur Vergrößerung der Energie der reflektierten Quanten verbraucht werde. Somit muß die Energie jedes reflektierten Quants größer als $h\nu_m$ sein, was aber nach unserer Annahme unmöglich ist, da ja $h\nu_m$ die maximale mögliche Energie eines Quants darstellt.

Nicht nur ein absolut inkompressibler, sondern sogar ein zu wenig kompressibler Körper widerspricht der (speziellen) Relativitätstheorie, da man in einem solchen Körper, wie wir unten sehen werden, Signale mit Überlichtgeschwindigkeit übermitteln könnte.

Wir denken uns einen Zylinder von der Länge l cm, der innen vollkommen spiegelt und mit einem verschiebbaren Stempel versehen ist. Wenn sich im Zylinder Hohlraumstrahlung von der Massendichte ρ g.cm⁻³ befindet, so erfahren die Wände des Zylinders, und also auch der verschiebbare Stempel, einen Druck von $\frac{\rho c^2}{3}$ Dyn. cm⁻². Sollten die Bewegungen der Lichtquanten nicht ungeordnet sein, wie dies bei der Hohlraumstrahlung der Fall ist, sondern ausschließlich parallel zur Achse des Zylinders, also senkrecht zum Stempel, stattfinden, so erfährt bekanntlich letzterer einen dreimal größeren Druck als früher, d. h. $p = \frac{3\rho c^2}{3} = \rho c^2$ Dyn. cm⁻². Damit der Stempel sich dabei nicht verschiebe, muß der auf ihm lastende äußere Druck ebenfalls $p = \rho c^2$ betragen. Der Druck der „gerichteten“ strahlenden Energie auf die Seitenwände des Zylinders hingegen wird jetzt gleich Null sein, so daß man diese Seitenwände sogar entfernen kann. Erhöht man den äußeren Druck um dp , so verschiebt sich der Stempel nach innen, so daß die Länge l sich

um $|dl|$ verkürzt, was eine Steigerung der Dichte ρ um $d\rho$ zur Folge haben muß (wir schreiben $|dl|$, da dl in unserem Falle negativ ist). Der Druck auf die Seitenwände bleibt dabei unverändert gleich Null. Da bei der Verschiebung des Stempels der Querschnitt des Zylinders unverändert bleibt, so ist das innere Volumen des letzteren offenbar proportional seiner Achsenlänge l . Bei der Stempelverschiebung leisten die äußeren Druckkräfte Arbeit, wodurch Energie und Masse der im Zylinder befindlichen Strahlung vergrößert wird. Zur Vermeidung dieser unbequemen Komplikation soll angenommen werden, daß der Stempel etwas Energie hindurchläßt, und zwar gerade so viel, daß die hinzugekommene Energie wieder entfernt wird. Da in einem solchen Falle die im Zylinder eingeschlossene Masse konstant bleibt, so muß sich die Dichte ρ umgekehrt proportional dem Volumen ändern, also auch umgekehrt proportional der Achsenlänge l . Wir haben also:

$$\frac{\rho}{\rho + d\rho} = \frac{l + dl}{l},$$

oder:

$$ld\rho + \rho dl = 0. \quad (6)$$

Der „Elastizitätsmodul“ wird definiert durch

$$E = -\frac{l dp}{dl}. \quad (7)$$

Da in unserem Falle die Länge proportional dem Volumen ist, so besteht zwischen dem „Elastizitätsmodul“ und dem räumlichen „Kompressibilitätsmodul“ kein Unterschied. In unserem Falle ist $p = \rho c^2$, also $dp = c^2 d\rho$. Führt man diesen Wert in (7) ein, so erhält man im Hinblick auf (6):

$$E = -\frac{lc^2 d\rho}{dl} = -\frac{c^2 (-\rho dl)}{dl} = \rho c^2. \quad (8)$$

Der für eine konstante Masse der (einseitig gerichteten) Strahlung abgeleitete Elastizitätsmodul ist also gleich dem Strahlungsdruck. Im Falle von Hohlraumstrahlung ist der räumliche Kompressibilitätsmodul offenbar gleich

$$E = \frac{\rho c^2}{3}, \quad (9)$$

also wiederum gleich dem entsprechenden Strahlungsdruck.

Von allen bekannten flüssigen oder festen Körpern ist Dia-

mant am wenigsten kompressibel: sein räumlicher Kompressibilitätskoeffizient beträgt nur $(0,16 \pm 0,02) \cdot 10^{-6} \text{ cm}^2 \cdot \text{kg}^{-1}$, wenn man das Druckintervall zwischen 4000 und 10000 $\text{kg} \cdot \text{cm}^{-2}$ ins Auge faßt¹⁾. Der räumliche Kompressibilitätsmodul des Diamanten ist also gleich

$$E = \frac{1}{0,16 \cdot 10^{-6}} = 6 \cdot 10^6 \text{ kg} \cdot \text{cm}^{-2} = 6 \cdot 10^{12} \text{ Dyn} \cdot \text{cm}^{-2}.$$

Die Dichte des Diamanten beträgt $3,5 \text{ g} \cdot \text{cm}^{-3}$. Der Kompressibilitätsmodul der Hohlraumstrahlung von gleicher Dichte ist nach (9) gleich

$$E = \frac{3,5 \cdot 9 \cdot 10^{20}}{3} = 1,05 \cdot 10^{21} \text{ Dyn} \cdot \text{cm}^{-2}.$$

Die Widerstandskraft des Diamanten gegen äußeren Druck ist also $1,75 \cdot 10^8$ mal kleiner als die Widerstandskraft der Hohlraumstrahlung von gleicher Dichte!

Der von uns benutzte Wert des Kompressibilitätskoeffizienten des Diamanten bezieht sich nur auf geringere Drucke als $10000 \text{ kg} \cdot \text{cm}^{-2}$. Nun ist es eine bekannte Tatsache, daß mit zunehmendem Druck der räumliche Kompressibilitätskoeffizient abnimmt, also der Kompressibilitätsmodul steigt. Wie lange kann aber dieses Steigen bei immer weiter zunehmendem Druck andauern, und existiert überhaupt eine obere Grenze für den räumlichen Kompressibilitätsmodul eines Körpers? — Zur Untersuchung dieser wichtigen Frage gehen wir nun über.

Es möge sich in dem oben erwähnten Zylinder statt strahlender Energie irgendein anderer Körper befinden, wobei auf dem verschiebbaren Stempel der äußere Druck p lastet. Es mögen außerdem alle inneren abstoßenden Kräfte des Körpers senkrecht zum Stempel gerichtet sein, wodurch die Widerstandskraft des Körpers in dieser Richtung (auf Kosten anderer Richtungen) gegen eine Stempelverschiebung nach innen noch verdreifacht wird (wie dies bei der „gerichteten“ Strahlung gegenüber der Hohlraumstrahlung der Fall ist). Vergrößern wir den äußeren Druck p um dp , so kann diese Druckveränderung nicht absolut plötzlich an allen Punkten unseres (ideal anisotropen) Körpers wahrnehmbar werden, weil wir sonst imstande wären Signale von unendlicher Geschwindigkeit zu übermitteln (was mit der speziellen Relativitätstheorie unvereinbar wäre). Die

1) Landolt-Börnstein, Phys.-chem. Tabellen, 5. Auflage, 1. Ergänzungsband, S. 24, Berlin 1927.

Druckänderung wird sich also mit einer endlichen Geschwindigkeit ausbreiten, welche nicht größer sein darf als die Grenzgeschwindigkeit c . Wenn wir also den Druck um dp erhöhen, so pflanzt sich diese Druckänderung erst nach τ Sekunden bis zum entgegengesetzten Ende des Zylinders fort. Dabei verlangt die Relativitätstheorie, daß die Bedingung

$$\tau \geq \frac{l}{c} \quad (10)$$

erfüllt sei. Den inneren Querschnitt des Zylinders nehmen wir der Einfachheit halber gleich 1 cm^2 an. Dann beträgt die im Zylinder eingeschlossene Masse $l\rho$. Seitens des Stempels wirkt auf diese Masse τ Sekunden lang der Druck $p + dp$, während der auf die entgegengesetzte Seite wirkende nur p beträgt (da erst im letzten Moment der Zeitspanne τ die Druckerhöhung dp das Ende des Zylinders erreicht). Somit erfährt die Masse $l\rho$ während τ Sekunden den einseitigen Nettodruck dp , wodurch der Schwerpunkt dieser Masse die Geschwindigkeit v erhält. Nach einem Grundgesetz der Mechanik besteht in diesem Falle die Gleichung

$$\tau dp = \rho l v. \quad (11)$$

Aus (10) und (11) erhalten wir:

$$\frac{dp}{\rho} \leq v c. \quad (12)$$

Wir wollen voraussetzen, daß $\frac{dp}{\rho}$ immer sehr klein bleibt. Dann bleibt auch v sehr klein, so daß wir den relativistischen Massenzuwachs vernachlässigen können. [Natürlich darf die kleine Geschwindigkeit v nicht mit jener großen Geschwindigkeit verwechselt werden, mit der sich die Druckänderung dp im Zylinder fortpflanzt; in ähnlicher Weise ist die lineare Geschwindigkeit eines in der Luft vibrierenden Körpers durchaus nicht identisch mit der Schallgeschwindigkeit: letztere ist ja konstant, während erstere bei verschiedenen vibrierenden Körpern eine sehr verschiedene sein kann; sogar ein ganz langsames Hin- und Herbewegen der Hand erzeugt Schallwellen (freilich unhörbare), die sich mit der gewöhnlichen Schallgeschwindigkeit fortpflanzen. Beim Passieren einer Schallwelle vibrieren die Luftmoleküle, wobei ihre linearen Geschwindigkeiten veränderlich in Richtung und Größe, und abhängig von der Amplitude (also von der Stärke des Schalls) sind. Die Schallgeschwindigkeit hin-

gegen ist konstant und gewöhnlich sehr viel größer.] Da der von dem Stempel entfernteste Teil der im Zylinder befindlichen Masse am Ende der τ Sekunden immer noch ruht, obgleich der Schwerpunkt (also das Zentrum der Masse) schon die Geschwindigkeit v erhalten hat, so sind wir gezwungen anzunehmen, daß das andere Ende der im Zylinder befindlichen Masse (also welches den Stempel unmittelbar berührt) bereits die Geschwindigkeit $2v$ besitzt. Somit steigt die Geschwindigkeit des Stempels im Verlauf von τ Sekunden (wir setzen voraus: gleichmäßig) von 0 bis $2v$, also kann seine durchschnittliche Geschwindigkeit gleich v angenommen werden. Der vom Stempel dabei zurückgelegte Weg ist gleich $|dl|$, so daß wir schreiben können:

$$- dl = v\tau. \quad (13)$$

Aus (7) und (13) ergibt sich:

$$E = \frac{ldp}{v\tau}, \quad (14)$$

und aus (10), (12) und (14):

$$E \leq \rho c^2. \quad (15)$$

Sollten die inneren Widerstandskräfte des Körpers nicht nach einer bestimmten, sondern nach allen Seiten gleichmäßig gerichtet sein (ideal isotroper Körper), so haben wir offenbar:

$$E \leq \frac{\rho c^2}{3}. \quad (16)$$

Bei einem absolut inkompressiblen Körper müßte $E = \infty$ sein, doch nach (15) und (16) kann dies bei endlichem ρ niemals stattfinden. Der Vergleich von (15) und (16) mit (8) und (9) zeigt, daß die obere Grenze für die Widerstandskraft eines beliebigen Körpers gegen äußeren Druck zusammenfällt mit der Widerstandskraft strahlender Energie von gleicher Massendichte.

Die (spezielle) Relativitätstheorie verlangt also die Existenz einer oberen Grenze des Elastizitätsmoduls für jeden Körper. Dies Resultat steht im schärfsten Widerspruch mit den bis jetzt geäußerten Ansichten. Nicht die Dichte, sondern ganz im Gegenteil: die Widerstandskraft eines jeden Körpers gegen äußeren Druck hat eine obere Grenze. Kein Körper (isotrop oder anisotrop) von der Dichte ρ kann in irgendeiner Richtung einem äußeren Druck widerstehen, der größer als ρc^2 ist. Das oben erwähnte Beispiel mit dem Diamanten zeigt, daß die Widerstandskraft selbst der festesten gewöhnlichen Körper mehr als 10^8 mal kleiner ist.

J. von Neumanns Ansicht, daß $p = \frac{1}{3} \rho c^2$ die extremste Zustandsgleichung einer jeden Materie ist. Prioritätsanspruch hinsichtlich dieser Ansicht.

Neuerdings schreibt Chandrasekhar: „Finally, it is necessary to point out in this connection that J. von Neumann has recently shown that the *very* ultimate equation of state for matter should *always* be

$$P = \frac{1}{3} c^2 \rho.$$

The consideration of this new equation of state does not, however, introduce any essential modifications in our present scheme“¹⁾.

Es ist sehr zu bedauern, daß Chandrasekhar kein genaues Zitat anführt. Bis jetzt habe ich mich vergeblich bemüht festzustellen, wo Neumanns Aufsatz erschienen ist.

Also Neumann ist der Ansicht, daß $p = \frac{1}{3} \rho c^2$ die ultra-extremste Zustandsgleichung einer jeden Materie darstellt. Mit anderen Worten: Neumann meint, daß im allerextremsten Falle jede Materie sich (in Hinsicht des Druckes) wie Hohlraumstrahlung benimmt. Eine solche Ansicht ist aber gar nicht neu, denn ich habe sie schon seit Jahren viele Mal an verschiedenen Stellen geäußert.

„Unsere beiden Tabellen zeigen, daß bei genügend großem n Lichtquantengas denselben Druck, dieselbe Dichte... aufweist, wie Elektronengas und Protonengas, also auch wie ein Gemisch der beiden letzteren... Nun besteht jede gewöhnliche Materie letzten Endes aus Elektronen und Protonen. Wir kommen also zu dem Schluß, daß unter genügend großem Druck selbst beim absoluten Nullpunkt gewöhnliche Materie und Hohlraumstrahlung (Lichtquantengas) in jeder Hinsicht identisch werden. Die Elektronen und Protonen sind nicht zu unterscheiden von Lichtquanten, der Gasdruck nicht vom Strahlungsdruck“²⁾.

„Zum Schluß will ich noch auf die alles „nivellierende“ Eigenschaft des hohen Druckes hinweisen. Es ist z. B. längst bekannt, daß beim „kritischen“ Drucke der Unterschied zwischen Flüssigkeit und Gas verschwindet. Unter genügendem

1) S. Chandrasekhar, Monthly Not. R. A. S. **95**, 693, 1935.

2) W. Anderson, ZS. f. Phys. **54**, 441, 1929.

Drucke verschwindet auch der Unterschied zwischen ionisiertem und unionisiertem Zustande, wie ich es vor kurzem gezeigt habe. Unter extremen Drucken verschwindet jeder Unterschied zwischen gewöhnlicher Materie und Hohlraumstrahlung. Unter einem Druck von $6,56 \cdot 10^{48}$ Dyn. cm^{-2} haben Elektronen und Protonen gleiche Volumina und gleiche Massen... Genügender Druck nivelliert alles¹⁾.

Damals (im Jahre 1929) war ich selbstverständlich der Meinung, daß sämtliche Materie nur aus Protonen und Elektronen aufgebaut sei, und rechnete auch nur mit dem „klassischen“ Modell der letzteren. Auch betrachtete ich die Lichtquanten als einfache Gebilde. Etwas später ließ ich diese Ansicht fallen und betrachtete das Lichtquant als aus einem positiven und einem negativen „Baustein“ bestehend. Ich kam nun zu dem Schluß, daß bei einer gewissen „kritischen“ Temperatur die negativen „Bausteine“ mit den gewöhnlichen Elektronen identisch werden, und die positiven mit den Protonen (die Positronen waren damals noch nicht entdeckt). „Dies bedeutet, daß bei einer gewissen Temperatur jeder Unterschied zwischen gewöhnlicher Materie und Hohlraumstrahlung verschwinden muß. Wir wollen diese „kritische“ Temperatur durch T_{krit} bezeichnen, den entsprechenden „kritischen“ Druck durch p_{krit} und die „kritische“ Dichte durch ρ_{krit} “²⁾.

Anfänglich glaubte ich dabei, daß die Dichte der Materie dennoch eine obere Grenze haben müsse³⁾, d. h. daß die Gleichung $p = \frac{1}{3} \rho c^2$ schließlich versagen würde. In einem etwas später erschienenen Artikel⁴⁾ habe ich aber eine solche Beschränkung der Gleichung $p = \frac{1}{3} \rho c^2$ fallen lassen, indem ich auf sehr elementare Weise zeigte, daß der Kompressibilitätskoeffizient einer jeden Materie (den ich durch $\frac{1}{\rho} \frac{d\rho}{dp}$ definierte) niemals kleiner als $\frac{1}{\rho c^2}$ werden kann, daß also, mit anderen Worten, die Bedingung

1) W. Anderson, ZS. f. Phys. **56**, 856, 1929.

2) W. Anderson, ZS. f. Phys. **59**, 714, 1930.

3) W. Anderson, ZS. f. Phys. **56**, 856, 1929.

4) W. Anderson, Phil. Mag. (7) **12**, 832 f., 1931.

$$\frac{1}{\rho} \frac{d\rho}{dp} \leq \frac{1}{\rho c^2}$$

immer erfüllt sein muß. Die Integration dieser Bedingung ergibt aber

$$p \leq \rho c^2.$$

Der extreme Fall ($p = \rho c^2$) stellt jedoch offenbar nicht die Zustandsgleichung der Hohlraumstrahlung dar (ideal isotroper Körper), sondern den maximalen möglichen Druck eines ideal anisotropen Körpers (z. B. den Druck eines parallelen Strahlenbündels senkrecht zur Einfallsebene). Im isotropen Falle (Hohlraumstrahlung) ist der Druck 3 mal kleiner, worauf ich schon in jenem Artikel hingewiesen habe.

Ist die Existenz einer oberen Grenzdichte möglich vom Standpunkt der allgemeinen Relativitätstheorie? — Untersuchungen von K. Schwarzschild und N. R. Sen.

Wir haben gesehen, daß die Widerstandskraft eines jeden Körpers gegen äußeren Druck eine obere Grenze hat. Durch genügenden Druck können wir jeden Körper bis zu jeder beliebigen Dichte zusammenpressen. Nun taucht aber die Frage auf, ob sich in unserer Welt jeder beliebige Druck auch realisieren lasse? — Treten nicht in extremen Fällen neue Faktoren auf, die ein unbegrenztes Steigen des Druckes unmöglich machen? — In diesem Falle müßte die Dichte tatsächlich eine obere Grenze haben, freilich in einem ganz anderen Sinne, als wir es bis jetzt gemeint haben. Nicht die Inkompressibilität der Materie würde die Existenz einer oberen Grenzdichte bedingen, sondern die Unmöglichkeit einen beliebig hohen Druck in unserer Welt zu realisieren. Solange jedoch das negative Gravitationspotential noch klein im Vergleich mit c^2 ist, treten solche neue Faktoren nicht auf. Anders wird die Sache, wenn wir hinsichtlich des Gravitationspotentials keine begrenzenden Voraussetzungen machen.

Schwarzschild untersucht den Fall einer inkompressiblen homogenen Flüssigkeitskugel nach den Methoden der allgemeinen Relativitätstheorie¹⁾. Die Homogenität der Kugel wird durch Schwarzschild als Konstanz der Komponente T_4^4 des „gemischten Energietensors“ definiert. Es stellt sich heraus, daß im Innern

1) K. Schwarzschild, Berliner Ber. 1916, S. 424.

der Kugel die Geometrie des nichteuklidischen „sphärischen“ Raumes herrscht, und daß man zwischen dem „innen gemessenen“ und dem „außen gemessenen“ Radius zu unterscheiden hat. Weiter stellt es sich heraus, daß für das Volumen einer Kugel von gegebener Masse eine untere (also für die Dichte eine obere) Grenze existiert. Z. B. für die Masse der Sonne könnte der „außen gemessene“ Radius niemals kleiner als 3 km (rund gerechnet) sein.

Neuerdings behandelt Sen dasselbe Problem¹⁾, doch definiert er die Homogenität etwas anders als Schwarzschild: „...it has been pointed out that, strictly speaking, the condition for incompressibility is the constancy of proper density, the scalar formed by the diagonal sum of T_k^i , rather than the constancy of T_4^4 , as taken by Schwarzschild“. Die hier in Frage kommenden Tensorkomponenten sind:

$$T_i^i = p \quad (i = 1, 2, 3), \quad T_k^i = 0 \quad (i \neq k), \quad T_4^4 = -\mu c^2,$$

wo μ die Dichte (in g.cm^{-3}) bedeutet. Weiter wird die Bedingung $c^2 \mu - 3p = c^2 \delta$ eingeführt, wo δ die „invariable“ Dichte (ebenfalls in g.cm^{-3}) bezeichnet²⁾. Was die Hauptergebnisse anbetrifft, so sagt Sen: „The results obtained are somewhat unexpected. There exists really for a given density a sphere of maximum radius as well as a sphere of maximum gravitational mass, these two spheres not being identical. Conversely, for a given radius and density there are two spheres of different masses and central pressures, of which one has a central pressure smaller than that of the one with maximum radius and the other greater“³⁾. Der maximale Radius kann aus der Gleichung

$$\sqrt{\delta} \cdot R_{max} = 0,996 \cdot \frac{1}{c\kappa^{1/2}} = 0,23 \cdot 10^{14}$$

bestimmt werden⁴⁾. Hier ist unter κ nicht, wie gewöhnlich, $\frac{8\pi G}{c^2}$, sondern $\frac{8\pi G}{c^4}$ zu verstehen⁵⁾. Setzt man diesen Wert statt κ in die letzte Gleichung ein, so ergibt sich:

1) N. R. Sen, Monthly Not. R. A. S. **94**, 550, 1934.

2) Ebenda, S. 552.

3) Ebenda, S. 550.

4) Ebenda, S. 557.

5) Ebenda, S. 552.

$$R_{max} = \frac{0,498 c}{\sqrt{2 \pi G \delta}}. \quad (17)$$

Der zentrale Druck in einer inkompressiblen Kugel vom maximalen Radius läßt sich aus der Gleichung

$$p_0 = \delta \cdot 5,8 \cdot 10^{13} \text{ Atm.} \quad (18)$$

berechnen ¹⁾. Diese Gleichung zeigt, daß bei endlichem δ der maximale mögliche Druck ebenfalls endlich ist. Somit läßt sich mit einer inkompressiblen Flüssigkeit von gegebener (endlicher) Dichte kein beliebig hoher (hydrostatischer) Druck realisieren. Weiter stellt Sen die Gleichung

$$M_{max} \cdot \delta^{1/2} = 0,526 \frac{4 \pi}{c^3 \kappa^{1/2}} = 8,2 \cdot 10^{40}$$

auf ²⁾, die man auch so schreiben kann:

$$\delta = \frac{(0,526)^2}{16 \pi} \cdot \frac{c^6}{G^3 M_{max}^2}. \quad (19)$$

Man darf jedoch nicht denken, daß derartige Resultate nur bei Anwendung der Methoden der allgemeinen Relativitätstheorie zum Vorschein kommen. Wir werden gleich sehen, daß unser Problem auch elementaren Behandlungsmethoden zugänglich ist.

Elementare Behandlungsmethoden von G. I. Pokrowski, von A. Haas und von mir.

Pokrowski hat darauf hingewiesen, daß das negative Gravitationspotential an der Oberfläche eines Sternes den Wert c^2 nicht überschreiten darf. „Bei einem solchen Werte des Gravitationspotentials kann keine Energie die Oberfläche der Masse verlassen, denn die Masse jedes Energiequantums $\frac{h\nu}{c^2}$, mit diesem Potential multipliziert, ergibt die Energie $h\nu$ des Quantums... daß keine kompakte Masse die angezeigte Grenze übersteigt, deutet darauf hin, daß die Entstehung des kritischen Potentials unmöglich ist. Der Mechanismus aber, welcher die Massenbildung regelt, kann dadurch bisweilen noch nicht geklärt werden“ ³⁾. Pokrowskis Gedankengang läßt sich noch auf

1) Ebenda, S. 557.

2) Ebenda, S. 558. Im Original steht ein offenbarer Druckfehler: δ statt $\delta^{1/2}$.

3) G. I. Pokrowski, ZS. f. Phys. **49**, 589, 1928.

folgende Weise illustrieren. Es sei $-\varphi$ das Gravitationspotential eines Ortes, wo sich ein materieller Körper mit der Ruhemasse m_0 befindet. Teilen wir diesem Körper die kinetische Energie E mit, welche gerade genügt, um den Körper in die Unendlichkeit zu entfernen (wo das Gravitationspotential gleich Null ist). Da die zugeführte Energie eine Masse von $\frac{E}{c^2} g$ repräsentiert, so ist jetzt die Gesamtmasse des Körpers $m = m_0 + \frac{E}{c^2}$. Die bei der Überführung in die Unendlichkeit geleistete Arbeit ist gleich $E = m\varphi = \left(m_0 + \frac{E}{c^2}\right)\varphi$, und dies ergibt $E = \frac{m_0 c^2 \varphi}{c^2 - \varphi}$. Bei kleinen Werten von φ geht diese Formel in $E = m_0 \varphi$ über, wie dies auch zu erwarten war. Ist aber $\varphi = c^2$, so erhalten wir $E = \infty$. Somit ist $-c^2$ der extremste Wert des Gravitationspotentials¹⁾. Nur wenn man die Möglichkeit von $m_0 < 0$ voraussetzt, könnte man auch $\varphi > c^2$ für möglich halten. Wir wollen jedoch die Möglichkeit von negativen Ruhemassen erst in einem späteren Abschnitt diskutieren.

Wir müssen konsequenterweise noch einen Schritt weiter als Pokrowski tun und verlangen, daß nicht nur an der Oberfläche, sondern auch an allen übrigen Punkten des Sternes, sogar im Zentrum, das (mit verkehrtem Zeichen genommene) Gravitationspotential den Grenzwert c^2 nicht überschreite.

An der Oberfläche ist das Gravitationspotential gleich $-\frac{GM}{R}$ und im Zentrum eines homogenen Sterns gleich $-\frac{3}{2}\frac{GM}{R}$. Nach dem Gesagten muß die Bedingung

$$\frac{3}{2}\frac{GM}{R} \leq c^2 \quad (20)$$

erfüllt sein. Andererseits ist

$$M = \frac{4}{3}\pi R^3 \rho. \quad (21)$$

Das Eliminieren von R aus diesen beiden Gleichungen ergibt:

$$\rho \leq \frac{2}{9\pi} \cdot \frac{c^6}{G^3 M^2}. \quad (22)$$

1) Vgl. W. Anderson, ZS. f. Phys. **55**, 389 f., 1929. Das dort von mir geäußerte leichte Bedenken gegen Pokrowskis Ansichten hat letzterer in einem späteren Artikel (ZS. f. Phys. **58**, 700, 1929) widerlegt.

Diese Formel unterscheidet sich von (19) nur durch den Zahlenfaktor. Wir sehen also, daß auch vom Standpunkt von Pokrowskis elementarer Theorie die Dichte eines Sterns von gegebener Masse eine obere Grenze hat. Diese obere Grenze ist sonderbarerweise dem Quadrat der Masse umgekehrt proportional. Schon dies allein beweist, daß eine solche obere Grenze nicht durch Inkompressibilität der Materie bedingt sein kann, sondern ganz andere Ursachen haben muß. In der folgenden Tabelle sind nach (22) die maximalen Dichten für verschiedene Massen berechnet.

Tabelle 1.

M	ρ_{max}	M	ρ_{max}
10^{33} g	$1,74 \cdot 10^{17} \text{ g. cm}^{-3}$	10^{37} g	$1,74 \cdot 10^9 \text{ g. cm}^{-3}$
$2 \cdot 10^{33}$	$4,34 \cdot 10^{16}$	10^{38}	$1,74 \cdot 10^7$
$3 \cdot 10^{33}$	$1,93 \cdot 10^{16}$	10^{39}	$1,74 \cdot 10^5$
$4 \cdot 10^{33}$	$1,08 \cdot 10^{16}$	10^{40}	$1,74 \cdot 10^3$
$5 \cdot 10^{33}$	$6,94 \cdot 10^{15}$	10^{45}	$1,74 \cdot 10^{-7}$
10^{34}	$1,74 \cdot 10^{15}$	10^{50}	$1,74 \cdot 10^{-17}$
$5 \cdot 10^{34}$	$6,94 \cdot 10^{13}$	10^{55}	$1,74 \cdot 10^{-27}$
10^{35}	$1,74 \cdot 10^{13}$	$2 \cdot 10^{55}$	$4,34 \cdot 10^{-28}$
10^{36}	$1,74 \cdot 10^{11}$	$4,17 \cdot 10^{56}$	10^{-30}

Das Eliminieren von M aus (20) und (21) ergibt:

$$R \leq \sqrt{\frac{c}{2\pi G \rho}}, \quad (23)$$

was der Gleichung (17) analog ist. Somit hat der Radius eines Sterns von gegebener Dichte eine obere Grenze. Für eine Kugel aus Wasser ($\rho = 1$) erhalten wir $R \leq 4,63 \cdot 10^{13} \text{ cm}$; für $\rho = 10^{-30}$ ergibt sich $R \leq 4,63 \cdot 10^{28} \text{ cm}$.

Der Druck im Zentrum einer homogenen Kugel ist bekanntlich gleich

$$P_c = \frac{3}{8\pi} \cdot \frac{GM^2}{R^4}. \quad (24)$$

Eliminiert man R und M aus (20), (21) und (24), so erhält man:

$$P_c \leq \frac{\rho c^2}{3} = \rho \cdot 3 \cdot 10^{20} \text{ Dyn. cm}^{-2} = \rho \cdot 3 \cdot 10^{14} \text{ Atm.}, \quad (25)$$

was der Gleichung (18) analog ist. Somit kann man mit einer

inkompressiblen Flüssigkeit von der Dichte ρ keinen hydrostatischen Druck realisieren, der größer als $\frac{\rho c^2}{3}$ wäre.

Wir können (22) folgendermaßen úmschreiben:

$$M \leq \frac{1}{3} \left(\frac{2}{\pi} \right)^{1/2} \cdot \frac{c^3}{G^{3/2} \rho^{1/2}}. \quad (26)$$

Somit hat die Masse eines Sterns von gegebener Dichte eine obere Grenze.

Einen anderen Weg der elementaren Behandlung schlägt Haas ein¹⁾. Er urteilt folgendermaßen. Dem Weltall kommt sowohl Eigenenergie als auch Gravitationsenergie zu. Letztere entspricht einer aufzuwendenden Arbeit, ist daher negativ zu rechnen. Man kann die sehr naheliegende Annahme machen, daß die Gesamtenergie des Weltalls nicht negativ sein darf. Es muß also die Bedingung

$$Mc^2 - \frac{3}{5} \frac{GM^2}{R} \geq 0$$

erfüllt sein, oder:

$$\frac{3}{5} \frac{GM}{R} \leq c^2. \quad (27)$$

Das Eliminieren von R aus (21) und (27) ergibt:

$$\rho \leq \frac{125}{36\pi} \cdot \frac{c^6}{G^3 M^2}, \quad (28)$$

was mit (22) bis auf den Zahlenfaktor übereinstimmt²⁾. Der durchschnittliche Druck in einer homogenen Kugel ist gleich

$$\bar{P} = \frac{3}{20\pi} \cdot \frac{GM^2}{R^4}. \quad (29)$$

Eliminiert man R und M aus (21), (27) und (29), so erhält man:

$$\bar{P} \leq \frac{\rho c^2}{3}. \quad (30)$$

Es ist klar, daß die Bedingung (30) der Bedingung (25) nicht direkt widerspricht, denn wenn der Zentraldruck den Wert

1) Arthur Haas, „Kosmologische Probleme der Physik“, S. 15 f., Leipzig 1934.

2) Die Gleichung (28) habe ich bereits in ZS. f. Phys. **66**, 282, 1930 aufgestellt. Den Aufsatz von A. Haas im Anz. Akad. Wiss. Wien **67**, 159, 1930 hatte ich damals übersehen.

$\frac{\rho c^2}{3}$ nicht übersteigen darf, so darf es der durchschnittliche Druck erst recht nicht. Statt (28) kann man natürlich auch:

$$M \leq \frac{5^{3/2}}{6 \pi^{1/2}} \cdot \frac{c^3}{G^{3/2} \rho^{1/2}} \quad (31)$$

schreiben, was gleichbedeutend mit:

$$M_{max} = \frac{c^3}{6 (\pi \rho)^{1/2}} \left(\frac{5}{G} \right)^{3/2}$$

ist¹⁾. Die Formel (31) ist mit (26) bis auf den Zahlenfaktor identisch. Diese Formeln lassen sich mit gleichem Rechte sowohl auf das Weltall als Ganzes, wie auch auf die einzelnen Sterne anwenden.

Noch eine kleine Bemerkung. Haas drückt sich so aus: „Andererseits kommt dem Weltall jedenfalls auch Gravitationsenergie zu. Sie entspricht einer aufzuwendenden Arbeit, ist daher negativ zu rechnen... Wie aus der Potentialtheorie bekannt ist, ist die Gravitationsenergie einer homogenen Kugel von der Masse M gleichzusetzen $3fM^2/5R$, wenn f die Gravitationskonstante bedeutet und R den Kugelradius“²⁾. Hier ist Haas etwas inkonsequent: wenn die Gravitationsenergie, wie er sagt, negativ zu rechnen ist, so müßte er nicht $(+3fM^2/5R)$, sondern $(-3fM^2/5R)$ als Gravitationsenergie der Kugel bezeichnen. Übrigens ist dies ein Streit um Worte. Wir haben ja eigentlich immer nur mit Differenzen der Gravitationsenergien zu tun, und wenn wir die Gravitationsenergie einer unendlich ausgedehnten Kugel gleich Null setzen, so ist diese Normalisierung bloß Sache einer Konvention, welche aber nicht immer streng eingehalten wird³⁾. Die Gravitationsenergie entspricht einer aufzuwendenden Arbeit und ist negativ zu rechnen, wenn man die Bewegung von dem gravitierenden Körper weg im Auge hat. Dieselbe Gravitationsenergie entspricht aber einem Arbeitsgewinn und ist daher positiv zu rechnen, wenn man die entgegengesetzte Bewegung im Sinne

1) Vgl. Arthur Haas, Phys. Rev. (2) **48**, 973, 1935.

2) Arthur Haas, Kosmolog. Probleme, S. 15.

3) So sagt man manchmal, daß kinetische Energie in potentielle übergehe. Natürlich meint dabei niemand, daß $(+1)$ Erg kinetischer Energie sich in (-1) Erg potentieller verwandeln (was mit dem Gesetz der Erhaltung der Energie unvereinbar wäre), sondern in $(+1)$ Erg potentieller Energie.

hat. Es ist reine Konventionssache, welche Richtung wir auszeichnen wollen.

Es gibt noch einen dritten Weg, den ich bereits vor 13 Jahren eingeschlagen habe ¹⁾. Es möge die „materielle“ Masse eines homogenen Sterns mit dem Radius R gleich M_m und die „materielle“ Dichte gleich ϱ_m sein. Es ist also:

$$M_m = \frac{4}{3} \pi R^3 \varrho_m. \quad (32)$$

Zur unendlichen Ausdehnung braucht der Stern eine bestimmte Energiemenge E (die natürlich positiv zu rechnen ist). Sollte die im Stern vorhandene Energie ungenügend sein, so wollen wir das Fehlende von außen einführen. Jetzt ist die Gesamtmasse des Sterns gleich

$$M = M_m + \frac{E}{c^2}. \quad (33)$$

geworden, und er hat die Möglichkeit sich bis zur Unendlichkeit auszudehnen. Die dazu notwendige Energiemenge ist gleich

$$E = \frac{3GM^2}{5R} = \frac{3G}{5R} \left(M_m + \frac{E}{c^2} \right)^2, \quad (34)$$

was wir folgendermaßen umformen können:

$$E^2 - 2E \left(\frac{5Rc^4}{6G} - M_m c^2 \right) + M_m^2 c^4 = 0.$$

Die Auflösung dieser quadratischen Gleichung ergibt:

$$E = \frac{5Rc^4}{6G} - M_m c^2 + \sqrt{\frac{25R^2 c^8}{36G^2} - \frac{5RM_m c^6}{3G}}. \quad (35)$$

Damit E reell bleibe, muß die Bedingung

$$\frac{25R^2 c^8}{36G^2} \geq \frac{5RM_m c^6}{3G},$$

oder:

$$c^2 \geq \frac{12GM_m}{5R} \quad (36)$$

erfüllt sein. Eliminiert man R aus (36) und (32), so erhält man:

$$\varrho_m \leq \frac{125}{576\pi} \cdot \frac{c^6}{G^3 M_m^2}. \quad (37)$$

¹⁾ W. Anderson, Astron. Nachrichten **218**, 205, 1923. Die von mir in diesem Artikel gezogene Schlußfolgerung ist jedoch unrichtig formuliert.

Das Gleichheitszeichen in (37) entspricht der maximalen zulässigen Dichte, und der entsprechende Radius ist nach (36) gleich

$$R = \frac{12 GM_m}{5 c^2}. \quad (38)$$

Führt man diesen Wert von R in (35) ein, so erhält man:

$$E = M_m c^2.$$

In einem solchen Falle ist die Gesamtmasse nach (33) gleich

$$M = M_m + \frac{M_m c^2}{c^2} = 2 M_m;$$

also beträgt die Gesamtdichte

$$\varrho = 2 \varrho_m.$$

Setzt man nun $M_m = \frac{M}{2}$ und $\varrho_m = \frac{\varrho}{2}$ in (37) ein, so ergibt sich:

$$\varrho \leq \frac{125}{72 \pi} \cdot \frac{c^6}{G^3 M^2}. \quad (39)$$

Der Vergleich mit (28) zeigt, daß meine Methode einen genau doppelt so kleinen Koeffizienten ergibt, wie diejenige von Haas¹⁾.

Aus (19), (22), (28), (37) und (39) ist zu ersehen, daß die verschiedensten Methoden immer zu einem und demselben Resultat führen: die Dichte einer Kugel hat eine obere Grenze, welche umgekehrt proportional dem Quadrate der Kugelmasse ist. Daß diese obere Grenze unmöglich durch Inkompressibilität der Materie bedingt sein kann, ist leicht aus folgendem Beispiel zu ersehen. Eine in Wirklichkeit zwar nicht vorkommende, aber theoretisch dennoch mögliche Wasserstoffkugel von der Masse 10^{45} g könnte sich nach Tabelle 1 höchstens bis $1,74 \cdot 10^{-7}$ g. cm⁻³ verdichten. Trotzdem wird es doch wohl niemandem einfallen zu behaupten, daß Wasserstoff von der Dichte $1,74 \cdot 10^{-7}$ g. cm⁻³ bereits inkompressibel sei!

Jetzt taucht aber die selbstverständliche Frage nach dem „Mechanismus“ auf, durch den eine weitere Verdichtung verhindert wird. Eine Antwort auf diese Frage wollen wir auf Grund der Theorie von Nuut zu geben versuchen, von welcher im nächsten Abschnitt die Rede sein wird.

1) Die diesbezüglichen Untersuchungen von Pokrowski und von mir werden von Lundmark referiert im „Handbuch für Astrophysik“, 5. Band, 2. Hälfte, 1. Teil, S. 688 f., Berlin 1933.

