

**ÜBER DIE THEORIE
UND DIE ANWENDUNGSMETHODEN
DER QUADRATURREIHEN**

VON

ARNOLD TUDEBERG

TARTU 1933

Im nachstehenden will ich zwei reihenartige Formeln der mechanischen Quadratur behandeln, die durch gewisse Interpolationsanordnungen definiert werden und, unter geeigneten Voraussetzungen über eine sonst beliebige Funktion, den Wert ihres Integrals durch diejenigen Werte der Funktion selber ausdrücken, die zu den im Integrationsintervall äquidistant liegenden Argumentwerten gehören. Obwohl diese Formeln nach ihrer Definition nur endlich viele Glieder haben (von denen das letzte als Restglied der Formel erscheint), werden sie im folgenden kurz *Quadraturreihen* genannt, weil 1) das Integral durch sie in Glieder gewissermassen verschiedener Ordnungen aufgelöst wird (so dass immer der Hinzunahme eines weiteren Gliedes — bis zum oben erwähnten Restglied ausschliesslich — ein Übergang von einem gewissen Interpolationsverfahren zu einem anderen nächsthöherer Ordnung entspricht), und weil 2) zu jedem Abschnitt (das heisst zu jeder Summe der Glieder vom Anfang bis zu irgendeiner Ordnung) ein entsprechendes Restglied hinzutritt.

Die Konvergenz-Divergenz-Frage, die bei einer solchen Quadraturreihe wegen der Höchstanzahl ihrer Glieder nicht auftritt, ist ja überhaupt in der Praxis der Reihen fast belanglos und durch die Frage nach den Werten der Restglieder zu ersetzen. Denn bei rechnerischen Anwendungen der Reihenentwicklungen können nur Abschnitte (Teilsummen) benutzt werden; durch Addition weiterer Glieder wird dann die Genauigkeit gesteigert oder gesenkt, je nachdem die betreffenden Restglieder kleiner oder grösser sind als die vorigen. Aber die Konvergenz oder Divergenz einer Reihe braucht sich durchaus noch nicht in ihrem kurzen Abschnitte abzuspiegeln: mancher Abschnitt einer divergenten Reihenentwicklung kann tatsächlich in der Praxis sogar wertvoller sein als der einer anderen verhältnismässig langsam konvergenten —

wenn die Folge der Restglieder der ersteren Reihe dem Betrage nach zuerst rasch abnimmt und irgendwo später anfängt zu steigen oder zu schwanken, die letztere Reihe dagegen anfangs bedeutend grössere Restglieder hat, deren Folge zwar gegen Null strebt, aber nur allmählich.

Einleitung.

Um diejenigen einfachen Tatsachen aus der Interpolationsrechnung, von denen im folgenden Gebrauch gemacht wird, in zweckmässiger Form beisammen zu haben, will ich sie zuvor in aller Kürze durchmustern.

§ 1. Die Steigungen (Differenzenquotienten oder dividierten Differenzen) einer Funktion $f(x)$ definiert man¹ sukzessiv durch die Gleichungen²

$$(1) \left\{ \begin{array}{l} f(x_0, x_1) = \frac{f(x_0) - f(x_1)}{x_0 - x_1}, \\ f(x_0, x_1, \dots, x_{\nu-1}, x_\nu) = \frac{f(x_0, x_1, \dots, x_{\nu-1}) - f(x_0, \dots, x_{\nu-2}, x_\nu)}{x_{\nu-1} - x_\nu} \end{array} \right. \quad (\nu = 2, 3, \dots),$$

wobei x_0, x_1, \dots, x_ν lauter voneinander verschiedene Zahlen sind. Durch vollständige Induktion beweist man leicht³, dass⁴

¹ *Nörlund*, pag. 8; *Nörlund*, [2], 1; *Steffensen*, 14; *Thiele*, 3; *Whittaker*, 20. Alle Zitate beziehen sich auf das Literaturverzeichnis am Ende dieser Abhandlung.

² Die kleinen griechischen Buchstaben von α bis ν einschl. sollen im folgenden stets nichtnegative ganze Zahlen bedeuten, während lediglich reelle Zahlen mit lateinischen Buchstaben bezeichnet werden. Die Bezeichnung $f(x_0, x_1, \dots, x_\nu)$ der Steigung von $f(x)$ entspricht meiner Ansicht nach am besten dem Zwecke, kurz und deutlich zu sein; dagegen lässt die *Nörlundsche* Bezeichnungsweise $[x_0, x_1, \dots, x_\nu]$ schon die Steigungen zweier verschiedener Funktionen nicht mehr unterscheidbar schreiben. Was die Schreibweise *Kowalewskis*: $[f(x_0), f(x_1), \dots, f(x_\nu)]$ betrifft, so ist sie wohl klar, hinsichtlich der Kürze genügt sie aber nicht.

³ *Steffensen*, 15 oder auch *Nörlund*, 8.

⁴ Es ist hier $\prod_{\alpha=0}^{z-1} \dots + 1$ zu verstehen, ganz abgesehen davon, was nach dem Produktzeichen steht. Unter $f(x_0, \dots, x_\alpha)$ verstehe man für $\alpha = 0$ einfach $f(x_0)$.

$$(2) \quad f(x_0, \dots, x_\nu) = \sum_{\alpha=0}^{\nu} \frac{f(x_\alpha)}{\prod_{\beta=0}^{\alpha-1} (x_\alpha - x_\beta) \cdot \prod_{\gamma=\alpha+1}^{\nu} (x_\alpha - x_\gamma)};$$

andererseits erhält man durch sukzessives Einsetzen⁵ der Gleichungen (1)

$$(3) \quad f(x_0, \dots, x_\nu) = \frac{f(x_\nu)}{\prod_{\alpha=0}^{\nu-1} (x_\nu - x_\alpha)} - \sum_{\alpha=0}^{\nu-1} \frac{f(x_0, \dots, x_\alpha)}{\prod_{\beta=\alpha}^{\nu-1} (x_\nu - x_\beta)}.$$

Aus (2) ersieht man, dass die Steigung ν ter Ordnung eine symmetrische Funktion ihrer sämtlichen $\nu + 1$ Argumente ist. Mit den Bezeichnungen $\nu - 1 = \lambda$, $x_\nu = t$ und $\prod_{\alpha=0}^{\lambda} (t - x_\alpha) = P_\lambda(t)$

schreiben (2) und (3) sich gleichzeitig

$$(4) \quad f(x_0, x_1, \dots, x_\lambda, t) = \frac{f(t) - g_\lambda(t)}{P_\lambda(t)},$$

wobei also

$$(5) \quad g_\lambda(t) = \sum_{\alpha=0}^{\lambda} \frac{f(x_\alpha)}{P'_\lambda(x_\alpha)} \frac{P_\lambda(t)}{t - x_\alpha} = \sum_{\alpha=0}^{\lambda} f(x_0, \dots, x_\alpha) P_{\alpha-1}(t).$$

Die Funktion $g_\lambda(t)$ ist nach (5) ein Polynom höchstens vom Grade λ , und es ist, wie man leicht einsieht,

$$(6) \quad g_\lambda(x_\alpha) = f(x_\alpha) \text{ für } \alpha = 0, 1, \dots, \lambda.$$

Daher pflegt man das Polynom $g_\lambda(t)$ ein Interpolationspolynom und die Zahlen $x_0, x_1, \dots, x_\lambda$ die Koinzidenzstellen zu nennen.

§ 2. Die Steigung mit wiederholtem Argument⁶ wird durch

$$(7) \quad f(x_0, x_1, \dots, x_{\lambda-1}, x_\lambda, x_\lambda) = \lim_{t \rightarrow x_\lambda} f(x_0, x_1, \dots, x_{\lambda-1}, x_\lambda, t)$$

definiert; mithin gilt nach (1)

$$(8) \quad f(x_0, \dots, x_{\lambda-1}, x_\lambda, x_\lambda) = \frac{\partial}{\partial x_\lambda} f(x_0, \dots, x_\lambda).$$

⁵ Nörlund, 10; Steffensen, 22.

⁶ Steffensen, 21 oder Whittaker, 27 & seq. Zum Vrgl. auch G. Kowalewski, 17—19.

Ferner folgt wegen (6) aus (4)

$$(9) \quad f(x_0, \dots, x_{\lambda-1}, x_\lambda, x_\lambda) = \lim_{t \rightarrow x_\lambda} \frac{f(t) - g_\lambda(t)}{P_\lambda(t)} = \frac{f'(x_\lambda) - g'_\lambda(x_\lambda)}{P_{\lambda-1}(x_\lambda)},$$

also ist die Steigung mit wiederholtem Argument dann und nur dann vorhanden, wenn die Funktion $f(x)$ an betreffender Stelle differenzierbar ist. Dann kann man schon weiter bezeichnen

$$(10) \quad f(x_0, \dots, x_{\lambda-1}, x_\lambda, x_\lambda, x_\lambda) = \lim_{t \rightarrow x_\lambda} \frac{f(t) - g_{\lambda+1}(t)}{(t - x_\lambda) P_\lambda(t)},$$

worin

$$(11) \quad g_{\lambda+1}(t) = g_\lambda(t) + f(x_0, \dots, x_{\lambda-1}, x_\lambda, x_\lambda) P_\lambda(t)$$

bedeutet; nach (6) und (9) ist daher

$$g_{\lambda+1}(x_a) = f(x_a) \text{ für } a = 0, 1, \dots, \lambda \text{ und } g'_{\lambda+1}(x_\lambda) = f'(x_\lambda),$$

also existiert der Limes (10) nur, wenn $f(x)$ zweimal differenzierbar ist, und man hat⁷

$$(12) \quad f(x_0, \dots, x_{\lambda-1}, x_\lambda, x_\lambda, x_\lambda) = \frac{f''(x_\lambda) - g''_{\lambda+1}(x_\lambda)}{2! P_{\lambda-1}(x_\lambda)}.$$

So schrittweise fortfahrend findet man allgemein für $x_\lambda = x_{\lambda+1} = \dots = x_{\lambda+\mu}$

$$(13) \quad f(x_0, \dots, x_{\lambda+\mu}) = \frac{f^{(\mu)}(x_\lambda) - g_{\lambda+\mu-1}^{(\mu)}(x_\lambda)}{\mu! P_{\lambda-1}(x_\lambda)},$$

wobei

$$g_{\lambda+\mu-1}(t) = g_\lambda(t) + \sum_{\alpha=1}^{\mu-1} f(x_0, \dots, x_{\lambda+\alpha}) \cdot (t - x_\lambda)^{\alpha-1} \cdot P_\lambda(t),$$

und folglich

$$g_{\lambda+\mu-1}(x_a) = f(x_a) \text{ für } a = 0, 1, \dots, \lambda$$

und

$$g_{\lambda+\mu-1}^{(\beta)}(x_\lambda) = f^{(\beta)}(x_\lambda) \text{ für } \beta = 1, 2, \dots, \mu - 1.$$

⁷ Dabei stützt man sich auf einen bekannten Mittelwertsatz der Differentialrechnung. (Dieser Mittelwertsatz findet sich in allen Lehrbüchern der Analysis, z. B. bei K. Knopp, H. v. Mangoldt's Einführung in die höhere Mathematik, II. Bd., 6. Aufl., Leipzig 1932: pag. 78, Erweiterter Mittelwertsatz.)