Die Welt von J. Nuut.

Vor kurzem hat Nuut eine neue Theorie des Kosmos aufgestellt, welche sich von den bisherigen wesentlich unterscheidet¹⁾. Nuut betrachtet unseren dreidimensionalen Raum im großen als euklidisch, doch bewege sich dieser euklidische Raum in einem vierdimensionalen hyperbolischen Raume. Als Resultat dieser Bewegung sei die Expansion des Universums zu betrachten, welche somit nicht physikalischer, sondern rein geometrischer Natur sei. Auch entstehe dabei eine scheinbare Deformation des Weltraumes. Es sei streng zu unterscheiden zwischen den physikalischen „Eigengeschwindigkeiten“ und den rein geometrischen „Expansionsgeschwindigkeiten“. Erstere haben als obere Grenze die Lichtgeschwindigkeit c , letztere haben keine obere Grenze und addieren sich immer euklidisch. Nach der alten Auffassung müssen Körper (ohne Anfangsgeschwindigkeit), zwischen denen überhaupt keine Kräfte wirken, relativ zueinander ruhen. Nach der neuen Auffassung hingegen müssen sie sich voneinander immer mehr entfernen, wenn letzteres nicht durch irgendeine physikalische Kraft verhindert wird. Je größer aber die Dimensionen eines Körpers sind, desto größer wird auch sein Expansionsbestreben sein, bis schließlich bei genügend großen Dimensionen die inneren Attraktionskräfte überwunden werden und der Körper nach allen Seiten auseinanderfliegt. Die Expansionsgeschwindigkeit sei einfach proportional der Entfernung, und könne die Lichtgeschwindigkeit c beliebig überschreiten. Nuut macht noch darauf aufmerksam, daß die Einbettung einer Mannigfaltigkeit in eine andere von höherer Dimensionszahl eine jedem Geometer wohlbekanntete Annahme sei.

Die Theorie von J. Nuut und die Expansionsformel von Einstein und W. de Sitter.

Einstein und de Sitter haben die Expansionsformel

$$\frac{1}{R^2} \left(\frac{dR}{cdt} \right) = \frac{1}{3} \lambda Q \quad (40)$$

aufgestellt, wobei sie die Krümmung des Raumes gleich Null ansetzten und die bekannte kosmologische Konstante λ nicht

1) J. Nuut, „Eine nichteuklidische Deutung der relativistischen Welt“, Acta et Comm. Univ. Tartuensis (Dorpatensis) (A) 29₃, 1935; „Ansätze zu einer expansionistischen Kinematik“, ebenda (A) 29₆, 1935.

benutzten¹⁾. Einstein und de Sitter weisen darauf hin, daß diese Formel für eine Expansionsgeschwindigkeit von 500 km. sec⁻¹ per 10⁶ Pars. die Dichte $\rho = 4.10^{-28}$ g. cm⁻³ ergibt, was mit der geschätzten oberen Grenze der Dichte des Universums gut übereinstimmt. Diese Dichte mag vielleicht etwas zu hoch sein, ist aber dennoch von der richtigen Größenordnung. Wenn wir die auf 1 cm Länge bezogene Expansionsgeschwindigkeit durch σ bezeichnen, so haben wir:

$$\sigma = \frac{1}{R} \cdot \frac{dR}{dt}, \quad (41)$$

und dies in (40) eingeführt ergibt:

$$\sigma^2 = \frac{1}{3} \kappa \rho c^2, \quad (42)$$

oder, da $\kappa = \frac{8\pi G}{c^2}$ ist,

$$\sigma^2 = \frac{8\pi}{3} G \rho. \quad (43)$$

Wir wollen jetzt versuchen, eine (bis auf den etwas abweichenden Zahlenfaktor) ähnliche Formel auf Grund der Theorie von Nuut abzuleiten. Nach dieser Theorie ist die Expansionsgeschwindigkeit proportional der Entfernung und hat keine obere Grenze. Sie muß also bei genügender Entfernung größer als c werden. Natürlich wird jede Signalübermittlung zwischen uns und einem so weit entfernten Punkt zur Unmöglichkeit, weil die Signalgeschwindigkeit niemals größer als c sein kann. Man könnte also sagen, daß diese Punkte für uns nicht existieren, daß sie sozusagen außerhalb unserer Welt liegen. Die Grenze „unserer“ Welt ist also dort, wo die Expansionsgeschwindigkeit gleich der Lichtgeschwindigkeit ist, d. h. wo $\frac{dR}{dt} = c$ ist. Dieser Wert in (41) eingeführt ergibt:

$$R = \frac{c}{\sigma}. \quad (44)$$

Alle weiter entfernten Punkte gehören schon zu einer anderen Welt, mit der wir gar nichts zu schaffen haben. Selbst wenn diese andere Welt plötzlich restlos verschwinden sollte, so würden wir von dieser Katastrophe niemals etwas er-

¹⁾ A. Einstein und W. de Sitter, Proc. Nat. Acad. of Sciences (Washington) 18, 213, 1932.

fabren. Es ist klar, daß wir in unserer Welt keine Kugel konstruieren können, deren Radius größer als der Weltradius $R = \frac{c}{\sigma}$ wäre. Somit stellt (44) den maximalen zulässigen Radius einer Kugel dar. Andererseits ist nach (23) der maximale Radius gleich

$$R = \frac{c}{\sqrt{2\pi G \varrho}}. \quad (45)$$

Es ist nun ein sehr naheliegender Gedanke, das R in (44) zu identifizieren mit dem R in (45). Das Eliminieren dieser R aus (44) und (45) ergibt:

$$\sigma^2 = 2\pi G \varrho = \frac{1}{4} \kappa \varrho c^2. \quad (46)$$

Diese Formel unterscheidet sich von der Einstein-de Sitterschen Formel (42) [resp. (43)] nur durch den Zahlenfaktor.

Bei der Schätzung der Masse des Kosmos wird in erster Linie an die „materielle“ Masse gedacht (daher die bekannte Berechnung von $1,2 \cdot 10^{79}$ Protonen im Weltall). Es wäre daher ratsam, eine Expansionsformel mit ϱ_m , statt mit ϱ abzuleiten. Zu diesem Zweck eliminieren wir M_m aus (32) und (36); dies ergibt:

$$R^2 \geq \frac{5 c^2}{16 \pi G \varrho_m}.$$

Für den maximalen Radius haben wir die Gleichung

$$R^2 = \frac{5 c^2}{16 \pi G \varrho_m}. \quad (47)$$

Das Eliminieren von R aus (44) und (47) ergibt:

$$\sigma^2 = \frac{16 \pi G \varrho_m}{5} = \frac{2}{5} \kappa \varrho_m c^2. \quad (48)$$

Unsere Beobachtungen sind nicht genau genug, um zu entscheiden, ob (42), oder (46), oder (48) näher der Wirklichkeit ist. Jedenfalls ergeben alle drei Formeln die richtige Größenordnung.

Die Theorie von J. Nuut und die obere Grenze der Dichte.

Einstein hat in seiner ursprünglichen Theorie des Weltalls zwei Gleichungen aufgestellt:

$$\frac{\kappa \varrho}{2} = \frac{1}{R^2} \quad (49)$$

und

$$M = 4\pi^2 \frac{R}{\kappa}, \quad (50)$$

wo R den Krümmungsradius des Raumes bedeutet und M die Masse des Universums¹⁾. Das Eliminieren von R aus (49) und (50) ergibt:

$$\varrho = \frac{32\pi^4}{\kappa^3 M^2} = \frac{\pi}{16} \cdot \frac{c^6}{G^3 M^2}. \quad (51)$$

Nach dieser Gleichung läßt sich die durchschnittliche Dichte von Einsteins abgeschlossenem Universum berechnen. Andererseits gelten für einen Stern im Zustand der maximalen zulässigen Kompression nach (19), (22), (28) oder (39) Gleichungen, welche sich von der Einsteinschen (51) nur durch Zahlenfaktoren unterscheiden. Es liegt daher der Gedanke sehr nahe, einen Stern im Zustande der maximalen Kompression als eine in sich ebenso abgeschlossene Welt wie das Einsteinsche Universum zu betrachten. In einem solchen Falle müssen wir aber konsequenterweise auf derartige Sterne die Theorie von Nuut im vollen Maße anwenden, also auch die Expansionsformeln (46) oder (48) [oder vielleicht auch (42)]. Nun ist ϱ bei maximal komprimierten Sternen sehr viel größer als die durchschnittliche Dichte des Universums; also muß auch der Expansionskoeffizient σ entsprechend größer sein. Er ist so groß, daß die Oberfläche des Sternes sich bereits mit Lichtgeschwindigkeit vom Zentrum weg entfernt. Kann aber so etwas nicht für die anderen Himmelskörper gefährlich werden, die sich zufälligerweise in der Nähe befinden? — Wir untersuchen jetzt diese Frage.

Nach der Nuutschen Theorie bewegt sich ein dreidimensionaler euklidischer Raum in einem vierdimensionalen hyperbolischen Raume. Um aber das Bild dem Leser anschaulich zu machen, behandelt Nuut anfänglich die Bewegung einer Fläche (= zweidimensionale Welt) in einem dreidimensionalen hyperbolischen Raume. Wir können jedoch in Erweiterung der Nuutschen Theorie annehmen, daß im selben hyperbolischen Raume sich noch viele andere Flächen bewegen, ohne dabei einander zu berühren. Es wäre auch nicht schwer sich eine Verdoppelung einer Fläche vorzustellen, was durch Ablösung einer parallelen Fläche zustande kommen könnte. Obgleich die gegenseitige Entfernung der beiden Flächen beliebig klein sein kann, ist sie

1) A. Einstein, Berl. Ber. 1917, S. 152.

für die zweidimensionalen Einwohner beider Flächen trotzdem unüberbrückbar, da sie in der dritten Dimension liegt. In analoger Weise könnte man sich eine „Verdoppelung“ des dreidimensionalen euklidischen Raumes vorstellen, der sich im vierdimensionalen hyperbolischen bewegt. Sobald ein Stern sich bis zur äußersten zulässigen Grenze verdichtet hat, geht er in einen neuen dreidimensionalen euklidischen Raum über, der sich durch eine Raumpaltung in der Richtung der vierten Dimension von dem ursprünglichen dreidimensionalen Raum abgetrennt hat. Die Entfernung der beiden dreidimensionalen euklidischen Räume (die sich von nun an nirgends mehr berühren) kann beliebig klein sein; trotzdem ist sie für die Einwohner beider Räume unüberbrückbar, da sie in der vierten Dimension liegt. Jetzt kann sich der Stern gemäß der Nuutschen Theorie beliebig ausdehnen, ohne mit irgendeinem Körper der „alten“ Welt zusammenzustoßen. Durch einen solchen Prozeß würde es den Sternen unmöglich gemacht werden, sich mehr zu verdichten, als es nach (19), (22), (28) oder (39) zulässig ist. Die so erweiterte Theorie von Nuut wäre also imstande den „Mechanismus“ zu erklären, durch welchen die Entstehung einer unzulässig großen Dichte verhindert wird. Wenn wir aber für das Alter der Welt die „kurze“ Zeitskala akzeptieren, so ist es noch fraglich, ob bis jetzt überhaupt irgendein Stern Zeit gehabt hat die kritische Dichte zu erreichen.

II. TEIL.

Über die im Weltall tatsächlich vorkommenden maximalen Dichten und Temperaturen.

Eine mathematisch bedenkliche Methode von E. C. Stoner zur Berechnung der maximalen Temperaturen.

Stoner sagt: „Provided that the mass of a star is below the critical value, a maximum temperature may also be fixed by the condition of equation . . . which may be written

$$P(\varrho) + \frac{1}{3} a T^4 \gtrsim B_0 (M/M_s)^{2/3} \varrho^{4/3}.$$

Since $P(\varrho)$ is the maximum pressure of ionized matter at the density ϱ ,

$$\frac{1}{3} a T^4 \gtrsim B_0 (M/M_s)^{2/3} \varrho^{4/3} - P(\varrho).$$

The maximum value of T occurs when the right-hand side is a maximum¹⁾. Daraufhin findet Stoner, daß die linke Seite (also auch T) ihr Maximum bei $\varrho = \left(\frac{4 B_0}{5 k_1}\right)^3 \left(\frac{M}{M_s}\right)^2$ haben müsse (wenn $P(\varrho) = k_1 \varrho^{5/3}$ ist).

Gegen einen solchen Gedankengang muß ich aber Einspruch erheben, und zwar will ich meine Ansicht an einem konkreten Beispiel illustrieren. Wir können z. B. schreiben:

$$\sin^4\left(\frac{\pi\varrho}{\varrho_0}\right) \gtrsim 1 + \cos^2\left(\frac{\pi\varrho}{\varrho_0}\right).$$

Die rechte Seite hat ihr Maximum bei $\varrho = 0$ und bei $\varrho = \varrho_0$. Nach Stoner müßte man erwarten, daß bei denselben Werten von ϱ auch die linke Seite ihr Maximum habe. Dies trifft aber nicht zu, sondern das genaue Gegenteil findet statt: bei $\varrho = 0$ und $\varrho = \varrho_0$ erreicht die rechte Seite ihr Maximum, die linke aber ihr Minimum; bei $\varrho = \frac{\varrho_0}{2}$ und $\varrho = \frac{3\varrho_0}{2}$ hat die rechte ihr Minimum

1) E. C. Stoner, Monthly Not. R. A. S. **92**, 666 f., 1932.

erreicht und die linke ihr Maximum. Ich möchte natürlich nicht behaupten, daß auch Stoners Formel sich ebenso verhalte, aber a priori ist die Sache nicht klar. Meine Bedenken gegen Stoners Verfahren sind also rein mathematischer Natur.

Prioritätsfrage hinsichtlich der zum ersten Mal explizite aufgestellte relativistische Entartungsformel. Eddingtons Angriff gegen diese Formel. Zurückweisung seines Angriffs.

Solange die Nullpunktsgeschwindigkeiten der Elektronen eines völlig entarteten Gases klein gegenüber der Lichtgeschwindigkeit sind, gilt die Gleichung

$$p = K_1 \rho^{5/3}, \text{ resp. } p = K_1^1 n^{5/3}. \quad (52)$$

Bei extremen Nullpunktsgeschwindigkeiten hingegen gilt die „relativistische“ Gleichung

$$p = K_2 \rho^{4/3}, \text{ resp. } p = K_2^1 n^{4/3}. \quad (53)$$

Hier bedeutet n die Zahl der Elektronen pro ccm, die proportional der Dichte ρ ist; K_1 , K_2^1 , K_2 und K_2^1 sind Konstanten.

Ich glaube der erste gewesen zu sein, der eine solche „relativistische“ Gleichung explizite aufgestellt hat. Leider war mein damaliges Verfahren recht ungenau¹⁾, so daß die Koeffizienten in (53) merklich von der Wirklichkeit abwichen. Ich habe damals die erwähnte Gleichung folgendermaßen geschrieben:

$$p = \left(\frac{2A}{3}\right)^{1/2} cn^{4/3},$$

wo A zur Abkürzung für $\frac{1}{20} \left(\frac{6}{\pi}\right)^{2/3} h^2$ gesetzt war²⁾. Ohne Abkürzung geschrieben sieht meine damalige Gleichung folgendermaßen aus:

$$p = \left(\frac{1}{30}\right)^{1/2} \left(\frac{6}{\pi}\right)^{1/3} hcn^{4/3}. \quad (54)$$

Stoner war der erste, der den Koeffizienten der „relativistischen“ Gleichung richtig berechnete³⁾. Die in einem ccm enthaltene kinetische Energie ist nach Stoner gleich

1) Unter anderem hatte ich das statistische Gewicht des Elektrons gleich 1, statt gleich 2 gesetzt.

2) W. Anderson, ZS. f. Phys. **54**, 435, Gleichung (12), 1929.

3) E. C. Stoner, Phil. Mag. (7) **9**, 944, 1930.

$$\frac{3}{8} \left(\frac{3}{\pi} \right)^{1/3} hcn^{4/3}.$$

Der entsprechende Druck ist gleich $\frac{1}{3}$ dieser Energie (im Gegensatz zu $\frac{2}{3}$ im nicht relativistischen Falle), somit haben wir:

$$p = \frac{1}{8} \left(\frac{3}{\pi} \right)^{1/3} hcn^{4/3}. \quad (55)$$

Der Vergleich meiner ursprünglichen relativistischen Formel (54) mit der Stonerschen (55) zeigt nur in den Koeffizienten einen Unterschied. Die relativistische Gleichung ist viel benutzt worden von Chandrasekhar u. a., hat also allgemeine Anerkennung gefunden.

Um so größer war die Überraschung, als Eddington auf dem Meeting of the Roy. Astron. Soc. vom 11. Januar 1935 sich folgendermaßen ausdrückte: „I do not know whether I shall escape from this meeting alive, but the point of my paper is that there is no such thing as relativistic degeneracy!“¹⁾ Auf einem späteren Meeting (vom 10. Mai 1935) sagt er: „I have only to add that my degeneracy formula seems to have raised a hornet's nest about me. In my opinion, however, I have not yet been stung!“²⁾ Eddington hat seine Ansichten über die relativistische Entartung in zwei größeren Aufsätzen ausführlich entwickelt³⁾. Eddington behauptet darin, daß der Nullpunktdruck eines Gases niemals durch die Gleichung $p = K_2 \rho^{4/3}$ ausgedrückt werden könne, sondern immer nur durch $p = K_1 \rho^{5/3}$. Möller und Chandrasekhar haben Eddingtons Argumente einer Kritik unterzogen⁴⁾. In einem weiteren Aufsatz sagt Chandrasekhar: „Eddington has questioned the validity of the relativistic equation of degenerate matter which is still generally accepted. There are, however, grounds for not abandoning the accepted form of the equation of state“⁵⁾.

Wir wollen Eddington auf eine ganz andere Weise widerlegen, indem wir beweisen folgendes

1) A. S. Eddington, *The Observatory* **58**, 38, 1935.

2) Ebenda, S. 176.

3) A. S. Eddington, *Monthly Not. R. A. S.* **95**, 194, 1935; *Proc. Roy. Soc. London (A)* **152**, 253, 1935.

4) Chr. Möller und S. Chandrasekhar, *Monthly Not. R. A. S.* **95**, 673, 1935.

5) Ebenda, S. 676.

Theorem.

Entweder hat ein Gas einen Nullpunktsdruck, oder es hat keinen. Wenn es einen Nullpunktsdruck hat, so muß letzterer bei kleinen Nullpunktsgeschwindigkeiten proportional $n^{5/3}$ sein, und bei extrem großen proportional $n^{4/3}$. Um dies zu beweisen, ist weder Fermi-Statistik noch überhaupt Quantentheorie notwendig, sondern bloß die elementarsten Grundgesetze der Thermodynamik und der Relativitätstheorie.

Beweis.

Das „erste“ Gesetz der Thermodynamik wird so geschrieben :

$$dQ = dU + pdv. \quad (56)$$

Hier bedeutet dQ die zugeführte Wärme und dU den Zuwachs an innerer Energie. Die Gleichung (56) muß immer erfüllt sein, ganz unabhängig davon, ob p einen gewöhnlichen Gasdruck oder einen Nullpunktsdruck darstellt, ob U gewöhnliche thermische oder Nullpunktsenergie bedeutet. Die Gleichung (56) drückt ja das Gesetz der Erhaltung der Energie aus, und dies Gesetz macht für den entarteten Zustand keine Ausnahme! Für ein einatomiges Gas kann U mit der translatorischen Energie der Atome identifiziert werden, wobei es wiederum belanglos ist, ob die translatorischen Geschwindigkeiten Nullpunktsgeschwindigkeiten darstellen oder gewöhnliche thermische Geschwindigkeiten. Bei einer adiabaten Ausdehnung muß $dQ = 0$ gesetzt werden; außerdem können wir $U = vE$ schreiben, wenn E die Energiedichte bedeutet. Gleichung (56) geht dann über in:

$$0 = d(vE) + pdv = vdE + Edv + pdv = vdE + (E + p)dv. \quad (57)$$

Bei kleinen Atomgeschwindigkeiten ist bekanntlich $p = \frac{2E}{3}$. Dies in (57) eingeführt ergibt:

$$0 = vdE + \frac{5E}{3}dv.$$

Führt man die Integration aus, so erhält man:

$$Ev^{5/3} = \text{Konst.},$$

also (wenn man bedenkt, daß $p \sim E$ ist):

$$p \sim E \sim \frac{1}{v^{5/3}}. \quad (58)$$

Nähern sich hingegen die Atomgeschwindigkeiten der Lichtgeschwindigkeit, so muß $p = \frac{E}{3}$ gesetzt werden ¹⁾. Dann erhalten wir aus (57):

$$0 = v dE + \frac{4E}{3} dv,$$

oder:

$$p \sim E \sim \frac{1}{v^{4/3}}. \quad (59)$$

Da $v \sim \frac{1}{n}$ ist, so erhalten wir aus (58) für kleine Atomgeschwindigkeiten:

$$p \sim n^{5/3} \quad (60)$$

und aus (59) für extrem große Atomgeschwindigkeiten:

$$p \sim n^{4/3}. \quad (61)$$

Das Wort „Nullpunktsdruck“ bedeutet, daß ein Gas diesen Druck beim absoluten Nullpunkt der Temperatur aufweist. Läßt man in einem solchen Falle das Gas sich unter Arbeitsleistung adiabatisch ausdehnen, so kann seine Temperatur natürlich nicht fallen, da sie am Anfang der Expansion bereits beim absoluten Nullpunkt war. Sich bei dieser Expansion erwärmen kann das Gas ebenfalls nicht, denn sonst müßte dasselbe (erwärmte) Gas beim umgekehrten Prozeß wieder bis zum absoluten Nullpunkt abkühlen. Dies würde aber bedeuten, daß wir imstande wären, durch einfache adiabate Kompression eines warmen Gases den absoluten Nullpunkt zu erreichen, der nach der dominierenden Ansicht für unerreichbar gilt. Somit darf unser Gas weder sich erwärmen noch abkühlen, es muß also seine Temperatur unverändert beim absoluten Nullpunkt bleiben, und p wird daher die ganze Zeit den Nullpunktsdruck darstellen. Daraus ziehen wir die wichtige Schlußfolgerung, daß die adiabate Zustandsgleichung identisch mit der Zustandsgleichung eines völlig entarteten Gases sein muß. Somit können wir (60) auf gewöhnliche volle Entartung beziehen, und (61) auf relativistische. Damit ist unser Theorem bewiesen.

Bei kleinen Geschwindigkeiten kann die Masse eines jeden

1) Vgl. W. Anderson, „Die Beziehung zwischen dem Gasdruck und der translatorischen Energie der Gasmoleküle“, ZS. f. Phys. 58, 443, 1929.

Atoms als konstant und von n unabhängig angesehen werden; somit muß die Masse von n Atomen, d. h. die Dichte ρ , proportional n sein. Statt (60) können wir also schreiben:

$$p \sim \rho^{5/3}. \quad (62)$$

Bei großen Geschwindigkeiten, also bei großen n , ist die Masse eines einzelnen Atoms nicht konstant und hängt von n ab. Bei extremen Geschwindigkeiten ist die Masse, also auch die Dichte, des Gases in der Hauptsache kinetischer Natur, d. h. $\rho = \frac{E}{c^2}$. Da in diesem Falle $p = \frac{E}{3}$ ist, so können wir schreiben:

$$p = \frac{1}{3} \rho c^2, \quad (63)$$

also genau so wie bei der Hohlraumstrahlung.

Sollte aber einem solchen „relativistischen“ Gase ein anderes „nichtrelativistisches“ in genügender Proportion beige-mischt sein, dessen Atome sehr viel schwerer sind, so können die Massen der letzteren den Hauptteil der Gesamtmasse aus-machen. Die Zahl der schweren Atome sei proportional n ; sie bewegen sich so langsam, daß ihre Massen als konstant ange-sehen werden dürfen. In einem solchen Falle wird die Dichte des Gases proportional der Zahl der schweren Atome pro ccm sein, also auch proportional n . Statt (61) können wir schreiben:

$$p \sim \rho^{4/3}. \quad (64)$$

Ein solcher Fall begegnet uns bei (mechanisch) ionisiertem Gase, dessen Elektronen relativistisch und dessen Atomkerne nicht-relativistisch entartet sind. Sollten letztere auch relativistisch entartet sein, so gilt nicht mehr (64), sondern (63), wie dies nicht schwer einzusehen ist.

Bei allen diesen Betrachtungen haben wir weder zur Fermi-Statistik, noch überhaupt zur Quantentheorie Zuflucht genom-men. Die Fermi-Statistik ist notwendig um zu zeigen, daß Gase, welche dieser Statistik folgen, Nullpunktsenergie besitzen. Fermi-Statistik ist auch nötig, um die Koeffizienten in (52) und (53) genau zu berechnen. Will man aber bloß den Exponenten von n (resp. von ρ) berechnen, so genügen die elementaren Gesetze der Thermodynamik und der Relativitätstheorie. Der Exponent von n hat nur indirekt mit der Fermi-Statistik zu tun. Mehr als das: wir werden gleich sehen, daß sogar die relativistische

Formel $p = K h c n^{4/3}$ (wo K einen Zahlenfaktor bedeutet) durchaus nicht als etwas für die Fermi-Statistik Spezifisches betrachtet werden darf!

Der Druck der Hohlraumstrahlung ist gleich

$$p = \frac{aT^4}{3} = \left(\frac{8\pi^5 k^4}{15 c^3 h^3} \right) \frac{T^4}{3} = \frac{8\pi^5 k^4 T^4}{45 c^3 h^3}. \quad (65)$$

Die in einem ccm enthaltene Zahl der Lichtquanten kann gleich

$$n = 8\pi \left(\frac{kT}{hc} \right)^3 \int_0^\infty \frac{x^2 dx}{e^x - 1} = 2,40412 \cdot 8\pi \left(\frac{kT}{hc} \right)^3 \quad (66)$$

angenommen werden¹⁾. Das Eliminieren von T aus (65) und (66) ergibt:

$$p = \frac{\pi^{11/3} h c n^{4/3}}{90 \cdot (2,40412)^{4/3}} = 0,22946 \cdot h c n^{4/3}. \quad (67)$$

Andererseits ergibt Stoners Formel (55) für ein relativistisch entartetes Elektronengas:

$$p = \frac{1}{8} \left(\frac{3}{\pi} \right)^{1/3} h c n^{4/3} = 0,12309 \cdot h c n^{4/3}. \quad (68)$$

Die Formel (67) bezieht sich auf „Lichtquantengas“ (Hohlraumstrahlung), welches bekanntlich der Bose-Statistik folgt; die Formel (68) hingegen auf relativistisch entartetes Elektronengas (bei 0° abs.), welches der Fermi-Statistik folgt. Im ersteren Falle haben wir es mit Temperaturgeschwindigkeiten der Lichtquanten zu tun, im letzteren mit Nullpunktseschwindigkeiten der Elektronen. Trotz dieses großen Unterschieds sind beide Formeln bis auf den Zahlenfaktor identisch! Damit ist bewiesen, daß eine Gleichung von der Form $p = K h c n^{4/3}$ sowohl für die relativistischen Nullpunktseschwindigkeiten (bei Fermi-Statistik) als auch für die Temperaturgeschwindigkeiten (bei Bose-Statistik) gültig ist.

Als ich vor sieben Jahren den Druck der Hohlraumstrahlung als Nullpunktsdruck der Lichtquanten auffaßte und ihn daher nach den Regeln der Fermi-Statistik berechnete, so schien es damals, als ob ich einen prinzipiellen Fehler begehe. Jetzt sehen wir, daß der Fehler gar nicht sehr groß ist. Mehr als das:

1) A. S. Eddington, „The Internal Constitution of the Stars“, S. 55 f., Cambridge 1926.

bei der Berechnung des relativistischen Nullpunktsdrucks des Lichtquantengases benutzte ich damals meine ursprüngliche Gleichung (54), also

$$p = \left(\frac{1}{30}\right)^{1/2} \left(\frac{6}{\pi}\right)^{1/3} hcn^{4/3} = 0,22652 \cdot hcn^{4/3}. \quad (69)$$

Der Vergleich mit (67) zeigt nicht bloß eine annähernde, sondern eine beinahe absolute Übereinstimmung.

Schon damals (mein Manuskript ist am 23. Februar 1929 bei der Redaktion der „Zeitschrift für Physik“ eingegangen) rechnete ich nicht nur mit der relativistischen Entartung, sondern suchte sogar den Übergang von gewöhnlicher zu relativistischer Entartung mathematisch zu erfassen. Zu diesem Zweck leitete ich die Formel

$$m = \frac{m_0}{2} + \left(\frac{m_0^2}{4} + 5,5035 \cdot 10^{-75} n^{2/3}\right)^{1/2} \quad (70)$$

ab, wo m_0 die Ruhemasse des Elektrons bedeutet und m seine Gesamtmasse. Letztere führte ich in die Gleichung

$$p = 3,301 \cdot 10^{-54} \cdot \frac{n^{5/3}}{m} \quad (71)$$

ein¹⁾. Auf diese Weise konnte ich den Nullpunktsdruck des Elektronengases für das Übergangsgebiet von der gewöhnlichen zu der relativistischen Entartung berechnen (freilich sind die hier auftretenden Zahlenfaktoren nicht ganz richtig).

Drei Jahre später hat Stoner eine Tabelle für das erwähnte Übergangsgebiet veröffentlicht²⁾. In der vorletzten Kolumne dieser Tabelle sind die Verhältnisse zwischen dem wirklichen Nullpunktsdruck und dem nach der gewöhnlichen nichtrelativistischen Formel berechneten aufgeführt. Die letzte Kolumne der Tabelle enthält die Verhältnisse zwischen dem wirklichen Nullpunktsdruck und dem nach der gewöhnlichen relativistischen Formel berechneten.

Nun laßen sich derartige Verhältniszahlen auch aus unseren Formeln (70) und (71) berechnen, und es ist interessant, die so gewonnenen Zahlen mit den Stonerschen zu vergleichen. Die Gleichung (71) zeigt, daß der Nullpunktsdruck umgekehrt pro-

1) W. Anderson, ZS. f. Phys. **54**, 436 f., 1929.

2) E. C. Stoner, Monthly Not. R. A. S. **92**, 657, 1932.

portional m ist. Nach der gewöhnlichen nichtrelativistischen Formel muß man in (71) $m = m_0$ setzen, wodurch aber p zu groß wird. Das Verhältnis des wirklichen Druckes zu dem so berechneten ist gleich

$$\frac{m_0}{m} = \frac{1}{0,5 + (0,25 + 6,7944 \cdot 10^{-21} n^{2/3})^{1/2}}, \quad (72)$$

und das Verhältnis des wirklichen Druckes zu dem nach der gewöhnlichen relativistischen Formel berechneten:

$$\begin{aligned} & \frac{(5,5035 \cdot 10^{-75} n^{2/3})^{1/2}}{\frac{m_0}{2} + \left(\frac{m_0^2}{4} + 5,5035 \cdot 10^{-75} n^{2/3} \right)^{1/2}} = \\ & = \frac{7,4186 \cdot 10^{-38} n^{1/3}}{4,5 \cdot 10^{-28} + (2,025 \cdot 10^{-55} + 5,5035 \cdot 10^{-75} n^{2/3})^{1/2}}. \quad (73) \end{aligned}$$

In Tabelle 2 sind die so berechneten Verhältniszahlen mit den entsprechenden Stonerschen zusammengestellt.

Tabelle 2.

Übergangsgebiet von der gewöhnlichen zu der relativistischen Entartung.				
log n	Verhältnis des wirklichen Nullpunktsdrucks zu dem nach der gewöhnlichen			
	nichtrelativistischen Formel berechneten		relativistischen Formel berechneten	
	nach E. C. Stoner (im Jahre 1932)	auf Grund meiner im Jahre 1929 aufgestellten Formeln	nach E. C. Stoner (im Jahre 1932)	auf Grund meiner im Jahre 1929 aufgestellten Formeln
26,7732	0,996	0,995	0,0796	0,0689
28,2045	0,967	0,960	0,232	0,199
29,1078	0,894	0,869	0,429	0,361
30,0108	0,709	0,680	0,682	0,565
30,6762	0,520	0,507	0,832	0,702
32,7732			0,990	0,930
34,2045			0,999	0,976

Die wichtigsten Fehler in meinem oben erwähnten Aufsatz vom Jahre 1929 waren:

1) ich setzte das statistische Gewicht des Elektrons gleich 1 (statt gleich 2), und

2) ich nahm an, daß auch in relativistischen Fällen der Druck $\frac{2}{3}$ der im ccm enthaltenen kinetischen Energie ausmache (statt $\frac{1}{3}$).

Und trotzdem hat Eddington in einem gewissen Sinne recht!

Wir haben Eddingtons Einwände widerlegt. Damit könnte man die von ihm aufgerollte Frage als erledigt betrachten. Und trotzdem hat Eddington in einem gewissen Sinne recht! Um dies jedoch zu verstehen, müssen wir vorher folgendes Problem untersuchen.

Sommerfeld sagt: „Die Geschwindigkeit ist im Aphel klein und steigt mit der Annäherung an das Perihel. Wenn das Elektron auf einer solchen Bahn in nächster Nähe des Kerns vorbeisaußt, dem starken Kraftfelde in der Kernnähe ausgesetzt, so steigt mit der Geschwindigkeit auch seine Masse an . . . Mit der Massenveränderlichkeit hängt auch die Perihelbewegung der Ellipse zusammen“¹⁾. Die Theorie der Massenveränderlichkeit des Elektrons gestattete es Sommerfeld, die sogen. „relativistische Feinstruktur“ qualitativ und quantitativ zu erklären. Dies betrachtet Sommerfeld als endgültigen Beweis der Richtigkeit seiner Theorie. „Was für die allgemeine Relativitätstheorie die Perihelbewegung des Merkur bedeutet, das bedeutet für die spezielle Relativitätstheorie und für die Atomstruktur der Tatsachenkomplex der Feinstruktur.“

Sehen wir uns aber etwas näher die Konsequenzen an, zu denen Sommerfelds Interpretation der Feinstruktur uns führt.

Es möge ein Elektron unter Ausstrahlung des Energiequants $h\nu$ von einer höheren Quantenbahn auf eine niedrigere übergehen. Nach dem Übergange ist die Geschwindigkeit sowohl des Elektrons als auch des Atomkerns²⁾ größer geworden, also müßte nach Sommerfeld die Masse des Elektrons und des Kerns (d. h. die Masse des ganzen Atoms) sich vergrößert haben. In

1) A. Sommerfeld, „Atombau und Spektrallinien“, 4. Auflage, S. 419 Braunschweig 1924.

2) Das Elektron und der Kern rotieren ja um ihren gemeinsamen Schwerpunkt.

Wirklichkeit hat sich aber die Atommasse durch den Verlust des Energiequants $h\nu$ um $\frac{h\nu}{c^2}$ verringert!

Man könnte vielleicht einwenden, daß die Masse des Atoms nicht einfach gleich der Summe der Elektronen- und der Kernmasse sei, sondern daß die Beziehung bestehe:

$$\text{Masse des Atoms} = \text{Masse des Elektrons} + \text{Masse des Kerns} + \text{Masse der potentiellen Energie.}$$

Da nun letztere als negativ angenommen wird, so wäre eine Abnahme der Atommasse (als Ganzes) bei gleichzeitiger Zunahme der Elektronen- und der Kernmasse tatsächlich denkbar. Aber wo soll denn diese potentielle Energie lokalisiert sein? Soll man sie sich als Fluidum von negativer Masse vorstellen, in welches das Elektron und der Kern eingebettet sind? Natürlich müßte daß „Abblasen“ des Fluidums als unmöglich angenommen werden, so daß letzteres dem Elektron und dem Kern immer folgen müßte. Wenn aber dieses Fluidum mit negativer Masse auch nur teilweise dem Elektron folgt, so muß die Masse des letzteren beim Rotieren um den Kern verkleinert erscheinen, was auf die „relativistische“ Feinstruktur nicht ohne Einfluß bleiben dürfte.

Ich glaube die Sache viel einfacher erklären zu können, und zwar ohne jedes mystische Fluidum von negativer Masse. Mein Gedanke läßt sich besonders augenscheinlich am primitiven elektrostatischen Modell des Elektrons demonstrieren. Um die notwendige Elektrizitätsmenge auf der kleinen Elektronenoberfläche zu konzentrieren, muß zur Überwindung der elektrostatischen Abstoßungskraft eine bestimmte Energiemenge zugeführt werden, deren Masse mit der Ruhemasse des Elektrons identisch ist. Sollte sich nun in der Nähe ein anderer Körper mit entgegengesetzter Ladung befinden, so ist bekanntlich eine geringere Energiemenge als vorher notwendig. Dann muß aber auch die Ruhemasse des Elektrons kleiner sein. Somit hängt die Ruhemasse des primitiven elektrostatischen Elektrons von der Nähe anderer Ladungen ab. Bewegt sich nun dies primitive Elektron um den Kern längs einer Ellipse, so wird die kinetische Energie des Elektrons (also auch die Masse dieser Energie) bei der Annäherung an den Kern wachsen. Dafür wird aber die Ruhemasse des Elektrons abnehmen, und zwar um genau so viel, daß die Gesamtmasse des Elektrons unverändert bleibt.

Letzteres wird ja vom Gesetz der Erhaltung der Energie verlangt. Natürlich verlangt dasselbe Gesetz, daß nicht nur das primitive elektrostatische, sondern auch das wirkliche Elektron sich genau in gleicher Weise verhalte. Somit muß die Gesamtmasse (d. h. kinetische Masse + Ruhemasse) des Elektrons bei seiner elliptischen Bewegung um den Kern (richtiger: um den gemeinsamen Schwerpunkt) konstant bleiben. Wie ist aber in einem solchen Falle Sommerfelds sogen. „relativistische“ Feinstruktur zu erklären?

„Es wirken demnach auf zwei einander entsprechende Ladungen des bewegten Systems Σ und des ruhenden Systems Σ_0 Kräfte, die bezüglich der Komponenten parallel der Bewegungsrichtung einander gleich sind, während die zur Bewegungsrichtung senkrechten Komponenten in Σ im Verhältnis $\alpha = \sqrt{1-\beta^2}$ kleiner sind als in Σ_0 “¹⁾.

Ich glaube, daß wir nolens volens gezwungen sind eine ähnliche Beeinflussung der elektrostatischen Anziehungskraft auch zwischen Elektron und Kern anzunehmen. Das Multiplizieren dieser Anziehungskraft mit $\sqrt{1-\beta^2}$ muß ja genau zu derselben „relativistischen“ Feinstruktur führen, wie das Multiplizieren der Elektronenmasse mit $\frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}$. Somit hat Sommerfeld nach unserer Meinung die „relativistische“ Feinstruktur falsch interpretiert. Sollte aber jemand in dieser Frage mit uns nicht einverstanden sein, so möge er selber nach einem besseren Auswege suchen. Jedenfalls darf der Konflikt zwischen Sommerfelds Auffassung und dem Gesetz der Erhaltung der Energie nicht einfach ignoriert werden, sondern verlangt Aufklärung.