Damit aber (13) überhaupt einen Sinn habe, setzt man natürlich die μ malige Differenzierbarkeit der Funktion $f(x)$ voraus.

Ganz ebenso lässt sich eine solche Steigung definieren, in der mehr als ein Argument wiederholt auftritt. Dass die Steigungen mit wiederholten Argumenten durch dies Verfahren eindeutig bestimmt werden — also unabhängig davon, in welcher Reihenfolge die Argumente dabei hinzukommen —, das erkennt man sofort, indem man sich ihre Ausdrücke als lineare Aggregate der einzelnen Werte der Funktion und ihrer Ableitungen vorstellt.

§ 3. Es ist noch übriggeblieben, den Zusammenhang zu betrachten, der zwischen der Steigung von $f(x)$ und dessen Ableitung derselben Ordnung besteht. Diese Beziehung drückt sich durch den Cauchyschen Satz⁸ aus, der in allgemeiner Form folgendermassen lautet:

es sei a die kleinste und b die grösste unter den Zahlen x_0, x_1, \dots, x_ν ($\nu > 0$), von denen beliebig viele einander gleich sein können; $f(x)$ sei im Intervall $a \leq x \leq b$ ν mal differenzierbar; dann ist

$$(14) \quad f(x_0, \dots, x_\nu) = \frac{1}{\nu!} f^{(\nu)}(u),$$

wobei $a < u < b$ (oder $a = u = b$, falls $x_0 = x_1 = \dots = x_\nu$).

Beweis des Satzes. — Der Fall $x_0 = x_1 = \dots = x_\nu$ ist schon durch (13) erledigt, wenn man dort $\lambda = 0$, $\mu = \nu$ setzt. In jedem sonstigen Falle kann man sich die Argumente x_α auf folgende Weise numeriert denken (oder umnumerieren): $x_0, x_1, x_2, \dots, x_\lambda$ sind untereinander verschieden; jedes von den übrigen $x_{\lambda+1}, x_{\lambda+2}, \dots, x_\nu$ (wenn nicht schon $\lambda = \nu$) ist gleich irgendeinem x_α mit $\alpha \leq \lambda$, und zwar seien noch der Reihe nach μ_0 Zahlen darunter, die gleich x_0 sind, μ_1 Zahlen gleich x_1 usw., schliesslich μ_λ Zahlen gleich x_λ .

Alsdann betrachte man die Funktion

$$H(x) = f(x) - \sum_{\alpha=0}^{\nu} f(x_0, \dots, x_\alpha) \cdot \prod_{\beta=0}^{\alpha-1} (x - x_\beta) \text{ im Intervall } a \leq x \leq b.$$

⁸ Cauchy, 418, 419.

Sie verschwindet an $\lambda + 1$ Stellen x_0, \dots, x_λ . Also verschwindet ihre Ableitung $H'(x)$ wenigstens an λ Zwischenstellen, ausserdem aber auf Grund der Überlegungen des vorigen Paragraphen noch an jeder Stelle x_α , deren $\mu_\alpha \geq 1$ ist (d. h. die mindestens einmal wiederholt unter den Argumenten von $f(x_0, \dots, x_\nu)$ auftritt). $H''(x)$ verschwindet daher wenigstens einmal zwischen je zwei aufeinanderfolgenden Nullstellen von $H'(x)$ und noch an jedem x_α , dessen $\mu_\alpha \geq 2$ ist. So fortfahrend findet man, weil

$$\lambda + \sum_{\alpha=0}^{\lambda} \mu_\alpha = \nu,$$

dass $H^{(\nu)}(x)$ im Intervall $a < x < b$ mindestens eine Nullstelle hat; diese sei u . Mithin gilt

$$f^{(\nu)}(u) - f(x_0, \dots, x_\nu) \cdot \nu! = 0,$$

woraus die Behauptung (14) folgt.

Erstes Kapitel.

Eine Kette von Interpolationsanordnungen und die entsprechende Quadraturreihe.

§ 4. Vorbereitendes.

Es sei $f(x)$ eine beliebige im Intervall $0 \leq x \leq l$ eindeutige Funktion⁹. Die Zahlen x_0, x_1, \dots, x_ν seien in diesem Intervall äquidistant gewählt und nach der steigenden Grösse numeriert:

$$(15) \quad x_\alpha = a h \quad (\alpha = 0, 1, \dots, \nu), \quad h = \frac{l}{\nu}.$$

⁹ Die Annahme, dass das Intervall mit Null anfängt, bedeutet keine Einschränkung der Allgemeinheit, denn im folgenden handelt es sich um Grössen, die nur von Differenzen des Arguments abhängen und bei etwaiger Parallelverschiebung der Achsen in x -Richtung unverändert bleiben (Steigungen, Integrale, Ableitungen).

Mitte des Integrationsintervalls ist und folglich das Integral verschwindet:

$$\begin{aligned}
 & \int_{\gamma h}^{(\gamma+1)h} \left\{ \prod_{\beta=0}^{2\mu} [x - (\gamma - \mu + \beta)h] + \prod_{\beta=0}^{2\mu} [x - (\gamma + 1 - \mu + \beta)h] \right\} dx = \\
 & = h^{2\mu+2} \int_0^1 \left[(t + \mu) \prod_{\beta=1}^{2\mu} (t + \mu - \beta) + (t - \mu - 1) \prod_{\beta=0}^{2\mu-1} (t + \mu - \beta - 1) \right] dt = \\
 & = h^{2\mu+2} \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} 2u \cdot \prod_{\beta=1}^{\mu} [u^2 - (\beta - \frac{1}{2})^2] du = 0.
 \end{aligned}$$

§ 5. Erzeugende Funktionenfolge für die Interpolationenkette und die Quadraturreihe.

Die Folge der abteilungsweise-polynomialen Funktionen $p_0(x), p_1(x), \dots, p_\nu(x)$ sei definiert durch die Gleichungen

$$(19) \quad p_{2\mu}(x) = \begin{cases} f_{2\mu}(0) Q_{2\mu}(0, x) & \text{für } x < \mu h \\ \frac{f_{2\mu}(a - \mu) + f_{2\mu}(a + 1 - \mu)}{2} Q_{2\mu}(a + 1 - \mu, x) & \text{in } ah \leq x < (a + 1)h \\ & \text{für } a = \mu, \mu + 1, \dots, \nu - \mu - 1 \\ f_{2\mu}(\nu - 2\mu) Q_{2\mu}(\nu - 2\mu + 1, x) & \text{für } x \geq (\nu - \mu)h \end{cases}$$

$$(20) \quad p_{2\mu+1}(x) = \begin{cases} f_{2\mu+1}(0) Q_{2\mu+1}(0, x) & \text{für } x < \mu h \\ \frac{f_{2\mu+1}(a - \mu) Q_{2\mu+1}(a - \mu, x) + f_{2\mu+1}(a + 1 - \mu, x)}{2} & \text{in } ah \leq x < (a + 1)h \\ & \text{für } a = \mu, \mu + 1, \dots, \nu - \mu - 1 \\ f_{2\mu+1}(\nu - 2\mu - 1) Q_{2\mu+1}(\nu - 2\mu, x) & \text{für } x \geq (\nu - \mu)h. \end{cases}$$

Wie man sofort erkennt, ist jede Funktion $p_\lambda(x)$ stückweise aus Polynomen zusammengesetzt, die alle höchstens den Grad λ haben. Betrachtet man ferner die Summe dieser Funktionen

$$s_\lambda(x) = \sum_{\alpha=0}^{\lambda} p_\alpha(x),$$

so zeigt sich, dass sie in jedem Teilintervall entweder ein gewisses Interpolationspolynom vom Grade λ oder das arithmetische Mittel zweier solcher Polynome ist. Nach den Überlegungen des § 1 und dem obigen Satz 1 folgt nämlich für jeden geradzahigen Wert von λ :

$s_\lambda(x)$ ist in $0 \leqq x < \frac{\lambda}{2} h$ resp. $l - \frac{\lambda}{2} h \leqq x \leqq l$ dasjenige Polynom, welches die Koinzidenzstellen $0, h, \dots, \lambda h$ resp. $(\nu - \lambda)h, (\nu + 1 - \lambda)h, \dots, l$ hat; in jedem zwischenliegenden Teilintervall $ah \leqq x < (a + 1)h$ aber ist $s_\lambda(x)$ das arithmetische Mittel der Interpolationspolynome mit den bezüglichen Koinzidenzstellen $(a - \frac{\lambda}{2})h, (a + 1 - \frac{\lambda}{2})h, \dots, (a + \frac{\lambda}{2})h$ und $(a + 1 - \frac{\lambda}{2})h, (a + 2 - \frac{\lambda}{2})h, \dots, (a + 1 + \frac{\lambda}{2})h$.