Ähnlich liegen die Verhältnisse auch im Falle der Newtonschen Gravitation. Wenn ein Himmelskörper längs einer Ellipse um einen anderen (genauer: um den gemeinsamen Schwerpunkt) rotiert, so muß bei beiden die Zunahme an kinetischer Masse genau kompensiert sein durch eine gleichgroße Verringerung der Ruhemasse. Sollten aber trotzdem die Beobachtungen scheinbar auf eine Veränderlichkeit der Gesamtmasse hindeuten, so darf die Interpretation dieser Erscheinung nicht dem Gesetz der Erhaltung der Energie widersprechen; oder man interpretiere die Erscheinung überhaupt nicht!

1) M. Abraham, „Theorie der Elektrizität“, 4. Auflage, 2. Band, S. 145, Leipzig— Berlin 1920.

Konstanz der Ruhemasse bedeutet Veränderlichkeit der Gesamtmasse. Eine solche Veränderlichkeit widerspricht aber nicht nur dem Gesetz der Erhaltung der Energie, sondern auch noch einem anderen Grundgesetz der Mechanik. Es sei ein Himmelskörper mit einem Satelliten gegeben, der um den ersteren längs einer Ellipse rotiert. Bei konstanten Ruhemassen beider Körper müßte sich die Gesamtmasse des ganzen Systems periodisch ändern. In gewisser Entfernung von diesem System befinde sich ein zweites gleiches, dessen Gesamtmasse ebenfalls periodisch schwankt. Mögen die Phasen beider Schwingungen gegeneinander um 180° verschoben sein: erreicht die Gesamtmasse des einen Systems ihr Maximum, so ist bei dem zweiten System Minimum, und umgekehrt. Die Folge davon wird sein, daß der gemeinsame Schwerpunkt beider Systeme nicht immer genau in der Mitte zwischen ihnen liegen wird, sondern sich bald nach der einen, bald nach der anderen Seite verschieben muß. Die beiden Systeme zusammen bilden ein System höherer Ordnung, dessen Schwerpunkt ausschließlich durch innere Kräfte hin- und herbewegt wird. Dies widerspricht aber einem bekannten Grundgesetz der Mechanik, wonach innere Kräfte niemals den Schwerpunkt eines Systems verändern können.

Siedentopf sagt: „Im entarteten Gebiete wächst mit steigender Dichte die Nullpunktsenergie, damit die Nullpunktsgeschwindigkeit und mithin auch die Masse der freien Teilchen, so daß infolge des Steigens des Energieinhalts die Gesamtmasse des Sternes bei zunehmender Dichte einen Zuwachs erfahren müßte. Dies Ergebnis ist offenbar absurd; um ihm zu entgehen, müssen wir auch die Masse der potentiellen Energie mitberücksichtigen“¹⁾. Nach unserer Auffassung wird dieser Forderung am einfachsten durch die Annahme einer veränderlichen Ruhemasse genügt. Die Verdichtung des Sterns ist begleitet von einer Zunahme der kinetischen Massen der einzelnen Partikeln und einer Abnahme ihrer Ruhemassen. Wäre der Stern von der Masse M imstande sich so weit zu verdichten, daß die frei gewordene Kontraktionsenergie den Wert Mc^2 erreicht, so müßte die ganze Ruhemasse verschwinden und nur kinetische Masse nachbleiben, wie dies bei der Hohlraumstrahlung der Fall ist. Wir hätten also eine restlose Verwandlung von Materie in Energie

1) H. Siedentopf, Astron. Nachr. 241, 282, 1931.

vor uns. Natürlich wäre in diesem Falle die Zustandsgleichung durch (63) gegeben. Was müßten wir aber von einer weiteren Verdichtung des Sterns erwarten, wenn sie möglich wäre? — Offenbar negative Werte für die Ruhemasse! Auf diese Frage kommen wir noch später zurück. Nach (28) verschwindet die Ruhemasse der Sonne bei $\rho = 6,82 \cdot 10^{17} \text{ g. cm}^{-3}$. Ob sich die Sonne so weit verdichten kann, ist eine andere Frage.

Die relativistische Entartung beruht darauf, daß bei großer Nullpunktsenergie die Gesamtmasse eines einzelnen Elektrons sich merklich vergrößert. Ist aber die Zunahme an kinetischer Masse durch die gleichzeitige Abnahme an Ruhemasse genau kompensiert, so muß selbst bei relativistischen Nullpunktsgeschwindigkeiten nicht die relativistische, sondern die gewöhnliche Entartungsformel angewandt werden, weil ja die Gesamtmasse eines jeden Elektrons unverändert bleibt. In diesem Sinne hat also Eddington recht!

Es möge ein Stern nur aus Neutronen bestehen, die bekanntlich gleich den Elektronen der Fermi-Statistik folgen¹⁾. Die Masse des Neutrons setzen wir gleich $1,66 \cdot 10^{-24} \text{ g.}$ Der Einfachheit halber nehmen wir an, daß die Nullpunktsenergien der einzelnen Neutronen untereinander gleich sind, und daß der Stern im Verlaufe seines „Lebens“ keine Energie ausgestrahlt hat. In diesem Falle muß die Gesamtmasse des Sterns im abgekühlten Endstadium mit der anfänglichen Gesamtmasse identisch sein, desgleichen die Gesamtmasse eines jeden einzelnen Neutrons, bei dem also die Zunahme an kinetischer Masse genau kompensiert wird durch gleichzeitige Abnahme an Ruhemasse. Wenn so, so darf selbst bei relativistischen Nullpunktsgeschwindigkeiten nur die gewöhnliche, nicht aber die sogen. „relativistische“ Formel angewandt werden, da ja bei einem jeden Neutron seine Masse als Ganzes unverändert gleich $1,66 \cdot 10^{-24}$ bleiben muß (freilich wird jetzt der

1) „Für die folgenden Überlegungen wird angenommen, daß die Neutronen den Regeln der Fermistatistik folgen und den Spin $\frac{1}{2} \frac{h}{2\pi}$ besitzen. Diese Annahme wird notwendig sein, um die Statistik des Stickstoffkerns zu erklären, und entspricht den empirischen Ergebnissen über die Kernmomente“ (W. Heisenberg, ZS. f. Phys. 77, 1, 1932).

Nullpunktsdruck nicht $\frac{2}{3}$ der in einem ccm enthaltenen kinetischen Nullpunktsenergie betragen, sondern $\frac{1}{3}$).

Der Nullpunktsdruck des Neutronengases ist gleich

$$p = \frac{1}{20} \left(\frac{3}{\pi} \right)^{2/3} \frac{h^2 n^{5/3}}{1,66 \cdot 10^{-24}} = 1,2531 \cdot 10^{-30} n^{5/3},$$

wenn man $h = 6,55 \cdot 10^{-27}$ und $c = 3 \cdot 10^{10}$ setzt. Es sei die in einem ccm enthaltene Nullpunktsenergie durch E bezeichnet. Bei gewöhnlichen Nullpunktsgeschwindigkeiten haben wir $E = \frac{3p}{2}$ zu setzen, und bei stark relativistischen: $E = 3p$. Danach ist die gewöhnliche Nullpunktsenergie eines einzelnen Neutrons gleich

$$\frac{E}{n} = \frac{3p}{2n} = 1,8797 \cdot 10^{-30} n^{2/3},$$

und die relativistische

$$\frac{E}{n} = \frac{3p}{n} = 3,7594 \cdot 10^{-30} n^{2/3}.$$

Die Dichte des Neutronengases ist $\rho = n \cdot 1,66 \cdot 10^{-24} \text{ g. cm}^{-3}$, darum können wir schreiben:

$$p = \frac{1}{20} \left(\frac{3}{\pi} \right)^{2/3} \cdot \frac{h^2 (1,66 \cdot 10^{-24} n)^{5/3}}{(1,66 \cdot 10^{-24})^{8/3}} = 5,3845 \cdot 10^9 \rho^{5/3} = K \rho^{5/3}.$$

Es möge ein solcher Neutronengasstern sich im Endstadium seiner Entwicklung (d. h. beim absoluten Nullpunkt seiner Temperatur) befinden, wobei wir der Einfachheit halber den Stern als homogen und die Neutronen als materielle Punkte annehmen wollen. Die Zahl der Neutronen pro ccm sei $n = 10^{12}$. Dann ist die Nullpunktsenergie eines jeden einzelnen Neutrons gleich

$$1,8797 \cdot 10^{-50} n^{2/3} = 1,88 \cdot 10^{-12} \text{ Erg (abgerundet),}$$

was einer Masse von

$$\frac{1,88 \cdot 10^{-22}}{c^2} = \frac{1,88 \cdot 10^{-22}}{9 \cdot 10^{20}} = 2,1 \cdot 10^{-43} \text{ g}$$

entspricht. Dies ist also der Zuwachs des Neutrons an kinetischer Masse. Da nach dem Gesetz der Erhaltung der Energie die Gesamtmasse des Neutrons sich nicht verändern kann, so sind wir gezwungen ihm die verminderte Ruhemasse $1,66 \cdot 10^{-24} - 2,1 \cdot 10^{-43}$ zuzuschreiben. Wir haben es hier also mit einer teil-

weisen Verwandlung von Materie in Energie zu tun, wobei die Gesamtmasse des Neutrons

$$2,1 \cdot 10^{-43} + (1,66 \cdot 10^{-24} - 2,1 \cdot 10^{-43}) = 1,66 \cdot 10^{-24} \text{ g}$$

konstant bleibt. Die Dichte des Neutronengases ist

$$\rho = n \cdot 1,66 \cdot 10^{-24} = 10^{12} \cdot 1,66 \cdot 10^{-24} = 1,66 \cdot 10^{-12} \text{ g} \cdot \text{cm}^{-3},$$

und der Nullpunktsdruck

$$p = K\rho^{5/3} = 5,3845 \cdot 10^9 (1,66 \cdot 10^{-12})^{5/3} = 1,25 \cdot 10^{-10} \text{ Dyn} \cdot \text{cm}^{-2}.$$

Aus Tabelle 3 können wir ersehen, daß wenn bei einem Neutronengasstern im abgekühlten Endstadium $n = 7,9224 \cdot 10^{39}$ ist, die Ruhemasse des Neutrons gleich Null wird. Dies bedeutet eine restlose Verwandlung von Materie in Energie. In diesem Falle ist der Nullpunktsdruck

$$p = K\rho^{5/3} = \frac{\rho c^2}{3},$$

also genau so wie bei der Hohlraumstrahlung.

Nehmen wir nun an, daß ein homogener Neutronengasstern im Verlaufe seines „Lebens“ die Hälfte seiner anfänglichen Masse ausgestrahlt hat, wobei aber die Zahl seiner Neutronen unverändert geblieben ist. Dies klingt vielleicht paradox, aber einen analogen Fall haben wir ja beim bekannten „Massendefekt“ der Atomkerne. Die Geschwindigkeiten der Neutronen und Protonen in den Atomkernen kann man schätzungsweise auf $\frac{c}{10}$ veranschlagen¹⁾. Wären die ursprünglichen Ruhemassen der Neutronen und der Protonen unverändert geblieben, so müßte sich ihre Gesamtmasse bei der Bildung des Kerns dank den erwähnten Geschwindigkeiten vergrößert haben. In Wirklichkeit tritt das genaue Gegenteil ein: nicht von einem Massenzuwachs ist die Bildung eines Atomkerns begleitet, sondern von einem Massendefekt. Also nicht nur die Ruhemasse, sondern sogar die Gesamtmasse hat sich vermindert, obgleich die ursprüngliche Zahl der Neutronen und Protonen bei der Kernbildung unverändert geblieben ist. Zwischen dem Massendefekt eines Atomkerns und dem Massendefekt unseres Sterns besteht nur ein quantitativer Unterschied: in dem ersteren Falle wird weniger als 1% der ursprünglichen Masse ausgestrahlt, in dem letzteren 50%; dabei bleibt die Zahl der Partikeln in beiden

1) E. Majorana, ZS: f. Phys. 82, 137, 1933.

Tabelle 3.

Die (homogenen) Neutronengassterne haben während ihres „Lebens“ keinen Massenverlust durch Ausstrahlung gehabt. Nullpunktsdruck des Neutronengases: $p = K\rho^{5/3} = 5,3845 \cdot 10^9 \rho^{5/3}$. Die Neutronen werden als materielle Punkte angesehen.

Neutronenzahl pro cm im Endstadium verschiedener Sterne (bei 0° abs.)	Nullpunktsenergie eines einzelnen Neutrons (in Erg)	Kinetischer Massenzuwachs des Neutrons (in Gramm)	Ruhemasse des Neutrons (in Gramm)	Gesamtmasse des Neutrons (in Gramm)	Dichte des Neutronengases (in g.cm^{-3})	Nullpunktsdruck des Neutronengases (in Dyn. cm^{-2})
10^{12}	$1,88 \cdot 10^{-22}$	$2,1 \cdot 10^{-43}$	$1,66 \cdot 10^{-24} - 2,1 \cdot 10^{-43}$	$1,66 \cdot 10^{-24}$	$1,66 \cdot 10^{-12}$	$K\rho^{5/3} = 1,25 \cdot 10^{-10} = 2,52 \cdot 10^{-10} \frac{\rho c^2}{3}$
10^{24}	$1,88 \cdot 10^{-14}$	$2,1 \cdot 10^{-35}$	$1,66 \cdot 10^{-24} - 2,1 \cdot 10^{-35}$	$1,66 \cdot 10^{-24}$	1,66	$K\rho^{5/3} = 1,25 \cdot 10^{10} = 2,52 \cdot 10^{-11} \frac{\rho c^2}{3}$
10^{36}	$1,88 \cdot 10^{-6}$	$2,1 \cdot 10^{-27}$	$1,6579 \cdot 10^{-24}$	$1,66 \cdot 10^{-24}$	$1,66 \cdot 10^{12}$	$K\rho^{5/3} = 1,25 \cdot 10^{30} = 2,52 \cdot 10^{-3} \frac{\rho c^2}{3}$
10^{39}	$1,88 \cdot 10^{-4}$	$2,1 \cdot 10^{-25}$	$1,45 \cdot 10^{-24}$	$1,66 \cdot 10^{-24}$	$1,66 \cdot 10^{15}$	$K\rho^{5/3} = 1,25 \cdot 10^{35} = 0,252 \frac{\rho c^2}{3}$
$7,922 \cdot 10^{39}$	$1,494 \cdot 10^{-3}$	$1,66 \cdot 10^{-24}$	0	$1,66 \cdot 10^{-24}$	$1,3151 \cdot 10^{16}$	$K\rho^{5/3} = 3,9453 \cdot 10^{36} = \frac{\rho c^2}{3}$

Fällen unverändert. In Tabelle 4 sind die entsprechenden Berechnungen für verschiedene Neutronengassterne durchgeführt. Da die Gesamtmasse eines jeden einzelnen Neutrons nur die Hälfte des „normalen“ Wertes beträgt, so muß der Nullpunktsdruck für dasselbe ρ doppelt so groß sein als im „normalen“ Falle. Dadurch ist Eddingtons Ansicht sogar noch „übertrumpft“.

Komplizierter ist der Fall, wenn der Stern aus einem Gemisch von Elektronen und Atomkernen besteht. Auch hier muß bei der Kontraktion die Zunahme an kinetischer Masse genau kompensiert sein durch gleichzeitige Abnahme an Ruhemasse, doch genügt es dem Gesetz der Erhaltung der Energie, wenn die Kompensation sich bloß auf das Gasgemisch als Ganzes bezieht. Der bei der Kontraktion hinzugekommene kinetische Massenzuwachs verteilt sich nicht gleichmäßig zwischen den Kernen und den Elektronen, sondern kommt fast ausschließlich den letzteren zugute, weil ja die Nullpunktenergien sich umgekehrt proportional den Massen verteilen. Wenn der Stern nicht ganz besonders stark ausstrahlt, muß die Gesamtmasse eines jeden einzelnen Elektrons trotz der Abnahme seiner Ruhemasse dennoch steigen, da ja bei ihm die Zunahme an kinetischer Masse unproportional groß ist. Dann dürfen wir aber den Nullpunktsdruck des Elektronengases nicht mehr nach $p = K\rho^{5/3}$ berechnen, sondern haben es hier mit einer relativistischen Entartung im gewöhnlichen Sinne des Wortes zu tun. Die Elektronenmasse darf jedoch nicht unbegrenzt wachsen, weil ja sonst die Gesamtmasse des Gasgemisches als Ganzes auf die Dauer nicht konstant bleiben könnte, wie dies vom Gesetz der Erhaltung der Energie verlangt wird. (Strahlt der Stern aus, so verlangt das Gesetz der Erhaltung der Energie sogar Verringerung der Gesamtmasse des Gasgemisches.) Es ist nicht schwer einzusehen, daß der Unterschied zwischen der Gesamtmasse eines einzelnen Elektrons und derjenigen eines Kerns immer geringer wird. Bei fortschreitender Kompression muß daher die Formel $p = K\rho^{5/3}$ schließlich wieder angewandt werden. In dem äußersten Falle, wo die gesamte Ruhemasse in kinetische übergegangen ist, haben wir $p = K\rho^{5/3} = \rho c^2$.

Es bewege sich ein Lichtquant, dessen Ruhemasse man gleich Null annehmen kann, gegen einen Himmelskörper. Da die Bewegung des Lichtquants in der Richtung der Gravitationskraft stattfindet, so muß seine kinetische Energie wachsen

Tabelle 4.

Die (homogenen) Neutronengassterne haben während ihres „Lebens“ die Hälfte ihrer Masse ausgestrahlt, ohne dabei die anfängliche Zahl ihrer Neutronen zu verändern. Dies bedeutet, daß am Ende des „Lebens“ eines Sterns die Gesamtmasse eines einzelnen Neutrons nicht mehr $1,66 \cdot 10^{-24}$, sondern nur $\frac{1}{2} \cdot 1,66 \cdot 10^{-24} = 8,3 \cdot 10^{-25}$ g beträgt. Die Ruhemasse muß natürlich noch kleiner sein. Der Nullpunktsdruck des Neutronengases ist jetzt $p = K \rho^{5/3} = 3,4190 \cdot 10^{10} \rho^{5/3}$. Die Neutronen werden als materielle Punkte angesehen.

Neutronenzahl pro cm im Endstadium verschiedener Sterne (bei 0 ⁰ abs.)	Nullpunktsenergie eines einzelnen Neutrons (in Erg)	Kinetischer Massenzuwachs des Neutrons (in Gramm)	Ruhemasse des Neutrons (in Gramm)	Gesamtmasse des Neutrons (in Gramm)	Dichte des Neutronengases (in g. cm ⁻³)	Nullpunktsdruck des Neutronengases (in Dyn. cm ⁻²)
10^{12}	$3,76 \cdot 10^{-22}$	$4,2 \cdot 10^{-43}$	$8,3 \cdot 10^{-25} - 4,2 \cdot 10^{-43}$	$8,3 \cdot 10^{-25}$	$8,3 \cdot 10^{-13}$	$K \rho^{5/3} = 2,51 \cdot 10^{-10} = 1,01 \cdot 10^{-18} \frac{\rho c^2}{3}$
10^{24}	$3,76 \cdot 10^{-14}$	$4,2 \cdot 10^{-35}$	$8,3 \cdot 10^{-25} - 4,2 \cdot 10^{-35}$	$8,3 \cdot 10^{-25}$	0,83	$K \rho^{5/3} = 2,51 \cdot 10^{10} = 1,01 \cdot 10^{-10} \frac{\rho c^2}{3}$
10^{36}	$3,76 \cdot 10^{-6}$	$4,2 \cdot 10^{-27}$	$8,258 \cdot 10^{-25}$	$8,3 \cdot 10^{-25}$	$8,3 \cdot 10^{11}$	$K \rho^{5/3} = 2,51 \cdot 10^{30} = 0,0101 \frac{\rho c^2}{3}$
$9,9030 \cdot 10^{38}$	$7,47 \cdot 10^{-4}$	$8,3 \cdot 10^{-25}$	0	$8,3 \cdot 10^{-25}$	$8,2195 \cdot 10^{14}$	$K \rho^{5/3} = 2,4659 \cdot 10^{35} = \frac{\rho c^2}{3}$

auf Kosten der potentiellen Energie. Mit anderen Worten: die Zunahme an kinetischer Masse muß durch Abnahme an Ruhemasse genau kompensiert werden. Da aber die Ruhemasse des Lichtquants bereits am Anfang gleich Null war, muß sie bei der Bewegung gegen den Stern (also beim Fallen auf den Stern) negativ werden.

Die Idee einer negativen Masse und Energie ist nicht neu: „Bereits der klassischen relativistischen Mechanik war die Existenz von zwei Klassen von Lösungen der Bewegungsgleichungen bekannt, die den beiden Vorzeichen der „Energie der Ruhemasse“, $\pm mc^2$ entsprechen und gelegentlich als Lösung mit positiver und „negativer“ Masse gedeutet wurden. Teilchen mit negativer Gesamtenergie (oder „negativer Masse“) haben sehr merkwürdige Eigenschaften und sind niemals beobachtet worden“¹⁾.

Wir behaupten aber auch gar nicht, daß die Gesamtmasse (resp. Gesamtenergie) eines Lichtquants negativ werden könne, sondern nur seine Ruhemasse (resp. Ruheenergie).

Bekanntlich spielt die Idee einer negativen Energie eine wesentliche Rolle in Dirac's Theorie des Positrons. Aber auch schon vor der Entdeckung des Positrons rechnete Dirac mit der Möglichkeit negativer Massen und Energien²⁾.

Gewöhnlich meint man, daß beim Verlassen eines Himmelskörpers die Gesamtenergie des Lichtquants teilweise (oder sogar vollständig) zur Überwindung der Gravitationskraft „aufgebraucht“ werde. Nach unserer Auffassung hingegen wird die Abnahme an kinetischer Masse genau kompensiert durch die Zunahme an Ruhemasse. Wir sind daher der Meinung, daß die bekannte „Rotverschiebung“ der Spektrallinien an der Oberfläche des betreffenden Sternes genau so stark ist, wie in grösseren Entfernungen. Eine negative Ruhemasse würde dem Lichtquant gestatten, eine Gravitationspotentialdifferenz von mehr als c^2 zu überwinden. Nehmen wir z. B. an, daß das Gravitationspotential an der Oberfläche eines Sterns den phantastischen Wert

$$\frac{GM}{R} = -1000 c^2$$

1) G. Gamow, „Der Bau des Atomkerns und die Radioaktivität“, ins Deutsche übertragen von C. u. F. Houtermans, S. 4, Leipzig 1932.

2) P. A. M. Dirac, Proc. Roy. Soc. London (A) **126**, 361 f., 1930.

besitze. Von der Oberfläche dieses phantastischen Sterns werde ein Lichtquant emittiert, dessen anfängliche kinetische Energie $+1,001 \cdot 10^{-5}$ Erg und dessen anfängliche Ruhemasse $-\frac{10^{-5}}{c^2}$ g betrage. Letztere repräsentiert eine (negative) Energie von -10^{-5} Erg, so daß die anfängliche Gesamtenergie des Lichtquants gleich

$$1,001 \cdot 10^{-5} - 10^{-5} = 0,001 \cdot 10^{-5} = 10^{-8} \text{ Erg}$$

ist, was einer Masse von $\frac{10^{-8}}{c^2}$ g entspricht. Soll sich das Lichtquant von der Oberfläche des phantastischen Sterns in die Unendlichkeit entfernen, so muß eine Potentialdifferenz von $1000 c^2$ überwunden werden, wozu ein Arbeitsaufwand von

$$\frac{10^{-8}}{c^2} \cdot 1000 c^2 = 10^{-5} \text{ Erg}$$

notwendig ist. Diese Arbeit kann nur auf Kosten der anfänglichen kinetischen Energie $1,001 \cdot 10^{-5}$ Erg geschehen, weshalb in unendlicher Entfernung die kinetische Energie des Lichtquants bloß

$$1,001 \cdot 10^{-5} - 10^{-5} = 10^{-8} \text{ Erg}$$

betragen wird. Das Gesetz der Erhaltung der Energie verlangt nun, daß der Verlust von 10^{-5} Erg kinetischer Energie durch eine gleichgroße Erhöhung der potentiellen Energie aufgewogen werde. Wir interpretieren eine Erhöhung der potentiellen Energie um 10^{-5} Erg als Vergrößerung der Ruhemasse des Lichtquants um $\frac{10^{-5}}{c^2}$ g. Somit ist die Ruhemasse des Lichtquants in der Unendlichkeit gleich

$$-\frac{10^{-5}}{c^2} + \frac{10^{-5}}{c^2} = 0,$$

während die kinetische Energie, wie wir oben gesehen haben, gleich 10^{-8} Erg ist, was einer Masse von $\frac{10^{-8}}{c^2}$ g entspricht. Daraus sehen wir, daß die Gesamtmasse des Lichtquants in unendlicher Entfernung

$$\frac{10^{-8}}{c^2} + 0 = \frac{10^{-8}}{c^2} \text{ g}$$

beträgt, was einer Gesamtenergie von 10^{-8} Erg entspricht; dies ist aber genau derselbe Wert wie am Anfang der Bewegung. Entfernt sich also von der Ober-

fläche des Sterns ein Lichtquant, so nimmt seine kinetische Energie ab und seine Ruheenergie zu. Die Gesamtenergie des Lichtquants bleibt aber die ganze Zeit unveränderlich.

Kehren wir noch einmal zu der oben erwähnten relativistischen Rotverschiebung der Spektrallinien zurück. Diese Rotverschiebung wird gewöhnlich folgendermaßen interpretiert. Damit ein Lichtquant $h\nu$ sich von der Oberfläche eines Sterns bis zur Unendlichkeit entfernen kann, muß es den Gravitationspotentialunterschied $\frac{GM}{R}$ überwinden, wozu eine Energiemenge von $\frac{h\nu}{c^2} \cdot \frac{GM}{R}$ Erg notwendig ist. Dieser Arbeitsaufwand könne nur auf Kosten der ursprünglichen Energie $h\nu$ geschehen, weshalb die Schwingungsfrequenz sich von ν bis ν' verringern müsse nach der Gleichung

$$h\nu' = h\nu - \frac{h\nu}{c^2} \cdot \frac{GM}{R} = h\nu \left(1 - \frac{GM}{Rc^2} \right),$$

also nach:

$$\frac{\nu'}{\nu} = 1 - \frac{GM}{Rc^2}. \quad (80)$$

Unter ν' und ν kann man in (80) sowohl die „Schwingungszahlen“ (sec^{-1}) als auch die ihnen proportionalen „Wellenzahlen“ (cm^{-1}) verstehen.

Eine solche Interpretation der Rotverschiebung widerspricht jedoch dem Gesetz der Erhaltung der Energie. Die Abnahme an kinetischer Masse muß durch eine gleichzeitige Zunahme an Ruhemasse genau kompensiert sein, weshalb die Gesamtmasse des Lichtquants bei seiner Bewegung unverändert bleibt. Da die Gesamtmasse des Lichtquants (im Gegensatz zu der Masse eines sich langsam bewegendem materiellen Körpers) rein kinetischer Natur ist, so darf sich bei der Bewegung des Lichtquants seine Gesamtenergie (und nur diese allein ist der Beobachtung zugänglich) ebenfalls nicht ändern. Eine „Rotverschiebung“ könnte deshalb nicht zustande kommen.

Wir interpretieren die Rotverschiebung auf eine ganz andere Weise.

Wenn ein Elektron (mit der anfänglichen Ruhemasse m_e) aus der Unendlichkeit auf einen Stern fällt, so ist nahe dessen Oberfläche die kinetische Energie des Elektrons gleich $\frac{m_e GM}{R}$ Erg, was einen kinetischen Massenzuwachs von $\frac{m_e GM}{Rc^2}$ g

repräsentiert. Das Gesetz der Erhaltung der Energie verlangt nun, daß dieser Zuwachs durch eine gleichgroße Verringerung der Ruhemasse kompensiert werde. Somit beträgt die Ruhemasse des Elektrons nahe der Sternoberfläche nicht mehr m_e , sondern nur

$$m'_e = m_e - \frac{m_e GM}{R c^2} = m_e \left(1 - \frac{GM}{R c^2} \right),$$

und dies ergibt:

$$\frac{m'_e}{m} = 1 - \frac{GM}{R c^2}. \quad (81)$$

Es möge E die Kernladung eines „wasserstoffähnlichen“ Atoms sein. Die Bewegungsgeschwindigkeit seines Elektrons ist im Vergleich mit c gewöhnlich so klein, daß man die Masse des bewegten Elektrons gleich seiner Ruhemasse setzen kann (wenn man die „Feinstruktur“ vernachlässigt). Springt nun das Elektron von der n_1 -Quantenbahn auf die niedrigere n_2 -Quantenbahn über, so kann bekanntlich die Wellenzahl des emittierten Lichtquants folgendermaßen ausgedrückt werden:

$$\nu = \frac{2 \pi^2 m_e e^2 E^2}{c h^3} \left(\frac{1}{n_2} - \frac{1}{n_1} \right).$$

Dies ist aber nur für ein Atom richtig, welches unendlich weit von dem Stern entfernt ist. Wenn dagegen dasselbe Atom sich nahe der Sternoberfläche befindet, so haben wir offenbar:

$$\nu' = \frac{2 \pi^2 m'_e e^2 E^2}{c h^3} \left(\frac{1}{n_2} - \frac{1}{n_1} \right).$$

Die beiden letzten Gleichungen ergeben:

$$\frac{\nu'}{\nu} = \frac{m'_e}{m_e}. \quad (82)$$

Aus (81) und (82) erhalten wir:

$$\frac{\nu'}{\nu} = 1 - \frac{GM}{R c^2}. \quad (83)$$

Der Vergleich mit (80) zeigt nun, daß unsere neue Auffassung genau dieselbe „Rotverschiebung“ ergibt wie die traditionelle. Der einzige Unterschied besteht nur darin, daß unsere neue Interpretation der „Rotverschiebung“ sich im vollen Einklange mit dem Gesetz der Erhaltung der Energie befindet, während die traditionelle Interpretation mit diesem Gesetz unvereinbar ist.

E. A. Milne's Ansicht über das „Massen-Helligkeitsgesetz“. Kritik dieser Ansicht.

Die Beobachtungen zeigen, daß zwischen der Masse eines Sternes und seiner absoluten bolometrischen Helligkeit zweifellos ein Zusammenhang besteht: mit zunehmender Masse nimmt die absolute Helligkeit ebenfalls zu, und zwar sehr schnell, so daß annähernd $L \sim M^3$ ist¹⁾. Milne ist der Ansicht, daß ein „Massen-Helligkeitsgesetz“ niemals aus blossen Gleichgewichtsbetrachtungen abgeleitet werden könne: „The observed mass-luminosity law must depend on the circumstance that in some way the more massive star contrives to provide itself with a stronger set of sources. The claim to establish the mass-luminosity law from equilibrium considerations only appears to me a philosophical blunder“²⁾. Dies ist vollständig richtig, solange wir die Energiequelle in irgendeinem unbekanntem Prozeß suchen: dann bleibt tatsächlich nichts übrig, als L und M für unabhängige Größen zu erklären. Anders liegt die Sache, wenn man die Gravitationsenergie als die Hauptquelle der Sternenenergie ansieht. Zur Illustration sei folgendes konkrete Beispiel angeführt.

Es befinde sich Wasser in einem Gefäß mit einem Krahn, der unten angebracht ist. Solange letzterer geschlossen ist, kann kein Wasser herausfließen, also auch keine Arbeit geleistet werden. Der Energieinhalt des Gefäßes bleibt konstant (in potentieller Form). Öffnet man den Krahn, aber nicht weit, so beginnt das Wasser langsam herauszuströmen und kann Arbeit verrichten, wobei die potentielle Energie im Gefäß sich verringert. Je weiter man den Krahn öffnet, desto mehr Arbeit wird das herausfließende Wasser in der Zeiteinheit leisten, aber desto schneller ist auch der Energievorrat erschöpft.

Unserer Meinung nach findet genau dasselbe auch bei den Sternen statt, wobei der Absorptionskoeffizient die Rolle des Krahns spielt. Um sich zu verdichten, muß der Stern die überschüssige innere Energie ausstrahlen. Dies kann er aber nicht, wenn der Absorptionskoeffizient unendlich groß ist (= Krahn geschlossen). Die potentielle Gravitationsenergie bleibt daher unverändert. Der irdische Beobachter würde den Schluß ziehen,

1) Vgl. J. H. Jeans, „Astronomy and Cosmogony“, S. 126, Cambridge 1928.

2) E. A. Milne, Nature **127**, 16, 1931.

daß dieser Stern überhaupt keine Energiequellen besitze, da er ja nicht ausstrahle. Ist der Absorptionskoeffizient zwar groß, aber endlich (=Krahn geöffnet, aber nicht weit), so wird die strahlende Energie nach außen strömen, wenn auch langsam. Der irdische Beobachter wird meinen, daß die Energiequellen des Sternes sehr klein seien. Natürlich findet jetzt beim Stern eine Kontraktion statt, aber eine sehr langsame. Ist der Absorptionskoeffizient sehr klein (=Krahn weit geöffnet), so geht der Kontraktionsprozeß schnell vor sich und ist die Ausstrahlung sehr intensiv. Nach Ansicht des irdischen Beobachters muß solch ein Stern sehr starke Energiequellen besitzen.

Die Höhe des Wasserstandes im Gefäß und die Weite der Krahnöffnung gestatten die Arbeitsleistung des herausfließenden Wasserstrahls genau zu berechnen. In analoger Weise ließe sich die Ausstrahlung eines Sternes genau berechnen, wenn der Absorptionskoeffizient und der Aufbau dieses Sternes genau bekannt wären. Ehe wir aber diese Frage weiter untersuchen, müssen wir die modernen Ansichten über den Bau der Atomkerne erwähnen.

Moderne Ansichten über den Bau der Atomkerne.

Früher wurde angenommen, daß die Atomkerne aus Protonen und Elektronen aufgebaut seien. Nach der heutigen Ansicht sind Protonen und Neutronen die einzigen Bausteine der Atomkerne, wobei freilich die Erklärung der β -Strahlung gewisse Schwierigkeiten bereitet: „Wenn der Kern nur aus Protonen und Neutronen besteht, dann müssen die beim β -Zerfall emittierten Elektronen beim Zerfallsprozeß erst entstehen“¹⁾.

Anfänglich betrachtete man die Neutronen als komplizierte Gebilde und die Protonen als einfache; heute neigt man der entgegengesetzten Ansicht zu: „Chadwick first assumed that the neutron consisted of a close combination of a proton and an electron... But the experiments of Curie... Curie and Joliot... Chadwick... suggest that the neutron is a simple particle, being the fundamental nuclear unit, the proton consisting of a close combination of a neutron and a positive electron“²⁾. Der Radius des Neutrons kann nach Rabi gleich

1) C. F. v. Weizsäcker, Phys. ZS. **36**, 784, 1935.

2) Harold J. Walker, Phil. Mag. (7) **19**, 344 f., 1935.

$1,31 \cdot 10^{-13}$ cm angenommen werden¹⁾, er ist also merklich kleiner als der „klassische“ Radius des Elektrons. Was die Masse des Neutrons anbelangt, so erweist sie sich nach den neuesten Messungen als etwas größer denn diejenige des Protons. Nach Oliphant, Kempton und Lord Rutherford ist 1,0083 das Atomgewicht des Neutrons und 1,0081 dasjenige des Protons²⁾. Bethe leitet 1,0085 für das Neutron ab und 1,00807 für das Proton³⁾. Die allerneueste und wohl zuverlässigste Bestimmung rührt von Wilson her⁴⁾. Das Atomgewicht des Neutrons berechnet er zu 1,00833 und dasjenige des Protons zu 1,00791; oder auch (indem er von einem etwas anderen Atomgewicht des Heliums ausgeht) zu 1,00830 und 1,00789. Wenn nun das Proton aus einem Neutron und einem Positron besteht, so kann man auf Grund des „Massendefekts“ die Bindungsenergie berechnen. Benutzt man Wilsons Daten, so erhält man für die Bindungsenergie des Protons $0,88 \cdot 2m_e c^2$, wo m_e die Masse des Elektrons (oder des Positrons) bedeutet. Ist nun die Energie des einfallenden Strahlungsquants etwas größer als diese Bindungsenergie, ist sie also ungefähr $2m_e c^2$, so kann das Proton unter Ausscheidung eines Positrons zertrümmert werden (wobei ein Neutron nachbleibt). Nun befinden sich die Protonen in den Atomkernen. Damit das Atom, in dessen Kern ein Proton zertrümmert wird, elektrisch neutral bleibe, muß die Ausscheidung eines Positrons immer von der Ausscheidung eines Elektrons begleitet sein. Ob letztere Ausscheidung auf Kosten der äußeren Atomelektronen geschieht, oder ob eine Art β -Strahlung des Kerns angeregt wird, ist für die Aufrechterhaltung der elektrischen Neutralität des Atoms völlig gleichgültig. Die Beobachtungen zeigen nun, daß tatsächlich bei $h\nu \geq 2m_e c^2$ Positronen in Begleitung von Elektronen ausgeschieden werden. Man könnte darin den Beweis der komplexen Natur des Protons erblicken. Unglücklicherweise verlangt aber auch die Theorie von Dirac, daß bei $h\nu \geq 2m_e c^2$ Positronen und Elektronen ausgeschieden werden, doch erklärt sie diese Erscheinung ganz anders. Nach Dirac

1) I. I. Rabi, Phys. Rev. (2) **43**, 838, 1933.

2) M. L. E. Oliphant, A. E. Kempton und Lord Rutherford, Proc. Roy. Soc. London (A) **150**, 253, 1935.

3) H. Bethe, Phys. Rev. (2) **47**, 634, 1935.

4) H. A. Wilson, Proc. Roy. Soc. London (A) **152**, 501, 1935.

entsteht ein Positron und ein Elektron direkt aus einem Strahlungsquant.

Nach welchem Kriterium könnte man aber entscheiden, ob die beobachteten „Paare“ im Sinne Diracs zu deuten seien oder der Protonenzertrümmerung ihre Entstehung verdanken? Wie soll man eine „Differentialdiagnose“ stellen?

Die der Zertrümmerung unterliegenden Protonen befinden sich im Atomkern, welcher also von dem Energiequant $h\nu$ unmittelbar getroffen werden muß. Die Wahrscheinlichkeit der Zertrümmerung ist bei homogener Strahlung offenbar proportional der Zahl der einfallenden Energiequanten pro Sekunde, d. h. proportional dem Strahlungsdruck. Nun ist der Kerndurchmesser gewöhnlich viel kleiner als die Wellenlänge der einfallenden Strahlung. Ist aber der Radius a einer Kugel sehr viel kleiner als die einfallende Wellenlänge λ , so muß nach Schwarzschild das Verhältnis des Strahlungsdruckes D zur Strahlungsdichte E gleich

$$\frac{D}{E} = \frac{224}{3} \pi^5 \frac{a^6}{\lambda^4} \quad (84)$$

sein¹⁾. Somit ist bei konstantem λ und E der Strahlungsdruck, also auch die Wahrscheinlichkeit der Protonenzertrümmerung, proportional der 6. Potenz des Radius, d. h. proportional dem Quadrate des Volumens, oder auch annähernd dem Quadrate der Kernmasse²⁾. Nun ist die Kernmasse annähernd proportional der Kernladung. Daraus folgt, daß die Wahrscheinlichkeit einer Protonenzertrümmerung annähernd proportional dem Quadrate der Kernladung sein muß. Man könnte dies noch so formulieren: der Wirkungsquerschnitt für die „Paarbildung“ (wir haben ja oben gesehen, daß die Auslösung eines Positrons immer von der gleichzeitigen Auslösung eines Elektrons aus demselben Atom begleitet sein muß) pro Atomkern ist proportional dem Quadrate der Kernladungszahl.

Unglücklicherweise ist der Wirkungsquerschnitt für die Paarbildung nach Dirac ebenfalls proportional dem Quadrate der

1) K. Schwarzschild, Sitzungsberichte der mathem.-phys. Classe der k. b. Akademie der Wiss. zu München **31**, 331, 1901.

2) Bei allen Kernen haben wir es mit einer recht dichten Packung von Protonen und Neutronen zu tun. Darum werden die in verschiedenen Atomkernen herrschenden Dichten (g.cm^{-3}) ziemlich gleich sein. Bei gleicher Dichte sind aber die Volumina proportional den Massen.

Kernladungszahl¹⁾, so daß diese Erscheinung nicht für eine „Differentialdiagnose“ benutzt werden kann.

Nach (84) muß für ein und denselben Kern der Wirkungsquerschnitt für unsere „Paarbildung“ (durch Protonenzertrümmerung) umgekehrt proportional λ^4 sein, also direkt proportional ν^4 oder auch $(h\nu)^4$. Was sagt nun das Experiment?

Vor kurzem haben Jaeger und Hulm folgende Tabelle aufgestellt:

$\frac{h\nu}{mc^2}$	$\sigma \times 10^{24}$	$\sigma \times 10^{24}$
3	0,67	0,34
5,2	3,1	2,5

Hier bedeutet σ den Wirkungsquerschnitt des Bleiatomkerns für die „Paarbildung“²⁾. In der zweiten Kolumne sind ihre eigenen Messungsergebnisse angegeben und in der dritten (zum Vergleich) diejenigen von Bethe und Heitler. Zu ihrer Tabelle bemerken Jaeger und Hulm: „The values for $5mc^2$ are not so accurate as could be desired . . . The error in σ , however, should not be more than about 10%“. Die zweite Kolumne ergibt für das Verhältnis beider Querschnitte: $\frac{0,67}{3,1} = 0,216$, und die dritte: $\frac{0,34}{2,5} = 0,136$. Sollte hingegen die Paarbildung durch Protonenzertrümmerung bedingt sein, so müßte das Verhältnis der Wirkungsquerschnitte gleich $\left(\frac{3}{5,2}\right)^4 = 0,111$ sein. Diese Zahl ist zu 0,136 näher als 0,136 zu 0,216. Es läßt sich daher nicht mit Bestimmtheit behaupten, daß die Experimente gegen die Paarbildung durch Protonenzertrümmerung entschieden haben.

Die Formel (84) gilt nur solange die einfallende Wellenlänge bedeutend größer als der Kerndurchmesser ist. Im umgekehrten Falle ist kein Grund vorhanden, weshalb bei noch weiterer Verringerung der Wellenlänge der „Wirkungsquerschnitt“ wachsen sollte. Im Gegenteil: er wird sogar abnehmen, weil bei abnehmender Wellenlänge ein immer größerer Teil der Lichtquantenenergie für die Erteilung von Compton-Geschwin-

1) „The cross-section is proportional to the square of the atomic number“ [H. Bethe und W. Heitler, Proc. Roy. Soc. London (A) **146**, 110, 1934].

2) J. C. Jaeger und H. R. Hulme, Proc. Roy. Soc. London (A) **153**, 446, 1936.

digkeiten verbraucht wird. Sobald also die Wellenlänge des einfallenden Lichtquants mit dem Kerndurchmesser vergleichbar wird, versagt unsere auf der Formel (84) begründete Theorie. Da die Experimente gewöhnlich mit schweren Kernen gemacht werden, etwa mit Bleiatomkernen, so wollen wir den Durchmesser $2r_0$ eines solchen Kerns berechnen. Dies können wir auf Grund folgender von Nakabayasi¹⁾ unlängst aufgestellten Formel tun:

$$r_0 = 1,397 n^{1/3} (1 + 0,0137 n_2^2 n^{-4/3}) 10^{-13} \text{ cm.} \quad (85)$$

Hier bedeutet n_2 die Zahl der Protonen im Kern, und n die sogen. „Massenzahl“ (Zahl der Protonen + Zahl der Neutronen). Beim Bleiatomkern ist $n_2 = 82$, und n ist für verschiedene Bleisotope etwas verschieden. Wir wählen naturgemäß den häufigsten (Häufigkeit = 49,55%), dessen Massenzahl gleich $n = 208$ ist²⁾. Mit diesen Werten von n_2 und n erhalten wir aus (85):

$$2r_0 = 1,7792 \cdot 10^{-12} = \lambda,$$

wo λ die „kritische“ Wellenlänge bedeutet. Die Energie des entsprechenden „kritischen“ Lichtquants läßt sich zu

$$h\nu = 135,85 m_e c^2$$

berechnen, wenn man nach Birge³⁾ $\frac{h}{c} = 2,18381 \cdot 10^{-37}$ setzt und für m_e den „spektroskopischen“ Wert $9,03510 \cdot 10^{-28}$ akzeptiert. Der „Deflexionswert“ $8,99425 \cdot 10^{-28}$ hingegen ergibt:

$$h\nu = 136,47 m_e c^2.$$

Unglücklicherweise verhält sich auch Dirac's Theorie der Paarbildung sehr ähnlich: „It should, however, be considered that for $h\nu > 137 mc^2$ the quantum theory will go wrong, as it does for the radiation of fast electrons. It is to be expected that, as a consequence, the absorption coefficient for quanta of energy greater than $137 mc^2$ will decrease again... *Note added in proof...* In a recently published paper v. Weizsäcker... came to the conclusion that the theoretical results reached in

1) Kugao Nakabayasi, ZS. f. Phys. **97**, 217, 1935.

2) Landolt-Börnstein, Physikalisch-chem. Tabellen, 3. Ergänzungsband, 1. Teil, S. 29, Berlin 1935.

3) Raymond T. Birge, „Probable Values of the General Physical Constants“, Physical Rev. (Supplement) **1**, 62, 1929.

this paper should be valid also for energies $> 137 mc^2$. If this result should be correct it would be hardly possible to reconcile it with the experiments mentioned¹⁾.

Ich persönlich bin trotz alledem der Meinung, daß der größte Teil der beobachteten „Paare“ im Sinne Dirac's zu deuten sei. Ein kleiner Prozentsatz der Paare wird hingegen der Protonenzertrümmerung seine Existenz zu verdanken haben. Beide Gruppen zu trennen ist jedoch wegen ihres zu ähnlichen Verhaltens praktisch unmöglich.

Ein Strahlungsquant kann nur bei genügender Bremsung seiner translatorischen Bewegung in ein Positron und ein Elektron zerfallen. Ohne eine solche Bremsung müßte nach einem Grundgesetz der Mechanik auch nach dem Zerfall der gemeinsame Schwerpunkt des entstandenen „Paares“ mit der früheren Lichtgeschwindigkeit c sich in der früheren Richtung fortbewegen. Wenn sich aber ein Elektron oder ein Positron mit Lichtgeschwindigkeit bewegt, so wird die Elektronen-, resp. Positronenmasse unendlich groß. Ich halte es daher für unmöglich, daß ein Strahlungsquant bereits in größerer Entfernung vom Atomkern zerfalle. Es sei denn, daß die Ruhemassen des Elektrons und des Positrons gleich Null oder negativ sind.

(Hinzugefügt bei der Korrektur.) Soeben hat Oliphant einen neuen Aufsatz veröffentlicht²⁾, wonach das Atomgewicht des Protons 1,0081 beträgt und dasjenige des Neutrons 1,0091. Dazu bemerkt Oliphant: „The mass found for the neutron is much greater than has generally been assumed, as it is heavier than the hydrogen atom by approximately the mass of two electrons, or heavier than the proton by almost three times the mass of the electron“. Wenn diese Zahlen richtig sind, so kann ein Proton erst dann durch ein Lichtquant zertrümmert werden, wenn die Energie des letzteren $h\nu > 3 m_e c^2$ ist. Andererseits wird durch diese Zahlen der endgültige Beweis erbracht, daß ein Neutron unmöglich aus einem Proton und einem Elektron bestehen kann. Jede stabile Bindung muß ja von einem Massendefekt begleitet sein; wir hätten aber statt dessen einen Massenzuwachs!

1) H. Bethe und W. Heitler, Proc. Roy. Soc. London (A) **146**, 111, 1934.

2) M. L. Oliphant, Nature **137**, 396, 1936.

Über die Möglichkeit einer „mechanischen“ Dissoziation der Atomkerne im Inneren der Sterne.

Preßt man ein Gas so stark zusammen, daß die gegenseitigen Entfernungen der Nachbaratome mit den Durchmessern dieser Atome vergleichbar werden, so tritt selbst beim absoluten Nullpunkt der Temperatur „mechanische“ Ionisation ein. Die Atomstrukturen brechen zusammen und es bildet sich ein Gemisch von Elektronen und Kernen. Fowler betrachtet den entsprechenden Stern, wie wir oben gesehen haben, als ein Riesenmolekel. Zur Entfernung eines Elektrons von einem Kern braucht jetzt so gut wie gar keine Arbeit angewandt zu werden. Das Auftreten der mechanischen Ionisation ist gleichbedeutend mit dem Verschwinden des Ionisationspotentials.

Komprimiert man aber ein solches Gas immer weiter und weiter, so muß schliesslich eine „mechanische“ Dissoziation der Kerne eintreten. Jetzt ist nicht nur die Struktur der Atome, sondern sogar die Struktur der Kerne zusammengebrochen. Die unter gewöhnlichen Bedingungen so gewaltige Bindungsenergie der Kerne ist jetzt gleich Null. Unser Gas stellt jetzt ein gleichmäßiges Gemisch von Neutronen, Protonen und Elektronen dar, welche sich frei umherbewegen. Das Verschwinden der Bindungsenergie der Kerne unter dem gewaltigen Druck ist völlig analog dem Verschwinden der latenten Verdampfungswärme des Wassers unter dem „kritischen“ Druck von 225 Atm. Der entsprechende Stern stellt nicht mehr eine Riesenmolekel dar, sondern einen riesigen Atomkern. Der einzige qualitative Unterschied zwischen diesem Riesenkern und den gewöhnlichen Kernen besteht darin, daß letztere positiv geladen sind, während unser Riesenkern elektrisch neutral ist (wegen der beigemischten Elektronen). Dieser Riesenkern enthält eine große Menge gewöhnlicher Kerne im Zustande der mechanischen Dissoziation. Neuerdings kennen wir aus der Physik auch tatsächlich einen Fall, wo ein größerer Kern kleinere im Zustande der mechanischen Dissoziation enthält. Das Emittieren von α -Partikelchen zwingt uns zu der Annahme, daß sich diese α -Partikelchen in den größeren Atomkernen befinden. Das α -Partikelchen besteht nach den modernen Ansichten aus 2 Protonen und 2 Neutronen, und stellt den Kern des Heliumatoms dar. Nun sagt aber Heisenberg über die Existenz von Heliumkernen in größeren Atom-

kernen: „Gegen die ausgesprochene Vermutung sprechen aber andere schwerwiegende Argumente: In den genauer bekannten Massendefekten der leichteren Kerne ist von einer Periodizität mit der Zahl 4 im Atomgewicht kaum etwas zu bemerken. Auch die Systematik der Isotope deutet vielleicht eher auf die Existenz von Protonen- und Neutronenschalen als auf die Existenz von α -Teilchen hin“¹⁾. Weizsäcker sagt: „Dagegen liefert das Ergebnis keinen Hinweis auf eine ausgezeichnete Rolle der α -Teilchen im Kern. Man wird daher die α -Teilchen nicht als „Moleküle“ der „Kernflüssigkeit“ betrachten dürfen. Soweit solche anschauliche Analogien zulässig sind, muß man eher sagen, daß die α -Teilchen in der Kernflüssigkeit zum größten Teil dissoziiert sind und daß die Protonen und Neutronen in ihr zwar durch dieselben Kräfte gebunden sind, die für die Stabilität des α -Teilchens maßgebend sind, daß sie aber nur vorübergehend mit ihren Nachbarn zu α -Teilchen zusammentreten“²⁾. Weizsäcker spricht also direkt von einer Dissoziation der Heliumkerne in den größeren Kernen. Die entsprechenden Beobachtungen und Experimente sind bei Zimmertemperatur gemacht worden, oder jedenfalls bei einer Temperatur, wo von irgendeiner „thermischen“ Dissoziation der Heliumkerne überhaupt keine Rede sein kann (dazu wären ja Milliarden von Graden nötig!). Es unterliegt wohl keinem Zweifel, daß auch beim absoluten Nullpunkt der Temperatur die Heliumkerne in den größeren Kernen dissoziiert bleiben. Wenn so, so haben wir es hier nicht mit thermischer, sondern mit „mechanischer“ Dissoziation zu tun³⁾.

1) W. Heisenberg, ZS. f. Phys. **96**, 474, 1935.

2) C. F. v. Weizsäcker, Phys. ZS. **36**, 782 f., 1935.

3) Man könnte vielleicht einwenden, daß die „makroskopische“ Temperatur des Gases mit der „mikroskopischen“ der Kerne nicht identisch sei. Vielleicht haben die Kerne bei makroskopischer Zimmertemperatur des Gases eine mikroskopische „wahre“ Eigentemperatur von einer Milliarde Grad? — Dagegen ist zu bemerken, daß eine „wahre“ Temperatur von einer Milliarde Grad jeden isolierten Kern (sagen wir vom Radius $r_0 = 4 \cdot 10^{-13}$ cm) zu einer enormen Ausstrahlung veranlassen müßte, nämlich zu

$$4 \pi r_0^2 \sigma T^4 = 4 \pi (4 \cdot 10^{-13})^2 \cdot 5,7 \cdot 10^{-5} (10^9)^4 = 1,15 \cdot 10^8 \text{ Erg. sec}^{-1},$$

was einem Massenverlust von

$$1,15 \cdot 10^8 / (3 \cdot 10^{10})^2 = 1,28 \cdot 10^{-13} \text{ g. sec}^{-1}$$

entspricht. Größere Kerne werden noch mehr ausstrahlen. Nun beträgt die

Somit ist die prinzipielle Möglichkeit einer „mechanischen“ Dissoziation der Kerne als experimentell bewiesen zu betrachten.

Das neue Sternmodell.

Man darf nicht denken, daß eine vollständige Auflösung der Kerne in ihre Bestandteile nur beim absoluten Nullpunkt möglich sei: sie kann bei jeder beliebigen Temperatur eintreten, sobald die Kerne genügend nahe aneinandergeschoben werden. Bei genügend hohen Temperaturen ist auch letzteres nicht erforderlich, da dann die Kerne durch „Molekularstöße“ oder durch Stöße der Strahlungsquanten zertrümmert werden. In diesem Falle muß aber dem Kern zu seiner Zerstörung sehr viel mehr Energie zugeführt werden als bei dichter Packung der Kerne und hohem Druck. (Genau so, wie zur Verdampfung von Wasser unter niedrigem Druck mehr Wärmeenergie erforderlich ist als unter hohem; unter 225 kg. cm^{-2} wird die notwendige Wärmeenergie sogar gleich Null. Unter einem solchen Druck gibt es keinen Unterschied zwischen Wasser und Dampf, da das Auftreten zweier getrennter Phasen in einem solchen Fall unmöglich ist. Das Zusammenpressen des Wassers bis 225 kg. cm^{-2} könnten wir demnach als „mechanische“ Verdampfung auffassen. Etwas Energie wird auch bei diesem „mechanischen“ Verdampfen absorbiert: unter einen solchen Druck gesetztes Wasser muß ja sein Volumen etwas verringern, wodurch die äußeren Druckkräfte Gelegenheit bekommen etwas Arbeit zu leisten. Die auf diese Weise vom Wasser absorbierte Energie ist jedoch vieltausendmal kleiner als bei „thermischem“ Verdampfen unter kleinem Druck; außerdem wird sie sich in der erhöhten Molekularenergie restlos wiederfinden, da das „mechanische“ Verdampfen an sich unter 225 kg. cm^{-2} überhaupt keine Energie erfordert. Desgleichen wird auch eine „mechanische“ Dissoziation der Kerne an sich keine Energie erfordern.) Bei „mechanischer“ Dissoziation bleibt der bekannte „Massendefekt“

Masse des schwersten Kerns, nämlich des Urankerns, nur $3,93 \cdot 10^{-22}$ Gramm. Dies bedeutet, daß ein isolierter Urankern bereits in weniger als

$$3,93 \cdot 10^{-22} / 1,28 \cdot 10^{-13} = 3,01 \cdot 10^{-9} \text{ sec}$$

seine ganze Masse ausstrahlen müßte! Somit ist die Annahme einer hohen „wahren“ Eigentemperatur der Kerne offenbar absurd.

der Kerne unverändert bestehen. Bei „thermischer“ Dissoziation hingegen wird er aufgehoben, wozu eine große Energiemenge notwendig ist. Mit der Temperaturdissoziation der Kerne hat sich Suzuki beschäftigt (natürlich nur theoretisch). Unter anderem hat er eine Tabelle für die Thermidissoziation der Heliumkerne (die er den damaligen Ansichten gemäß als aus Elektronen und Protonen aufgebaut betrachtete) zusammengestellt. Aus dieser Tabelle ist zu ersehen, daß der Dissoziationsgrad mit der Temperatur sehr schnell steigt. So z. B. ist unter 100 Atmosphären bei $2,0 \cdot 10^9$ Grad bloß 1%, bei $2,3 \cdot 10^9$ Grad aber bereits 99% dissoziiert¹⁾. Auch auf andere Kerne hat Suzuki seine Untersuchungen ausgedehnt²⁾.

Flügge hat den Einfluß freier Neutronen auf den inneren Aufbau der Sterne untersucht³⁾. Leider ging er dabei von der heutzutage aufgegebenen Ansicht aus, daß das Neutron aus einem Proton und einem Elektron bestehe. Auch glaubte er, daß das Neutron leichter als das Proton sei. Ganz richtig weist Flügge darauf hin, „daß auch in einer Materie, die schwerer ist als die eingebetteten Neutronen, die Neutronenkonzentration nach innen zu noch wachsen kann . . . Der Strahlungsdruck bläst die übrige Materie auf, nur die Neutronen nicht mit“⁴⁾. Als „Kuriosum“ zieht Flügge einen Stern in Erwägung, der nur aus Neutronen besteht; er müsse isotherm sein. Die freien Weglängen der Neutronen seien etwa 10^{10} mal länger als diejenigen der gewöhnlichen Gaspartikelchen⁵⁾. Bekanntlich kann die Diffusion der gewöhnlichen Gase in den Sternen nur sehr langsam vor sich gehen. Eine Ausnahme macht das Neutronengas. Für eine merkbare Entmischung der Neutronen genügt schon ein Zeitraum von nur einer Million Jahre⁶⁾.

Was muß aber in dem extremen Falle geschehen, wo sämtliche Kerne zertrümmert sind? — In diesem Falle stellt der ganze Stern ein Gemisch von Elektronen, Neutronen und Pro-

1) Seitarô Suzuki, Proc. of the Physico-Math. Soc. of Japan (3) **10**, 168, 1928.

2) Seitarô Suzuki, ebenda **11**, 119, 1928; Proc. of the Imperial Academy (Japan) **3**, 650, 1927.

3) Siegfried Flügge, ZS. f. Astrophys. **6**, 272, 1933.

4) Ebenda, S. 282.

5) Ebenda, S. 273.

6) Ebenda, S. 287.

tonen dar (die Zertrümmerung der Protonen soll vorläufig nicht berücksichtigt werden), wobei die Zahl der Elektronen genau gleich der Zahl der Protonen sein muß, diejenige der Neutronen aber nur annähernd gleich der Protonenzahl. Nun muß eine Entmischung beginnen: die schwereren Neutronen werden zum Sternzentrum hinabsinken, die schon an sich etwas leichteren Protonen können sich nicht viel von den Elektronen abscheiden (wegen der elektrostatischen Wechselwirkung). Nach dem oben Gesagten muß diese Entmischung so „schnell“ vor sich gehen, daß bereits nach wenigen Millionen Jahren im Zentrum des Sterns sich eine Neutronengaskugel gebildet haben wird, umgeben von einer Elektronen-Protonengasmischung. In der Neutronengaskugel ist annähernd die Hälfte der ganzen Sternmasse konzentriert. Nun ist die Masse eines Neutrons sehr viel größer, also seine Nullpunktsenergie sehr viel kleiner als beim Elektron. Deshalb kann Dichte und Temperatur in der zentralen Neutronengaskugel des Sterns so enorme Größen erreichen, wie dies bei allen anderen Gasen unter gleichen Bedingungen ganz undenkbar wäre (denn bei allen anderen Gasen können sich die Kerne nicht von den Elektronen merklich abscheiden). Dabei muß so viel Kontraktionsenergie frei werden, daß es völlig überflüssig ist, noch nach anderen Quellen der Sonnenenergie zu suchen (freilich nur dann überflüssig, wenn man Anhänger der „kurzen Zeitskala“ ist).

Bekanntlich hat Milne in einer Reihe von Aufsätzen die Ansicht geäußert, daß Dichte und Temperatur im Sternzentrum sehr hoch sein müssen¹⁾. Letzteres begünstigt die Kernzertrümmerung und die damit verbundene Bildung einer kleinen, aber ungeheuer dichten Kugel aus Neutronengas im Sternzentrum. Dies führt zur Erhöhung von Gravitationsdruck und Temperatur, also auch zur neuen Ausscheidung von freien Neutronen, wodurch die ursprüngliche Neutronengaskugel sich vergrößern muß usw. Somit ist die Bildung einer bedeutenden Neutronengaskugel auch bei kleineren Sternen nicht undenkbar.

In unseren weiteren Untersuchungen nehmen wir als Basis folgendes neue Sternmodell an. Die meisten Kerne sind zertrümmert und die frei gewordenen Neutronen haben sich in einer (dem Volumen nach) kleinen, aber sehr dichten Kugel

1) Vgl. z. B. E. A. Milne, Nature **126**, 238, 1930.

konzentriert, deren Masse annähernd die Hälfte der ganzen Sternmasse ausmacht. Diese zentrale Kugel wird von einem Gemisch von Elektronen und Protonen umhüllt. In dieser Hülle befinden sich in relativ kleinen Mengen auch noch andere (der Zerstörung entgangene) Elemente, jedoch spielen letztere eine nur untergeordnete Rolle.

A priori läßt sich nicht sagen, wieweit unser neues Sternmodell die wirklichen Verhältnisse richtig wiedergibt. Dazu ist es nötig, die Ergebnisse unserer Theorie mit der Beobachtung zu vergleichen, was wir auch zu tun beabsichtigen.

Die Kontraktionsenergie bei dem neuen Sternmodell.

Wir wollen die Kontraktionsenergie der zentralen Neutronengaskugel berechnen, welche wir der Einfachheit halber als homogen und von den umhüllenden Gasen unabhängig betrachten wollen. Wir fangen mit der Sonne an. Setzt man ihre Masse gleich $2 \cdot 10^{33}$ g, so ist die Masse der zentralen Neutronengaskugel gleich 10^{33} g. Die Gesamtzahl der Neutronen ist gleich

$$N = \frac{10^{33}}{1,66 \cdot 10^{-24}} = 6,024 \cdot 10^{56} ,$$

wenn die Masse eines Neutrons gleich $1,66 \cdot 10^{-24}$ g angenommen wird. Bei unserer angenäherten Rechnung können wir annehmen, daß die Neutronengaskugel dann im Gleichgewicht ist, wenn der Gasdruck (der Strahlungsdruck ist in unserem Falle sehr klein, wie wir es unten sehen werden) gleich dem durchschnittlichen Gravitationsdruck ist. Letzterer ist bekanntlich gleich

$$\bar{P} = \frac{3}{20 \pi} \cdot \frac{GM^2}{R^4} = \frac{3,18 \cdot 10^{57}}{R^4} ,$$

wenn man $M = 10^{33}$, und $G = 6,66 \cdot 10^{-8}$ setzt. Es möge der Radius der Neutronengaskugel gleich $R = 10^{11}$ cm sein; dann beträgt der durchschnittliche Gravitationsdruck $\bar{P} = 3,18 \cdot 10^{13}$ Dyn. cm⁻². Die Neutronenzahldichte ist

$$n = \frac{N}{\frac{4}{3} \pi R^3} = 1,438 \cdot 10^{23} ,$$

also beträgt der Neutronengasdruck

$$knT = 1,371 \cdot 10^{-16} \cdot 1,438 \cdot 10^{23} T = 1,972 \cdot 10^7 T .$$

Dieser Druck muß gleich \bar{P} sein, d. h. es muß die Gleichung

$$1,973 \cdot 10^7 T = 3,18 \cdot 10^{13}$$

erfüllt werden, was bei

$$T = 1,613 \cdot 10^7$$

geschieht. Bei dieser Temperatur beträgt der Strahlungsdruck

$$\frac{1}{3} a T^4 = \frac{1}{3} \cdot 7,65 \cdot 10^{-15} T^4 = 1,7 \cdot 10^9 \text{ Dyn.cm}^{-2},$$

kommt also neben dem Gasdruck nicht in Betracht. Die Dichte berechnet sich zu

$$\rho = \frac{10^{33}}{\frac{4}{3} \pi R^3} = 0,239 \text{ g.cm}^{-3}.$$

Die gesamte in der Kugel enthaltene kinetische Energie der Neutronen ist gleich

$$\frac{3}{2} k T N = 1,997 \cdot 10^{47} \sim 2 \cdot 10^{47} \text{ Erg.}$$

Die gesamte strahlende Energie hingegen beträgt nur

$$\frac{4}{3} \pi R^3 a T^4 = 2,18 \cdot 10^{44} \text{ Erg.},$$

kann also neben der kinetischen vernachlässigt werden. Die Kontraktionsenergie ist gleich

$$\frac{3}{5} \frac{G M^2}{R} = 3,996 \cdot 10^{47} \sim 4 \cdot 10^{47} \text{ Erg.}$$

Da die in der Kugel verbliebene Energie nur die Hälfte davon beträgt, so muß die andere Hälfte, noch bevor der Kugelradius den Wert 10^{11} cm erreicht hatte, ausgestrahlt worden sein. Dazu sind erforderlich

$$\frac{2 \cdot 10^{47}}{1,17 \cdot 10^{41}} = 1,7 \cdot 10^6 \text{ Jahre,}$$

da ja die Sonne in einem Jahr $1,17 \cdot 10^{41}$ Erg ausstrahlt.

Jetzt wollen wir noch die Rechnung für $R = 3 \cdot 10^6$ cm durchführen. In diesem Falle ist das Neutronengas entartet (aber nicht relativistisch). Der Gasdruck muß nach der Formel

$$\frac{\pi}{60} \left(\frac{3}{\pi} \right)^{5/3} \frac{h^2 n^{5/3}}{m} + \frac{4\pi^3}{9} \left(\frac{3}{\pi} \right)^{1/3} \frac{k^2 m n^{1/3} T^2}{h^2}$$

berechnet werden, wobei $m = 1,66 \cdot 10^{-24}$, $h = 6,55 \cdot 10^{-27}$ und

$n = 5,326 \cdot 10^{36}$ zu setzen ist. Den Strahlungsdruck kann man vernachlässigen, und der mittlere Gravitationsdruck ist jetzt gleich $\bar{P} = 3,926 \cdot 10^{31}$. Wir haben also die Gleichung

$$2,036 \cdot 10^{31} + 1,724 \cdot 10^{10} T^2 = 3,926 \cdot 10^{31},$$

woraus sich

$$T = 3,31 \cdot 10^{10}$$

berechnen läßt. Die Dichte beträgt jetzt

$$\rho = \frac{10^{33}}{\frac{4}{3} \pi (3 \cdot 10^6)^3} = 8,84 \cdot 10^{12} \text{ g.cm}^{-3}.$$

Die in einem ccm enthaltene kinetische Energie ist gleich

$$\frac{3}{2} \bar{P} = \frac{3}{2} \cdot 3,926 \cdot 10^{31} = 5,889 \cdot 10^{31} \text{ Erg.cm}^{-3},$$

also beträgt die gesamte in der Kugel vorhandene kinetische Energie

$$\frac{4}{3} \pi (3 \cdot 10^6)^3 \cdot 5,889 \cdot 10^{31} = 6,66 \cdot 10^{51} \text{ Erg.}$$

Die Kontraktionsenergie ist gleich

$$\frac{3}{5} \cdot \frac{6,66 \cdot 10^{-8} (10^{33})^2}{3 \cdot 10^6} = 1,332 \cdot 10^{52} \text{ Erg,}$$

wovon die Hälfte, nämlich $6,66 \cdot 10^{51}$ Erg, wie wir eben gesehen haben, in der Kugel verblieben ist. Folglich muß die andere Hälfte, noch bevor der Kugelradius den Wert $3 \cdot 10^6$ cm erreicht hat, ausgestrahlt worden sein. Die dazu notwendige Zeit beträgt

$$\frac{6,66 \cdot 10^{51}}{1,17 \cdot 10^{41}} = 5,7 \cdot 10^{10} \text{ Jahre.}$$

Als Kriterium der nichtrelativistischen Entartung gilt die Bedingung

$$\frac{2}{h^3} \left(2 \pi m k T \right)^{3/2} < n < \frac{8 \pi m^3 c^3}{3 h^3},$$

die erfüllt sein muß¹⁾. Hier haben wir $m = 1,66 \cdot 10^{-24}$ und $T = 3,31 \cdot 10^{10}$ zu setzen, und dies ergibt:

$$2,32 \cdot 10^{26} < n < 3,68 \cdot 10^{39}.$$

1) Vgl. S. Chandrasekhar, Monthly Not. R. A. S. **91**, 451, 1931.

Unser Wert $n = 5,325 \cdot 10^{36}$ genügt dieser Bedingung, wodurch unsere Annahme einer nichtrelativistischen Entartung gerechtfertigt wird. Was übrigens die obere Grenze $3,68 \cdot 10^{39}$ anbetrifft, so ist sie für uns belanglos. Sie hätte nur Bedeutung bei konstanter Ruhemasse des Neutrons [sie (nämlich die Zahl $n = 3,68 \cdot 10^{39}$) würde dann die Grenze zwischen gewöhnlicher und relativistischer Entartung andeuten]; bei uns jedoch ist, entsprechend dem Gesetz der Erhaltung der Energie, nicht die Ruhemasse, sondern die Gesamtmasse des Neutrons konstant (mehr als das: die Gesamtmasse eines jeden Neutrons nimmt infolge des Massenverlustes durch Ausstrahlung des Sterns sogar ab; dieser Massendefekt eines jeden Neutrons ist bei einer Neutronengaskugel von 10^{33} g nicht groß und soll hier vernachlässigt werden). In einem solchen Falle muß aber selbst bei relativistischen Geschwindigkeiten der Neutronen die gewöhnliche Entartungsformel angewandt werden (nur darf nicht vergessen werden, daß die in einem ccm enthaltene kinetische Energie nicht gleich $\frac{3}{2} \bar{P}$ zu setzen ist, sondern gleich $3 \bar{P}$).

In Tabelle 5 sind ähnliche Rechnungen für verschiedene andere Werte von R durchgeführt worden.

Wir haben nur die Kontraktionsenergie des Neutronengases in Betracht gezogen, nicht aber diejenige der Elektronen-Protonengashülle. Darum muß die gesamte Kontraktionsenergie der Sonne größer sein. Andererseits haben wir jene Energie nicht in Betracht gezogen, die zur Zertrümmerung der Kerne notwendig war. Diese Energie muß bei dichter Packung sehr gering sein, ganz wie es bei der Atomzerstörung der Fall ist. Wenn wir beim absoluten Nullpunkt Atome bis zur gegenseitigen Berührung aneinanderschieben, so ist die dazu notwendige Arbeit gleich Null. Der weiteren Kompression, die zwangsweise mit Störungen der „Quantenbahnen“ der Atomelektronen verbunden sein muß, wird das Gas steigenden Widerstand entgegenzusetzen, bis letzterer gleich dem Nullpunktsdruck des entstandenen Gemisches von Elektronen und Kernen wird. Die zur Zerstörung der geordneten Quantenbahnen verbrauchte Energie wird sich restlos in der kinetischen Energie der Elektronen und Kerne wiederfinden. Sie wird also keinesfalls zur Ionisation verbraucht werden, weil bei so dichter Packung das Ionisationspotential gleich Null ist. Sollten wir ein Gas nicht beim abso-

Tabelle 5.

Neues Modell der Sonne. Sonnenmasse = 2.10^{33} g.
 Masse der inneren (homogenen) Neutronengaskugel = 10^{33} g.
 Jährlicher Energieverlust durch Ausstrahlung = $1,17.10^{41}$ Erg.

Radius (in cm)	Durch- schnittlicher Druck (in Dyn. cm ⁻²)	Dichte (in g. cm ⁻³)	Temperatur (Grad abs.)	Zeit „Anfang des Sonnenlebens“ ausgestrahlte Energie (in Erg)	Die für diese Ausstrahlung notwendige Zeitspanne (in Jahren)
10^{11}	$3,18.10^{13}$	0,239	$1,61.10^6$	$2,00.10^{47}$	$1,71.10^6$
10^{10}	$3,18.10^{17}$	239	$1,61.10^7$	$2,00.10^{48}$	$1,71.10^7$
10^9	$3,18.10^{21}$	$2,39.10^5$	$1,61.10^8$	$2,00.10^{49}$	$1,71.10^8$
10^8	$3,18.10^{25}$	$2,39.10^8$	$1,61.10^9$	$2,00.10^{50}$	$1,71.10^9$
5.10^7	$5,09.10^{26}$	$1,91.10^9$	$3,22.10^9$	$4,00.10^{50}$	$3,42.10^9$
10^7	$3,18.10^{29}$	$2,39.10^{11}$	$1,61.10^{10}$	$2,00.10^{51}$	$1,71.10^{10}$
3.10^6	$2,93.10^{31}$	$8,84.10^{12}$	$3,31.10^{10}$	$6,66.10^{51}$	$5,69.10^{10}$
2.10^6	$1,99.10^{32}$	$2,98.10^{13}$	$4,13.10^{10}$	$9,99.10^{51}$	$8,54.10^{10}$
$1,6.10^6$	$4,85.10^{32}$	$5,83.10^{13}$	$2,04.10^{10}$	$1,25.10^{52}$	$1,07.10^{11}$
$1,57.10^6$	$5,23.10^{32}$	$6,17.10^{13}$	$1,21.10^{10}$	$1,27.10^{52}$	$1,08.10^{11}$
$1,56.10^6$	$5,37.10^{32}$	$6,29.10^{13}$	$6,71.10^9$	$1,28.10^{52}$	$1,09.10^{11}$
$1,5558.10^6$	$5,43.10^{32}$	$6,34.10^{13}$	$1,20.10^9$	$1,28.10^{52}$	$1,09.10^{11}$
$1,55566.10^6$	$5,43.10^{32}$	$6,34.10^{13}$	0	$1,28.10^{52}$	$1,09.10^{11}$

luten Nullpunkt adiabatisch komprimieren, sondern bei hoher anfänglicher Temperatur, so kann die vollständige Atomzertrümmerung bei bedeutend geringeren Dichten erfolgen, und in diesem Falle wird eine beträchtliche Energiemenge zur Ionisation „verbraucht“ werden, d. h. in potentielle Form übergehen. Bei weiterer Kompression wird sich diese potentielle Energie in kinetische verwandeln, so daß schließlich die zur eigentlichen Ionisation verbrauchte Energie gleich Null wird. Wenn nun in analoger Weise im Inneren eines Sternes die Kerne bereits in größerer gegenseitiger Entfernung in Trümmer gehen, so müssen dabei beträchtliche Energiemengen „absorbiert“ werden. Letztere werden bei genügender weiterer Kompression wieder frei, so daß letzten Endes zur Zertrümmerung der Kerne überhaupt keine Energie verbraucht worden ist. Wir wollen daher bei unseren Untersuchungen die „Bindeenergie“ in den

Kernen überhaupt nicht in Betracht ziehen. Dadurch machen wir wahrscheinlich einen Fehler, da bei den wirklichen Sternen die Kerne wohl schon in merklichen Entfernungen voneinander in Trümmer gehen, und in einem solchen Falle wird eine gewisse Energiemenge absorbiert; letztere wird in unseren Berechnungen vernachlässigt. Andererseits wollen wir aber den von der Elektronen-Protonen-Umhüllung geleisteten Beitrag zur Kontraktionsenergie ebenfalls nicht berücksichtigen.

Die Tabelle 5 zeigt, daß mit der Kontraktion der Sonne ihre innere Temperatur bis zu einem bestimmten Maximum (bis etwas über $4 \cdot 10^{10}$ Grad) steigt und dann wieder abnimmt. Diese Abnahme geht am Ende des „Sonnenlebens“ äußerst schnell (beinahe plötzlich) vor sich (vorausgesetzt natürlich, daß sich die Ausstrahlung der Sonne nicht ändere). Im Endstadium der Sonne ist ihre innere Temperatur 0° abs. und ihre innere Dichte $\rho = 6,34 \cdot 20^{13}$ g.cm $^{-3}$. Nun haben wir oben gesehen, daß nach Rabi der Neutronenradius gleich $1,31 \cdot 10^{-13}$ cm ist. Sollte es zulässig sein, das Neutron als starre Kugel vom erwähnten Radius zu betrachten, so müßte die maximale Dichte des Neutronengases (wo die Neutronen einander berühren) $9,23 \cdot 10^{13}$ g.cm $^{-3}$ sein, also nur etwa 1,5 mal größer als die oben erwähnte maximale Sonnendichte. Bei unseren Rechnungen haben wir aber die Neutronen als Punkte aufgefaßt, weshalb unsere Zahlen für das Endstadium vielleicht nicht unbeträchtlich von der Wirklichkeit abweichen.

Im Endstadium ist die Temperatur gleich 0° abs. und das Neutronengas völlig entartet; strahlende Energie ist natürlich nicht mehr vorhanden. Nun erweist sich aber die entsprechende Kontraktionsenergie gleich $2,56 \cdot 10^{52}$ Erg. Daraus folgt, daß die eine Hälfte dieser Energie während des „Sonnenlebens“ ausgestrahlt worden, und die andere Hälfte als Nullpunktsenergie in der Sonne verblieben ist. Die $1,28 \cdot 10^{52}$ Erg ausgestrahlter Energie bedeuten einen Massenverlust von $1,42 \cdot 10^{31}$ g, d. h. 1,42 % der „Neutronengaskugel“, oder 0,71 % der ganzen Sonnenmasse. Die gesamte Energie (verbliebene Nullpunktsenergie + ausgestrahlte Energie) ist gleich $2,56 \cdot 10^{52}$ Erg, was ein Massenäquivalent von $2,84 \cdot 10^{31}$ g darstellt, d. h. 2,84 % der Neutronengaskugel, oder 1,42 % der ganzen Sonnenmasse. Da die Zahl der Neutronen während des „Sonnenlebens“ unverändert geblieben ist, so muß die Gesamtmasse eines jeden einzelnen

Neutrons trotz seiner großen Nullpunktsgeschwindigkeit nicht zugenommen, sondern um 1,42% abgenommen haben. Um seine jetzige Ruhemasse zu erhalten, muß noch die kinetische Masse seiner Nullpunktenergie abgezogen werden, die ebenfalls 1,42% ausmacht. Somit beträgt die jetzige Ruhemasse des Neutrons nicht mehr $1,66 \cdot 10^{-24}$ g, sondern um 2,84% weniger, d. h. sie ist jetzt gleich $1,61 \cdot 10^{-24}$ g. Bei sehr genauen Berechnungen müßte man dies in Betracht ziehen, was wir jedoch hier nicht tun wollen.