Z. B. ist $s_0(x)$ in jedem Teilintervall $ah \leqq x < (a + 1)h$ (wobei $a = 0, 1, \dots, \nu - 1$) einfach das arithmetische Mittel der Funktionswerte $f(x)$ an den Endpunkten,

$$\text{d. h.} \quad s_0(x) = p_0(x) = \frac{f(ah) + f(a+h)}{2}.$$

Für einen ungeradzahigen Wert von λ findet man:

$s_\lambda(x)$ ist in $0 \leqq x < \frac{\lambda-1}{2} h$ resp. $l - \frac{\lambda-1}{2} h \leqq x \leqq l$ ein Polynom, dessen Koinzidenzstellen $0, h, \dots, \lambda h$ resp. $l - \lambda h, l + h - \lambda h, \dots, l$ sind; in jedem $ah \leqq x < (a + 1)h$ (wobei $a = \frac{\lambda-1}{2}, \frac{\lambda+1}{2}, \dots, \nu - 1 - \frac{\lambda-1}{2}$) ist $s_\lambda(x)$ ebenfalls ein entsprechendes Interpolationspolynom und seine Koinzidenzstellen lauten $(a - \frac{\lambda-1}{2})h, (a + 1 - \frac{\lambda-1}{2})h, \dots, (a + \frac{\lambda+1}{2})h$.

Allgemein gesagt — bei der Gestaltung von $s_\lambda(x)$ (also für das Interpolationspolynom vom Grade λ oder für zwei solche, aus denen dann durch Mittelbildung $s_\lambda(x)$ entsteht) werden, womöglich, in bezug auf den Mittelpunkt des betreffenden Teilintervalls symmetrisch liegende Koinzidenzstellen (15) benutzt. Diese Stellen treten aber aus dem Intervall $0 \leqq x \leqq l$ nicht heraus. Also für $\lambda \geqq 2$ bleiben am Anfang und Ende dieses Intervalls

gewisse Teilintervallgruppen übrig, in denen man als $s_\lambda(x)$ einfach solche Interpolationspolynome erhält, deren Koinzidenzstellen vom Anfang resp. Ende des Intervalls beginnend nach innen fortschreiten.

Bezeichnet man mit K_x das Integral von $p_x(x)$

$$(21) \quad K_x = \int_0^l p_x(x) dx,$$

so schreibt sich (mit einem gewissen λ) das Integral

$$(22) \quad \int_0^l f(x) dx = \sum_{x=0}^{\lambda} K_x + R_\lambda.$$

Das ist formal ein $(\lambda + 1)$ -gliedriger Reihenabschnitt mit einem Restglied R_λ . Die Untersuchung dieser Reihe, d. h. aller Abschnitte der Gestalt (22), ihrer Glieder und Restglieder, ist eben die Aufgabe dieses Kapitels.

Die zwei ersten Glieder K_0 und K_1 lassen sich nach den bisherigen Überlegungen ohne weiteres hinschreiben:

$$(23) \quad K_0 = \sum_{a=0}^{\nu-1} \frac{f(ah) + f(ah+h)}{2} \int_{ah}^{(a+1)h} dx = h \left[\frac{f(0) + f(l)}{2} + \sum_{a=1}^{\nu-1} f(ah) \right].$$

$$(24) \quad K_1 = 0.$$

Das letztere folgt nämlich aus (20) und Satz 2.

§ 6. Allgemeine Glieder der Quadraturreihe.

Es ist zweckmässig, zunächst folgende Abkürzungen einzuführen:

$$(25) \quad \left\{ \begin{array}{l} \sigma_x(x) = \int_0^x \prod_{\alpha=0}^{x-1} (t - \alpha) \cdot dt, \quad \sigma_{2\mu}(\mu) = \sigma_{2\mu}, \quad \sigma_{2\mu+1}(\mu) = \sigma_{2\mu+1} \\ \tau_x = \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \prod_{\alpha=0}^{x-1} [x^2 - (a + \frac{1}{2})^2] \cdot dx = \int_{x-1}^x \prod_{\alpha=0}^{2x-1} (x - \alpha) \cdot dx. \end{array} \right.$$

Von den Gliedern K_x mit ungeraden Indizes behauptet nun der folgende

Satz 3:

$$(26) \quad K_{2\mu+1} = \sigma_{2\mu+1} h^{2\mu+2} [f_{2\mu+1}(0) - f_{2\mu+1}(\nu - 2\mu - 1)].$$

Beweis des Satzes. Man zerlegt das Integral (21) in drei Teile

$$(27) \quad K_{2\mu+1} = \int_0^{\mu h} p_{2\mu+1}(x) dx + \int_{\mu h}^{l-\mu h} p_{2\mu+1}(x) dx + \int_{l-\mu h}^l p_{2\mu+1}(x) dx;$$

der zweite Teil

$$\int_h^{l-\mu h} p_{2\mu+1}(x) dx = \sum_{\alpha=\mu}^{\nu-\mu-1} f_{2\mu+1}(\alpha - \mu) \int_{\alpha h}^{(\alpha+1)h} \frac{Q_{2\mu+1}(\alpha - \mu, x) + Q_{2\mu+1}(\alpha + 1 - \mu, x)}{2} dx$$

verschwindet nach dem Satze 2. Im ersten Integral rechts in (27) setze man $x = ht$ und im dritten Integral $x = l - ht$. Dann ergibt sich nach einfacher Umformung unter Benutzung der oben erklärten Bezeichnungen die Behauptung (26).

Folgerungen aus dem Satz 3.

1. Wenn $f^{(2\mu+1)}(x)$ eine Konstante ist — also $f(x)$ ein Polynom höchstens vom Grade $2\mu + 1$ —, dann folgt aus (26) unter Anwendung des Cauchyschen Satzes (14): $K_{2\mu+1} = 0$.

2. Wenn $\nu = 2\mu + 1$, dann ist für beliebiges $f(x)$ stets $K_\nu = 0$.

Satz 4. Für $\mu > 0$ ist

$$(28) \quad K_{2\mu} = \sigma_{2\mu} h^{2\mu+1} [f_{2\mu}(0) + f_{2\mu}(\nu - 2\mu)] + \frac{\tau_\mu}{4\mu} h^{2\mu} [-f_{2\mu-1}(0) - f_{2\mu-1}(1) + f_{2\mu-1}(\nu - 2\mu) + f_{2\mu-1}(\nu - 2\mu + 1)].$$

Beweis. Für die Integrale $\int_0^{\mu h} p_{2\mu}(x) dx$ und $\int_{l-\mu h}^l p_{2\mu}(x) dx$ ergeben sich sofort, ähnlich wie beim Beweis des vorangehenden

Satzes, die Ausdrücke $\sigma_{2\mu} h^{2\mu+1} f'_{2\mu}(0)$ und $\sigma_{2\mu} h^{2\mu+1} f_{2\mu}(\nu - 2\mu)$.
Der übrigbleibende Bestandteil

$$\begin{aligned} & \int_{\mu h}^{l-\mu h} p_{2\mu}(x) dx = \\ &= \sum_{\alpha=\mu}^{\nu-\mu-1} \frac{f_{2\mu}(\alpha - \mu) + f_{2\mu}(\alpha - \mu + 1)}{2} \int_{\alpha h}^{(\alpha+1)h} Q_{2\mu}(\alpha - \mu + 1, x) dx \end{aligned}$$

hat in allen Summanden den gemeinsamen Faktor

$$\int_{\alpha h}^{(\alpha+1)h} Q_{2\mu}(\alpha - \mu + 1, x) dx = h^{2\mu+1} \int_{\mu-1}^{\mu} \frac{\Pi^{\mu-1}}{\beta=0} (t - \beta) \cdot dt = \tau_{\mu} h^{2\mu+1}$$

und ist daher

$$(29) \quad \int_{\mu h}^{l-\mu h} p_{2\mu}(x) dx = \frac{\tau_{\mu}}{2} h^{2\mu+1} \sum_{\alpha=0}^{\nu-2\mu-1} [f_{2\mu}(\alpha) + f_{2\mu}(\alpha + 1)].$$

Nach der Definition (1) gilt aber für $\mu > 0$

$$f_{2\mu}(\gamma) = \frac{f_{2\mu-1}(\gamma) - f_{2\mu-1}(\gamma + 1)}{-2\mu h}$$

und damit

$$\begin{aligned} & \sum_{\alpha=0}^{\nu-2\mu-1} [f_{2\mu}(\alpha) + f_{2\mu}(\alpha + 1)] = \\ & \frac{1}{2\mu h} \left\{ \sum_{\alpha=0}^{\nu-2\mu-1} [-f_{2\mu-1}(\alpha) + f_{2\mu-1}(\alpha + 1)] + \sum_{\alpha=1}^{\nu-2\mu} [-f_{2\mu-1}(\alpha) + f_{2\mu-1}(\alpha + 1)] \right\} \\ &= \frac{1}{2\mu h} [-f_{2\mu-1}(0) + f_{2\mu-1}(\nu - 2\mu) - f_{2\mu-1}(1) + f_{2\mu-1}(\nu - 2\mu + 1)]. \end{aligned}$$

Setzt man dies in (29) ein, so erhält man eben den zweiten Term rechts in (28).

Satz 5. Für $\mu > 0$ ist

$$(30) \quad K_{2\mu} = \left(\sigma_{2\mu} - \frac{\tau_{2\mu}}{2}\right) h^{2\mu+1} [f_{2\mu}(0) + f_{2\mu}(\nu - 2\mu)] + \\ + \frac{\tau_{2\mu}}{2\mu} h^{2\mu} [-f_{2\mu-1}(0) + f_{2\mu-1}(\nu - 2\mu + 1)].$$

Beweis. Addiert man zur rechten Seite von (28)

$$\frac{\tau_{2\mu}}{2} h^{2\mu+1} \left[-f_{2\mu}(0) + \frac{f_{2\mu-1}(1) - f_{2\mu-1}(0)}{2\mu h} - \right. \\ \left. - f_{2\mu}(\nu - 2\mu) + \frac{f_{2\mu-1}(\nu - 2\mu + 1) - f_{2\mu-1}(\nu - 2\mu)}{2\mu h} \right]$$

— einen Ausdruck, der nach (1) verschwindet —, dann geht (28) sofort in (30) über.

§ 7. Vorzeichen der Koeffizienten.