Die für die Ausstrahlung verfügbare Energiemenge von $1,28 \cdot 10^{52}$ Erg ist genügend, um den Energieverlust der Sonne ($1,17 \cdot 10^{41}$ Erg pro Jahr) im Verlaufe von $1,09 \cdot 10^{11}$ Jahren zu decken. Natürlich ist die Sonne noch lange nicht abgekühlt; aber in welchem Stadium befindet sie sich augenblicklich? — Die Antwort hängt davon ab, wann man den „Anfang des Sonnenlebens“ ansetzt. Öpik kommt auf Grund verschiedener Beobachtungstatsachen zu folgendem Schluß: „... all this evidence points to an age of the stellar universe of the same order of magnitude as the currently accepted age of the solar system: not much more than 3000 million years“¹⁾. Aus Tabelle 5 ersehen wir, daß die Neutronengaskugel sich in $3,42 \cdot 10^9$ Jahren bis zu einem Radius von $5 \cdot 10^7$ cm verdichten muß, und eine solche Zeitspanne stimmt sehr gut mit der Schätzung von Öpik überein. Danach müßte augenblicklich im Inneren der Sonne eine Temperatur von $3,22 \cdot 10^9$ Grad herrschen und eine Dichte von $1,91 \cdot 10^9$ g.cm⁻³. Entgegen der gewöhnlichen Auffassung ist nach Tabelle 5 die innere Sonnentemperatur im Steigen begriffen, und wird erst nach etwa $8 \cdot 10^{10}$ Jahren ihr Maximum erreichen, um dann nach weiteren $2 \cdot 10^{10}$ Jahren (rund gerechnet) bis auf den absoluten Nullpunkt herabzusinken (vorausgesetzt natürlich, daß die Strahlung der Sonne konstant bleibt).

In Tabelle 6 sind ähnliche Berechnungen für einige andere Sterne gemacht, jedoch nicht bis zu dem entarteten Zustand fortgesetzt worden.

Es ist nicht ganz sicher, ob man die Neutronen tatsächlich als starre Kugeln vom Radius $1,31 \cdot 10^{-13}$ cm ansehen darf. Vielleicht wäre es möglich, diesen Radius nicht als wirklichen Radius im gewöhnlichen Sinne aufzufassen, sondern den Neutronen

1) E. Öpik, Popular Astronomy 41, 79, 1933.

Tabelle 6.

<i>AO Cas</i> ; 36,3 M_{\odot} ; 140000 L_{\odot} .					
Radius	Druck	Dichte	Temperatur	Zeit „Anfang des Sternlebens“ ausgestrahlte Energie	Die für diese Ausstrahlung notwendige Zeitspanne
10^9	$4,19 \cdot 10^{24}$	$8,67 \cdot 10^6$	$5,85 \cdot 10^9$	$2,64 \cdot 10^{52}$	$1,61 \cdot 10^6$ Jahre
10^8	$4,19 \cdot 10^{28}$	$8,67 \cdot 10^9$	$5,85 \cdot 10^{10}$	$2,64 \cdot 10^{53}$	$1,61 \cdot 10^7$
10^7	$4,19 \cdot 10^{32}$	$8,67 \cdot 10^{12}$	$5,85 \cdot 10^{11}$	$2,64 \cdot 10^{54}$	$1,61 \cdot 10^8$
<i>V Pup</i> ; 21,2 M_{\odot} ; 9800 L_{\odot} .					
10^9	$1,43 \cdot 10^{24}$	$5,06 \cdot 10^6$	$3,42 \cdot 10^9$	$8,99 \cdot 10^{51}$	$7,84 \cdot 10^6$
10^8	$1,43 \cdot 10^{28}$	$5,06 \cdot 10^9$	$3,42 \cdot 10^{10}$	$8,99 \cdot 10^{52}$	$7,84 \cdot 10^7$
10^7	$1,44 \cdot 10^{32}$	$5,06 \cdot 10^{12}$	$3,42 \cdot 10^{11}$	$8,99 \cdot 10^{53}$	$7,84 \cdot 10^8$
<i>Algol</i> ; 4,6 M_{\odot} ; 600 L_{\odot} .					
10^9	$6,73 \cdot 10^{22}$	$1,10 \cdot 10^6$	$7,42 \cdot 10^8$	$4,23 \cdot 10^{50}$	$6,03 \cdot 10^6$
10^8	$6,73 \cdot 10^{26}$	$1,10 \cdot 10^9$	$7,42 \cdot 10^9$	$4,23 \cdot 10^{51}$	$6,03 \cdot 10^7$
10^7	$6,73 \cdot 10^{30}$	$1,10 \cdot 10^{12}$	$7,42 \cdot 10^{10}$	$4,23 \cdot 10^{52}$	$6,03 \cdot 10^8$
<i>Capella</i> ; 4,2 M_{\odot} ; 115 L_{\odot} .					
10^9	$5,60 \cdot 10^{22}$	$1,00 \cdot 10^6$	$6,77 \cdot 10^8$	$3,53 \cdot 10^{50}$	$2,62 \cdot 10^7$
10^8	$5,60 \cdot 10^{26}$	$1,00 \cdot 10^9$	$6,77 \cdot 10^9$	$3,53 \cdot 10^{51}$	$2,62 \cdot 10^8$
10^7	$5,60 \cdot 10^{30}$	$1,00 \cdot 10^{12}$	$6,77 \cdot 10^{10}$	$3,53 \cdot 10^{52}$	$2,62 \cdot 10^9$
<i>O₂ Eri C</i> ; 0,23 M_{\odot} ; 0,0060 L_{\odot} .					
10^9	$1,68 \cdot 10^{20}$	$5,49 \cdot 10^4$	$3,71 \cdot 10^7$	$1,06 \cdot 10^{48}$	$1,51 \cdot 10^9$
10^8	$1,68 \cdot 10^{24}$	$5,49 \cdot 10^7$	$3,71 \cdot 10^8$	$1,06 \cdot 10^{49}$	$1,51 \cdot 10^{10}$

Bei Doppelsternen sind hier immer nur die Hauptsterne gemeint.

eine punktförmige Gestalt zuzuschreiben, genau so, wie Born und Infeld es mit den Elektronen getan haben (s. oben S. 15). In diesem Falle würde eine Dichte von über $9,23 \cdot 10^{13} \text{ g.cm}^{-3}$ keine Komplikation der Berechnungen bedeuten, und es wäre auch bei einem größeren Stern nicht schwer, die gesamte im Ver-

laufe seines Lebens freigewordene Kontraktionsenergie zu berechnen. Wir wollen solche Berechnungen auch tatsächlich durchführen.

Nach dem Gesetz der Erhaltung der Energie müßte bei einer sich ohne Ausstrahlung kontrahierenden homogenen Neutronengaskugel ihre Gesamtmasse unverändert bleiben: die Zunahme der Neutronen an kinetischer Masse müßte durch gleichzeitige Abnahme ihrer Ruhemasse genau aufgewogen werden. In Wirklichkeit aber wird jeder Stern im Verlaufe seines „Lebens“ einen Massenverlust durch Ausstrahlung gehabt haben, ohne daß sich dabei die Zahl seiner Neutronen zu verändern gebraucht hat (wenn man den Neutronenverlust durch zu heftige Ca-Protuberanzen und den Gewinn durch einstürzende Meteorite vernachlässigt). Die Gesamtmasse eines jeden einzelnen Neutrons beträgt am Ende des „Sternlebens“ nicht mehr $1,66 \cdot 10^{-24}$, sondern nur $1,66 \cdot 10^{-24} a$ Gramm, wo a einen echten Bruch bedeutet; sie hat sich also verringert. Natürlich wird die Ruhemasse des Neutrons sich erst recht verringert haben. Im Endstadium des Sterns, d. h. bei 0° abs., beträgt der Nullpunktsdruck des Neutronengases

$$p = \frac{1}{20} \left(\frac{3}{\pi} \right)^{2/3} \frac{h^2 n^{5/3}}{a 166 \cdot 10^{-24}} = \frac{1}{20} \left(\frac{3}{\pi} \right)^{2/3} \frac{h^2 \varrho^{5/3}}{a^{8/3} (1,66 \cdot 10^{-24})^{8/3}},$$

da $\varrho = na 1,66 \cdot 10^{-24} \text{ g. cm}^{-3}$ ist. Der durchschnittliche Gravitationsdruck in unserer homogenen Neutronengaskugel von der Masse M und dem Radius R ist

$$\bar{P} = \frac{3}{20\pi} \frac{GM^2}{R^4} = \frac{1}{5} \left(\frac{4\pi}{3} \right)^{1/3} GM^{2/3} \varrho^{4/3}.$$

Im Gleichgewicht muß $p = \bar{P}$ sein, also:

$$\frac{1}{20} \left(\frac{3}{\pi} \right)^{2/3} \frac{h^2 \varrho^{5/3}}{a^{8/3} (1,66 \cdot 10^{-24})^{8/3}} = \frac{1}{5} \left(\frac{4\pi}{3} \right)^{1/3} GM^{2/3} \varrho^{4/3},$$

woraus

$$\varrho^{1/3} = \frac{4^{4/3} \pi GM^{2/3} a^{8/3} (1,66 \cdot 10^{-24})^{8/3}}{3 h^2}$$

folgt. Die Kontraktionsenergie ist gleich $\frac{3}{5} \frac{GM^2}{R}$. Nimmt man an, daß die Hälfte davon im Stern zurückbleibt, so ergibt sich für die ausgestrahlte Energie: $0,3 \frac{GM^2}{R}$, oder: $0,3 \left(\frac{4\pi}{3} \right)^{1/3} GM^{5/3} \varrho^{1/3}$.

Setzt man statt $\rho^{1/3}$ dessen Wert aus der vorigen Gleichung ein, so erhält man:

ausgestrahlte Energie

$$= \frac{2\pi}{5} \left(\frac{16\pi}{3} \right)^{1/3} \frac{G^2 a^{8/3} (1,66 \cdot 10^{-24})^{8/3} M^{7/3}}{h^2} = A a^{8/3} M^{7/3}.$$

Wenn M_0 den Anfangswert von M bedeutet, so ist sein Endwert offenbar aM_0 . Dann bildet $Aa^{8/3}M_0^{7/3}$ den oberen Grenzwert für die ausgestrahlte Energie, und $Aa^{8/3}(aM_0)^{7/3} = Aa^5M_0^{7/3}$ den unteren. Andererseits ist die ausgestrahlte Energie gleich $(M_0 - aM_0)c^2 = (1-a)M_0c^2$. Wir können also schreiben:

$$Aa^5 M_0^{7/3} < (1-a) M_0 c^2 < Aa^{8/3} M_0^{7/3},$$

oder:

$$a^5 < \frac{(1-a)c^2}{AM_0^{4/3}} < a^{8/3},$$

oder, wenn man die Zahlenwerte einsetzt:

$$a^5 < \frac{7,0075 \cdot 10^{45} (1-a)}{M_0^{4/3}} < a^{8/3}. \quad (86)$$

Die Masse der Capella (Hauptstern) beträgt 4,2 Sonnenmassen, oder $8,4 \cdot 10^{33}$ g, wovon die Hälfte, d. h. $4,2 \cdot 10^{33}$ g, auf die innere Neutronengaskugel kommt. Nimmt man der Einfachheit halber an, daß die Neutronengaskugel sich im Anfangsstadium ihrer Entwicklung befindet, so haben wir $M_0 = 4,2 \cdot 10^{33}$ in (85) zu setzen, und dies ergibt:

$$a^5 < 10,341 (1-a) < a^{8/3}.$$

Die in Betracht kommende Wurzel der Gleichung

$$a^5 = 10,341 (1-a)$$

ist $a = 0,9320$, und diejenige von

$$a^{8/3} = 10,341 (1-a)$$

beträgt $a = 0,9221$. Somit ist für die Capella:

$$0,9221 < a < 0,9320.$$

Der kleinere Grenzwert von a ergibt für die ausgestrahlte Energiemenge

$$(1-a) M_0 c^2 = (1-0,9221) \cdot 4,2 \cdot 10^{33} \cdot 9 \cdot 10^{20} = 2,9446 \cdot 10^{53} \text{ Erg.}$$

Die Capella ist (absolut genommen) 115 mal heller als die Sonne,

somit strahlt sie $115.1,17.10^{41} = 1,3455.10^{43}$ Erg pro Jahr aus. Die Dauer einer solchen Strahlung (wenn sie konstant bleibt) beträgt

$$\frac{2,9446.10^{53}}{1,3455.10^{43}} = 2,19.10^{10} \text{ Jahre.}$$

Der größere Wert von a ergibt in ähnlicher Weise $1,91.10^{10}$ Jahre.

In Tabelle 7 sind derartige Berechnungen auch für andere Sterne durchgeführt worden.

Tabelle 7.

Name des Sterns (bei den Doppelsternen ist immer nur der Hauptstern gemeint)	Maximalwert von α	Minimalwert von α	Wenn die Strahlung im Verlaufe des „Sternlebens“ konstant wäre, so müßte sie dauern (vorausgesetzt, daß die Hälfte der Kontraktionsenergie im Stern zurückgehalten wird):	
			länger als	und kürzer als
<i>AO Cas</i>	0,7038	0,5865	$5,91.10^8$ Jahre	$8,25.10^8$ Jahre
<i>V Pup</i>	0,7714	0,6894	$3,90.10^9$	$5,17.10^9$
<i>Algol</i>	0,9257	0,9141	$4,38.10^9$	$5,07.10^9$
<i>Capella</i>	0,9320	0,9221	$1,91.10^{10}$	$2,19.10^{10}$
<i>O₂ Eri C</i>	0,9980	0,9980	$5,90.10^{11}$	$5,90.10^{11}$

Wir haben überall die Kontraktionsenergie unter der Voraussetzung berechnet, daß die Neutronengaskugel homogen aufgebaut ist. Ein anderer Aufbau würde auch eine andere Kontraktionsenergie ergeben. Trotzdem ist es kaum möglich anzunehmen, daß *AO Cas* seit „Anfang der Welt“ strahle, wenn dieser Anfang vor mehr als 3 Milliarden Jahren liegt. Bei den übrigen Sternen besteht keine solche Schwierigkeit. *AO Cas* müßte (bei konstanter Strahlung) seine ganze Masse ($7,26.10^{34}$ g) bereits in $3,99.10^9$ Jahren restlos ausstrahlen.

G. Watagin's Formel: $n_+ = n_- \sim \frac{16 \pi}{h^3 c^3} (kT)^3$ für die „Paarbildung“ bei extremer Temperatur. **Prioritätsanspruch hinsichtlich dieser Formel (aber nicht hinsichtlich ihrer Ableitung).**

Es gilt heute als feststehende Tatsache, daß ein Lichtquant von der Energie $h\nu > 2m_e c^2$ (m_e = Ruhemasse des Elektrons) sich in ein Paar: ein Elektron und ein Positron verwandeln

kann. Unlängst hat Watagin die Frage über die Elektronenzahl (pro cem) n_- und die Positronenzahl n_+ untersucht, die mit der strahlenden Energie im Gleichgewicht wären. Nach Watagin¹⁾ ergibt sich bei extrem hohen Temperaturen folgende Formel:

$$n_+ = n_- \sim \frac{16 \pi}{h^3 c^3} (kT)^3, \quad (87)$$

wobei die Bedingung

$$T \gg \gg \frac{2 c^2 m_e}{k}$$

erfüllt sein muß.

Hinsichtlich der Formel (87) (nicht aber hinsichtlich ihrer Ableitung) sehe ich mich gezwungen einen Prioritätsanspruch zu erheben.

Im Jahre 1929 habe ich die Hypothese aufgestellt, daß es neben den Elektronen und Protonen (von den Positronen konnte ich damals natürlich nichts wissen) noch andere negative und positive Elementarteilchen gebe²⁾. Die Ladungen dieser Elementarteilchen seien genau gleich den Ladungen der Elektronen (resp. Protonen), nicht aber ihre entsprechenden Massen. Unter gewöhnlichen Umständen treten diese hypothetischen Elementarteilchen nicht isoliert auf, sondern zu Dipolen verbunden, wobei ich letztere mit den Lichtquanten identifizierte. Die hypothetischen Elementarteilchen sind also die „Bausteine“ der Lichtquanten. Jedes Lichtquant besteht aus einem positiven und einem genau gleichgroßen negativen „Baustein“, wobei diese „Bausteine“, nach meiner Auffassung, dermaßen deformiert werden, daß das Lichtquant sich in eine zylindrische „Krafttröhre“ verwandelt³⁾.

Meine scharf begrenzten zylindrischen Krafttröhren verhalten sich zu den wirklichen Lichtquanten etwa ebenso, wie das klassische scharf begrenzte kugelförmige Elektron sich zu dem wirklichen Elektron verhält.

Gewöhnlich wird angenommen, daß bei schneller Bewegung eines (klassischen) Elektrons seine kugelförmige Gestalt

1) G. Watagin, Phil. Mag. (7) **17**, 911, 1934. Vgl. auch C. R. **200**, 909, 1935.

2) W. Anderson, „Über die Struktur der Lichtquanten“, ZS. f. Phys. **58**, 842, 1929.

3) Ebenda, S. 850.

sich infolge der Lorentzischen Kontraktion in eine Ellipsoide verwandelt (wobei die kurze Achse in die Bewegungsrichtung fällt). Nun taucht die Frage auf, warum eine solche Lorentz-Kontraktion nicht bei den Lichtquanten zu bemerken ist. Letztere bewegen sich ja mit Lichtgeschwindigkeit, und in einem solchen Falle müßten ihre Wellenlängen infolge der Lorentzischen Kontraktion als gleich Null erscheinen, was aber der Beobachtung widerspricht. Die Sache ist die, daß bei einer bewegten Welle die Lorentzsche Kontraktion durch die „Dilatation der Zeit“ genau kompensiert wird. Entgegen der gewöhnlichen Auffassung nehme ich nun an, daß genau dieselbe Kompensation auch bei schnell bewegten Elektronen oder auch bei den „Bausteinen“ der Lichtquanten stattfindet. In meiner Theorie spielt nämlich der Durchmesser eines solchen schnell bewegten Partikelchens die Rolle einer Wellenlänge, freilich einer nicht polarisierten¹⁾. Was sich deformiert, das sind nur die außerhalb des eigentlichen Elektrons befindlichen Kraftlinien, die sich gegen die „Äquatorebene“ zusammendrängen. Die eigentliche Durchmesserlänge eines schnell bewegten Elektrons ist gegen Lorentzsche Kontraktion genau so immun, wie die Wellenlänge eines mit der Geschwindigkeit c bewegten Lichtquants.

Mit steigender Temperatur werden die Dimensionen der Lichtquanten immer kleiner; natürlich muß dasselbe auch von den „Bausteinen“ gesagt werden, aus denen die Lichtquanten bestehen. Schließlich werden die Dimensionen der negativen „Bausteine“ mit denjenigen der gewöhnlichen Elektronen gleich werden, also werden auch ihre Massen gleich (da ja ihre Ladungen nach unserer Theorie als identisch angenommen werden). Somit werden die negativen „Bausteine“ mit den gewöhnlichen Elektronen in jeder Hinsicht identisch. Letztere können aber bekanntlich auch im isolierten Zustand selbständig existieren. Bei einer sehr viel höheren „kritischen“ Temperatur wird der positive „Baustein“ mit einem gewöhnlichen (klassischen) Proton identisch. Bei einer so hohen Temperatur können die Lichtquanten in Elektronen und Protonen dissoziieren (heutzutage muß natürlich ein Positron statt eines Protons angenommen werden). Mehr als das: es besteht zwischen dissoziiertem und undissoziiertem Zustand überhaupt kein Unterschied (wie man

1) Ebenda, S. 844.

etwa bei mechanischer Druckionisation nicht sagen kann, ob die Elektronen frei oder gebunden sind, ob sie sich in ionisiertem oder in nichtionisiertem Zustande befinden). Für die „kritische“ Temperatur habe ich folgenden Ausdruck gefunden:

$$T_{krit} = \frac{9}{8} \left(\frac{75}{2\pi} \right)^{1/3} \frac{hc^3 M_p}{a\pi^3 e^2 k}, \quad (88)$$

wo $a = \frac{2}{3}$ beim Flächenladungsmodell des Protons zu setzen ist und $a = \frac{4}{5}$ beim Raumladungsmodell; M_p bedeutet die Masse eines Protons¹⁾.

Im Jahre 1930 waren die frei existierenden Positronen noch nicht bekannt, und ich war daher gezwungen anzunehmen, daß der positive „Baustein“ erst dann isoliert existieren könne, wenn sein Radius mit dem Radius des klassischen Protons identisch werde. Nun ist der klassische Protonenradius von der Größenordnung 10^{-16} cm und die Protonenmasse $M_p = 1,66 \cdot 10^{-24}$ g. Dieser Wert in (88) eingeführt ergibt eine enorm hohe „kritische“ Temperatur von der Größenordnung 10^{15} Grad. Bei dieser Temperatur ist das (kompressibel gedachte) klassische Elektron bis zu demselben Volumen zusammengepreßt, wie das klassische Proton. Bei weiterem Steigen der Temperatur nehmen die Volumina der Protonen und Elektronen ständig ab, bleiben aber dabei einander gleich. Man kann also annehmen, daß oberhalb der „kritischen“ Temperatur ein jedes Lichtquant in zwei gleichgroße, aber entgegengesetzt geladene Partikelchen dissoziieren kann. Bei vollständiger Dissoziation muß offenbar

$$n_+ = n_- = n_q \quad (89)$$

sein, wo n_q die ursprüngliche Zahl der Lichtquanten pro ccm bedeutet. Nun kann nach (66)

$$n_q = 2,40412 \cdot 8\pi \left(\frac{kT}{hc} \right)^3$$

angenommen werden, oder:

$$n_q = 1,20206 \cdot \frac{16\pi}{h^3 c^3} (kT)^3,$$

1) W. Anderson, „Die Kraftröhrentheorie der Lichtquanten und die Thermodynamik der Hohlraumstrahlung“, ZS. f. Phys. 59, 716, 1930.

oder im Hinblick auf (89):

$$n_+ = n_- = 1,20206 \cdot \frac{16\pi}{h^3 c^3} (kT)^3. \quad (90)$$

Diese Formel stellt das „mathematische Äquivalent“ meiner damaligen Theorie dar.

Ich glaube Watagins Formel (87) und meine Formel (90) als identisch betrachten zu dürfen.

Es ist in der Tat sehr bemerkenswert, daß Watagins Theorie einerseits und meine ganz anders geartete und ziemlich primitive „Krafröhrentheorie“ andererseits zu Resultaten führen, die bei extremen Temperaturen nicht nur qualitativ, sondern sogar quantitativ übereinstimmen!

Watagin ist der Meinung, daß seine Formel (87) eigentlich nur die oberen Grenzwerte von n_+ und n_- ergibt. Ich bin genau derselben Meinung auch von meiner Formel (90), denn sie entspricht ja dem äußersten Falle, wo sämtliche Lichtquanten als dissoziiert betrachtet werden können.

Heutzutage muß in (88) unter M_p natürlich nicht die Protonenmasse, sondern die Positronenmasse, oder die ihr gleiche Elektronenmasse m_e verstanden werden, und a kann nach Born und Infeld gleich 1,2361 angenommen werden¹⁾. Dann erhalten wir (da $\frac{hc}{2\pi e^2} = 137$ gesetzt werden kann):

$$T_{krit} = \frac{9}{8} \left(\frac{75}{2\pi} \right)^{1/3} \cdot \frac{hc^3 m_e}{1,2361 \pi^3 e^2 k} = \frac{9 \cdot 137}{8 \cdot 1,2361 \pi^2} \cdot \left(\frac{75}{2\pi} \right)^{1/3} \frac{2c^2 m_e}{k},$$

oder:

$$T_{krit} = 28,78 \frac{2c^2 m_e}{k} = 3,41 \cdot 10^{11} \text{ Grad.} \quad (91)$$

Wir können also schreiben:

$$T_{krit} \gg \frac{2c^2 m_e}{k}.$$

Wir haben aber oben gesehen, daß auch Watagins Theorie eine ähnliche Bedingung an die Temperatur stellt. Also auch in dieser Hinsicht besteht kein Widerspruch zwischen Watagins Theorie und meiner „Krafröhrentheorie“.

Man kann die Lichtquantenzahl n_q auch von einem anderen Standpunkt aus berechnen. Es möge die durchschnittliche kine-

1) M. Born und L. Infeld, Proc. Roy. Soc. London (A) 144, 446, 1934.

tische Energie eines Partikelchens xkT betragen, wobei x einen vorläufig noch unbekanntem Zahlenfaktor bedeutet. Der entsprechende Gasdruck ist bekanntlich gleich $p = nkT$, und die in einem ccm enthaltene kinetische Energie ist gleich $E = nxkT$. Nun wissen wir, daß im nichtrelativistischen Falle $p = \frac{2}{3}E$ sein muß, und im relativistischen: $p = \frac{1}{3}E$. Im ersteren Falle haben wir also $nkT = \frac{2}{3}(nxkT)$ und daher $x = \frac{3}{2}$; im letzteren hingegen $nkT = \frac{1}{3}(nxkT)$, also $x = 3$. Daraus folgt, daß die durchschnittliche kinetische Energie im nichtrelativistischen Falle gleich $\frac{3}{2}kT$ ist, und im relativistischen gleich $3kT$. Letzteres muß sich auch auf die Lichtquanten beziehen. Die in einem ccm enthaltene strahlende Energie ist gleich aT^4 , also muß die dort vorhandene Zahl von Lichtquanten

$$n = n_q = \frac{aT^4}{3kT} = \frac{aT^3}{3k}$$

betragen. Nun ist bekanntlich

$$a = \frac{8\pi^5 k^4}{15c^3 h^3},$$

und dies ergibt:

$$n_q = \frac{8\pi^5 k^4}{15c^3 h^3} \cdot \frac{T^3}{3k} = \frac{\pi^4}{90} \cdot \frac{16\pi}{h^3 c^3} (kT)^3.$$

Demnach erhalten wir in dem extremen Falle, wo sämtliche Lichtquanten dissoziiert sind:

$$n_+ = n_- = \frac{\pi^4}{90} \cdot \frac{16\pi}{h^3 c^3} (kT)^3 = 1,0823 \frac{16\pi}{h^3 c^3} (kT)^3. \quad (92)$$

Diese Formel unterscheidet sich nur unwesentlich von (90) und von (87).

Bei T_{krit} verschwindet jeder Unterschied zwischen dissoziiertem und nichtdissoziiertem Zustand; in gewohnter Weise bezeichnen wir diesen Zustand als „mechanische“ Dissoziation der Lichtquanten. Bei T_{krit} kann Hohlraumstrahlung mit gleichem Rechte sowohl als Lichtquantengas, wie auch als ein Gemisch von Elektronen und Positronen angesehen werden. Es ist nun sehr interessant, die Nullpunktsenergie der Elektronen und Positronen zu berechnen. (Bekanntlich folgen die Lichtquanten der Bose-Statistik, die Elektronen und Positronen hingegen der

Fermi-Statistik, weshalb sie auch Nullpunktsenergie besitzen.) Ist E_0 die in einem ccm enthaltene Nullpunktsenergie, so haben wir bekanntlich:

$$E_0 = \frac{3}{8} \left(\frac{6}{a\pi} \right)^{1/3} hcn^{4/3},$$

wo a das statistische Gewicht eines Partikelchens bedeutet. Wir haben hier zwei Arten von Partikelchen: Elektronen und Positronen; außerdem kann das Elektron sowie das Positron zwei Arten von „Spin“ haben. Somit müssen wir $a = 4$ setzen. Andererseits ist

$$n = n_+ + n_- = 2 n_q,$$

so daß wir

$$E_0 = \frac{3}{8} \left(\frac{6}{4\pi} \right)^{1/3} hc (2n_q)^{4/3} = \frac{3}{4} \left(\frac{3}{\pi} \right)^{1/3} hcn_q^{4/3} \quad (93)$$

erhalten. Wir haben oben gesehen, daß man entweder

$$n_q = 1,20206 \frac{16\pi}{h^3 c^3} (kT)^3$$

oder

$$n_q = 1,0823 \frac{16\pi}{h^3 c^3} (kT)^3$$

annehmen darf. Der erstere Wert in (93) eingeführt ergibt:

$$E_0 = 8,1794 \cdot 10^{-15} T^4,$$

und der letztere:

$$E_0 = 7,1113 \cdot 10^{-15} T^4,$$

wenn man nach Birge $h = 6,547 \cdot 10^{-27}$ und $c = 2,99796 \cdot 10^{10}$ setzt¹⁾. Da es schwer zu entscheiden ist, welcher der beiden Werte von E_0 zuverlässiger wäre, wollen wir das arithmetische Mittel akzeptieren, nämlich:

$$E_0 = 7,6453 \cdot 10^{-15} T^4. \quad (94)$$

Andererseits ist die (experimentell bestimmte) Strahlungskonstante nach Birge²⁾ gleich $a = 7,6518 \cdot 10^{-15}$, und dies ergibt für die Energiedichte der Hohlraumstrahlung:

$$E_T = 7,6518 \cdot 10^{-15} T^4. \quad (95)$$

1) R. T. Birge, „Probable Values of the General Physical Constants“, Phys. Rev. Supplement 1 (Nr. 1), S. 59, Juli 1929.

2) Ebenda, S. 61.

Ich glaube (94) und (95) als identisch betrachten zu dürfen, so daß man

$$E_T = E_0 \quad (96)$$

schreiben kann. Nun verschwindet bei T_{krit} jeder Unterschied zwischen dissoziierten und nichtdissoziierten Lichtquanten. Wir können also ein und dieselbe Substanz mit genau gleichem Rechte entweder als Hohlraumstrahlung von der enormen Temperatur T_{krit} , oder als ein Elektronen-Positronen-Gemisch von der Temperatur 0° abs. ansehen. Einerseits dürfen wir jedes Elektron zusammen mit dem ihm nächsten Positron als ein einziges Lichtquant betrachten, welches der Bose-Statistik folgt und deshalb nur thermische und gar keine Nullpunktsenergie besitzt. Andererseits haben wir das Recht, den einzelnen Elektronen und Positronen gar keine thermische, sondern nur Nullpunktsenergie im Einklang mit der Fermi-Statistik zuzuschreiben. Lassen wir eine solche Substanz durch eine Öffnung ausströmen, so können wir in diesem Prozeß das Ausströmen eines Gases von 0° abs. sehen, welches von gar keiner Strahlung begleitet wird. Andererseits können wir mit dem gleichen Rechte das ausströmende Gas als reine strahlende Energie ohne jede Beimischung von irgendwelcher „Materie“ ansehen. Lichtquantengas (bei T^0) einerseits und ein entsprechendes Elektronen-Positronen-Gemisch (bei 0° abs.) andererseits: das sind zwei „Phasen“ eines und desselben Grundstoffes. Unter gewöhnlichen Bedingungen weisen beide „Phasen“ einen enormen Unterschied auf, der jedoch unter extremen Bedingungen verschwindet. Wir haben das Recht folgenden paradox klingenden Ausspruch zu tun: das Erwärmen eines Hohlraumes bis T_{krit} ($=3,41.10^{11}$ Grad) bedeutet das Erreichen des absoluten Nullpunktes der Temperatur!

Zum Schluß sei hier noch Placinteanu's Theorie der Photonen (Lichtquanten) erwähnt¹⁾. Nach dieser Theorie besteht ein genügend energiereiches Lichtquant aus einem Elektron und einem Positron. Ich finde, daß der Grundgedanke dieser Theorie mit meiner im Jahre 1930 aufgestellten „Kraftröhrentheorie“ identisch ist.

1) Jean J. Placinteanu, C. R. **197**, 549, 1933. Vgl. auch Journal de Physique et le Radium (7) **7**, 127, 1936.

Der durchschnittliche Massenabsorptionskoeffizient des neuen Sternmodells.

Der totale Absorptionskoeffizient ist die Summe des „wahren“ Absorptionskoeffizienten und des Absorptionskoeffizienten durch Streuung. Zuerst wollen wir uns mit dem letzteren beschäftigen. Er ist nach der bekannten Formel von J. J. Thomson gleich

$$\sigma_0 = \frac{8\pi e^4 N}{3 m_e^2 c^4}, \quad (97)$$

wo N die Zahl der Elektronen pro Gramm Materie bedeutet.

Was unser neues Sternmodell anbetrifft, so interessiert uns eigentlich nur die Absorption in dessen Elektronen-Protonen-Umhüllung. (Und nur diese Absorption ist allein auch gemeint, wenn wir von dem „durchschnittlichen Massenabsorptionskoeffizienten des neuen Sternmodells“ sprechen.) Es ist klar, daß jedes Gramm dieser Umhüllung $\frac{1}{m_H}$ Elektronen und $\frac{1}{m_H}$ Protonen enthält, wenn m_H die Masse eines Wasserstoffatoms bedeutet. Wir haben also $N = \frac{1}{m_H}$ in (97) zu setzen, und dies ergibt:

$$\sigma_0 = \frac{8\pi e^4}{3 m_e^2 m_H c^4}. \quad (98)$$

Benutzt man die bekannte Eddingtonsche Gleichung

$$\frac{hc}{2\pi e^2} = 137, \quad (99)$$

so erhält man aus (98):

$$\sigma_0 = \frac{2h^2}{3 \cdot 137^2 m_e^2 m_H c^2}. \quad (100)$$

Die Formeln (97) und (100) gelten nur solange die kinetische Masse eines jeden Lichtquants klein im Vergleich mit der Ruhemasse des Elektrons ist. Für härtere Lichtquanten ist folgende von Klein und Nishina aufgestellte Formel ¹⁾ zu gebrauchen:

$$\sigma = \sigma_0 \left\{ \frac{1+a}{\alpha^2} \left[\frac{2(1+a)}{1+2a} - \frac{1}{\alpha} \log \text{nat}(1+2a) \right] - \frac{1}{2\alpha} \log \text{nat}(1+2a) - \frac{1+3a}{(1+2a)^2} \right\}, \quad (101)$$

1) O. Klein und Y. Nishina, ZS. f. Phys. 52, 868, 1929.

wo

$$\alpha = \frac{h\nu}{m_e c^2} \quad (102)$$

bedeutet. Sollte z. B. $h\nu = m_e c^2$ sein, so haben wir $\alpha = 1$ in (101) zu setzen, und dies ergibt $\sigma = 0,43\sigma_0$. Ist hingegen $h\nu = 0,5 m_e c^2$, so erhalten wir $\sigma = 0,56\sigma_0$, und $h\nu = 2 m_e c^2$ ergibt $\sigma = 0,34\sigma_0$.

Die Formel von Klein und Nishina hat sich bei den Beobachtungen gut bewährt, so daß man erwarten könnte, daß sie sich auch für das Innere der Sterne gut bewähre. Dagegen ist aber folgendes zu bemerken. Wenn im Laboratoriumversuch eine harte Strahlung von irgendeiner Materie absorbiert wird, so haben die Elektronen der letzteren vor der Absorption solche Geschwindigkeiten, die klein im Vergleich mit der Lichtgeschwindigkeit sind. Die Masse eines jeden Elektrons kann deshalb gleich seiner Ruhemasse m_e gesetzt werden. Im Inneren der Sterne hingegen besitzen die Elektronen einen beträchtlichen kinetischen Massenzuwachs, so daß man die durchschnittliche Masse eines einzelnen Elektrons (bei nicht zu extremen Temperaturen) gleich $m_e + \frac{3kT}{2c^2}$ setzen muß. Statt (100) haben wir dann:

$$\sigma_0 = \frac{2h^2}{3.137^2 \pi \left(m_e + \frac{3kT}{2c^2}\right)^2 m_H c^2}, \quad (103)$$

und statt (102):

$$\alpha = \frac{2h\nu}{2m_e c^2 + 3kT}. \quad (104)$$

Bei extremen Temperaturen kann die durchschnittliche Elektronenmasse einfach gleich $\frac{3kT}{c^2}$ angenommen werden, und statt (100) erhalten wir:

$$\sigma_0 = \frac{2h^2}{3.137^2 \pi \left(\frac{3kT}{c^2}\right)^2 m_H c^2} = \frac{2h^2 c^2}{3^3.137^2 \pi k^2 T^2 m_H}. \quad (105)$$

Andererseits kann bei diesen extremen Temperaturen die durchschnittliche Masse eines Strahlungsquants $\frac{h\nu}{c^2}$ gleich der durchschnittlichen Masse des Elektrons $\frac{3kT}{c^2}$ angenommen werden, so daß wir $\alpha = 1$ setzen können. Wir haben aber schon oben ge-

sehen, daß (101) in einem solchen Falle $\sigma = 0,43 \sigma_0$ ergibt, also im Hinblick auf (105):

$$\sigma = \frac{0,86 h^2 c^2}{3^3 \cdot 137^2 \pi k^2 T^2 m_H} \quad (106)$$

Eine solche Form müßte also die Formel von Klein und Nishina für extreme Temperaturen aufweisen.

Wir wollen aber die ganze Angelegenheit von einer tieferen und prinzipielleren Seite betrachten. Wenn wir von einer Absorption von Strahlen durch Elektronen sprechen, so meinen wir stillschweigend, daß die Bewegung der schnellen und leichten Strahlungsquanten durch die langsamen und schweren Elektronen so oder anders gehemmt werde. Eine solche stillschweigende Voraussetzung ist bei mäßigen Temperaturen vollkommen berechtigt; sie wird aber bei extremen Temperaturen hinfällig. Die relativistischen Elektronengeschwindigkeiten unterscheiden sich nur wenig von der Geschwindigkeit der Strahlungsquanten; auch ist der Unterschied zwischen der Strahlungsquantenmasse und der Elektronenmasse nur gering. In einem solchen Falle muß aber der Begriff eines Absorptionskoeffizienten (seitens der Elektronen) jeden Sinn verlieren. Die Elektronen sind jetzt ihrem Wesen nach den Strahlungsquanten sehr ähnlich, und können deshalb nicht als ein bloß „hemmender Faktor“ angesehen werden. Man muß dagegen die Sache so auffassen, daß die Energie sowohl durch Strahlungsquanten als auch durch Elektronen übermittelt wird. Wenn sich in einem bestimmten Raume 2000 Strahlungsquanten und 2000 Elektronen befinden, so ist es beinahe dasselbe, als wenn in diesem Raume sich 4000 Strahlungsquanten und gar keine Elektronen befänden. Die Rolle eines „hemmenden“ Faktors können in diesem extremen Falle nur noch die Atomkerne spielen (und auch das nur solange ihre Geschwindigkeiten noch keine relativistischen sind). Die Streuung durch Atomkerne (in unserem Falle durch Protonen) ist aber bekanntlich außerordentlich gering. Man müßte ja in (97) statt m_e die etwa zweitausendmal schwerere Masse des Protons setzen. Relativistisch bewegte Elektronen, welche die Bewegung der strahlenden Energie hemmen, sind analog den vielen Bäumen, welche uns den Wald zu sehen verhindern. Nach allem

Gesagten kann der Absorptionskoeffizient durch Streuung bei den extremen Temperaturen im Inneren der Sterne einfach gleich Null gesetzt werden.