In (26) und (30) treten als Koeffizienten die Grössen $\sigma_{2\mu+1}$, $\sigma_{2\mu}$, $\tau_{2\mu}$ auf. Die folgenden einfachen Sätze dienen zur Bestimmung der Vorzeichen dieser Grössen.

Satz 6.

$$\sigma_{2\mu}(x) < 0 \quad \text{und} \quad \sigma_{2\mu+1}(x) > 0 \quad \text{in} \quad 0 < x \leq \mu.$$

Beweis. In der Definitionsgleichung von $\sigma_x(x)$ steht als Integrand das Produkt $\prod_{\alpha=0}^{x-1} (t - \alpha) = \psi_x(t)$; dies ist ein Polynom vom Grade x mit lauter einfachen Nullstellen $0, 1, \dots, x - 1$, wechselt also sein Zeichen an jeder dieser Stellen. Es besteht daher die leicht zu bestätigende Relation

$$(31) \quad (-1)^{x-\alpha} \psi_x(t) > 0 \quad \text{in} \quad \alpha - 1 < t < \alpha \quad \text{für} \quad \alpha = 0, 1, \dots, x.$$

Ausserdem lässt sich zeigen, dass

$$(32) \quad |\psi_x(t)| < |\psi_x(t-1)|$$

mit jedem nicht-ganzzahligen t aus $0 < t < \frac{x}{2}$.

Denn es ist

$$\psi_x(t) = t \prod_{\alpha=1}^{x-1} (t-a) \quad \text{und} \quad \psi_x(t-1) = (t-x) \prod_{\alpha=1}^{x-1} (t-a),$$

also, da für jedes nicht-ganzzahlige t beide von Null verschieden sind und $|t-x| = x-t > t$, folgt tatsächlich (32).

Dass die Funktion $\sigma_x(x)$ in $0 < x \leq \frac{x}{2}$ ein beständiges, nämlich das oben erwähnte Vorzeichen hat, erkennt man nun folgendermassen. Zerlegt man dies Integral in zwei Teile

$$(33) \quad \sigma_x(x) = \int_0^{2\gamma} \psi_x(t) dt + \int_{2\gamma}^x \psi_x(t) dt,$$

wobei γ so beschaffen ist, dass $0 \leq x - 2\gamma < 2$, so sieht man aus

$$\int_0^{2\gamma} \psi_x(t) dt = \sum_{\alpha=1}^{\gamma} \int_{2\alpha-2}^{2\alpha} \psi_x(t) dt = \sum_{\alpha=1}^{\gamma} \int_{2\alpha-1}^{2\alpha} [\psi_x(t) + \psi_x(t-1)] dt$$

nach (32) und (31), dass der erstere Term rechts in (33) das Vorzeichen von $(-1)^{x-1}$ hat (wenn nur $\gamma \neq 0$). Der letztere Term in (33) verschwindet, falls $x = 2\gamma$; sonst aber hat er ebenfalls das Zeichen von $(-1)^{x-1}$: denn für $x \leq 2\gamma + 1$ beachte man bloss auf Grund der Relation (31) das Vorzeichen seines Integranden, für $x > 2\gamma + 1$ aber denke man sich diesen Term so zerlegt:

$$\int_{2\gamma}^x \psi_x(t) dt = \int_{2\gamma+1}^x [\psi_x(t) + \psi_x(t-1)] dt + \int_{x-1}^{2\gamma+1} \psi_x(t) dt$$

und dann darauf die Relationen (32) und (31) angewendet.

Satz 7.

$$(-1)^x \tau_x > 0.$$

Beweis. Der Integrand $\prod_{\alpha=0}^{x-1} [x^2 - (a + \frac{1}{2})^2]$ bewahrt sein Zeichen in $-\frac{1}{2} < x < \frac{1}{2}$ und für $x = 0$ ist er

$$(-1)^x \left[\prod_{\alpha=0}^{x-1} (a + \frac{1}{2}) \right]^2.$$

§ 8. Weitere Umformung der allgemeinen Glieder.

Für das folgende setze ich voraus, dass $f(x)$ im Intervall $0 \leq x \leq l$ stetig ist. Zur Abkürzung bezeichne ich mit $f_\lambda[x]$ diejenige Steigung von $f(x)$, deren Argumente $x, x+h, \dots, h+\lambda h$ sind,

$$(34) \quad f_\lambda[x] = f(x, x+h, \dots, x+\lambda h) = \\ = \frac{1}{h^\lambda} \sum_{\alpha=0}^{\lambda} \frac{(-1)^{\lambda-\alpha} f(x+\alpha h)}{\alpha! (\lambda-\alpha)!} \quad (0 \leq x \leq l - \lambda h).$$

Unter der gemachten Voraussetzung und Verwendung der eben eingeführten Bezeichnung können die Ausdrücke der Glieder K_x auf eine noch einfachere Gestalt gebracht werden. Dabei wird von dem elementaren Satz, dass eine beliebige stetige Funktion $F(x)$ jeden Wert zwischen $F(a)$ und $F(b)$ mindestens einmal im Intervall $a < x < b$ annimmt, in leicht modifizierter Form Gebrauch gemacht. Diese Modifikation lautet:

es sei $F(x)$ stetig in $a \leq x \leq j$, und mögen die Zahlen $, c, b, \dots, i$ irgendwo in diesem Intervall liegen; A, B, \dots, J seien beliebige nichtnegative Zahlen; dann gibt es ein u derart, dass

$$(35) \quad AF(a) + BF(b) + \dots + JF(j) = (A + B + \dots + J) F(u) \\ \text{und } a \leq u \leq j.$$

Von der Richtigkeit dieser Variante überzeugt man sich auf Grund des ursprünglichen Satzes folgendermassen. Wenn alle Koeffizienten A, B, \dots, J verschwinden, ist die Gleichung (35) identisch erfüllt — beide Seiten sind Null für beliebiges u ; abgesehen von diesem trivialen Fall ist es klar, dass der Quotient $\frac{AF(a) + BF(b) + \dots + JF(j)}{A + B + \dots + J}$ nicht kleiner als die kleinste und

nicht grösser als die grösste von den Zahlen $F(a), F(b), \dots, F(j)$ sein kann, also hat er einen Wert, den $F(x)$ mindestens einmal im Intervall $a \leq x \leq j$ annimmt.

Satz 8.

$$(36) \quad K_{2\mu+1} = -(\nu - 2\mu - 1)(2\mu + 2) \sigma_{2\mu+1} h^{2\mu+3} f_{2\mu+2}[u], \\ \text{wobei } 0 \leq u \leq (\nu - 2\mu - 2)h.$$

Beweis. Man gehe von der Darstellung (26) aus und setze

$$f_{2\mu+1}(0) - f_{2\mu+1}(\nu - 2\mu - 1) = \sum_{\alpha=1}^{\nu-2\mu-1} [f_{2\mu+1}(\alpha - 1) - f_{2\mu+1}(\alpha)].$$

Nach (1) hat man bekanntlich

$$f_{2\mu+1}(\alpha - 1) - f_{2\mu+1}(\alpha) = -(2\mu + 2)h f_{2\mu+2}(\alpha - 1)$$

und daher

$$(37) \quad f_{2\mu+1}(0) - f_{2\mu+1}(\nu - 2\mu - 1) = -(2\mu + 2)h \sum_{\alpha=0}^{\nu-2\mu-2} f_{2\mu+2}(\alpha).$$

Betrachtet man ferner die Funktion $f_{2\mu+2}[x]$ im Intervall $0 \leq x \leq (\nu - 2\mu - 2)h$ hinsichtlich ihrer Stetigkeit und beachtet ihre Werte an den Stellen $0, h, \dots, (\nu - 2\mu - 2)h$, so erhält man folgendes: $f_{2\mu+2}[x]$ ist eine Linearkombination stetiger Funktionen $f(x), f(x+h), \dots, f(x+2\mu h+2h)$, also stetig;

$$\sum_{\alpha=0}^{\nu-2\mu-2} f_{2\mu+2}(\alpha)$$

ist eine Summe der Werte von $f_{2\mu+2}[x]$ an $\nu - 2\mu - 1$ Stellen im Stetigkeitsintervall. Auf diese Summe kann man hiernach den durch (35) ausgedrückten Satz anwenden und erhält aus (26) und (37) die Behauptung.

Satz 9.

$$(38) \quad K_{2\mu} = 2\sigma_{2\mu} h^{2\mu+1} f_{2\mu}[v] + (\nu - 2\mu)\tau_{\mu} h^{2\mu+1} f_{2\mu}[w],$$

wobei $0 \leq v \leq (\nu - 2\mu)h$ und $0 \leq w \leq (\nu - 2\mu)h$.

Beweis. Unter Anwendung von (35) schreibt sich in (28)

$$f_{2\mu}(0) + f_{2\mu}(\nu - 2\mu) = 2f_{2\mu}[v], \quad 0 \leq v \leq (\nu - 2\mu)h$$

und der zweite Term nach (29)

$$\frac{\tau_{\mu}}{2} h^{2\mu+1} (\nu - 2\mu) \cdot 2 \cdot f_{2\mu}[w], \quad 0 \leq w \leq (\nu - 2\mu)h;$$

dadurch geht aber (28) in (38) über.

Aus den obigen Sätzen kann man auf Grund des Cauchy-
schen Satzes noch folgendes schliessen.

1. Wenn $f(x)$ in $0 \leq x \leq l$ 2μ mal differenzierbar ist, dann
gibt es in diesem Intervall zwei Zahlen s und t derart, dass

$$(39) \quad K_{2\mu} = \frac{h^{2\mu+1}}{(2\mu)!} [2\sigma_{2\mu} f^{(2\mu)}(s) + (\nu - 2\mu) \tau_{\mu} f^{(2\mu)}(t)].$$

Mit Rücksicht auf die Sätze 6 und 7 gilt insbesondere für
 $\mu = 2\lambda + 1$

$$(40) \quad K_{4\lambda+2} = \frac{2\sigma_{4\lambda+2} + (\nu - 4\lambda - 2) \tau_{2\lambda+1}}{(4\lambda + 2)!} h^{4\lambda+3} f^{(4\lambda+2)}(u),$$

wobei $0 < u < l$.

2. Unter Voraussetzung, dass $f^{(2\mu+2)}(x)$ überall in $0 \leq x \leq l$
existiert, erhält man ebenso

$$(41) \quad K_{2\mu+1} = - \frac{\nu - 2\mu - 1}{(2\mu + 1)!} \sigma_{2\mu+1} h^{(2\mu+3)} f^{(2\mu+2)}(v) \quad \text{mit } 0 < v < l.$$

§ 9. Restglieder.

Zur Behandlung der Restglieder benötige ich einige neue
Abkürzungen, die durch folgende Gleichungen erklärt werden.

$$(42) \quad \begin{cases} f_{\lambda}(a|t) = f(x_{\alpha}, x_{\alpha+1}, \dots, x_{\alpha+\lambda}, t) = f(ah, ah+h, \dots, ah+\lambda h, t) \\ f_{\lambda}(a|t, t) = f(x_{\alpha}, x_{\alpha+1}, \dots, x_{\alpha+\lambda}, t, t) = \frac{d}{dt} f_{\lambda}(a|t) \\ f_{\lambda}[t|u] = f(t, t+h, t+2h, \dots, t+\lambda h, u) \end{cases}$$

$$(43) \quad \varrho_{2\mu+1} = \int_0^{\mu} \sigma_{2\mu+1}(x) dx$$

Es ist auch noch zweckmässig, die vorherige Definitionsgleichung (1) jetzt in eine andere Form umzuschreiben:

$$(44) \quad \begin{aligned} & f(a_0, a_1, \dots, a_{\lambda}, t) = \\ & = f(a_0, a_1, \dots, a_{\lambda}, a_{\lambda+1}) + (t - a_{\lambda+1}) f(a_0, a_1, \dots, a_{\lambda}, a_{\lambda+1}, t), \end{aligned}$$

worin zur Vermeidung der Verwechslung mit den Zahlen (15)
die Argumente mit $a_0, \dots, a_{\lambda+1}, t$ bezeichnet sind.

Mit Hinzuziehung der Überlegungen am Anfang dieses Kapitels, nach der Gleichung (4) der Einleitung und auf Grund der Definition (22) von R_λ kann man zunächst folgendes feststellen:

$$(45) \quad R_{2\mu} = \int_0^{\mu h} f_{2\mu}(0|x) Q_{2\mu+1}(0, x) dx + \\ + \sum_{a=\mu}^{\nu-\mu-1} \int_{ah}^{(a+1)h} f_{2\mu+1}(a-\mu|x) Q_{2\mu+2}(a-\mu, x) dx + \\ + \int_{l-\mu h}^l f_{2\mu}(\nu-2\mu|x) Q_{2\mu+1}(\nu-2\mu, x) dx \quad \text{für } 0 \leq \mu \leq \frac{\nu}{2},$$

$$(46) \quad R_{2\mu+1} = \int_0^{\mu h} f_{2\mu+1}(0|x) Q_{2\mu+2}(0, x) dx + \\ + \sum_{a=\mu}^{\nu-\mu-1} \int_{ah}^{(a+1)h} f_{2\mu+1}(a-\mu|x) Q_{2\mu+2}(a-\mu, x) dx + \\ + \int_{l-\mu h}^l f_{2\mu+1}(\nu-2\mu-1|x) Q_{2\mu+2}(\nu-2\mu-1, x) dx \\ \text{für } 0 \leq \mu < \frac{\nu}{2}.$$

Denn die Übergänge zwischen den einzelnen Stufen der zugrunde gelegten Interpolationsanordnungen (jeder solche Übergang kommt dadurch zustande, dass eine neue abteilungsweise-polynomiale Funktion zur Summe aller vorangehenden addiert wird) sind ja sukzessiv mit Hilfe der Gleichung (44) auszuführen, wodurch man allgemein erhält

$$f(x) = s_\lambda(x) + r_\lambda(x)$$

mit

$$r_{2\mu}(x) = \begin{cases} f_{2\mu}(0|x) Q_{2\mu+1}(0, x) & \text{für } x < \mu h \\ p_{2\mu+1}(x) + r_{2\mu+1}(x) & \text{in } \mu h \leq x < l - \mu h \\ f_{2\mu}(\nu-2\mu|x) Q_{2\mu+1}(\nu-2\mu, x) & \text{für } x \geq l - \mu h, \end{cases}$$

$$r_{2\mu+1}(x) = \begin{cases} f_{2\mu+1}(0|x) Q_{2\mu+2}(0, x) & \text{für } x < \mu h \\ f_{2\mu+1}(a-\mu|x) Q_{2\mu+2}(a-\mu, x) & \text{in } ah \leq x < (a+1)h \\ & \text{mit } a = \mu, \mu+1, \dots, \nu-\mu-1 \\ f_{2\mu+1}(\nu-2\mu-1|x) Q_{2\mu+2}(\nu-2\mu-1, x) & \text{für } x \geq l - \mu h. \end{cases}$$

Greift man noch auf die Definition von R_λ zurück, so gelangt man zu (45) und (46).

§ 10. Umformungssätze für Restglieder.

Satz 10.

$f(x)$ sei stetig in $0 \leq x \leq l$, und es sei $2\mu < \nu$; dann gibt es zwei Zahlen v und w derart, dass

$$(47) \quad \sum_{\alpha=\mu}^{\nu-\mu-1} \int_{ah}^{(\alpha+1)h} f_{2\mu+1}(a-\mu|x) Q_{2\mu+2}(a-\mu, x) dx = \\ = (\nu-2\mu) \tau_{\mu+1} h^{2\mu+3} f_{2\mu+1}[v|v+w],$$

wobei $0 \leq v \leq (\nu-2\mu-1)h$ und $\mu h < w < (\mu+1)h$.

Beweis. Da $Q_\lambda(a, x)$ ersichtlich die Eigenschaft hat:

$$Q_\lambda(a, x) = Q_\lambda(a+\beta, x+\beta h),$$

so nimmt die linke Seite von (47) folgende Form an:

$$(48) \quad \int_{\mu h}^{(\mu+1)h} \left[\sum_{\alpha=0}^{\nu-2\mu-1} f_{2\mu+1}(a|x+ah) \right] \cdot Q_{2\mu+2}(0, x) dx.$$

Wegen der Stetigkeit von $f(x)$ in $\mu h \leq x \leq (\nu-\mu)h$ ist die Summe

$$\sum_{\alpha=0}^{\nu-2\mu-1} f_{2\mu+1}(a|x+ah)$$

eine stetige Funktion von x mindestens im offenen Integrationsintervall $\mu h < x < (\mu+1)h$; daselbst hat $Q_{2\mu+2}(0, x)$ ein beständiges Vorzeichen. Man kann auf das Integral (48) den ersten Mittelwertsatz der Integralrechnung anwenden und bringt es dadurch in folgende Gestalt:

$$(49) \quad \left[\sum_{\alpha=0}^{\nu-2\mu-1} f_{2\mu+1}(a|w+ah) \right] \cdot \int_{\mu h}^{(\mu+1)h} Q_{2\mu+2}(0, x) dx \\ \text{mit } \mu h < w < (\mu+1)h.$$

Der letzte Faktor in (49) — das Integral — lässt sich durch einfache Rechnung auf $\tau_{\mu+1} h^{2\mu+3}$ reduzieren. Der erste Faktor ist eine Summe gewisser Werte der Funktion $f_{2\mu+1}[t|t+w]$; diese Funktion ist stetig in $0 \leq t \leq (\nu - 2\mu - 1)h$, denn $\frac{w}{h}$ ist ja eine nicht-ganzzahlige Konstante. Nach (35) gilt also

$$\sum_{\alpha=0}^{\nu-2\mu-1} f_{2\mu+1}(\alpha|w+ah) = (\nu - 2\mu) f_{2\mu+1}[\nu|\nu+w],$$

wobei $0 \leq \nu \leq (\nu - 2\mu - 1)h$. Damit ist der Satz bewiesen.

Satz 11.

Wenn $f''(x)$ in $0 \leq x \leq \mu h$ überall existiert, dann gibt es ein u derart, dass

$$(50) \quad \int_0^{\mu h} f_{2\mu}(0|x) Q_{2\mu+1}(0, x) dx = \\ = \sigma_{2\mu+1} h^{2\mu+2} f_{2\mu}(0|\mu h) - \varrho_{2\mu+1} h^{2\mu+3} f_{2\mu}(0|u, u)$$

und dabei $0 < u < \mu h$; wenn resp. $f''(x)$ in $l - \mu h \leq x \leq l$ existiert, dann

$$(51) \quad \int_{l-\mu h}^l f_{2\mu}(\nu - 2\mu|x) Q_{2\mu+1}(\nu - 2\mu, x) dx = \\ = -\sigma_{2\mu+1} h^{2\mu+2} f_{2\mu}(\nu - 2\mu|l - \mu h) - \varrho_{2\mu+1} h^{2\mu+3} f_{2\mu}(\nu - 2\mu|s, s) \\ \text{mit } l - \mu h < s < l.$$

Beweis. Durch Produktintegration ergibt sich zunächst

$$(52) \quad \int_0^{\mu h} f_{2\mu}(0|x) Q_{2\mu+1}(0, x) dx = \\ = f_{2\mu}(0|\mu h) \int_0^{\mu h} Q_{2\mu+1}(0, x) dx - \int_0^{\mu h} f_{2\mu}(0|x, x) \left[\int_0^x Q_{2\mu+1}(0, t) dt \right] dx.$$

Hierin ist nach Satz 6

$$\int_0^x Q_{2\mu+1}(0, t) dt = h^{2\mu+2} \sigma_{2\mu+1} \left(\frac{x}{h} \right) > 0 \quad \text{für } 0 < x \leq \mu h$$

und gemäss der gemachten Voraussetzung $f_{2\mu}(0|x, x)$ stetig. Deshalb kann man auf das zweite Integral rechts in (52) den bekannten Mittelwertsatz anwenden und bekommt dadurch

$$\begin{aligned} f_{2\mu}(0|\mu h) \int_0^{\mu h} Q_{2\mu+1}(0, x) dx - \int_0^{\mu h} f_{2\mu}(0|x, x) \left[\int_0^x Q_{2\mu+1}(0, t) dt \right] dx = \\ = \sigma_{2\mu+1} h^{2\mu+2} f_{2\mu}(0|\mu h) - \sigma_{2\mu+1} h^{2\mu+3} f_{2\mu}(0|u, u) \quad \text{mit } 0 < u < \mu h. \end{aligned}$$