Man kann von einer Streuung der Strahlungsquanten an relativistisch bewegten Elektronen höchstens nur in dem Sinne sprechen, wie man neuerdings von Streuung der Strahlungsquanten an anderen Strahlungsquanten spricht. „In diesem Zusammenhang muß die Frage gestellt werden, ob die aus der Diracschen Theorie abgeleiteten Resultate über die Streuung von Licht an Licht usw. schon als endgültig betrachtet werden können, oder ob zu erwarten ist, daß die spätere Theorie zu anderen Ergebnissen führt“¹⁾. Unsere vorliegenden Untersuchungen prästendieren aber nicht auf eine so hohe Präzision, daß man Streuung von Licht an Licht in Betracht zu ziehen brauchte.

In den äußeren Teilen der Elektronen-Protonen-Umhüllung ist die Temperatur verhältnismäßig niedrig, so daß man die Streuung nach (100) berechnen kann. Die Temperatur der inneren Teile hingegen ist bei den mittleren Sternen von der Größenordnung einiger Milliarden Grad, wo die „Molekulargeschwindigkeiten“ der Elektronen schon als relativistisch (oder beinahe relativistisch) angesehen werden dürfen. Der entsprechende Absorptionskoeffizient kann nach dem oben Gesagten gleich Null angenommen werden. Das arithmetische Mittel aus den Absorptionskoeffizienten der äußeren und der inneren Teile kann als durchschnittlicher Absorptionskoeffizient (durch Streuung) der Elektronen-Protonen-Umhüllung angesehen werden. Er ist offenbar gleich

$$\bar{\sigma} = \frac{1}{2} \left(\frac{2h^2}{3.137^2 \pi m_e^2 m_H c^2} + 0 \right) = \frac{h^2}{3.137^2 \pi m_e^2 m_H c^2} \sim 0,2. \quad (107)$$

Die Gleichung (107) gilt aber nur für mittlere Sterne. Ist hingegen der Stern sehr klein, so wird selbst in den inneren Teilen der Umhüllung die Temperatur ungenügend sein, um den Elektronen relativistische „Molekulargeschwindigkeiten“ zu erteilen. Dann kann aber auch der entsprechende Absorptionskoeffizient nicht mehr gleich Null gesetzt werden, weshalb $\bar{\sigma}$ für kleine Sterne größer als in (107) sein muß. Für (hinsicht-

1) W. Heisenberg und H. Euler, „Folgerungen aus der Diracschen Theorie des Positrons“, ZS. f. Phys. 98, 732, 1936.

lich der Masse) sehr große Sterne wird $\bar{\sigma}$ offenbar kleiner als in (107) sein.

Wenden wir uns nun dem „wahren“ Absorptionskoeffizienten zu. Dabei wollen wir uns aber nicht auf die älteren Untersuchungen von Kramers¹⁾ stützen, sondern auf die neueren von Kothari und Majumdar²⁾, und zwar besonders auf die endgültige Zusammenfassung von Majumdar³⁾. In unserer Elektronen-Protonen-Umhüllung brauchen wir offenbar nur die „frei-frei“-Übergänge in Betracht zu ziehen. Dann ist nach Majumdar der „wahre“ Massenabsorptionskoeffizient im nichtentarteten und nichtrelativistischen Falle⁴⁾ gleich

$$K_1 = \frac{8 \pi^2 h^2 Z^2 e^6}{315.3^{1/2} (2 \pi m_e)^{5/2} c (kT)^{7/2}} \cdot \frac{\rho}{\mu A m_H^2} \cdot \frac{\beta_1}{\beta_2}, \quad (108)$$

im entarteten nichtrelativistischen Falle⁵⁾ gleich

$$K_2 = \frac{16 \pi^2 Z^2 e^6}{45.3^{1/3} h c k^2 T^2} \cdot \frac{1}{A m_H} \cdot \frac{\beta_1}{\beta_3}, \quad (109)$$

im nichtentarteten relativistischen Falle⁶⁾ gleich

$$K_3 = \frac{2 \pi^2 e^8 h Z^3}{5 c^3 m_e^2 k^3 T^3} \cdot \frac{\rho}{\mu A m_H^2} \cdot \frac{\beta_1}{\beta_4}, \quad (110)$$

und endlich im entarteten relativistischen Falle⁷⁾ gleich

$$K_4 = \frac{32 \pi^3 e^8 Z^3}{5 h^2 c^6 m_e^3 A m_H} \frac{\beta_1}{\beta_5}. \quad (111)$$

Hier bedeutet Z die Atomnummer, A das Atomgewicht⁸⁾, μ das

1) H. A. Kramers, Phil. Mag. (6) **46**, 836, 1923.

2) R. C. Majumdar, „Die Opazität eines entarteten Gases“, *Astronomische Nachrichten* **243**, 5, 1931; D. S. Kothari und R. C. Majumdar, „Die Opazität eines entarteten Gases“, *Astron. Nachr.* **244**, 65, 1931; R. C. Majumdar und D. S. Kothari, „Der relativistische Opazitätskoeffizient III“, *A. N.* **247**, 1, 1932.

3) R. C. Majumdar, „Theorie des stellaren Absorptionskoeffizienten“, *A. N.* **247**, 217, 1932.

4) Ebenda, Sp. 236. Im Original steht noch ein n im Zähler, was einen offensibaren Druckfehler darstellt.

5) Ebenda, Sp. 238.

6) Ebenda, Sp. 242.

7) Ebenda.

8) Im Original steht A' statt A , m statt m_e und H statt m_H .

durchschnittliche Molekulargewicht. Die β sind Zahlenfaktoren: $\beta_1 = 1,0823$, $\beta_2 = 1,0128$, $\beta_3 = 1,0173$, $\beta_4 = 1,0596$ und $\beta_5 = 1,0369$.

Im Falle unserer Elektronen-Protonen-Umhüllung haben wir $Z = 1$, $A = 1$ und $\mu = \frac{1}{2}$ zu setzen. Wenn wir außerdem die Eddingtonsche Relation (99) in Betracht ziehen, so erhalten wir:

$$K_1 = \frac{h^5 c^2 Q}{315.137^2 \cdot 6^{1/2} \pi^{3/2} m_e^{3/2} m_H^2 k^{7/2} T^{7/2}} \cdot \frac{1,0823}{1,0128}, \quad (112)$$

$$K_2 = \frac{2 h^2 c^2}{45.137^3 \cdot 3^{1/2} \pi m_H k^2 T^2} \cdot \frac{1,0823}{1,0173}, \quad (113)$$

$$K_3 = \frac{h^5 c Q}{20.137^4 \pi^2 m_e^2 m_H^3 k^3 T^3} \cdot \frac{1,0823}{1,0596}, \quad (114)$$

$$K_4 = \frac{h^2}{5.137^4 \pi m_e^2 m_H c^2} \cdot \frac{1,0823}{1,0369}. \quad (115)$$

Es ist sehr bemerkenswert, daß (113) bis auf einen Zahlenfaktor mit (106) übereinstimmt; desgleichen (115) mit (100).

Führt man in (112) bis (115) die entsprechenden numerischen Werte ein, so erhält man die in Tabelle 8 zusammengestellten Resultate.

Tabelle 8.

„Wahrer“ Massenabsorptionskoeffizient des ionisierten Wasserstoffs.		
	Nichtrelativistisch	Relativistisch
Nichtentartet	$\frac{1,48 \cdot 10^{23} Q}{T^{7/2}}$	$\frac{8,75 \cdot 10^{17} Q}{T^3}$
Entartet	$\frac{4,17 \cdot 10^{15}}{T^2}$	$1,34 \cdot 10^{-5}$

In Tabelle 9 werden die von Chandrasekhar aufgestellten Entartungskriteria ¹⁾ auf ionisiertem Wasserstoff angewandt.

1) S. Chandrasekhar, Monthly Not. R. A. S. **91**, 451, 1931.

Tabelle 9.

Entartungskriterien für ionisierten Wasserstoff.		
	Nichtrelativistisch	Relativistisch
Nichtentartet	$\rho \ll 8,09 \cdot 10^{-9} T^{3/2}$ $T \ll 5,9 \cdot 10^9$	$\rho \ll 4,75 \cdot 10^{-24} T^3$ $T \gg 5,9 \cdot 10^9$
Entartet	$\rho \ll 9,77 \cdot 10^5$ $\rho \gg 8,09 \cdot 10^{-9} T^{3/2}$	$\rho \gg 4,75 \cdot 10^{-24} T^3$ $\rho \gg 9,77 \cdot 10^5$

Es möge eine Kugel vom Radius r_0 von einer Atmosphäre umgeben sein, deren Dichte nach dem Gesetz

$$\frac{\rho}{\rho_0} = \left(\frac{r_0}{r}\right)^\nu$$

abnimmt, wo ρ_0 die Dichte an der Basis der Atmosphäre und ν eine Konstante bedeutet. Die gesamte Masse dieser Atmosphäre ist gleich

$$\int_{r_0}^{\infty} 4 \pi r^2 \rho dr = 4 \pi \rho_0 r_0^\nu \int_{r_0}^{\infty} \frac{dr}{r^{\nu-2}}.$$

Dieser Ausdruck ist nur dann endlich, wenn $\nu > 3$ ist.

Betrachten wir einen vertikalen Zylinder (vom Querschnitt eines qcm), dessen Basis mit der Basis der Atmosphäre zusammenfällt und dessen Höhe gleich $r - r_0$ ist. Die in diesem vertikalen Zylinder enthaltene Masse ist gleich

$$\int_{r_0}^r \rho dr = \rho_0 r_0^\nu \int_{r_0}^r \frac{dr}{r^\nu} = \frac{\rho_0 r_0}{\nu-1} \left[1 - \left(\frac{r_0}{r}\right)^{\nu-1} \right] = \frac{\rho_0 r_0}{\nu-1} \left[1 - \left(\frac{\rho}{\rho_0}\right)^{\frac{\nu-1}{\nu}} \right].$$

Soll unser vertikaler Zylinder die ganze Atmosphäre durchqueren, so muß er bis $\rho = 0$ fortgesetzt werden; dann ist seine Masse gleich $\rho_0 r_0 / (\nu - 1)$. Das Verhältnis der beiden Massen ist gleich

$$\frac{\rho_0 r_0}{\nu-1} \left[1 - \left(\frac{\rho}{\rho_0}\right)^{\frac{\nu-1}{\nu}} \right] / \frac{\rho_0 r_0}{\nu-1} = 1 - \left(\frac{\rho}{\rho_0}\right)^{\frac{\nu-1}{\nu}}.$$

Für $\nu = 3$ ist dies Verhältnis gleich $1 - \left(\frac{\rho}{\rho_0}\right)^{2/3}$. Wenn wir nun die im vertikalen Zylinder enthaltene Masse bis $\rho = 0,001 \rho_0$, statt bis $\rho = 0$ berechnen, so haben wir dadurch $1 - (0,001)^{2/3} = 0,99$, d. h. 99% der gesamten Masse in Betracht gezogen. Wir haben aber gesehen, daß $\nu > 3$ bei $r = \infty$ sein muß. Man wird annehmen können, daß auch im Falle eines zwar endlichen, aber doch sehr großen r der Wert von ν wohl kaum kleiner, wahrscheinlich aber größer als 3 sein wird. Wenn so, so wird auch bei endlichen Werten von r durch die Massenberechnung bis $\rho = 0,0001 \rho_0$ kaum viel weniger, wahrscheinlich sogar mehr als 99% der gesamten im Zylinder enthaltenen Masse erfaßt. Darum wollen auch wir uns damit begnügen, die Berechnungen nur bis $\rho = 0,001 \rho_0$, statt bis $\rho = 0$ durchzuführen.

Wenden wir uns jetzt der Tabelle 5 zu. Wenn die Sonne $3,42 \cdot 10^9$ Jahre existiert (was wohl kaum sehr weit von der Wahrheit sein dürfte), so muß die durchschnittliche Temperatur der zentralen Neutronengaskugel $3,22 \cdot 10^9$ Grad betragen und die durchschnittliche Dichte gleich $1,91 \cdot 10^9 \text{ g.cm}^{-3}$ sein. Wir haben oben gesehen, daß nach Flügge eine Neutronengaskugel isotherm sein muß. Wenn eine solche Ansicht auch übertrieben sein mag, so unterliegt es wohl kaum einem Zweifel, daß der Temperaturgradient im Neutronengase sehr gering ist. Dann kann aber auch die Temperatur an der Basis der Elektronen-Protonen-Umhüllung nicht sehr viel kleiner als $3,22 \cdot 10^9$ Grad sein. Wir werden wohl kaum einen sehr großen Fehler begehen, wenn wir sie gleich $2 \cdot 10^9$ Grad ansetzen. Die Dichte an der Basis der Umhüllung ist selbstverständlich kleiner als $1,91 \cdot 10^9 \text{ g.cm}^{-3}$. In Tabelle 10 sind die „wahren“ Absorptionskoeffizienten für verschiedene Werte von ρ_0 und von ρ zusammengestellt. Dabei wurde angenommen, daß die Dichte ρ mit der Entfernung proportional T^3 abnimmt. Wenn z. B. an der Basis der Umhüllung eine Temperatur von $2 \cdot 10^9$ Grad und eine Dichte von 10^5 g.cm^{-3} herrscht, so beträgt die Temperatur $2 \cdot 10^8$ Grad dort, wo die Dichte den Wert 10^2 g.cm^{-3} aufweist.

Ein Blick auf die Tabelle 10 genügt, um sich davon zu überzeugen, daß bei der Sonne die „wahre“ Absorption neben der Absorption durch Streuung vernachlässigt werden kann. Bei den heißeren Sternen wird dies erst recht der Fall sein.

(Eine Ausnahme werden nur die äußersten Schichten bilden, wo die „frei-gebunden“-Übergänge eine dominierende Rolle spielen.)

Tabelle 10.

ρ	$\rho_0 = 1,91 \cdot 10^9$	$\rho_0 = 10^5$	$\rho_0 = 10^3$
ρ_0	$1,34 \cdot 10^{-5}$	$7,81 \cdot 10^{-6}$	$7,81 \cdot 10^{-8}$
$0,1 \rho_0$	$1,34 \cdot 10^{-5}$	$1,15 \cdot 10^{-5}$	$1,15 \cdot 10^{-7}$
$0,01 \rho_0$	$1,34 \cdot 10^{-5}$	$1,68 \cdot 10^{-5}$	$1,68 \cdot 10^{-7}$
$0,001 \rho_0$	$1,34 \cdot 10^{-5}$	$2,47 \cdot 10^{-5}$	$2,47 \cdot 10^{-7}$

Was die „Paarbildung“ nach Dirac anbetrifft, so kann sie unseres Erachtens keine merkliche Wirkung auf den Durchschnittswert des stellaren Absorptionskoeffizienten ausüben. Diracs „Paarbildung“ kann ja erst bei so hohen Temperaturen in genügendem Maße auftreten, wo die durchschnittlichen „Molekulargeschwindigkeiten“ der Elektronen sich schon wenig von der Lichtgeschwindigkeit unterscheiden, wo also nach unserer Auffassung der Begriff eines Absorptionskoeffizienten seinen gewöhnlichen Sinn verliert. Dasselbe gilt auch hinsichtlich der Protonenzertrümmerung, bei der ein Neutron und ein Positron frei werden. Bekanntlich sind Positronen sehr „kurzlebig“, indem sie sich sehr leicht mit Elektronen oder mit Neutronen vereinigen. Trotzdem ist es nicht unmöglich, daß manche von den entstandenen Neutronen Zeit finden in das Innere des Sternes hinabzusinken und auf diese Weise die zentrale Neutronengaskugel zu vergrößern. GleichermäÙen ist es nicht unmöglich, daß ein Teil der entstandenen Positronen zusammen mit der entsprechenden Anzahl Elektronen „sich rettet“, indem er Zeit gewinnt noch vor der gegenseitigen „Vernichtung“ den Stern zu verlassen. Es wäre verlockend anzunehmen, daß die Sonnenkorona ein Gemisch von Elektronen und Positronen darstellt, denen es geglückt ist aus den tieferen Schichten der Sonne zu entweichen und sich auf diese Weise zu „retten“. Die Wahrscheinlichkeit der Begegnung eines Positrons mit einem Elektron (also die Wahrscheinlichkeit einer gegenseitigen „Vernichtung“) ist in der Korona natürlich sehr viel kleiner als in den tieferen Schichten. Im Inneren der zentralen Neutronengaskugel kann es vorkommen, daß ein Strahlungsquant in ein

Elektron und ein Positron zerfällt (nach Dirac). Letzteres kann sich mit einem Neutron zu einem Proton verbinden. Auf diese Weise ist ein Proton und ein Elektron in der zentralen Neutronengaskugel entstanden, was eine Abnahme der Zahl der freien Neutronen bedeutet. Wir wollen jedoch auf alle diese Fragen hier nicht weiter eingehen.

Nach allem Gesagten kommt für die Absorption der Elektronen-Protonen-Umhüllung nur die Absorption durch Streuung in Betracht. Der durchschnittliche totale Massenabsorptionskoeffizient $\bar{\kappa}$ der Umhüllung kann ohne großen Fehler gleich $\bar{\sigma}$, d. h. gleich dem durchschnittlichen Massenabsorptionskoeffizienten durch Streuung gesetzt werden, so daß wir nach (107) schreiben können:

$$\bar{\kappa} = \frac{h^2}{3.137^2 \pi m_e^2 m_H c^2}. \quad (116)$$

**Die neue Massen-Helligkeits-Formel in erster Annäherung.
Vergleich der berechneten absoluten bolometrischen Helligkeiten
mit den beobachteten.**

Nach unserem neuen Sternmodell (s. oben S. 72) beträgt die Masse der inneren Neutronengaskugel $0,5M$ und die Masse der Elektronen-Protonen-Umhüllung ebenfalls $0,5M$, wenn M die gesamte Masse des Sterns bedeutet. Der Radius der Neutronengaskugel sei r_0 und derjenige des ganzen Sterns r_1 . Die effektive Temperatur der äußeren Sternoberfläche (die wir mit der wahren Temperatur der äußeren Sternoberfläche identifizieren wollen) sei T_{eff} und die Temperatur an der Basis der Umhüllung T_0 . Wir nehmen an, daß sämtliche strahlende Energie durch Kontraktion der Neutronengaskugel geliefert wird; wir vernachlässigen also die Kontraktionsenergie der Umhüllung. Weiter nehmen wir an, daß T_{eff} klein gegenüber T_0 und r_0 klein gegenüber r_1 ist.

Der Einfachheit halber sei vorausgesetzt, daß alle Lichtquanten sich nur senkrecht zur Sternoberfläche bewegen. Wieviel g.cm^{-2} haben sie dann beim Passieren der Umhüllung zu durchqueren? — Wäre die Höhe der Umhüllung klein gegenüber r_0 , so könnten wir offenbar schreiben:

$$0,5 M / 4\pi r_0^2 = \frac{M}{8\pi r_0^2} \text{g.cm}^{-2}.$$

Sollte die Dichte der (als homogen angenommenen) Umhüllung (ϱ_0) die Hälfte der Dichte der (ebenfalls homogenen) Neutronengaskugel betragen, so ist die Dichte der letzteren gleich $2\varrho_0$, und wir können schreiben:

$$\frac{4}{3} \pi r_0^3 \cdot 2\varrho_0 = \frac{M}{2} = \frac{4}{3} \pi (r_1^3 - r_0^3) \varrho_0,$$

und dies ergibt einerseits:

$$M = \frac{16 \pi r_0^3 \varrho_0}{3},$$

und andererseits:

$$2r_0^3 = r_1^3 - r_0^3,$$

oder:

$$r_1 = 3^{1/3} r_0.$$

Jetzt haben die Lichtstrahlen zu durchqueren

$$\begin{aligned} (r_1 - r_0) \varrho_0 &= r_0 \varrho_0 (3^{1/3} - 1) = \frac{\frac{16}{3} \pi r_0^3 \varrho_0 \cdot \frac{3}{2} (3^{1/3} - 1)}{8 \pi r_0^2} = \\ &= \frac{3 (3^{1/3} - 1)}{2} \cdot \frac{M}{8 \pi r_0^2} = \frac{0,66 M}{8 \pi r_0^2} \text{ g.cm}^{-2}. \end{aligned}$$

Ist die Dichte der Neutronengaskugel $3\varrho_0$, so erhalten wir $\frac{0,59 M}{8 \pi r_0^2}$ g.cm⁻²; ist sie $4\varrho_0$, so ergibt sich $\frac{0,53 M}{8 \pi r_0^2}$; ist sie $5\varrho_0$, so $\frac{0,49 M}{8 \pi r_0^2}$. Bei den wirklichen Sternen ist die Dichte der Umhüllung veränderlich; wir glauben aber keinen besonders großen Fehler zu begehen, wenn wir bei ihnen im Durchschnitt

$$\frac{0,5 M}{8 \pi r_0^2} = \frac{M}{16 \pi r_0^2} \text{ g.cm}^{-2} \quad (117)$$

annehmen.

Wir wollen jetzt voraussetzen, daß die Dichte der Neutronengaskugel gleich $n\varrho_0$ ist, und die Dichte der (als homogen angenommenen) Umhüllung gleich ϱ_0 . In einem solchen Falle haben wir:

$$\frac{4}{3} \pi r_0^3 \cdot n\varrho_0 = \frac{M}{2} = \frac{4}{3} \pi (r_1^3 - r_0^3) \varrho_0,$$

und dies ergibt:

$$nr_0^3 = r_1^3 - r_0^3,$$

oder:

$$r_1 = (n + 1)^{1/3} r_0.$$

Der Druck an der Basis der Umhüllung ist gleich

$$p_0^1 = \int_{r_0}^{r_1} M_r G_{Q_0} \frac{dr}{r^2},$$

wenn M_r die innerhalb einer Kugel vom Radius r eingeschlossene Masse bedeutet. Es ist nicht schwer einzusehen, daß

$$M_r = \frac{4}{3} \pi (r^3 - r_0^3) Q_0 + \frac{4}{3} \pi r_0^3 n Q_0 = \frac{4}{3} \pi Q_0 [r^3 + (n - 1) r_0^3]$$

ist. Dieser Wert, in die vorherige Gleichung eingeführt, ergibt nach Ausführung der Integration:

$$p_0^1 = \frac{4}{3} \pi G Q_0^2 \left[\frac{r_1^2 - r_0^2}{2} + (n - 1) r_0^3 \left(\frac{1}{r_0} - \frac{1}{r_1} \right) \right].$$

Berechnen wir nun den Druck an der Basis der Umhüllung unter Vernachlässigung der Gravitationswirkung der Umhüllung auf sich selbst. In diesem Falle ist der Druck gleich

$$p_0 = \int_{r_0}^{r_1} \frac{4}{3} \pi r_0^3 n Q_0 G_{Q_0} \frac{dr}{r^2} = \frac{4}{3} \pi G Q_0^2 n r_0^3 \left(\frac{1}{r_0} - \frac{1}{r_1} \right).$$

Das Verhältnis der beiden Drucke ist gleich

$$\frac{p_0^1}{p_0} = \frac{[(n + 1)^{1/3} + 1] (n + 1)^{1/3} + n - 1}{2n}.$$

Da nun, wie wir oben gesehen haben, $r = (n + 1)^{1/3} r_0$ ist,

so erhalten wir:

$$\frac{p_0^1}{p_0} = \frac{[(n + 1)^{1/3} + 1] (n + 1)^{1/3} + n - 1}{2n}.$$

In Tabelle 11 sind die Verhältnisse $\frac{p_0^1}{p_0}$ für verschiedene Werte von n berechnet.

Tabelle 11.

n	$\frac{p_0^1}{p_0}$	n	$\frac{p_0^1}{p_0}$
2	1,38	5	1,31
3	1,35	7	1,29
4	1,33	999	1,05

In Wirklichkeit ist die Dichte der Umhüllung keine konstante Größe, wie dies in Tabelle 11 vorausgesetzt wird, sondern eine veränderliche. Trotzdem geht aus den Zahlen dieser Tabelle klar hervor, daß auch bei einer Umhüllung von veränderlicher Dichte der Ersatz von p_0^1 durch p_0 einen Fehler bedeutet, der sicherlich kleiner als 38% von p_0 sein wird. Durch diesen Ersatz werden die folgenden Rechnungen bedeutend vereinfacht. Natürlich erhalten wir bei dieser Vereinfachung für die Basis der Umhüllung eine zu niedrige Temperatur. Andererseits wollen wir den Strahlungsdruck und den Nullpunktsdruck vernachlässigen, wodurch wir für die Basis der Umhüllung eine zu hohe Temperatur erhalten¹⁾. Somit müssen unsere beiden Vereinfachungen einander mehr oder weniger kompensieren.

Wenn man der Umhüllung einen polytropen Bau zuschreibt, so müssen die Gleichungen

1) An der Grenze zwischen der Neutronengaskugel und der Umhüllung muß beiderseits gleicher Druck und gleiche Temperatur herrschen. Da das „Molekulargewicht“ des Neutronengases doppelt so groß ist als dasjenige einer Elektronen-Protonen-Mischung, so wird die Dichte der letzteren an der gemeinsamen Grenze bloß die Hälfte der Neutronengasdichte betragen. Diese Regel gilt aber nur bei Abwesenheit einer Entartung. Ist hingegen das Elektronengas entartet, so muß die Dichte der Elektronen-Protonen-Mischung offenbar noch kleiner sein.

Bei unseren Untersuchungen haben wir angenommen, daß die Neutronengaskugel homogen und isotherm sei. Das letztere wird wohl bis zu einem gewissen Grade richtig sein, nicht aber das erstere, weil die Dichte in der Neutronengaskugel zweifellos vom Zentrum zu ihrer Oberfläche abnehmen muß. Es ist daher schwer mit Sicherheit zu entscheiden, ob und wie weit das Elektronengas an der Basis der Umhüllung entartet ist. Eine Entartung muß die Temperatur an der Basis der Umhüllung natürlich herabsetzen, da ja in einem solchen Falle zur Aufwiegung des Gravitationsdruckes der Entartungsdruck dem thermischen Gasdruck zu Hilfe kommt.

$$\frac{p}{p_0} = \left(\frac{\varrho_0}{\varrho}\right)^\gamma = \left(\frac{T}{T_0}\right)^{\frac{\gamma}{\gamma-1}} \text{ und } \frac{\varrho}{\varrho_0} = \left(\frac{T}{T_0}\right)^{\frac{1}{\gamma-1}} \quad (118)$$

erfüllt sein, wo γ eine Konstante bedeutet. Gleichzeitig muß auch die Gleichung

$$p = \frac{\Re}{\mu} \varrho T = 2 \Re \varrho T \quad (119)$$

erfüllt sein, wo \Re die absolute Gaskonstante bedeutet und μ das „Molekulargewicht“, welches für die Elektronen-Protonen-Umhüllung gleich 0,5 zu setzen ist.

Da wir die Gravitationswirkung der Umhüllung auf sich selber vernachlässigen wollen, so können wir schreiben:

$$dp = -\frac{GM}{2r^2} \varrho dr.$$

Nach (118) ist aber

$$p = p_0 \left(\frac{T}{T_0}\right)^{\frac{\gamma}{\gamma-1}} \text{ und } \varrho = \varrho_0 \left(\frac{T}{T_0}\right)^{\frac{1}{\gamma-1}},$$

welche Werte, in die vorhergehende Gleichung eingeführt, ergeben:

$$\frac{\gamma p_0}{\gamma-1} \cdot \frac{T^{\frac{\gamma}{\gamma-1}}}{T_0^{\frac{\gamma}{\gamma-1}}} dT = -\frac{GM \varrho_0}{2r^2} \cdot \frac{T^{\frac{1}{\gamma-1}}}{T_0^{\frac{1}{\gamma-1}}} dr,$$

oder:

$$\frac{\gamma p_0}{(\gamma-1) T_0} dT = -\frac{GM \varrho_0}{2r^2} dr.$$

Da nach (119) für die Basis der Umhüllung

$$p_0 = 2 \Re \varrho_0 T_0$$

sein muß, so erhält man aus der vorhergehenden Gleichung:

$$\frac{2\gamma}{\gamma-1} \Re dT = -\frac{GM}{2r^2} dr,$$

und weiter:

$$\frac{2\gamma \Re}{\gamma-1} \int_{T_{\text{eff}}}^{T_0} dT = -\frac{GM}{2} \int_{r_0}^{r_1} \frac{dr}{r^2},$$

oder:

$$\frac{2\gamma\mathfrak{R}}{\gamma-1}(T_0 - T_{eff}) = \frac{GM}{2} \left(\frac{1}{r_0} - \frac{1}{r_1} \right),$$

oder:

$$T_0 - T_{eff} = \frac{(\gamma-1)GM}{4\gamma\mathfrak{R}} \left(\frac{1}{r_0} - \frac{1}{r_1} \right).$$

Wir dürfen wohl ziemlich genau die wirklichen Verhältnisse wiedergeben, wenn wir in der vorhergehenden Gleichung $\gamma = \frac{4}{3}$ setzen. In diesem Falle erhalten wir:

$$T_0 - T_{eff} = \frac{GM}{16\mathfrak{R}} \left(\frac{1}{r_0} - \frac{1}{r_1} \right). \quad (120)$$

In erster Annäherung können wir

$$T_0 - T_{eff} \sim T_0 \quad \text{und} \quad \frac{1}{r_0} - \frac{1}{r_1} \sim \frac{1}{r_0}$$

schreiben, und in diesem Falle geht (120) in

$$T_0 = \frac{GM}{16\mathfrak{R}r_0} \quad (121)$$

über.

Bedeutet $L(r)$ die in der Zeiteinheit durch die Kugeloberfläche gehende Nettomenge strahlender Energie, so haben wir:

$$\frac{d}{dr} \left(\frac{1}{3} a T^4 \right) = - \frac{\kappa L(r)}{4\pi cr^2} \varrho,$$

wo κ den Massenabsorptionskoeffizienten bedeutet¹⁾. Bezeichnet man durch L den gesamten Energieverlust durch Ausstrahlung (in Erg.sec⁻¹), so ist offenbar $L = L(r_0)$, da wir ja die Energieerzeugung außerhalb der Neutronengaskugel vom Radius r_0 vernachlässigen. Wir können in einem solche Falle schreiben:

$$- \frac{d \left(\frac{1}{3} a T^4 \right)}{\kappa \varrho dr} = \frac{L}{4\pi cr_0^2}.$$

Will man die Stärke eines elektrischen Stromes messen, so genügt es, die einer unendlich kleinen Strecke entsprechende Potentialdifferenz durch den Widerstand dieser kleinen Strecke

1) Vgl. z. B. E. A. Milne, ZS. f. Astrophysik 4, 83, 1932.

zu dividieren. Man kann aber statt dessen auch die gesamte elektromotorische Kraft durch den gesamten Widerstand dividieren. In analoger Weise, statt $-d\left(\frac{1}{3}aT^4\right)$ durch $\kappa_0 dr$ zu dividieren, können wir dividieren $\frac{1}{3}aT_0^4 - \frac{1}{3}aT_{eff}^4$ durch $\frac{\kappa M}{16\pi r_0^2}$ [vgl. (117)]. Dies ergibt:

$$\frac{16\pi ar_0^2(T_0^4 - T_{eff}^4)}{3\kappa M} = \frac{L}{4\pi cr_0^2},$$

oder:

$$L = \frac{64\pi^2 acr_0^4(T_0^4 - T_{eff}^4)}{3\kappa M},$$

oder im Hinblick auf (116):

$$L = \frac{64 \cdot 137^2 \pi^3 ac^3 m_e^2 m_H r_0^4 (T_0^4 - T_{eff}^4)}{h^2 M} \quad (122)$$

Ist N die Avogadrosche Zahl (d. h. die Loschmidtsche Zahl pro Grammatom), so können wir schreiben:

$$N = \frac{1}{m_H} \quad \text{und} \quad m_H = \frac{1}{N} = \frac{k}{\mathfrak{R}};$$

außerdem ist bekanntlich

$$a = \frac{8\pi^5 k^4}{15c^3 h^3}.$$

Diese Werte, in (122) eingeführt, ergeben:

$$L = \frac{2^9 \cdot 137^2 \pi^8 m_e^2 k^5 r_0^4 (T_0^4 - T_{eff}^4)}{15 h^5 M \mathfrak{R}} \quad (123)$$

In erster Annäherung können wir

$$T_0^4 - T_{eff}^4 \sim T_0^4$$

annehmen. Dann erhalten wir aus (123) im Hinblick auf (121):

$$\boxed{L = \frac{137^2 \pi^8}{2^7 \cdot 15} \left(\frac{k}{h\mathfrak{R}}\right)^5 G^4 m_e^2 M^3.} \quad (124)$$

Dies ist die neue Massen-Helligkeits-Formel in erster Annäherung. Diese Formel haben wir auf Grund rein physikalischer Überlegungen abge-

leitet, und sie enthält darum nur rein physikalische Größen. Wir könnten diese Formel selbst dann ableiten, wenn der Himmel ewig bewölkt wäre und die Menschheit nie einen Himmelskörper gesehen hätte.

Nach Birge¹⁾ ist die Gravitationskonstante $G = 6,664 \cdot 10^{-8}$, die Plancksche Konstante $h = 6,547 \cdot 10^{-27}$, die absolute Gaskonstante $\mathfrak{R} = 8,31360 \cdot 10^7$ und die Boltzmannsche Konstante $k = 1,37089 \cdot 10^{-16}$ (wenn man sämtliche Dezimalstellen in Betracht zieht). Für die Elektronenmasse m_e gibt Birge²⁾ zwei Werte: den „spektroskopischen“ Wert $9,03510 \cdot 10^{-28}$ und den „Deflexionswert“ $8,99425 \cdot 10^{-28}$. Wir akzeptieren das arithmetische Mittel und setzen $m_e = 9,014675 \cdot 10^{-28}$. Diese Werte, in (124) eingeführt, ergeben:

$$L = (\text{Nr log } \overline{66,1780353}) M^3, \quad (124')$$

oder abgerundet:

$$L = 1,51 \cdot 10^{-66} M^3.$$

M und L der Sonne sind gleich $M_{\odot} = 1,985 \cdot 10^{33}$ und $L_{\odot} = 3,780 \cdot 10^{33}$, also ist

$$\frac{3,780 \cdot 10^{33}}{L_{\odot}} = 1 \quad \text{und} \quad \frac{1,985 \cdot 10^{33}}{M_{\odot}} = \frac{(1,985 \cdot 10^{33})^3}{M_{\odot}^3} = 1.$$

Dies gestattet uns die Gleichung (124') folgendermaßen umzugestalten:

$$L \cdot \frac{3,780 \cdot 10^{33}}{L_{\odot}} = (\text{Nr log } \overline{66,1780353}) M^3 \cdot \frac{(1,985 \cdot 10^{33})^3}{M_{\odot}^3},$$

oder:

$$\frac{L}{L_{\odot}} = (\text{Nr log } 0,4938250) \left(\frac{M}{M_{\odot}} \right)^3, \quad (124'')$$

oder abgerundet:

$$\frac{L}{L_{\odot}} = 3,12 \left(\frac{M}{M_{\odot}} \right)^3.$$

Wir wollen jetzt untersuchen, wieweit die Formel (124) [resp. (124'), oder (124'')] mit der Beobachtung übereinstimmt. Als Beobachtungsmaterial kommen natürlich nur solche Sterne

1) R. T. Birge, l. c. S. 59 und 61.

2) Ebenda, S. 62.

in Betracht, deren Massen und deren absolute bolometrische Helligkeiten genau bekannt sind. Dies ist aber nur bei Doppelsternen der Fall. Vor kurzem hat Nernst eine Liste solcher Sterne veröffentlicht¹⁾. Diese Liste war von K. Pilowski zusammengestellt. Nernst sagt: „Zweifellos ist die Doppelsternbildung an sich ein katastrophaler Prozeß, der die normale Sternentwicklung stört; diese Störung wird aber nicht allzu groß sein, wenn man ... bei Doppelsternen von erheblich verschiedener Masse, Leuchtkraft und Temperatur nur den Hauptstern statistisch berücksichtigt, und bei Doppelsternen gleicher Masse, wenn sich außerdem die maßgebenden Eigenschaften beider Sterne (Temperatur, Leuchtkraft, Dichte) nahe gleich verhalten, beide Komponenten berücksichtigt“²⁾.

Es ist zu bedauern, daß Nernst nicht wenigstens in Klammern die von ihm unterdrückten Daten angeführt hat. Für unsere Ziele wäre eine vollständige Liste viel wünschenswerter als eine noch so gute Auslese. Deshalb habe ich alle die von Nernst gelegentlich erwähnten, aber in seine Liste nicht aufgenommenen Daten wieder eingefügt. Ich habe die 71 Sterne nach abnehmender (beobachteter) Helligkeit geordnet. Von diesen Sternen sind 52 heller als die Sonne, und sie sind zusammengefaßt in Tabelle 12. Die folgende Tabelle 13 enthält die übrigen 19 Sterne, deren (absolute bolometrische) Helligkeit gleich oder geringer als die Sonnenhelligkeit ist.

Sehen wir uns zuerst die Tabelle 12 an, welche hellere Sterne als die Sonne enthält. Aus der letzten Kolumne dieser Tabelle läßt sich die Diskrepanz zwischen den berechneten und den beobachteten Werten ersehen. Bei genauer Übereinstimmung zwischen Berechnung und Beobachtung müßte der Logarithmus des Verhältnisses der beiden Werte gleich Null sein. Ein positiver Logarithmus sagt aus, daß der berechnete Wert größer als der beobachtete ist; ein negativer Logarithmus bedeutet das Umgekehrte. Den größten Logarithmus (0,9611767) weist ζ Aur₂ auf; die diesem Logarithmus entsprechende Zahl ist 9,11449. Sie besagt, daß der berechnete Wert mehr als 9 mal größer ist als der beobachtete. Den kleinsten Logarithmus ($\bar{2},7511721$) besitzt λ Tauri; die entsprechende Zahl beträgt 0,056390. Sie bedeutet, daß der

1) W. Nernst, ZS. f. Phys. **97**, 514 f., 1935.

2) Ebenda, S. 512.

Vielleicht wird mancher Leser über die Anwendung von siebenstelligen Logarithmen in der letzten Kolumne der Tabelle 12 erstaunt sein. — Die Sache ist die, daß eine befriedigende Diskussion über die Genauigkeit der Beobachtungsdaten viel Zeit und Raum verlangt hätte. Deshalb haben wir der Einfachheit halber sämtliche Beobachtungsdaten als absolut genau angenommen, und haben diese Annahme durch Anwendung von siebenstelligen Logarithmen bloß markieren wollen.

Statt $\frac{L}{L_{\odot}}$ aus beobachtetem $\frac{M}{M_{\odot}}$, könnten wir $\frac{M}{M_{\odot}}$ aus beobachtetem $\frac{L}{L_{\odot}}$ berechnen und das gewonnene Resultat mit dem beobachteten $\frac{M}{M_{\odot}}$ vergleichen. Ein solches „umgekehrtes“ Verfahren würde eine sehr viel kleinere „Dispersion“ der Werte ergeben, als das „direkte“.