So ist die erste Behauptung bewiesen. Um (51) zu verifizieren, vertausche man die Integrationsgrenzen und führe dann die Produktintegration aus:

$$\begin{aligned} \int_{l-\mu h}^l fQ dx &= - \int_l^{l-\mu h} fQ dx = \\ &= -f_{2\mu}(v-2\mu|l-\mu h) \int_l^{l-\mu h} Q_{2\mu+1}(v-2\mu, x) dx + \\ &+ \int_l^{l-\mu h} f_{2\mu}(v-2\mu|x, x) \left[\int_l^x Q_{2\mu+1}(v-2\mu, t) dt \right] dx. \end{aligned}$$

Nun ist $\int_l^x Q_{2\mu+1}(v-2\mu, t) dt = h^{2\mu+2} \sigma_{2\mu+1} \left(\frac{l-x}{h} \right) > 0$

für $l-\mu h \leq x < l$, also

$$\begin{aligned} -f_{2\mu}(v-2\mu|l-\mu h) \int_l^{l-\mu h} Q_{2\mu+1}(v-2\mu, x) dx = \\ = -\sigma_{2\mu+1} h^{2\mu+2} f_{2\mu}(v-2\mu|l-\mu h), \end{aligned}$$

und wegen der Existenz von $f''(x)$ noch

$$\begin{aligned} & \int_l^{l-\mu h} f_{2\mu}(v-2\mu|x, x) \left[\int_l^x Q_{2\mu+1}(v-2\mu, t) dt \right] dx = \\ & = f_{2\mu}(v-2\mu|s, s) \int_l^{l-\mu h} \left[\int_l^x Q_{2\mu+1}(v-2\mu, t) dt \right] dx \end{aligned}$$

mit $l-\mu h < s < l$. Da aber hierin

$$\begin{aligned} & \int_l^{l-\mu h} \left[\int_l^x Q_{2\mu+1}(v-2\mu, t) dt \right] dx = h^{2\mu+2} \int_l^{l-\mu h} \sigma_{2\mu+1} \left(\frac{l-x}{h} \right) dx = \\ & = -h^{2\mu+3} \int_0^\mu \sigma_{2\mu+1}(t) dt = -Q_{2\mu+1} h^{2\mu+3}, \end{aligned}$$

so ist (51) bewiesen.

Satz 12.

$f(x)$ sei differenzierbar im ganzen Intervall $0 \leq x \leq l$ und zweimal differenzierbar in $\mu h \leq x \leq l - \mu h$ (dabei $2\mu < \nu$); es ist dann ein solches z vorhanden, dass

$$(53) \quad f_{2\mu}(0|\mu h) - f_{2\mu}(v-2\mu|l-\mu h) = -(\nu-2\mu)h f'_{2\mu}[z|z+\mu h]$$

mit $0 < z < l - 2\mu h$.

Beweis. Der Ausdruck

$$\frac{f_{2\mu}(0|\mu h) - f_{2\mu}(v-2\mu|l-\mu h)}{-(\nu-2\mu)h}$$

ist eine Steigung erster Ordnung der Funktion $f'_{2\mu}[x|x+\mu h]$, die letztere aber besitzt eine Ableitung überall in $0 \leq x \leq (\nu-2\mu)h$. Man kann also auf diese Steigung den Cauchyschen Satz anwenden und erhält dadurch (53).

Anmerkungen.

1. Die Grösse $f'_{2\mu}[x|x+\mu h]$ wurde beim obigen Beweis als die erste Ableitung von $f_{2\mu}[x|x+\mu h]$ aufgefasst. Sie kann aber

in (53) ebensogut einen solchen Ausdruck bedeuten, der sich aus $f''(x)$ nach demselben Gesetz gestaltet wie $f_{2\mu}[x|x+\mu h]$ aus $f(x)$. Dass wirklich beides gleichzeitig zutrifft, ist aus folgendem leicht einzusehen: $f_{2\mu}[x|x+\mu h]$ ist ein gewisses lineares Aggregat der Werte $f(x), f(x+h), \dots, f(x+2\mu h), f'(x+\mu h)$ mit bestimmten konstanten Koeffizienten¹⁰, — seine Ableitung nach x ist ja eben dieselbe Linearkombination der Ableitungen $f'(x), f'(x+h), \dots, f'(x+2\mu h), f''(x+\mu h)$.

2. Unter Anwendung der Gleichung (35) nimmt die Differenz

$$f_{2\mu}(0|\mu h) - f_{2\mu}(\nu - 2\mu|l - \mu h)$$

noch eine andere Gestalt an, wenn man sie zuvor als Summe

$$\sum_{\alpha=0}^{\nu-2\mu-1} [f_{2\mu}(\alpha|ah + \mu h) - f_{2\mu}(\alpha+1|ah + h + \mu h)]$$

darstellt. Es wird nämlich

$$\begin{aligned} (54) \quad & f_{2\mu}(0|\mu h) - f_{2\mu}(\nu - 2\mu|l - \mu h) = \\ & = (\nu - 2\mu) \{ f_{2\mu}[s|s + \mu h] - f_{2\mu}[s+h|s+h + \mu h] \} \\ & \quad \text{mit } 0 < s < (\nu - 2\mu - 1)h. \end{aligned}$$

§ 11. Herleitung der brauchbareren Restgliederausdrücke.

Es handelt sich also im folgenden um die Anwendung der vorangehenden Sätze auf die rechten Seiten der Gleichungen (45) und (46).

Satz 13.

$f(x)$ sei zweimal differenzierbar in $0 \leq x \leq l$; dann gibt es fünf Zahlen a, b, c, d, e derart, dass

¹⁰ Es ist nämlich

$$f_{2\mu}[x|x+\mu h] = \frac{(-1)^\mu f'(x+\mu h)}{(\mu!)^2 h^{2\mu}} + \sum_{\alpha=0}^{\mu-1} (-1)^\alpha \frac{f(x+2\mu h - \alpha h) - f(x+\alpha h)}{\alpha! (2\mu - \alpha)! (\mu - \alpha) h^{2\mu+1}},$$

wie aus (9), (5) und (15) durch einfache Rechnung hervorgeht.

$$(55) \quad R_{2\mu} = - Q_{2\mu+1} h^{2\mu+3} [f_{2\mu}(0|a, a) + f_{2\mu}(\nu - 2\mu|b, b)] - \\ - (\nu - 2\mu) h^{2\mu+3} \{ \sigma_{2\mu+1} f'_{2\mu}[c|c + \mu h] - \tau_{\mu+1} f_{2\mu+1}[d|d + e] \}$$

mit $0 < a < \mu h$, $l - \mu h < b < l$,

$0 < c < l - 2\mu h$, $0 \leq d \leq l - (2\mu + 1)h$, $\mu h < e < (\mu + 1)h$,

wobei die drei letzteren Ungleichungen wegfallen, falls $\nu = 2\mu$.

Beweis. Gleichung (45) und Sätze 10, 11, 12.

Satz 14.

$f(x)$ sei stetig in $0 \leq x \leq l$; dann ist

$$(56) \quad R_0 = R_1 = \nu \tau_1 h^3 f_1[a|a + b] \quad \text{mit } 0 < a < l \quad \text{und } 0 < b < h.$$

Beweis. Folgerung 2 des Satzes 3, Gleichung (46) im Sonderfall $\mu = 0$ und Satz 10. Oder: dieselbe Folgerung 2 und Gleichung (55) für $\mu = 0$.

Satz 15.

$$R_{2\mu+1} = R_{2\mu}, \quad \text{wenn } 2\mu + 1 = \nu.$$

Beweis. Folgerung 1 des Satzes 3.

Wenn man den Ausdruck (46) von $R_{2\mu+1}$ auf ähnliche Weise umformt, wie es mit (45) vermöge des Satzes 11 gemacht wurde, dann kommt man zu einem hinsichtlich seiner Anwendungsfähigkeit nicht ganz befriedigenden Resultat. Indem man nämlich von der in der Mitte des Ausdruckes (46) stehenden Summe den ersten Summand zum Term $\int_0^{\mu h}$ und den letzten

Summand zum letzten Term $\int_{l-\mu h}^l$ überträgt, erhält man

$$(57) \quad R_{2\mu+1} = \int_0^{(\mu+1)h} f_{2\mu+1}(0|x) Q_{2\mu+2}(0, x) dx +$$

$$\begin{aligned}
 & + \sum_{\alpha=\mu+1}^{v-\mu-2} \int_{\alpha h}^{(\alpha+1)h} f_{2\mu+1}(\alpha-\mu|x) Q_{2\mu+2}(\alpha-\mu, x) dx + \\
 & + \int_{l-(\mu+1)h}^l f_{2\mu+1}(v-2\mu-1|x) Q_{2\mu+2}(v-2\mu-1, x) dx,
 \end{aligned}$$

worin nun wohl das erste Integral durch Ausführung der Produktintegration und Anwendung des Mittelwertsatzes in

$$\sigma_{2\mu+2} h^{2\mu+3} f_{2\mu+1}(0|\mu h+h) - h^{2\mu+1} f_{2\mu+1}(0|u, u) \int_0^{\mu+1} \sigma_{2\mu+2}(x) dx$$

(mit $0 < u < \mu h + h$), — und das letzte Integral in

$$\begin{aligned}
 & \sigma_{2\mu+2} h^{2\mu+3} f_{2\mu+1}(v-2\mu-1|l-\mu h-h) + \\
 & + h^{2\mu+4} f_{2\mu+1}(v-2\mu-1|v, v) \int_0^{\mu+1} \sigma_{2\mu+2}(x) dx
 \end{aligned}$$

(wobei $l - \mu h - h < v < l$)

verwandelt wird. Weiter hätte man aber mit der Differenz

$$f_{2\mu+1}(v-2\mu-1|v, v) - f_{2\mu+1}(0|u, u)$$

zu tun, wovon man — unter Voraussetzung $(2\mu+4)$ -maliger Differenzierbarkeit von $f(x)$ — nach dem Cauchyschen Satze bloss sagen könnte, dass sie gleich $\frac{k}{(2\mu+3)!} f^{(2\mu+4)}(w)$ ist,

wobei $0 < w < l$ und $l - (4\mu+2)h < k < l$. Für $2\mu+2 > \frac{v}{2}$ könnte man mit diesen Mitteln nicht einmal das Vorzeichen des Faktors k bestimmen.