Die Ursache dieser Dispersion liegt offenbar darin, daß die von uns gemachten Voraussetzungen (z. B. die genaue Gleichheit der Neutronen- und der Protonenzahl) nur durchschnittlich richtig sind. Auch die große Ungenauigkeit der Beobachtungsdaten bei einigen Sternen mag hier eine Rolle spielen (wir haben ja bloß „der Einfachheit halber“ alle Beobachtungsdaten als absolut genau angenommen).

Tabelle 12.

Name des Sterns	$\frac{M}{M_{\odot}}$	$\frac{L}{L_{\odot}}$ berechnet nach (124'')	$\frac{L}{L_{\odot}}$ beobachtet	Logarithmus des Verhältnisses des berechneten Wertes zu dem beobachteten
AO Cas ₁	36,3	149120	140000	0,0274168
AO Cas ₂	33,8	120390	50000	0,3816051
ζ Aur ₁	29,3	78420	13000	0,7804844
V Pup ₁	21,2	29705	9800	0,4816066
V Pup ₂	16,3	13502	5100	0,4228176
Y Cyg ₁	17,6	16997	5000	0,5313931
Y Cyg ₂	17,4	16424	3600	0,6591701
λ Tauri	3,7	157,92	2800	2,7512721
u Her	7,5	1315,3	2000	1,8179789
AG Per ₁	5,2	438,36	1500	1,4657436
Z Vul	4,8	344,79	910	1,5785072
U Oph ₁	5,4	490,92	800	1,7879164
U Oph ₂	4,7	323,68	690	1,6712696
RS Vul	4,6	303,46	660	1,6625545
ζ Aur ₂	12,4	5944,2	650	0,9611767
T Aql ₁	6,2	743,02	650	0,0580867
Algol	4,6	303,46	600	1,7039471
U Sge	6,7	937,67	580	0,2086214
AG Per ₂	4,6	303,46	580	1,7186704
T Aql ₂	5,1	413,56	480	1,9352944
U Cr B	5,1	413,56	360	0,0602331
δ Librae	1,9	21,384	290	2,8676878
β Aur ₁	2,4	43,098	200	1,3334286
β Aur ₂	2,4	43,098	200	1,3334286
Capella ₁	4,2	230,98	115	0,3028751
RX Her ₁	2,2	33,197	85	1,5916742
RX Her ₂	1,9	21,384	85	1,4006669
Capella ₂	3,3	112,04	76	0,1685531

Tabelle 12 (Fortsetzung).

Name des Sterns	$\frac{M}{M_{\odot}}$	$\frac{L}{L_{\odot}}$ berechnet nach (124'')	$\frac{L}{L_{\odot}}$ beobachtet	Logarithmus des Verhältnisses des berechneten Wertes zu dem beobachteten
TV Cas	1,9	21,384	63	$\bar{1},5307453$
TX Her ₁	2,1	28,872	53	$\bar{1},7362070$
X Tri	2,9	76,036	50	0,1820490
RZ Cas	1,3	6,8494	50	$\bar{1},1366852$
ζ U Ma A ₁	3,8	171,07	46	0,5704180
Sirius	2,6	54,795	45	0,0855324
ε Hydrae	1,75	16,708	40	$\bar{1},6208790$
WW Aur ₁	2,2	33,197	35	$\bar{1},9770251$
TX Her ₂	1,8	18,182	30	$\bar{1},7825212$
ζ U Ma A ₂	3,8	171,07	29	0,7707778
WW Aur ₂	1,9	21,384	27	$\bar{1},8987220$
ξ_1 Sco ₁	1,57	12,065	7,5	0,2064628
Prokyon	1,5	10,522	5,9	0,2512469
ζ Her	1,5	10,522	5,4	0,2897051
ξ_1 Sco ₂	1,57	12,065	5,4	0,3491303
j Vir ₁	1,54	11,386	5,0	0,3574171
j Vir ₂	1,54	11,386	4,9	0,3661910
ζ Cri A	1,16	4,8663	2,7	0,2558352
99 Her	1,64	13,752	2,6	0,7233831
AR Lacertae ₁	1,41	8,7394	2,5	0,5435423
AR Lacertae ₂	1,42	8,9267	2,2	0,6082672
ζ Cri B	1,16	4,8663	1,4	0,5410710
β 648	0,83	1,7826	1,4	0,1049313
η Cr B ₁	0,71	1,1159	1,2	$\bar{1},9684187$

Der durchschnittliche Wert des erwähnten
Logarithmus:

0,0292547

Tabelle 13.

Name des Sterns	$\frac{M}{M_{\odot}}$	$\frac{L}{L_{\odot}}$ berechnet nach (124'')	$\frac{L}{L_{\odot}}$ beobachtet	Logarithmus des Verhältnisses des berechneten Wertes zu dem beobachteten
Sonne	1	3,1176	1	0,4938250
WU Ma ₁	0,70	1,0693	0,98	0,0378929
WU Ma ₂	0,50	0,38970	0,98	1,5995089
η Cas	1,00	3,1176	0,87	0,5543057
η Cr B ₂	0,71	1,1158	0,74	0,1783682
9 Arg ₁	0,77	1,4233	0,69	0,3144480
70 Oph ₁	0,93	2,5077	0,60	0,6211224
i Boo ₁	0,64	0,81727	0,47	0,2402671
i Boo ₂	0,64	0,81727	0,47	0,2402671
9 Arg ₂	0,55	0,51870	0,40	0,1128531
70 Oph ₂	0,70	1,0693	0,20	0,7280890
YY Gem ₁	0,63	0,77955	0,056	1,1436585
YY Gem ₂	0,57	0,57736	0,047	1,0893518
B Her	0,40	0,19953	0,031	0,8086433
C Her	0,32	0,10216	0,020	0,7082450
Krüger 60 ₁	0,25	0,048713	0,011	0,6462523
O ₂ Eri B	0,46	0,30346	0,0096	1,4998272
O ₂ Eri C	0,23	0,037932	0,0060	0,8008571
Krüger 60 ₂	0,21	0,028872	0,0037	0,8922815
Der durchschnittliche Wert des erwähnten Logarithmus:				0,5636876

beobachtete Wert beinahe 18 mal größer ist als der berechnete. Dieser Stern ist aber eine Ausnahme. Bei allen anderen Sternen ist die Diskrepanz zwischen Berechnung und Beobachtung kleiner, und meistens sogar sehr viel kleiner. Das arithmetische Mittel aus allen 52 Logarithmen ist 0,0292547. Diesem „durchschnittlichen“ Logarithmus entspricht die Zahl 1,0697 ~ 1,07, welche besagt, daß die berechnete Helligkeit im

Durchschnitt um 7% größer ist als die beobachtete. Wir glauben den Schluß ziehen zu dürfen, daß die Richtigkeit unserer neuen Massen-Helligkeits-Formel (124) durch die Beobachtung bestätigt worden ist, weil eine durchschnittliche Diskrepanz von nur 7% als sehr gering betrachtet werden muß. Das Gesagte bezieht sich aber nur auf die helleren Sterne.

Wenden wir uns jetzt der Tabelle 13 zu, welche 19 Sterne enthält, deren (absolute bolometrische) Helligkeit gleich oder kleiner als die Sonnenhelligkeit ist. Das arithmetische Mittel aus allen 19 Logarithmen ist 0,5636876, was der Zahl 3,6617 entspricht. Dies bedeutet, daß die berechnete Helligkeit im Durchschnitt beinahe 3,7 mal größer ist als die beobachtete. Daraus folgt, daß unsere Formel (124) für dunklere Sterne unbrauchbar ist.

Das durch unsere Formel (124) repräsentierte M^3 -Gesetz der absoluten bolometrischen Helligkeit ist nicht neu. Schon Jeans macht darauf aufmerksam, daß das M^3 -Gesetz mit der Beobachtung gut übereinstimmt¹⁾. Während aber Jeans das M^3 -Gesetz als ein rein empirisches betrachtet, haben wir dies Gesetz rein theoretisch abgeleitet. Außerdem haben wir auch den annähernd richtigen Koeffizienten von M^3 auf rein theoretischem Wege abgeleitet. Das Gesagte bezieht sich aber, wie schon oben erwähnt worden ist, nur auf nicht zu dunkle Sterne.

Die neue Massen-Helligkeits-Formel in zweiter Annäherung.

Das „Russell-Diagramm“.

In zweiter Annäherung können wir T_{eff} neben T_0 nicht mehr vernachlässigen; desgleichen nicht $\frac{1}{r_1}$ neben $\frac{1}{r_0}$. Das Eliminieren von T_0 aus (120) und (123) ergibt:

$$L = \frac{2^9 \cdot 137^2 \pi^8 m_e^2 k^5 r_0^4}{15 h^5 \Re M} \left\{ \left[\frac{GM}{16 \Re} \left(\frac{1}{r_0} - \frac{1}{r_1} \right) + T_{eff} \right]^4 - T_{eff}^4 \right\}. \quad (125)$$

Wir haben oben gesehen (S. 81), daß man den meisten Sternen ein Alter von etwa 3 Milliarden Jahren zuschreiben kann, also rund gerechnet 10^{17} Sekunden. Während dieser Zeit hat

1) J. H. Jeans, Astronomy and Cosmogony, S. 126 f.

der Stern im ganzen $10^{17} L$ Erg ausgestrahlt. Nach unserer Auffassung wird dieser Energieverlust nur durch die Kontraktionsenergie der Neutronengaskugel gedeckt, da man die Kontraktionsenergie der Elektronen-Protonen-Umhüllung vernachlässigen kann. Die Masse der Neutronengaskugel beträgt $0,5 M$, wenn M die Masse des ganzen Sterns bedeutet. Wenn wir der Einfachheit halber der Neutronengaskugel einen homogenen Bau zuschreiben, so beträgt ihre Kontraktionsenergie

$$\frac{3 G (0,5 M)^2}{5 r_0} = \frac{3 G M^2}{20 r_0}.$$

Wir haben aber schon oben gesehen (S. 77), daß von dieser Energie nur ungefähr die Hälfte (d. h. $\frac{3 G M^2}{40 r_0}$) ausgestrahlt wird, während die andere Hälfte im Sterne verbleibt. Wir können also schreiben:

$$\frac{3 G M^2}{40 r_0} = 10^{17} L,$$

oder:

$$r_0 = \frac{3 G M^2}{4 \cdot 10^{18} L}. \tag{126}$$

Andererseits haben wir:

$$L = 4 \pi r_1^2 \sigma T_{eff}^4,$$

oder:

$$r_1 = \frac{L^{1/2}}{2 \pi^{1/2} \sigma^{1/2} T_{eff}^2}, \tag{127}$$

wenn σ die Stephansche Konstante bedeutet. Führt man die Werte von r_0 und r_1 aus (126) und (127) in (125) ein, so erhält man die neue Massen-Helligkeits-Formel in zweiter Annäherung:

$$L = \frac{108.137^2 \pi^8 m_e^2 k^5 G^4 M^7}{10^{73} h^5 \mathfrak{R}} \left\{ \left[\frac{GM}{8 \mathfrak{R}} \left(\frac{2 \cdot 10^{18}}{3 GM^2} - \frac{\pi^{1/2} \sigma^{1/2} T_{eff}^2}{L^{3/2}} \right) + \frac{T_{eff}}{L} \right]^4 - \left(\frac{T_{eff}}{L} \right)^4 \right\}. \tag{128}$$

Wie wir sehen, ist die absolute bolometrische Helligkeit L in zweiter Annäherung nicht mehr eine Funktion von M allein, sondern von M und T_{eff} .

Die Stefansche Konstante σ ist nach experimenteller Ermittlung gleich $5,735 \cdot 10^{-5}$ und nach indirekter Berechnung gleich $5,7139 \cdot 10^{-5}$, wie Birge es angibt¹⁾. Da wir aber oben für die Strahlungskonstante a den indirekten Ausdruck benutzt haben, müssen wir konsequenterweise den indirekt berechneten Wert von σ akzeptieren. Dann geht (128) über in

$$L = (\text{Nr log } \bar{102,1739164}) M^7 \left\{ \left[(\text{Nr log } \bar{16,0008559}) M \left(\frac{\text{Nr log } \bar{25,0001737}}{M^2} \right) - \frac{(\text{Nr log } \bar{2,1270412}) T_{eff}^2}{L^{3/2}} + \frac{T_{eff}}{L} \right]^4 - \left(\frac{T_{eff}}{L} \right)^4 \right\}. \quad (128')$$

Wir wollen (128') für die Sonnenmasse berechnen, d. h. wir wollen $M = M_{\odot} = 1,985 \cdot 10^{33}$ setzen. Dies ergibt:

$$L = (\text{Nr log } \bar{131,2582399}) \left\{ \left[\text{Nr log } \bar{17,2986164} \left(2,5389415 \cdot 10^{-42} \right) - \frac{(\text{Nr log } \bar{2,1270412}) T_{eff}^2}{L^{3/2}} + \frac{T_{eff}}{L} \right]^4 - \left(\frac{T_{eff}}{L} \right)^4 \right\}. \quad (128'')$$

Für $T_{eff} = 2000$ ergibt (128'') zwei Werte:

$$L = 1,1784 \cdot 10^{34} \text{ und } L = 8,8 \cdot 10^{30}.$$

Wir wollen die erstere Lösung als die g -Lösung, und die letztere als die d -Lösung bezeichnen. Führt man in (127) die Zahlenwerte ein, so erhält man:

$$r_1 = \frac{L}{(\text{Nr log } \bar{2,1270412}) T_{eff}^2}. \quad (129)$$

Führt man in (129) die g -Lösung von (128''), d. h. $L = 1,1784 \cdot 10^{34}$, ein, so erhält man $r_1 = 1,01 \cdot 10^{12}$. Letzterer Wert gestattet das Volumen und also auch die durchschnittliche Dichte zu berechnen, welche sich gleich $\bar{\rho} = 4,6 \cdot 10^{-4} \text{ g.cm}^{-3}$ erweist. Die d -Lö-

1) R. T. Birge, l. c. S. 61.

sung von (128''), d. h. $L = 8,8 \cdot 10^{30}$, ergibt $r_1 = 2,77 \cdot 10^{10}$ und $\bar{\varrho} = 22$. In Tabelle 14 sind die g - und d -Lösungen der Gleichung (128') für verschiedene Werte von T_{eff} aufgeführt.

Tabelle 14.

T_{eff}	g -Lösungen der Gleichung (128'')			d -Lösungen der Gleichung (128'')		
	absolute bolometr. Helligkeit (in Erg.sec ⁻¹)	Radius (in cm)	Dichte (in g.cm ⁻³)	absolute bolometr. Helligkeit (in Erg.sec ⁻¹)	Radius (in cm)	Dichte (in g.cm ⁻³)
2000 ⁰	1,178.10 ³⁴	1,01.10 ¹²	4,6.10 ⁻⁴	8,8.10 ³⁰	2,77.10 ¹⁰	22
4000 ⁰	1,178.10 ³⁴	2,53.10 ¹¹	0,029	2,2.10 ³¹	1,11.10 ¹⁰	350
6000 ⁰	1,177.10 ³⁴	1,13.10 ¹¹	0,33	4,0.10 ³¹	6,53.10 ⁹	1700
8000 ⁰	1,177.10 ³⁴	6,33.10 ¹⁰	1,9	6,0.10 ³¹	4,50.10 ⁹	5200
10000 ⁰	1,177.10 ³⁴	4,05.10 ¹⁰	7,1	8,2.10 ³¹	3,38.10 ⁹	12000
12000 ⁰	1,176.10 ³⁴	2,81.10 ¹⁰	21	1,0.10 ³²	2,63.10 ⁹	26000

Sehen wir uns diese Tabelle etwas näher an. Bei niedriger effektiver Temperatur kann der Stern entweder sehr ausgedehnt oder sehr kompakt sein, wobei im ausgedehnten Zustande seine absolute bolometrische Helligkeit sehr viel größer ist als im kompakten Zustande. Die g -Lösung entspricht einer „Riesen“-Natur und die d -Lösung einer „Zwerg“-Natur. Je höher aber die effektive Temperatur steigt, desto weniger ausgesprochen ist die „Riesen“-Natur der g -Lösung. In der g -Reihe fällt mit steigender effektiver Temperatur die absolute Helligkeit des Sterns, aber so unmerklich langsam, daß man sie als konstant betrachten kann. In der d -Reihe hingegen steigt die absolute bolometrische Helligkeit mit der effektiven Temperatur, und zwar recht schnell. Alle diese Anzeichen sprechen scheinbar dafür, daß wir in der g -Reihe das „Riesen“-Stadium und in der d -Reihe das „Zwerg“-Stadium zu sehen haben. Dies ist aber in Wirklichkeit nur bis zu einem gewissen Grade der Fall. Gewöhnlich haben ja „Riesen“ eine bedeutend größere Masse als „Zwerge“; die Tabelle 14 hingegen stellt nur die theoretisch möglichen Zustände dar, welche ein Stern von der Sonnenmasse annehmen kann. Aber aus dieser Tabelle ist nicht zu ersehen, welcher von den vielen möglichen Zuständen

mehr und welcher weniger wahrscheinlich ist. Damit ein Stern sehr ausgedehnt sei, muß die Temperatur T_0 an der Grenze zwischen der Neutronengaskugel und der Elektronen-Protonen-Umhüllung nahe der „Zerstreuungstemperatur“ sein, also nahe der maximalen zulässigen Temperatur an jenem Orte. Ist aber die Masse des Sterns für eine genügend gute Ausbildung der Neutronengaskugel zu klein, so wird T_0 beträchtlich niedriger als die „Zerstreuungstemperatur“ sein, weshalb auch die Ausdehnung des Sterns nur eine geringe sein kann. Deshalb müssten wir erwarten, daß die g -Lösungen Sternen großer Masse entsprechen und die d -Lösungen Sternen kleiner Masse. Bei Sternen mittlerer Masse könnte man sowohl g -Lösungen als auch d -Lösungen erwarten. Diese Regel darf aber keinesfalls als eine absolut richtige angesehen werden. Was die untersten Glieder der d -Reihe anbetrifft (mit extrem hoher effektiver Temperatur T_{eff}), so sind ihre durchschnittlichen Dichten $\bar{\rho}$ ungeheuer. Diese Glieder der d -Reihe bilden offenbar die Klasse der weißen Zwerge.

Es ist zu beachten, daß bei den oberen Gliedern der g -Reihe (mit niedriger effektiver Temperatur) die geringste Variation der absoluten bolometrischen Helligkeit eine bedeutende Expansion (oder Kontraktion) des Sterns hervorrufen muß. Daraus folgt, daß rote Riesen wenig stabil und zum Pulsieren geneigt sein müssen.

Die traditionelle Einteilung der Sterne in Riesen und Zwerge deckt sich durchaus nicht mit unserer neuen Einteilung in g - und d -Sterne. So z. B. ist die Sonne (deren effektive Temperatur man gleich rund 6000° annehmen darf) zwar ein Zwerg, aber ein g -Zwerg. Wäre die Sonne ein d -Zwerg, so müßte nach Tabelle 14 ihre durchschnittliche Dichte etwa 1000 mal größer, und ihre absolute bolometrische Helligkeit etwa 100 mal kleiner sein als die Beobachtungen zeigen. In Wirklichkeit ist aber die Sonne nur 3,12 mal dunkler als ein „normaler“ g -Stern, dessen Masse gleich der Sonnenmasse ist.

Die Gleichung (120) zeigt, daß bei

$$T_0 = \frac{GM}{16 \Re r_0}$$

der Sternradius $r_1 = \infty$ ist, also ist auch $\frac{r_1}{r_0} = \infty$. Dieser kritische Wert von T_0 kann als „Zerstreuungstemperatur“ bezeichnet

werden, weil der Stern sich bis zur Unendlichkeit ausdehnt. Je näher T_0 der Zerstreungstemperatur ist, desto größer muß natürlich auch $\frac{r_1}{r_0}$ sein. Es ist ein sehr naheliegender Gedanke, daß bei einem Stern von größerer Masse auch größere Werte von $\frac{r_1}{r_0}$ entstehen können, weil ja bei einem solchen Stern T_0 wahrscheinlich leichter an die Zerstreungstemperatur heranrücken kann, als bei kleineren Sternen mit einer schlechter entwickelten und darum wohl etwas kälteren Neutronengaskugel.

Es seien gegeben drei ideale g -Sterne mit den Massen $2 \cdot 10^{34}$, $2 \cdot 10^{33}$ und $2 \cdot 10^{32}$, wobei alle drei Sterne der Gleichung (124) streng folgen. Der Radius r_0 der Neutronengaskugel des ersten Sternes sei gleich $2 \cdot 10^6$, was nicht weit von der Wahrheit ist, wenn man dem Stern ein Alter von etwa 3 Milliarden Jahren zuschreibt. Die Masse des zweiten Sterns ist 10 mal kleiner, deshalb muss nach (124) dieser Stern im Verlaufe derselben Zeitspanne von etwa 3 Milliarden Jahren 1000 mal weniger Energie ausgestrahlt haben. Nun ist aber die ausgestrahlte Energie proportional der Kontraktionsenergie, welche ihrerseits proportional dem Quadrate der Masse und umgekehrt proportional dem Radius ist. Wenn der Stern von der Masse $2 \cdot 10^{33}$ sich bis $r_0 = 2 \cdot 10^7$ zusammenzieht, so ist die entsprechende Kontraktionsenergie 1000 mal kleiner als im Falle eines Sternes von der Masse $2 \cdot 10^{34}$, der sich bis $r_0 = 2 \cdot 10^6$ zusammenzieht. Wir müssen daher bei dem ersten Stern $r_0 = 2 \cdot 10^6$ annehmen, bei dem zweiten $r_0 = 2 \cdot 10^7$ und bei dem dritten $r_0 = 2 \cdot 10^8$. Außerdem wollen wir annehmen, daß der erste und größte Stern die Fähigkeit hat sich höchstens bis $\frac{r_1}{r_0} = 10^7$ auszudehnen, der zweite höchstens bis $\frac{r_1}{r_0} = 10^4$ und der dritte höchstens bis $\frac{r_1}{r_0} = 10^2$.

Daraus folgt, daß der maximale zulässige Radius des ersten Sterns gleich $r_1 = 2 \cdot 10^{13}$ ist, derjenige des zweiten gleich $r_1 = 2 \cdot 10^{11}$ und derjenige des dritten gleich $r_1 = 2 \cdot 10^{10}$. Wenn wir nun L aus (124) [resp. aus (124')] berechnen, so können wir auch T_{eff} finden. Die entsprechenden Zahlen sind in Tabelle 15 zusammengestellt. Diese Tabelle zeigt, daß mit abnehmender Masse sowohl die relative als auch die absolute Fähigkeit sich auszudehnen ebenfalls abnimmt. Die untere Grenze der effektiven Temperatur hingegen nimmt zuerst zu, und dann wieder ab.

Tabelle 15.

Masse des Sterns (in Gramm)	Relative Fähigkeit sich auszudehnen	Absolute Fähigkeit sich auszudehnen	Durchschnittliche Dichte des einzelnen Sterns (in g.cm ⁻³)	Absolute bolometrische Helligkeit (in Erg.sec ⁻¹)	Effektive Temperatur der Oberfläche
2.10 ³⁴	$\frac{r_1}{r_0} \leq 10^7$	$r_1 \leq 2.10^{13}$	$\bar{\rho} \geq 1,19.10^{-6}$	1,21.10 ³⁷	$T_{eff} \geq 2545^0$
2.10 ³³	$\frac{r_1}{r_0} \leq 10^4$	$r_1 \leq 2.10^{11}$	$\bar{\rho} \geq 0,119$	1,21.10 ³⁴	$T_{eff} \geq 4526^0$
2.10 ³²	$\frac{r_1}{r_0} \leq 10^2$	$r_1 \leq 2.10^{10}$	$\bar{\rho} \geq 11,9$	1,21.10 ³¹	$T_{eff} \geq 2545^0$

Wir sehen, daß niedrige effektive Temperaturen entweder bei sehr großen, hellen und wenig dichten, oder bei sehr kleinen, dunklen und dichten Sternen möglich sind; bei Sternen von mittlerer Masse und Helligkeit ist eine niedrige effektive Temperatur unmöglich. Wir glauben, daß auf eine ähnliche Weise das bekannte „Russell-Diagramm“ erklärt werden kann.

Gewöhnlich wird angenommen, daß ein jeder Stern sein „Leben“ als roter Riese beginnt und dann die Harvardreihe *MKGFAB* mit nahezu gleicher, sehr großer absoluter Helligkeit durchläuft, bis er bei einer gewissen Dichte das Temperaturmaximum erreicht. Von da ab sinkt seine Temperatur, wobei der Stern die Harvardreihe noch einmal, aber in umgekehrter Folge von *B* nach *M* durchläuft. Mit der Abnahme der effektiven Temperatur geht Hand in Hand eine Verringerung der Oberfläche, weshalb die absolute bolometrische Helligkeit äußerst schnell sinkt.

Wir lehnen eine solche Theorie auf das entschiedenste ab. Die Annahme einer unveränderlichen absoluten bolometrischen Helligkeit während des Riesenstadiums beruht auf folgendem stillschweigenden Syllogismus: „Die Wirkung der Verkleinerung der Oberfläche wird durch die Erhöhung der effektiven Temperatur annähernd kompensiert; deshalb bleibt die absolute bolometrische Helligkeit des Sterns beinahe unverändert. Selbstverständlich gilt diese Regel der Kompensation nur dann, wenn die Masse des Sterns sich nicht verändert. Also (??) müssen Masse und absolute bolometrische Helligkeit eines Sterns wäh-

rend seines Riesenstadiums beinahe unverändert bleiben“. — Mir will die Logik dieses von den meisten Forschern stillschweigend angenommenen Syllogismus nicht einleuchten. Warum könnte z. B. unsere Sonne nicht als M -Riese mit einer Masse gleich $100 M_{\odot}$ ihr „Leben“ begonnen haben, um sich dann der Reihe nach in einen K -Riesen von der Masse $80 M_{\odot}$, in einen G -Riesen von der Masse $60 M_{\odot}$ usw. zu verwandeln? In einem solchen Falle wäre aber die absolute bolometrische Helligkeit während des Riesenstadiums nicht konstant, sondern in hohem Grade veränderlich. Und was zwingt uns, nur bei der Zwergreihe eine Massenabnahme (von B nach M) zuzulassen und trotzdem diese Reihe als eine genetische anzusehen? Uns scheint eine solche Annahme unbegründet zu sein, und wir betrachten die Zwergreihe nicht als eine Folge verschiedener Entwicklungsstadien, die ein jeder Stern zu durchlaufen hat, sondern als eine Reihe unabhängiger Sterne nach abnehmender effektiver Temperatur geordnet. Nach dem „Russell-Diagramm“ weisen Zwerge von niedrigerer effektiver Temperatur eine durchschnittlich geringere Masse auf; eine Verringerung der Masse muß aber nach (124) eine Verringerung der Helligkeit zur Folge haben. Somit nimmt in der Zwergreihe von B bis M nicht nur die effektive Temperatur, sondern auch die Masse und also auch die absolute bolometrische Helligkeit ab. Dies alles hat mit irgendeinem „Abkühlungsprozeß“ gar nichts zu tun. Natürlich wollen wir nicht leugnen, daß im Verlaufe der 3 Milliarden Jahre (wenn man die „kurze Zeitskala“ akzeptiert) die Sterne sich mehr oder weniger verändert haben können. Trotzdem lehnen wir es ab, sei es in der Riesenreihe, sei es in der Zwergreihe eine genetische Reihe zu sehen.

Will man trotzdem die Massenabnahme (von B nach M) in der Zwergreihe dadurch erklären, daß der Stern im Verlaufe seines „Lebens“ immer mehr und mehr von seiner Masse ausgestrahlt hat, so müßte man dabei mit solchen Zeiträumen rechnen, die mit der jetzt herrschenden Annahme einer „kurzen Zeitskala“ völlig unvereinbar wären. Nernst glaubt eine große Massenabnahme mit der „kurzen Zeitskala“ dadurch versöhnen zu können, daß er einen Massenschwund auch ohne gleichzeitig auftretende Strahlung für möglich hält ¹⁾. Uns scheint aber eine solche Theorie zu kühn zu sein, um ihr folgen zu können.

1) W. Nernst, l. c. S. 527.

Massen-Helligkeits-Formel (in erster Annäherung) für weiße Zwerge. Vergleich der nach dieser Formel berechneten absoluten bolometrischen Helligkeiten mit den beobachteten.

Wenden wir uns wieder der Gleichung (128) zu. Eine g -Lösung dieser Gleichung entspricht solchen Werten von L , bei denen das erste Glied in dem Klammersausdruck

$$\left(\frac{2.10^{18}}{3GM^2} - \frac{\pi^{1/2} \sigma^{1/2} T_{eff}^2}{L^{3/2}} \right) \quad (130)$$

sehr viel größer als das zweite ist. Dies trifft besonders bei kleinen Werten von T_{eff} zu. Wenn wir im äußersten Falle die effektive Temperatur ganz vernachlässigen und $T_{eff} \sim 0$ setzen, so geht (128) in

$$\begin{aligned} L &= \frac{108.137^2 \pi^8 m_e^2 k^5 G^4 M^7}{10^{73} h^5 \mathfrak{R}} \left[\frac{GM}{8\mathfrak{R}} \left(\frac{2.10^{18}}{3GM^2} \right) \right]^4 = \\ &= \frac{137^2 \pi^8}{2^7 \cdot 15} \left(\frac{k}{h\mathfrak{R}} \right)^5 G^4 m_e^2 M^3 \end{aligned}$$

über, was mit (124) identisch ist. Somit stellt (124) nichts anderes dar, als die „extremste“ g -Lösung der Gleichung (128).

Eine d -Lösung der Gleichung (128) entspricht solchen Werten von L , bei denen beide Glieder des Klammersausdrucks (130) von ähnlicher Größenordnung sind. In erster Annäherung können wir sie einfach gleichsetzen und schreiben:

$$\frac{2.10^{18}}{3GM^2} = \frac{\pi^{1/2} \sigma^{1/2} T_{eff}^2}{L^{3/2}},$$

oder:

$$L = 10^{-12} (2,25 \pi \sigma G^2)^{1/3} (MT_{eff})^{4/3}. \quad (131)$$

Dies ist die Massen-Helligkeits-Formel (in erster Annäherung) für d -Zwerge, zu denen die weißen Zwerge gehören. Für g -Zwerge hingegen ist diese Formel untauglich, und es muß bei ihnen die frühere Formel (124) benutzt werden.

Die Einführung der entsprechenden Zahlenwerte in (131) ergibt:

$$L = (\text{Nr log } \bar{18},0845783) (MT_{\text{eff}})^{4/3}, \quad (131')$$

oder abgerundet:

$$L = 1,22 \cdot 10^{-18} (MT_{\text{eff}})^{4/3}.$$

Nun ist

$$\frac{3,780 \cdot 10^{33}}{L_{\odot}} = 1 \text{ und } \frac{1,985 \cdot 10^{33}}{M_{\odot}} = \frac{(1,985 \cdot 10^{33})^{4/3}}{M_{\odot}^{4/3}} = 1.$$

Dies gestattet uns die Gleichung (131') folgendermaßen umzugestalten:

$$\frac{3,780 \cdot 10^{33} L}{L_{\odot}} = (\text{Nr log } \bar{18},0845783) \left(\frac{1,985 \cdot 10^{33} MT_{\text{eff}}}{M_{\odot}} \right)^{4/3},$$

oder:

$$\frac{L}{L_{\odot}} = (\text{Nr log } \bar{8},9041005) \left(\frac{MT_{\text{eff}}}{M_{\odot}} \right)^{4/3}, \quad (131'')$$

oder abgerundet:

$$\frac{L}{L_{\odot}} = 8,02 \cdot 10^{-8} \left(\frac{MT_{\text{eff}}}{M_{\odot}} \right)^{4/3}.$$

Wie wir sehen, stellt (131) die „extremste“ d -Lösung der Gleichung (128) dar. Während nach (124) bei einem g -Stern seine absolute bolometrische Helligkeit in erster Annäherung von der effektiven Temperatur unabhängig ist, trifft dies nach (131) bei den d -Sternen sogar in erster Annäherung nicht zu.

Um die Richtigkeit der Formel (131) prüfen zu können, müssen wir möglichst genaue Beobachtungsdaten hinsichtlich M , L und T_{eff} der weißen Zwerge zur Verfügung haben. In dieser Hinsicht kommen für uns nur zwei weiße Zwerge in Betracht: $O_2 \text{ Eri B}^1)$ und Sirius B. Die wohl sichersten Beobachtungsdaten hinsichtlich dieser beiden Sterne finden wir bei Kuiper²⁾; ich habe sie in folgender kleinen Tabelle zusammengefaßt:

1) So wird dieser Stern bezeichnet u. a. von E. C. Stoner [Phil. Mag. (7), 68, 1929] und von S. Chandrasekhar (ZS. f. Astrophys. 3, 302, 1931). G. P. Kuiper (Publ. Astron. Soc. Pacific. 46, 288, 1934) hingegen bezeichnet ihn durch $o_2 \text{ Eri B}$ und H. Siedentopf (Astron. Nachr. 243, 4, 1931) durch $o^2 \text{ Eri B}$.

2) G. P. Kuiper, Publ. Astron. Soc. Pacific 46, 288, 1934.

Tabelle 16.

Name des Sterns	Spektralklasse	Radius (in Einheiten des Erdradius)	Dichte (in g.cm ⁻³)	$\frac{M}{M_{\odot}}$
O ₂ Eri B	A0	2,1	2,0.10 ⁵	0,455
Sirius B	F0	3,5	4,3.10 ⁴	0,934

Sowohl Stoner ¹⁾ als auch Chandrasekhar ²⁾ zählen O₂ Eri B derselben Spektralklasse A0 zu und setzen die effektive Temperatur gleich 11200°. Nernst und Pilowski hingegen nehmen den etwas höheren Wert von 11650° an, den auch wir akzeptieren wollen; außerdem setzen sie $\frac{L}{L_{\odot}}$ gleich 0,0096. Was Sirius B anbetrifft, so zählt Stoner diesen Stern der Spektralklasse A7 zu und schätzt die effektive Temperatur auf 8000°. Wir aber wollen mit Kuiper diesen Stern der Klasse F0 zurechnen, was einer etwas niedrigeren effektiven Temperatur entspricht. Wir glauben kaum einen sehr großen Fehler zu begehen, wenn wir $T_{eff} = 7900^{\circ}$ annehmen. Setzt man den Erdradius gleich 6,4.10⁸ cm, so ist nach Kuiper der Radius von Sirius B gleich

$$r_1 = 3,5.6,4.10^8 = 2,24.10^9 \text{ cm,}$$

und dies ergibt nach elementaren Rechnungen:

$$\frac{L}{L_{\odot}} = 0,0037,$$

was wir als den zuverlässigsten Beobachtungswert von $\frac{L}{L_{\odot}}$ ansehen wollen.

Die Tabelle 17 gestattet uns, die nach (124'') und nach (131'') berechneten Werte mit den beobachteten zu vergleichen. Wie wir sehen, ist die Gleichung (124'') bei *d*-Sternen völlig unbrauchbar, wie es auch zu erwarten war. Aus der letzten Kolumne der Tabelle 17 läßt sich die Diskrepanz zwischen den nach (131'') berechneten und den beobachteten Werten ersehen.

1) E. C. Stoner, Phil. Mag. (7) 7, 67, 1929.

2) S. Chandrasekhar, ZS. f. Astrophys. 3, 302, 1931.

Tabelle 17.

Name des Sterns	$\frac{L}{L_{\odot}}$ berechnet nach (124'')	$\frac{L}{L_{\odot}}$ berechnet nach (131'')	$\frac{L}{L_{\odot}}$ beobachtet	Logarithmus des Verhältnisses des nach (131'') berechneten Wertes zu dem beobachteten
O ₃ Eri B	0,29367	0,0074111	0,0096	1,8876123
Sirius B	2,5402	0,011519	0,0037	0,4931975
Der durchschnittliche Wert des erwähnten Logarithmus:				0,1904049

Das arithmetische Mittel aus den beiden Logarithmen entspricht der Zahl 1.5503, was besagt, daß die berechneten Werte durchschnittlich etwa 1,6 mal größer sind als die beobachteten. Es ist natürlich zu bedauern, daß bei *d*-Sternen ein sehr viel kleineres statistisches Vergleichsmaterial sich beibringen läßt als bei *g*-Sternen. Aber immerhin genügt schon dies kleine Material um zu ersehen, daß die Formel (131'') bei *d*-Zwergen Werte von der richtigen Größenordnung ergibt.

Wenn wir *L* und *r*₁ aus (131) und aus den selbstverständlichen Gleichungen

$$\frac{4}{3} \pi r_1^3 \bar{\rho} = M$$

und

$$L = 4 \pi r_1^2 \sigma T_{eff}^4$$

eliminieren, so erhalten wir:

$$\bar{\rho} = \frac{4 \cdot 10^{18} \sigma T_{eff}^4}{GM}, \tag{132}$$

oder:

$$\bar{\rho} = \frac{4 \cdot 10^{18} \sigma T_{eff}^4}{GM} \cdot \frac{M_{\odot}}{1,985 \cdot 10^{33}} = \frac{\sigma T_{eff}^4}{4,9625 \cdot 10^{14} (M/M_{\odot}) G}. \tag{133}$$

Das Einsetzen der entsprechenden Zahlenwerte für σ und *G* ergibt:

$$\bar{\rho} = \frac{(\text{Nr log } 12,2374971) T_{eff}^4}{M/M_{\odot}}, \tag{134}$$

oder abgerundet:

$$\bar{\rho} = \frac{1,73 \cdot 10^{-12} T_{eff}^4}{M/M_{\odot}}. \quad (134')$$

Die Formel (134) gestattet uns, die durchschnittliche Dichte eines „normalen“ *d*-Zwerges aus seiner Masse und seiner effektiven Temperatur zu berechnen. Wenn man aber bedenkt, daß die Massen der weißen Zwerge sich nicht besonders stark von der Sonnenmasse unterscheiden, und wenn man sich mit ganz rohen Schätzungen begnügen will, so kann man in (134)

$$M/M_{\odot} \sim 1$$

setzen, und dies ergibt:

$$\bar{\rho} \sim (\text{Nr} \log \overline{12,2374971}) T_{eff}^4, \quad (135)$$

oder abgerundet:

$$\bar{\rho} \sim 1,73 \cdot 10^{-12} T_{eff}^4. \quad (135')$$

Natürlich kann man mit (135) nicht den genauen Wert von $\bar{\rho}$ berechnen, sondern nur seine Größenordnung. Auch soll noch einmal daran erinnert werden, daß die Formeln (134) und (135) ausschließlich bei *d*-Zwergen angewandt werden dürfen, und ja nicht bei *g*-Zwergen!

Die Formeln (134) und (135) zeigen, daß die durchschnittliche Dichte eines *d*-Zwerges sehr schnell mit der effektiven Temperatur steigt.