Diese Schwierigkeit wird vermieden, wenn man bei der Umformung von $R_{2\mu+1}$ einen anderen Weg geht. Das geschieht durch den nächsten Satz. Vergleicht man den dabei herauskommenden Ausdruck mit den obigen Ansätzen, so sieht man, dass dort Steigungen von denselben Ordnungen auftreten und bis auf die höchste mit eben denselben Koeffizienten.

Satz 16.

$f(x)$ sei zweimal differenzierbar in $0 \leq x \leq l$ und es sei $2\mu + 1 < \nu$; dann ist

$$(58) \quad R_{2\mu+1} = h^{2\mu+3} \left\{ 2 \sigma_{2\mu+2} f_{2\mu+2} [a] + (\nu - 2\mu - 2) \tau_{\mu+1} f_{2\mu+1} [b|b+k] \right\} - \\ - h^{2\mu+5} \left\{ \sigma_{2\mu+3} [f_{2\mu+2} (0|c, c) + f_{2\mu+2} (\nu - 2\mu - 2|d, d)] + \right. \\ \left. + (\nu - 2\mu - 2) \sigma_{2\mu+3} f_{2\mu+2} [e|e + \mu h + h] \right\},$$

wobei von den Grössen a, b, k, c, d, e die Ungleichungen gelten:
 $0 \leq a \leq l - (2\mu + 2)h$, $h \leq b \leq l - (2\mu + 2)h$, $\mu h < k < (\mu + 1)h$,
 $0 < c < (\mu + 1)h$, $l - (\mu + 1)h < d < l$, $0 < e < l - (2\mu + 2)h$
(wenn etwa $\nu = 2\mu + 2$, dann fallen von diesen Ungleichungen natürlich die zweite, dritte und sechste weg).

Beweis. Man gehe von der Gleichung (57) aus und setze nach (44)

$$f_{2\mu+1} (0|x) = f_{2\mu+2} (0) + [x - (2\mu + 2)h] f_{2\mu+2} (0|x)$$

und

$$f_{2\mu+1} (\nu - 2\mu - 1|x) = \\ = f_{2\mu+2} (\nu - 2\mu - 2) + [x - (\nu - 2\mu - 2)h] f_{2\mu+2} (\nu - 2\mu - 2|x).$$

Es schreibt sich dann

$$R_{2\mu+1} = \sigma_{2\mu+2} h^{2\mu+3} [f_{2\mu+2} (0) + f_{2\mu+2} (\nu - 2\mu - 2)] + \\ + \int_0^{(\mu+1)h} f_{2\mu+2} (0|x) Q_{2\mu+3} (0, x) dx + \\ + \sum_{\alpha=\mu+1}^{\nu-\mu-2} \int_{\alpha h}^{(\alpha+1)h} f_{2\mu+1} (\alpha - \mu|x) Q_{2\mu+2} (\alpha - \mu, x) dx + \\ + \int_{l-(\mu+1)h}^l f_{2\mu+2} (\nu - 2\mu - 2|x) Q_{2\mu+3} (\nu - 2\mu - 2, x) dx.$$

Auf die Summe $f_{2\mu+2} (0) + f_{2\mu+2} (\nu - 2\mu - 2)$ kann man nun

die Gleichung (35), auf die Summe $\sum_{\alpha=\mu+1}^{\nu-\mu-2} \frac{f^{(\alpha+1)h}}{ah}$ den Satz 10 und auf die Integrale $\int_0^{(\mu+1)h} f$ und $\int_{l-(\mu+1)h}^l f$ die Sätze 11, 12 anwenden; dadurch ergibt sich (58).

F o l g e r u n g e n .

Unter Anwendung des Cauchyschen Satzes auf die Ausdrücke (56), (55) und (58) können die Restglieder in eine noch kürzere und für manche Zwecke bequemere Form gebracht werden. Dabei setzt man voraus, dass $f(x)$ im ganzen Integrationsintervall sovielmal differenzierbar ist, wieviel die Ordnung seiner im Cauchyschen Satz (für den betreffenden Fall) vorkommenden Ableitung beträgt. Es bestehen also¹¹ — jede unter ihrer Voraussetzung — die folgenden Relationen:

$$(59) \quad R_1 = \frac{\nu}{2} \tau_1 h^3 f''(a),$$

$$(60) \quad R_{2\mu} = -h^{2\mu+3} \left\{ \left[\frac{2 \varrho_{2\mu+1}}{(2\mu+2)!} + (\nu-2\mu) \frac{\sigma_{2\mu+1}}{(2\mu+1)!} \right] f^{(2\mu+2)}(b) - (\nu-2\mu) \frac{\tau_{\mu+1}}{(2\mu+2)!} f^{(2\mu+2)}(c) \right\},$$

$$(61) \quad R_{2\mu+1} = h^{2\mu+3} \left[\frac{2 \sigma_{2\mu+2}}{(2\mu+2)!} f^{(2\mu+2)}(d) + (\nu-2\mu-2) \frac{\tau_{\mu+1}}{(2\mu+2)!} f^{(2\mu+2)}(e) \right] - h^{2\mu+5} \left[\frac{2 \varrho_{2\mu+3}}{(2\mu+4)!} + (\nu-2\mu-2) \frac{\sigma_{2\mu+3}}{(2\mu+3)!} \right] f^{(2\mu+4)}(g),$$

wobei a, b, c, d, e, g zwischen 0 und l liegen.

Im Spezialfall $\mu = 2\lambda$ gilt ausser (60) noch:

$$(62) \quad R_{4\lambda} = -\frac{h^{4\lambda+3}}{(4\lambda+2)!} \left\{ 2 \varrho_{4\lambda+1} + (\nu-4\lambda) [(4\lambda+2) \sigma_{4\lambda+1} - \tau_{2\lambda+1}] \right\} f^{(4\lambda+2)}(k)$$

mit $0 < k < l$.

¹¹ Dabei stützt man sich noch auf einen bekannten Satz von G. Darboux. (Den Satz findet man z. B. bei *K. Knopp*, op. cit. 7, pag. 81.)

§ 12. Koeffizientensätze.

Damit die Definitionsgleichungen, an welche die Sätze dieses Paragraphen anknüpfen, einmal alle beisammen seien, wiederhole ich zunächst die Erklärungen der Koeffizienten σ_x , τ_x , $\varrho_{2\mu+1}$:

$$\sigma_x(x) = \int_0^x \prod_{\alpha=0}^{x-1} (t - \alpha) \cdot dt, \quad \sigma_{2\mu}(\mu) = \sigma_{2\mu}, \quad \sigma_{2\mu+1}(\mu) = \sigma_{2\mu+1},$$

$$\tau_x = \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \prod_{\alpha=0}^{x-1} [x^2 - (a + \frac{1}{2})^2] \cdot dx = \int_{x-1}^x \prod_{\alpha=0}^{2x-1} (x - a) \cdot dx,$$

$$\varrho_{2\mu+1} = \int_0^\mu \sigma_{2\mu+1}(x) dx,$$

und füge noch folgende Gleichungen hinzu, die die Grössen σ_x^* und ω_x^* definieren:

$$\sigma_x^* = \sigma_x(1) = \int_0^1 \prod_{\alpha=0}^{x-1} (x - \alpha) \cdot dx,$$

$$\omega_x^* = \int_0^1 x \prod_{\alpha=1}^x (x^2 - \alpha^2) \cdot dx.$$

Wie man übrigens leicht sieht, drücken sich τ_x und ω_x^* auch folgendermassen aus:

$$\tau_x = \sigma_{2x}(x) - \sigma_{2x}(x-1), \quad \omega_x^* = \sigma_{2x+1}(x+1) - \sigma_{2x+1}(x).$$

Ausserdem sei noch nebenbei bemerkt, dass für σ_x^* und ω_x^* aus ihren Definitionen die rekurrenten Abschätzungen folgen:

$$\begin{aligned} (x-1) \cdot |\sigma_x^*| &< |\sigma_{x+1}^*| < x \cdot |\sigma_x^*|, \\ (x^2 + 2x) \cdot |\omega_x^*| &< |\omega_{x+1}^*| < (x^2 + 2x + 1) \cdot |\omega_x^*|. \end{aligned}$$

Satz 17.

$$\mu \sigma_{2\mu-1} + \varrho_{2\mu-1} = \tau_\mu - \sigma_{2\mu}.$$

Beweis. Indem man an dem mit $\sigma_{2\mu}(x)$ bezeichneten Integral die Produktintegration ausübt, ergibt sich

$$\sigma_{2\mu}(x) = (x - 2\mu + 1) \sigma_{2\mu-1}(x) - \int_0^x \sigma_{2\mu-1}(t) dt,$$

also speziell für $x = \mu - 1$:

$$\sigma_{2\mu}(\mu - 1) = -\mu \sigma_{2\mu-1} - \varrho_{2\mu-1}.$$

Andererseits ist aber, wie oben gesagt,

$$\tau_\mu = \sigma_{2\mu} - \sigma_{2\mu}(\mu - 1).$$

Eliminiert man aus den beiden letzten Gleichungen die Grösse $\sigma_{2\mu}(\mu - 1)$, so bekommt man die behauptete Relation.