Nach einer neuen Untersuchung von Kuiper ist A.C. + 70° 8247 der dichteste aller bekannten weißen Zwerge¹⁾. Die effektive Temperatur schätzt Kuiper auf 28000°. Die Masse läßt sich leider nicht bestimmen, doch glaubt Kuiper sie auf indirektem Wege auf Grund von Chandrasekhars Theorie berechnen zu können. Auf diese Weise findet er $M = 2,8 M_{\odot}$, was für die durchschnittliche Dichte den enormen Wert $\bar{\rho} = 3,6 \cdot 10^7 \text{ g.cm}^{-3}$ ergibt. Wir können jedoch hinsichtlich dieser Massenbestimmung Kuiper nicht folgen, weil Chandrasekhars Theorie, auf die er sich beruft, einen ganz anderen Sternaufbau voraussetzt, als wir angenommen haben. Aber Kuipers Bestimmung der effektiven Temperatur dürfte wohl richtig sein, und (135) ergibt für diesen Fall:

$$\bar{\rho} \sim (\text{Nr} \log \overline{12,2374931}) \cdot 28000^4,$$

oder abgerundet:

$$\bar{\rho} \sim 1,06 \cdot 10^6 \text{ g.cm}^{-3},$$

1) G. P. Kuiper, Publ. A. S. P. 47, 307, 1935.

wobei vorausgesetzt ist, daß die Masse sich nicht besonders stark von der Sonnenmasse unterscheidet.

Für einen d -Zwerg von der Masse $M = 0,5M_{\odot}$ und von der effektiven Temperatur $T_{eff} = 2000^{\circ}$ würde (134') nur

$$\bar{\rho} = \frac{1,73 \cdot 10^{-12} \cdot 2000^4}{0,5} = 55,36 \text{ g.cm}^{-3}$$

ergeben. Eine solche Dichte unterscheidet sich nicht besonders stark von der Dichte gewöhnlicher roter Zwerge, und es taucht die Frage auf, ob nicht vielleicht unter letzteren auch rote d -Zwerge vorhanden seien. Die Feststellung davon stößt aber auf folgende Schwierigkeit: Wenn wir zu immer kleineren und kleineren Massen übergehen, so nimmt nach (131) bei d -Sternen die absolute bolometrische Helligkeit proportional $M^{4/3}$ ab, bei g -Sternen hingegen nach (124) proportional M^3 . Natürlich wird dadurch der Helligkeitsunterschied zwischen d - und g -Sternen immer geringer. Nun stellt aber (124) doch nur den durchschnittlichen „Normaltypus“ eines g -Sterns dar, von welchem die einzelnen g -Sterne bald nach der einen, bald nach der anderen Seite abweichen können. Die Tabelle 12 (auf S. 111) zeigt, daß diese individuellen Abweichungen vom „Normaltypus“ ziemlich groß sein können. Ähnliche individuelle Schwankungen wird man auch bei den d -Sternen zu erwarten haben, da ja (131) nur den „Normaltypus“ eines d -Sterns wiedergibt. Solange die „Normalhelligkeiten“ des g - und des d -Zustandes noch sehr verschieden sind, können sich die individuellen Abweichungen nicht überlagern, und es läßt sich daher bei jedem einzelnen Stern mit Sicherheit bestimmen, ob er zu der g - oder zu der d -Klasse gehört. Sind hingegen die „normalen“ absoluten bolometrischen Helligkeiten wenig verschieden, so können die individuellen Abweichungen sich teilweise überlagern, und es ist dann schwer zu entscheiden, zu welcher Klasse ein gegebener Stern zu rechnen ist. Deshalb ist es mir auch nicht gelungen, die Existenz roter d -Zwerge mit Sicherheit nachzuweisen.

Nach unserer Auffassung besteht zwischen g -Riesen und g -Zwergen kein qualitativer, sondern nur ein quantitativer Unterschied. Ein wirklich tiefer qualitativer Unterschied besteht aber zwischen g -Sternen und d -Sternen. Die ersteren (gleichgültig ob Riesen oder Zwerge) gehorchen der Formel (124), die letzteren der Formel (131). Die traditionelle Einteilung der Sterne in Riesen

und Zwerge betrachten wir als eine Einteilung nach nebensächlichen Merkmalen. Wir wollen nicht leugnen, daß beim Übergang zu immer kleineren und kleineren Massen auch bei g -Zwergen wachsende Abweichung vom „Normaltypus“ der g -Sterne eintreten kann¹⁾, doch diese Abweichung ist von ganz anderer Größenordnung, als die Abweichungen zwischen den g - und d -Sternen.

Ein neues Prinzip zur Berechnung des Alters des Universums.

Bei der Ableitung der Gleichung (128) hatten wir angenommen, daß das Universum seit 10^{17} Sekunden existiert. Verallgemeinern wir jetzt (128), indem wir annehmen, daß die Welt vor Θ Sekunden „erschaffen“ worden ist. Statt (128) erhalten wir nach derselben Methode die allgemeinere Gleichung

$$L = \frac{3^3 \cdot 137^2 \pi^8 m_e^2 k^5 G^4 M^7}{2^3 \cdot 5^5 h^5 \Theta^4 \mathfrak{R}} \left\{ \left[\frac{GM}{8\mathfrak{R}} \left(\frac{20 L \Theta}{3 GM^2} - \frac{\pi^{1/2} \sigma^{1/2} T_{eff}^2}{L^{3/2}} \right)^4 + \right. \right. \\ \left. \left. + T_{eff} \right]^4 - T_{eff}^4 \right\}. \quad (136)$$

Um die „extreme“ g -Lösung der Gleichung (136) zu erhalten, muß $T_{eff} \sim 0$ angenommen werden, und dies ergibt:

$$L = \frac{3^3 \cdot 137^2 \pi^8 m_e^2 k^5 G^4 M^7}{2^3 \cdot 5^5 h^5 \Theta^4 \mathfrak{R}} \left\{ \left[\frac{GM}{8\mathfrak{R}} \left(\frac{20 L \Theta}{3 GM^2} \right) \right]^4 \right\} = \\ = \frac{137^2 \pi^8}{2^7 \cdot 15} \left(\frac{k}{h\mathfrak{R}} \right)^5 G^4 m_e^2 M^3,$$

was mit (124) identisch ist. Somit ist die „extreme“ g -Lösung der Gleichung (136) von der Zeitspanne Θ unabhängig (selbstverständlich nur solange die Kontraktion der inneren Neutronengaskugel genügend Energie liefert, um den von uns vorausgesetzten Bau des Sterns aufrechtzuerhalten).

Will man hingegen die „extreme“ d -Lösung der Gleichung (136) erhalten, so muß man in schon bekannter Weise

1) Erklärbar durch wachsende Unvollkommenheit der zentralen Neutronengaskugel.

$$\frac{20 \Theta}{3 GM^2} = \frac{\pi^{1/2} \sigma^{1/2} T_{eff}^2}{L^{3/2}}$$

setzen, und dies ergibt:

$$\Theta = \frac{3 (\pi \sigma)^{1/2} (MT_{eff})^2 G}{20 L^{3/2}} \quad (137)$$

Somit ist es möglich, das Alter eines d -Zwerges (aber keinesfalls eines g -Zwerges!) zu berechnen. Die d -Zwerge liefern uns also ein neues Prinzip zur Berechnung des Alters des Universums. Führt man in (137) die entsprechenden Zahlenwerte ein, so erhält man:

$$\Theta = \frac{(\text{Nr log } 10,1268675) \cdot (MT_{eff})^2}{L^{3/2}}, \quad (137')$$

oder abgerundet:

$$\Theta = \frac{1,34 \cdot 10^{-10} (MT_{eff})^2}{L^{3/2}}. \quad (137'')$$

Für Sirius B ist

$$\begin{aligned} L &= 0,0037 L_{\odot} = 0,0037 \cdot 3,780 \cdot 10^{33}, \\ M &= 0,934 M_{\odot} = 0,934 \cdot 1,985 \cdot 10^{33}, \\ \text{und } T_{eff} &= 7900^{\circ} \end{aligned}$$

zu setzen, und man erhält aus (137'):

$$\log \Theta = 17,7397963.$$

Für $O_2 \text{ Eri B}_2$ erhalten wir in analoger Weise:

$$\log \Theta = 16,8314186.$$

Das arithmetische Mittel beider Logarithmen ist

$$\log \Theta = 17,2856074,$$

was $\Theta = 1,9302 \cdot 10^{17}$ Sekunden entspricht, oder $6,12 \cdot 10^9$ Jahren.

Es ist sehr zu bedauern, daß unser statistisches Material hinsichtlich der d -Sterne so mangelhaft ist: sonst würde unser neues Prinzip es gestatten, das Alter des Universums mit viel größerer Genauigkeit zu berechnen. Aber auch so ist es schon klar, daß die Gleichung (137) für das Alter des Universums die richtige Größenordnung (vom Standpunkt der „kurzen Zeitskala“) ergibt. Man darf jedoch ja nicht vergessen, daß (137) nur für „normale“ d -Sterne gilt, keinesfalls aber für einen jeden individuellen d -Stern!

Die Erklärung von H. Vogt dafür, daß es keine Sterne von extrem großer Masse gibt. Kritik dieser Erklärung.

Nach der traditionellen Erklärung wird die Stabilität eines Sterns mit zunehmender Masse deshalb geringer, weil der Strahlungsdruck gegenüber dem Gasdruck eine immer mehr dominierende Rolle zu spielen beginnt. Vogt verwirft diese Erklärung und schlägt seine eigene Theorie vor¹⁾. Dabei stellt er u. a. folgende zwei Gleichungen auf:

$$\frac{1-\beta}{\beta^4} = \varphi(r) \cdot \frac{1}{(1+\xi)^4} \cdot M^2 m^4 \quad (138)$$

und

$$k \cdot Q = 4\pi c G (1-\beta) \left[1 + \psi(r) \frac{\beta}{4-3\beta} \right], \quad (139)$$

wo β das Verhältnis des Gasdruckes zum Gesamtdruck (also $1-\beta$ das Verhältnis des Strahlungsdruckes zum Gesamtdruck) bedeutet, M die Gesamtmasse des Sternes, m das mittlere effektive Molekulargewicht der Sternmaterie, Q die durchschnittlich pro Massen- und Zeiteinheit innerhalb der Kugel vom Radius r erzeugte Energiemenge, k den Massenabsorptionskoeffizienten, ξ eine variable Größe (die, je nachdem sich die Sternmaterie inkompressibler oder kompressibler als ein vollkommenes Gas verhält, positiv oder negativ ist), und endlich $\varphi(r)$ und $\psi(r)$ gewisse Funktionen des in Einheiten des Sternradius ausgedrückten Abstandes r vom Sternzentrum²⁾. Aus diesen Gleichungen glaubt nun Vogt den Schluß ziehen zu dürfen, daß kQ im Inneren der Sterne eines und desselben Aufbaus desto weniger variiert, je größer M ist. Mit anderen Worten: Um eine bestimmte Änderung des Sternaufbaus hervorzurufen, sei bei größeren Sternen eine geringere Änderung in der Verteilung der inneren Energiequellen notwendig als bei kleineren Sternen. Bei unendlich großer Sternmasse sei der Aufbau nur bei einer einzigen bestimmten Verteilung der Energiequellen möglich. Man müsse ja in diesem Falle $\beta = 0$ annehmen, und (139) ergibt dann tatsächlich $kQ = 4\pi c G$.

Ist kQ im allgemeineren Falle nicht konstant, sondern

1) H. Vogt, Veröffentlichungen der Universitäts-Sternwarte zu Jena Nr. 2, Jena 1929.

2) Ebenda, S. 3 f.

nimmt es nach dem Sternzentrum hin zu oder ab, so erreicht $1-\beta$ bereits für endliche Massenwerte entweder im Zentrum des Sternes oder in weniger tiefen Schichten den Wert 1. In letzterem Falle muß etwas höher, oder etwas niedriger der Wert von $1-\beta$ größer als 1 werden, was natürlich unmöglich ist. Im äußersten noch zulässigen Grenzfall kann $1-\beta$ höchstens im Zentrum den Wert 1 annehmen, aber nicht in endlicher Entfernung vom Zentrum. Sonst müßte sich, nach Vogts Ansicht, vom Zentrum ausgehend eine Zone ausbilden, die nur strahlende Energie enthielte. Je größer die Sternmasse ist, desto größer müßte die erwähnte Zone sein, wodurch der Stern sich immer mehr jenem instabilen und daher unmöglichen Zustande näherte, bei welchem alle Materie in einer dünnen Kugelschale vereinigt wäre. Dadurch sei bewiesen, daß die Massen der Sterne nicht beliebig groß sein können.

Ich kann jedoch mit Vogt nicht einverstanden sein. Nehmen wir beispielsweise ein solches Sternmodell an, wo sämtliche Energiequellen nur außerhalb einer bestimmten Zone vom Radius r verteilt wären. Obgleich diese zentrale Zone völlig frei von Energiequellen ist, muß ihre Temperatur dennoch eine sehr hohe sein, weil glühende Gasmassen sie von allen Seiten umgeben. Somit kann in dieser inneren quellenlosen Zone $1-\beta$ unter Umständen sogar von 1 nur wenig verschieden sein. Für diese Zone haben wir $Q=0$ zu setzen und erhalten dann aus (139):

$$0 = 4\pi cG(1-\beta) \left[1 + \psi(r) \frac{\beta}{4-3\beta} \right],$$

und also:

$$1 - \beta = 0;$$

d. h. in der zentralen Zone ist überhaupt kein Strahlungsdruck, also auch überhaupt keine strahlende Energie vorhanden. Ein solches Resultat ist offenbar absurd, weil ja die zentrale quellenfreie Zone von glühenden Gasmassen umgeben ist, also auf die Dauer nicht kalt bleiben kann. Aber gerade ein solcher extremer Fall trifft ein, wenn sich im Stern eine nur (oder fast nur) aus strahlender Energie bestehende Zone ausbildet. Wenn nun die Energiequelle der Sterne in irgendwelchen atomistischen Prozessen besteht (wie Vogt es doch offenbar annimmt), so muß ein von Materie freier Raum auch von Energiequellen

frei sein, und es muß dort $Q = 0$ gesetzt werden. Daraus folgt, daß sich Vogt auf die Gleichung (13^o) gerade in einem solchen Falle beruft, wo diese Gleichung versagt!

Aber selbst wenn wir auch annehmen wollten, daß sich im Zentrum des Sternes eine von Materie freie Zone ausbildet, so ist dies noch lange kein Grund dafür, die Existenz eines solchen Sternes für unmöglich zu erklären. Sobald sich eine kleine aus reiner strahlender Energie bestehende „Blase“ ausbilden würde, müßte sie nach dem Archimedischen Gesetze nach oben steigen; an ihrer Stelle würde sich eine neue kleine „Blase“ ausbilden u. s. w. In einem solchen langsamen „Sieden“ würde doch nichts Katastrophales liegen, was etwa die Existenz des Sternes zur Unmöglichkeit machen könnte.

Ferner ist für Vogts Theorie sehr bedenklich, daß Möglichkeit oder Unmöglichkeit eines Sternes ausschließlich von der Verteilung der Energiequellen abhängen soll, nicht aber von ihren absoluten Größen (wenn nur letztere einen gewissen oberen Grenzwert nicht übersteigen). Nehmen wir z. B. an, daß ein sehr großer Stern (der also nur bei einer ganz bestimmten Energiequellenverteilung existieren konnte) bis 0° abs. abgekühlt ist, wobei natürlich alle seine früheren Energiequellen versiegt sind. Verteilen wir jetzt im Inneren dieses absolut kalten Sterns eine sehr kleine Menge irgendeines radioaktiven Stoffes, z. B. 1 Gramm Uran oder Thorium, so ungleichmäßig wie wir nur wollen. Wir erhalten dann einen Stern, der nach Vogts Theorie nicht existieren kann, weil die Energiequellen zu ungleichmäßig verteilt sind. Was wird aber jetzt mit diesem Stern geschehen? — Sich bis zur Unendlichkeit ausdehnen kann er nicht: seine einzige Energiequelle (ein Gramm Uran oder Thorium) wäre viel zu schwach, um die gewaltigen Gravitationskräfte zu überwinden. Nolens volens müßte dieser Stern ruhig existieren, obgleich dies nach Vogts Theorie unmöglich ist.

Auf Grund alles Gesagten glaube ich Vogts Theorie, trotz ihrer scheinbaren Plausibilität, ablehnen zu müssen.

Ich möchte aber eine andere Theorie vorschlagen, die ich an folgendem konkreten Beispiel erläutern will. Eine anfänglich unendlich ausgedehnte Neutronengaskugel von der Masse von 10^{39} Gramm habe sich im Verlaufe der Zeit zu einer Kugel vom Radius 10^{11} cm zusammengeballt. Der Einfachheit halber nehmen wir die Kugel als homogen an, und setzen die Masse

eines Neutrons gleich $1,66 \cdot 10^{-24}$ g. Die Gesamtzahl der Neutronen ist gleich $N = 10^{39} / 1,66 \cdot 10^{-24}$, und die in einem ccm enthaltene Zahl ist gleich $n = N / \frac{4}{3} \pi (10^{11})^3$. Der Strahlungsdruck ist gleich $\frac{1}{3} a T^4$ und der Gasdruck gleich knT . Man kann annehmen, daß im Falle des Gleichgewichts die Summe des Strahlungsdrucks und des Gasdrucks gleich dem durchschnittlichen Gravitationsdruck sein muß, daß also die Gleichung

$$\frac{1}{3} a T^4 + nkT = \frac{3}{20 \pi} \cdot \frac{GM^2}{(10^{11})^4}$$

besteht. Die Einführung der Zahlenwerte (mit allen Dezimalstellen) ergibt:

$$(\text{Nr log } 15,4050445) T^4 + (\text{Nr log } 13,2948059) T = \text{Nr log } 25,5026764.$$

Die Auflösung dieser Gleichung ergibt:

$$T = \text{Nr log } 10,0236966.$$

Jetzt sind wir imstande sowohl die gesamte in der Kugel eingeschlossene strahlende Energie, als auch die gesamte kinetische Energie zu berechnen. Erstere ist gleich

$$\frac{1}{3} a T^4 \cdot \frac{4}{3} \pi (10^{11})^3 = 3,97229 \cdot 10^{59} \text{ Erg},$$

und letztere gleich

$$\frac{3}{2} kTN = 1,308 \cdot 10^{57} \text{ Erg}.$$

Die gesamte innere Energie der Kugel beträgt also

$$3,97229 \cdot 10^{59} + 1,308 \cdot 10^{57} = 3,98537 \cdot 10^{59} \text{ Erg}.$$

Die gesamte Kontraktionsenergie der Kugel ist gleich

$$\frac{3}{5} \cdot \frac{G(10^{39})^2}{10^{11}} = 3,99840 \cdot 10^{59} \text{ Erg}.$$

Somit ist die durch Ausstrahlung verlorengegangene Energiemenge gleich

$$3,99840 \cdot 10^{59} - 3,98537 \cdot 10^{59} = 1,303 \cdot 10^{57} \text{ Erg},$$

was nur etwa $\frac{1}{300}$ der inneren Energie ausmacht. Führt man diese ausgestrahlten $1,303 \cdot 10^{57}$ Erg in die Kugel zurück, so wird sie sich wieder bis zur Unendlichkeit ausdehnen. Wir haben

aber gesehen (s. oben S. 76), daß bei kleineren Sternmassen etwa die Hälfte der Gravitationsenergie ausgestrahlt wird. Will man einen solchen kleineren Stern sich wieder bis zur Unendlichkeit ausdehnen lassen, so muß man seine innere Energie verdoppeln, während bei unserem großen Sterne eine Erhöhung der inneren Energie um $\frac{1}{300}$ schon genügt. Dies zeigt, daß große Sterne gegen äußere Ursachen relativ weniger stabil sein müssen. Ihre Instabilität wird noch durch folgenden Umstand vergrößert. Wir hatten angenommen, daß die kinetische Energie eines Partikelchens gleich $\frac{3}{2} kT$ ist. Dies ist aber nur bei nichtrelativistischen „Molekulargeschwindigkeiten“ richtig. Bei extremen Temperaturen nähert sich die erwähnte Energie $3 kT$ (s. oben S. 90). Dadurch wird die innere Energie noch größer, also der Unterschied zwischen ihr und der gesamten Gravitationsenergie noch geringer.

Eigenschaften ultra-extrem großer Massen.

In Tabelle 15 haben wir die plausible Annahme gemacht, daß mit wachsender Masse sowohl die absolute als auch die relative Fähigkeit des Sternes sich auszudehnen ebenfalls wächst. Wenn so, so muß die Umhüllung immer durchsichtiger werden. Beim Pulsieren wird der Stern im Moment der maximalen Expansion am hellsten erscheinen, weil dann seine Umhüllung für die tieferen und heißeren Schichten am durchsichtigsten ist. In diesem Moment wirkt auch der selektive Strahlungsdruck auf die in der „umkehrenden“ Schicht des Sterns befindlichen Atome relativ (oder vielleicht sogar absolut) am stärksten¹⁾. Es ist daher nicht unmöglich, daß die maximale Helligkeit mit der maximalen Violettverschiebung der Spektrallinien zeitlich zusammenfällt.

1) Natürlich können die vom selektiven Strahlungsdruck getriebenen Atome in der umkehrenden Schicht es nicht zu so großen Geschwindigkeiten bringen, wie in der sehr viel weniger dichten Chromosphäre des Sterns. Einer Abnahme des Strahlungsdrucks wird in der umkehrenden Schicht (aber nicht in der Chromosphäre) sehr schnell eine Abnahme der erwähnten „Atomgeschwindigkeiten“ folgen, so daß die gegenseitige „Phasenverschiebung“ der beiden Erscheinungen keine große sein wird. Es ist klar, daß diese „Phasenverschiebung“ mit Abnahme der Gasdichte zunehmen muß.

Statt des Pulsierens kann man sich auch eine einmalige außerordentliche Ausdehnung der Umhüllung vorstellen, wobei ein kleiner Teil der letzteren sich im Raume sogar zerstreuen mag. Nehmen wir der Einfachheit halber an, daß die Temperatur an der Basis der Elektronen-Protonen-Umhüllung 10^9 Grad betrage; in größerer Entfernung hingegen (die wir durch x bezeichnen wollen) soll die Temperatur proportional der sich außerhalb der Kugel vom Radius x befindlichen Masse sein. Zerstreut sich also z. B. 0,001 der Masse der Umhüllung im Raume, so werden dadurch Schichten mit einer Temperatur von einer Million Grad bloßgelegt. Dies muß eine vorübergehende außerordentlich starke Helligkeitszunahme verursachen. Im Endstadium wird aber die absolute bolometrische Helligkeit von der ursprünglichen kaum zu unterscheiden sein, weil ja nur 0,001 der Umhüllung verlorengegangen ist. Dieser gewesene Teil der Umhüllung wird uns als Nebel erscheinen, der den Stern umgibt.

Aber auch ohne eine solche Katastrophe muß bei immer weiter wachsender Masse die Ausdehnung schließlich so groß werden, daß die Elektronen-Protonen-Hülle an den Rändern durchsichtig zu werden beginnt. Dem Beobachter wird scheinen, daß ein zentraler undurchsichtiger Kern von einer Nebelhülle umringt ist. Da wir jetzt viel tiefer in das Innere des Sterns hineinsehen können, so wird uns natürlich auch eine sehr viel höhere effektive Temperatur vorgetäuscht werden. Das Spektrum der Umhüllung muß in der Hauptsache, wegen der freien Elektronen, ein kontinuierliches sein, wobei aber wegen der beigemischten „gewöhnlichen“ Gase auch Emissionslinien auftreten können. Geht man zu noch größeren Massen über, so wird schließlich der ganze Stern durchsichtig. In einem solchen Falle kann sich aber natürlich gar keine strahlende Energie im Inneren des Sternes ansammeln; auch wird sich keine innere Neutronengaskugel ausbilden. Wenn z. B. die Masse des Sterns gleich 10^{50} g ist, so kann er sich nach Tabelle 1 (s. oben S. 30) auf Grund von Pokrowskis Theorie bis höchstens $1,74 \cdot 10^{-17}$ g.cm⁻³ verdichten. Die durchschnittliche „Molekulargeschwindigkeit“ in einem solchen ultra-extrem großen Stern nähert sich der Lichtgeschwindigkeit, was einer kolossal hohen Temperatur entspricht. Trotzdem wäre diese ungeheure

Temperatur viel harmloser, als die unvergleichlich niedrigere Temperatur in kleineren, aber dichteren Sternen. In einem Stern von 10^{50} g kann sich nämlich keine strahlende Energie aufspeichern, die der kolossalen Temperatur „entsprechen“ würde.

Was noch das starke Aufleuchten eines Sterns anbetrifft, so kann die dazu notwendige große Expansion der Elektronen-Protonen-Hülle vielleicht nur das erste und stärkste Glied einer abklingenden Reihe von Pulsationsschwingungen darstellen. Dabei muß selbstverständlich das Maximum der effektiven Temperatur mit dem Helligkeitsmaximum zeitlich zusammenfallen, weil ja dann, nach unserer Auffassung, die Elektronen-Protonen-Hülle für ihre tiefsten und heißesten Schichten am durchsichtigsten ist.

Die beim Aufleuchten des Sterns entstandene Nebelschicht muß sich, wegen des erhaltenen Impulses, mit der Zeit immer mehr und mehr ausdehnen. Dagegen liegt für eine solche progressive Ausdehnung des oben beschriebenen (bloß scheinbaren) Nebels, der die Sterne von übergroßer Masse umgibt, kein Grund vor.

Zum Schluß will ich noch erwähnen, daß die letzten Jahrgänge von Proc. Nat. Acad. of Sciences (Washington) mir unzugänglich geblieben sind, weil seit dem Jahre 1933 die Zusendung dieser Zeitschrift an unsere Universitätsbibliothek (im Tauschverkehr) ohne jede Motivierung abgebrochen worden ist. Eine zweimalige Anfrage seitens der Universitätsbibliothek blieb unbeantwortet.

Inhaltsverzeichnis.

I. Teil. Die prinzipielle Seite der vorliegenden Frage.

	Seite
Literatur über die vorliegende Frage.	3
Kritik der in der Literatur geäußerten Ansichten.	11
Ist die Existenz einer oberen Grenzdichte möglich vom Standpunkt der speziellen Relativitätstheorie?	17
J. von Neumanns Ansicht, daß $p = \frac{1}{3}\rho c^2$ die extremste Zustandsgleichung einer jeden Materie ist. Prioritätsanspruch hinsichtlich dieser Ansicht.	24
Ist die Existenz einer oberen Grenzdichte möglich vom Standpunkt der allgemeinen Relativitätstheorie? — Untersuchungen von K. Schwarzschild und N. R. Sen.	26
Elementare Behandlungsmethoden von G. I. Pokrowski, von A. Haas und von mir.	28
Die Welt von J. Nuut.	35
Die Theorie von J. Nuut und die Expansionsformel von Einstein und W. de Sitter.	35
Die Theorie von J. Nuut und die obere Grenze der Dichte.	37

II. Teil. Über die im Weltall tatsächlich vorkommenden maximalen Dichten und Temperaturen.

Eine mathematisch bedenkliche Methode von E. C. Stoner zur Berechnung der maximalen Temperaturen.	40
Prioritätsfrage hinsichtlich der zum ersten Mal explicite aufgestellten relativistischen Entartungsformel. Eddingtons Angriff gegen diese Formel. Zurückweisung seines Angriffs.	41
Und trotzdem hat Eddington in einem gewissen Sinne recht!	49
E. A. Milne's Ansicht über das „Massen-Helligkeitsgesetz“. Kritik dieser Ansicht	63
Moderne Ansichten über den Bau der Atomkerne.	64
Über die Möglichkeit einer „mechanischen“ Dissoziation der Atomkerne im Inneren der Sterne.	70
Das neue Sternmodell.	72
Die Kontraktionsenergie bei dem neuen Sternmodell	75
G. Watagin's Formel: $n_+ = n_- \sim \frac{16\pi}{h^3 c^3} (kT)^3$ für die „Paarbildung“ bei extremer Temperatur. Prioritätsanspruch hinsichtlich dieser Formel (aber nicht hinsichtlich ihrer Ableitung).	85

	Seite
Der durchschnittliche Massenabsorptionskoeffizient des neuen Sternmodells. . .	93
Die neue Massen-Helligkeits-Formel in erster Annäherung. Vergleich der berechneten absoluten bolometrischen Helligkeiten mit den beob- achteten.	102
Die neue Massen-Helligkeits-Formel in zweiter Annäherung. Das „Russell- Diagramm“.	114
Massen-Helligkeits-Formel (in erster Annäherung) für weiße Zwerge. Ver- gleich der nach dieser Formel berechneten absoluten bolometrischen Helligkeiten mit den beobachteten.	122
Ein neues Prinzip zur Berechnung des Alters des Universums.	128
Die Erklärung von H. Vogt dafür, daß es keine Sterne von extrem großer Masse gibt. Kritik dieser Erklärung.	130
Eigenschaften ultra-extrem großer Massen.	134

Zusammenfassung und ergänzende Bemerkungen.

1) Sämtliche in der Literatur angeführten Beweise der Existenz einer oberen Grenzdichte halten einer eingehenden Kritik nicht stand.

2) Die Richtigkeit von Seitarô Suzuki's Ansicht, daß die Existenz einer oberen Grenzdichte mit der (speziellen) Relativitätstheorie unvereinbar ist, wird bestätigt. Dagegen werden die von Suzuki zur „Rettung“ der oberen Grenzdichte geforderten „kleinen“ Abänderungen der (speziellen) Relativitätstheorie abgelehnt.

3) Die Zustandsgleichung eines jeden Körpers muß der Bedingung $p \leq \rho c^2$ genügen, und diejenige eines isotropen Körpers der Bedingung $p \leq \frac{\rho c^2}{3}$.

4) Trotzdem ist anzunehmen, daß bei einem Himmelskörper die Dichte nicht unbegrenzt steigen kann. Die entsprechende „obere Grenzdichte“ ist aber umgekehrt proportional dem Quadrate der Masse, hat also mit der Kompressibilität der Materie nichts zu tun.

5) Der Verfasser erhebt den Anspruch der erste gewesen zu sein, der die relativistische Entartungsformel explicite aufgestellt hat (wenn auch mit einem falschen Koeffizienten). Eddingtons Angriff gegen diese Formel wird zurückgewiesen, wobei gezeigt wird, daß die relativistische Gleichung $p = K h c n^{4/3}$ durchaus nicht als etwas für die Fermi-Statistik Spezifisches betrachtet werden darf. Trotzdem wird Eddington in gewisser Hinsicht recht gegeben.

6) Bei einer hohen Dichtekonzentration (die von Milne's Theorie verlangt wird) muß mit der Möglichkeit einer Atomkernzertrümmerung im Inneren der Sterne gerechnet werden. In einem solchen Falle entsteht ein Gemisch von Elektronen, Protonen und Neutronen, wobei letztere zum Sternzentrum hinabsinken (ein solcher Entmischungsprozeß geht bei Neutronen relativ sehr schnell vor sich: es genügen einige Millionen Jahre). Die Dichte in der so entstandenen inneren Neutronengaskugel kann so hohe Werte annehmen, wie dies bei keinem anderen Gase denkbar wäre.

7) Es wird ein neues Sternmodell aufgestellt, bei dem die Neutronenentmischung die Hauptrolle spielt. Die Kontraktionsenergie des neuen Sternmodells erweist sich als so groß, daß es überflüssig erscheint nach anderen Energiequellen zu suchen.

8) Das neue Sternmodell gestattet uns eine Massen-Helligkeits-Formel aufzustellen, nach der die absolute bolometrische

Helligkeit als proportional dem Kubus der Masse sich erweist. Auch der Koeffizient läßt sich rein theoretisch berechnen.

9) Bei helleren Sternen stimmt unsere neue Massen-Helligkeits-Formel mit der Beobachtung gut überein. Bei dunkleren Sternen ist die Übereinstimmung schlechter.

10) In 2. Annäherung ist die absolute bolometrische Helligkeit nicht nur von der Masse, sondern auch von der effektiven Temperatur abhängig. Sind Masse und effektive Temperatur gegeben, so erhält man für die absolute bolometrische Helligkeit nicht eine, sondern zwei Lösungen. Die eine (die g -Lösung) entspricht den Riesen und den gewöhnlichen Zwergen, die andere (die d -Lösung) nur den weißen Zwergen. Nach dieser Auffassung besteht zwischen Riesen und gewöhnlichen Zwergen kein qualitativer, sondern nur ein quantitativer Unterschied (verursacht durch die Verschiedenheit der Massen). Ein tiefer qualitativer (und nicht durch Verschiedenheit der Massen hervorgerufener) Unterschied besteht aber zwischen g - und d -Sternen.

11) Es wird eine plausible Erklärung des „Russell-Diagramms“ vorgeschlagen und an einem (freilich willkürlich idealisierten) Zahlenbeispiel illustriert.

12) Es wird eine Massen-Helligkeits-Formel für d -Sterne (weiße Zwerge) aufgestellt, welche von der gewöhnlichen Massen-Helligkeits-Formel völlig verschieden ist.

13) Es wird eine Formel aufgestellt, wonach aus gegebener Masse, effektiver Temperatur und absoluter bolometrischer Helligkeit das Alter der d -Sterne (aber keinesfalls dasjenige der g -Sterne!) berechnet werden kann. Die erhaltenen Zahlen sind (der Größenordnung nach) mit der „kurzen Zeitskala“ im Einklang. Damit haben wir ein neues Prinzip zur Berechnung des Alters des Universums aufgestellt.

14) Es wird die Frage untersucht, weshalb es keine Sterne von extrem großer Masse gebe. Die scheinbar sehr plausible Erklärung von H. Vogt wird abgelehnt und diejenige von Eddington akzeptiert, freilich in neuer Formulierung.

15) Das starke Aufleuchten neuer Sterne wird dadurch erklärt, daß dank der Zerstreuung der äußersten Schichten die inneren, sehr viel heißeren, entblößt werden.

* * *

Als der Druck der vorliegenden Untersuchung schon abgeschlossen war, erhielt ich das Januarheft der M. N. mit einem Aufsatz von Milne, worin eine neue Massen-Helligkeits-Formel

$$L = M^3 \frac{8 \pi^2 c G^4 \left(\frac{1}{3} a\right)}{\bar{\kappa}_1 (\mathcal{R}/\mu)^4} (n+1)^{-3} \left(-\xi^2 \frac{d\theta}{d\xi}\right)_1^{-2}$$

abgeleitet wird¹⁾. Diese Formel hat mit einer der meinigen große Ähnlichkeit. Ich habe nämlich auf S. 108 die Formel

$$L = \frac{64 \pi^2 a c r_0^4 (T_0^4 - T_{eff}^4)}{3 \bar{\kappa} M}$$

aufgestellt. Vernachlässigt man T_{eff}^4 neben T_0^4 , so erhält man auf Grund von (121):

$$L = \frac{64 \pi^2 a c r_0^4}{3 \bar{\kappa} M} \left(\frac{GM}{16 \Re r_0} \right)^4,$$

oder:

$$L = M^3 \frac{8 \pi^2 c G^4 \left(\frac{1}{3} a \right)}{\bar{\kappa} \left(\Re \frac{1}{2} \right)^4} (3 + 1)^{-3} (V \sqrt{8})^{-2}.$$

Trotz der großen Ähnlichkeit zwischen Milne's Formel und der meinigen sind doch unser Gedankengang und unsere ganze Einstellung wesentlich verschieden. In meiner Theorie spielt die Entstehung einer Neutronengaskugel im Sternzentrum die Hauptrolle, während Milne die Möglichkeit einer Neutronenentmischung nicht in Betracht zieht. Außerdem betrachte ich die Kontraktionsenergie als einzige und völlig genügende Energiequelle der Sterne, während Milne hypothetische subatomare Prozesse als Energiequelle betrachtet.

Milne's letzterwähnte Ansicht führt zu Schwierigkeiten, die mir unüberwindlich scheinen. Wenn die Energiequelle der Sterne in subatomaren Prozessen zu suchen ist, warum ist sie proportional M^3 und nicht einfach proportional M ? — Milne sagt: „In the absence of such a knowledge [hinsichtlich der Energiequellen] there are two distinct methods of attempting to calculate, not the luminosity in terms of the mass, but the relation between mass, luminosity and effective temperature“²⁾. Dazu muß ich bemerken, daß Sterne von gleicher Masse, aber von verschiedener effektiver Temperatur im Durchschnitt beinahe gleiche absolute bolometrische Helligkeiten besitzen; letztere sind also von den effektiven Temperaturen beinahe unabhängig. Darum wird die „relation between mass, luminosity and effective temperature“ identisch sein mit der „relation between mass and luminosity“ (wenigstens in erster Annäherung).

Nehmen wir jetzt an, daß gewöhnliche radioaktive Prozesse die einzige Energiequelle seien. Es seien zwei Körper aus reinem Radium gegeben, deren Massen 5 kg und 50 kg be-

1) E. A. Milne, Monthly Not. R. A. S. **96**, 210, 1936.

2) Ebenda, S. 214.

tragen. Wir können die beliebigsten Annahmen hinsichtlich der effektiven Temperaturen und des inneren Aufbaus der beiden Körper machen: niemals wird der größere 10^3 mal, sondern immer nur 10 mal mehr ausstrahlen als der kleinere. Wie soll man dies aber mit Milne's M^3 -Formel in Einklang bringen, die ja unabhängig von der Art der Energieerzeugung gelten muß? ¹⁾ — Bei meiner Auffassung (vgl. S. 63 f.) treten solche Schwierigkeiten nicht auf.

Wir haben angenommen, daß im Inneren der Sterne die Atomkerne zertrümmert werden, und erst danach die Neutronenentmischung einsetzt. Es ist aber auch möglich, daß am „Anfang der Welt“ (vom Standpunkt der „kurzen“ Zeitskala) die Neutronen und Protonen noch gar nicht zu Atomkernen verbunden waren; dann könnte bei den Sternen eine Neutronenentmischung noch vor der Bildung von Atomkernen eingesetzt haben. Jedenfalls läßt sich eine solche Möglichkeit nicht ohne weiteres von der Hand weisen.

Beim Aufleuchten neuer Sterne wird auch das beinahe plötzliche Freiwerden der in dem sich zerstreuen Teile der Sternmaterie aufgespeicherten Energie eine Rolle spielen. In unserem Zahlenbeispiel (S. 135) ist die (anfängliche) durchschnittliche Temperatur des sich zerstreuen Teils der Sternmaterie gleich einer halben Million Grad. Setzt man seine Masse gleich $2 \cdot 10^{30}$ g (= 0,001 der Sonnenmasse), und die spezifische Wärmekapazität gleich 1 (was wegen des hohen Wasserstoffgehalts eher zu wenig als zu viel sein dürfte), so erhält man $2 \cdot 10^{30} \cdot 5 \cdot 10^5 \cdot 4,2 \cdot 10^7 = 4,2 \cdot 10^{43}$ Erg. (Eine solche Energiemenge strahlt unsere Sonne in etwa 350 Jahren aus!) Da die sich zerstreue Masse von $2 \cdot 10^{30}$ Gramm in kurzer Zeit sehr durchsichtig wird, so müssen die aufgespeicherten $4,2 \cdot 10^{43}$ Erg entsprechend schnell ausgestrahlt werden.

Zum Schluß mögen zwei Druckfehler berichtigt werden. In Gleichung (40) auf S. 35 ist beim Klammerausdruck der Exponent 2 ausgefallen. Auf S. 57, 5. Zeile von unten, muß $\frac{1}{3} qc^2$ statt qc^2 stehen.

¹⁾ Milne hat doch seine M^3 -Formel abgeleitet, ohne auf die physikalische Natur der Energieerzeugung einzugehen: folglich muß seine Formel unabhängig von letzterer gültig sein.