Satz 18.

$$\tau_\kappa = \frac{2}{2\kappa + 1} \omega_\kappa^*.$$

Beweis. Durch die Umformung

$$\begin{aligned} \omega_\kappa^* &= \int_0^1 x \prod_{\alpha=1}^{\kappa} (x^2 - a^2) \cdot dx = \\ &= \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} (x + \frac{1}{2}) \prod_{\alpha=1}^{\kappa} (x + \frac{1}{2} + a) (x + \frac{1}{2} - a) \cdot dx = \\ &= \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} (x + \frac{1}{2} + \kappa) \prod_{\alpha=0}^{\kappa-1} [x^2 - (a + \frac{1}{2})^2] \cdot dx = \\ &= \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} x \prod_{\alpha=0}^{\kappa-1} [x^2 - (a + \frac{1}{2})^2] \cdot dx + (\frac{1}{2} + \kappa) \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \prod_{\alpha=0}^{\kappa-1} [x^2 - (a + \frac{1}{2})^2] \cdot dx \end{aligned}$$

zerlegt sich ω_κ^* in zwei Integrale, von denen das erste einen ungeraden (bezüglich der Mitte des Integrationsintervalls) Integranden hat und daher verschwindet; der übrigbleibende Term ist aber $(\kappa + \frac{1}{2}) \tau_\kappa$.

Satz 19.

$$(63) \quad (2\mu + 1) \sigma_{2\mu} + \sigma_{2\mu+1}^* - \omega_\mu^* = 0.$$

Beweis. Stellt man das mit $\sigma_{2\mu}$ bezeichnete Integral als folgende Summe dar:

$$\sum_{\beta=0}^{\mu-1} \int_{\beta}^{\beta+1} \prod_{\alpha=0}^{2\mu-1} (x - \alpha) \cdot dx,$$

wobei in sämtlichen Summanden die Länge des Integrationsintervalls eins ist, so kann man durch geeignete Parallelverschiebungen alle diese Intervalle zur Deckung bringen und erhält damit

$$\sigma_{2\mu} = \int_0^1 \left[\sum_{\beta=0}^{\mu-1} \prod_{\alpha=0}^{2\mu-1} (x + \beta - \alpha) \right] dx.$$

Hiernach schreibt sich auch

$$\begin{aligned} & (2\mu + 1) \sigma_{2\mu} + \sigma_{2\mu+1}^* - \omega_\mu^* = \\ & = \int_0^1 \left[(2\mu + 1) \sum_{\beta=0}^{\mu-1} \prod_{\alpha=0}^{2\mu-1} (x + \beta - \alpha) + \prod_{\gamma=0}^{2\mu} (x - \gamma) - x \prod_{\delta=1}^{\mu} (x^2 - \delta^2) \right] dx, \end{aligned}$$

und der Satz behauptet also, dass dies Integral verschwindet.

Der Integrand

$$(2\mu + 1) \sum_{\beta=0}^{\mu-1} \prod_{\alpha=0}^{2\mu-1} (x + \beta - \alpha) + \prod_{\gamma=0}^{2\mu} (x - \gamma) - x \prod_{\delta=1}^{\mu} (x^2 - \delta^2) = P(x)$$

ist ein Polynom, zunächst gesagt, höchstens vom Grade $2\mu + 1$. Doch sieht man sofort, dass die höchste Potenz mit dem Koeffizienten Null ausfällt, mithin ist der Grad tatsächlich nicht höher als 2μ .

Die Zahlen $0, 1, 2, \dots, \mu$ sind Nullstellen des Polynoms.

Ferner berechne man noch die Werte dieses Polynoms an den Stellen $-1, -2, \dots, -\mu$. Ein solcher (allgemein geschrieben: an einer Stelle $-\eta$, wobei $1 \leq \eta \leq \mu$) wäre

$$P(-\eta) = (2\mu + 1) \sum_{\beta=0}^{\mu-1} \prod_{\alpha=0}^{2\mu-1} (\beta - \alpha - \eta) + \prod_{\gamma=0}^{2\mu} (-\eta - \gamma),$$

denn

$$x \prod_{\delta=1}^{\mu} (x^2 - \delta^2) = 0 \quad \text{für } x = -1, -2, \dots, -\mu.$$

Da ferner

$$\begin{aligned} \sum_{\beta=0}^{\mu-1} \prod_{\alpha=0}^{2\mu-1} (\beta - \alpha - \eta) &= \sum_{\beta=0}^{\eta-1} \prod_{\alpha=0}^{2\mu-1} (\eta + \alpha - \beta) + \sum_{\beta=\eta}^{\mu-1} \prod_{\alpha=0}^{2\mu-1} (\eta + \alpha - \beta) = \\ &= \sum_{\beta=0}^{\eta-1} \prod_{\alpha=0}^{2\mu-1} [\eta + \alpha - (\eta - 1 - \beta)] = \sum_{\beta=0}^{\eta-1} \prod_{\alpha=0}^{2\mu-1} (\alpha + 1 + \beta) = \\ &= \sum_{\beta=0}^{\eta-1} \frac{(2\mu + \beta)!}{\beta!} \end{aligned}$$

$$\text{und } \prod_{\gamma=0}^{2\mu} (-\eta - \gamma) = - \prod_{\gamma=0}^{2\mu} (\eta + \gamma) = - \frac{(2\mu + \eta)!}{(\eta - 1)!},$$

so ergibt sich

$$P(-\eta) = (2\mu + 1) \sum_{\alpha=0}^{\eta-1} \frac{(2\mu + \alpha)!}{\alpha!} - \frac{(2\mu + \eta)!}{(\eta - 1)!}.$$

Ich behaupte, dass

$$(64) \quad (2\mu + 1) \sum_{\alpha=0}^{\eta-1} \frac{(2\mu + \alpha)!}{\alpha!} = \frac{(2\mu + \eta)!}{(\eta - 1)!}$$

für alle η .

Für $\eta = 1$ ist das ohne weiteres klar. Angenommen, diese Gleichung sei richtig für $\eta = z$, dann wird für $\eta = z + 1$ ihre linke Seite

$$\begin{aligned} (2\mu + 1) \sum_{\alpha=0}^z \frac{(2\mu + \alpha)!}{\alpha!} &= \frac{(2\mu + z)!}{(z-1)!} + (2\mu + 1) \cdot \frac{(2\mu + z)!}{z!} = \\ &= \frac{(2\mu + z)!}{z!} (z + 2\mu + 1) = \frac{(2\mu + z + 1)!}{z!}, \end{aligned}$$

d. h. gleich der rechten Seite mit $\eta = \kappa + 1$. Folglich gilt die Gleichung (64) für alle η .

Wegen (64) erhält man also:

$$P(-\eta) = 0 \text{ für } \eta = 1, 2, \dots, \mu.$$

Hierdurch ist man aber zu folgendem gelangt: $P(x)$ ist ein Polynom höchstens vom Grade 2μ und hat sicherlich die $2\mu + 1$ Nullstellen $0, \pm 1, \pm 2, \dots, \pm \mu$. Daher ist $P(x) \equiv 0$, sein Integral Null und der Satz bewiesen.

Satz 20.

$$(65) \quad 2\mu \sigma_{2\mu-1} + \sigma_{2\mu}^* - \tau_\mu = 0.$$

Beweis. Man verfährt ebenso wie beim Beweise des vorhergehenden Satzes, bringt die linke Seite von (65) auf die Gestalt

$$\int_0^1 \left[2\mu \sum_{\alpha=0}^{\mu-2} \frac{\Pi(x+a-\beta)}{\beta=0} + \frac{\Pi(x-\gamma)}{\gamma=0} - x(x-\mu) \frac{\Pi(x^2-\delta^2)}{\delta=1} \right] dx$$

und hat dort als Integranden ein Polynom höchstens vom Grade $2\mu - 1$ (weil der Koeffizient von $x^{2\mu}$ verschwindet); zu seinen leicht ersichtlichen Nullstellen $0, 1, \dots, \mu$ treten wegen Bestehens der Relation

$$2\mu \sum_{\alpha=0}^{\eta-1} \frac{(2\mu-1+\alpha)!}{\alpha!} = \frac{(2\mu-1+\eta)!}{(\eta-1)!}$$

noch $-1, -2, \dots, -(\mu-1)$ hinzu, so dass die Gesamtanzahl der gefundenen Nullstellen damit 2μ wird. Ein Polynom vom Grade höchstens $2\mu - 1$ mit mindestens 2μ Nullstellen verschwindet identisch.

Satz 21.

$$\varrho_{2\mu-1} = \frac{1}{2} \sigma_{2\mu}^* + \frac{1}{2\mu+1} \sigma_{2\mu+1}^*.$$

Beweis. Nach Satz 17 ist

$$(66) \quad \varrho_{2\mu-1} = \tau_\mu - \mu \sigma_{2\mu-1} - \sigma_{2\mu};$$

aus (65) erhält man

$$-\mu \sigma_{2\mu-1} = \frac{1}{2} \sigma_{2\mu}^* - \frac{1}{2} \tau_\mu$$

Zweites Kapitel.

Die Laplacesche Quadraturreihe.

§ 14. Erzeugende Funktionenfolge.

Die in § 5 definierte Funktionenfolge führte zu einer Interpolationenkette, deren jedes Gelenk sich aus „Polynomstücken“ ein und desselben Grades zusammensetzte; jedoch die entsprechende Quadraturreihe bestand aus Gliedern, deren jedes, das mit einem geraden Index $2\mu > 0$ versehen war, die Steigungen von zweierlei Ordnungen enthielt (§ 6). Im folgenden wird es sich um eine andere Kette von Interpolationsanordnungen handeln, bei welcher die Verhältnisse umgekehrt liegen: jede Interpolationsstufe setzt sich aus Polynomen von zweierlei Graden zusammen, in jedem Gliede der entsprechenden Quadraturreihe kommen aber Steigungen nur einer Ordnung vor.

Alle Bezeichnungen des vorigen Kapitels mögen ihre Bedeutung beibehalten; also $f(x)$ sei wieder eine beliebige in $0 \leq x \leq l$ eindeutige Funktion, h sei ein v tel der Intervalllänge, $x_a = ah$ ($a = 0, 1, 2, \dots, v$) u. s. f.

Die Funktionenfolge, von der nun ausgegangen wird, lautet:

$$(72) \quad q_0(x) = f(ah) + f_1(a) Q_1(a, x) \quad \text{in } ah \leq x < (a+1)h$$

für $a = 0, 1, \dots, v-1$,

$$(73) \quad q_{2\mu-1}(x) = \begin{cases} f_{2\mu-1}(0) Q_{2\mu-1}(0, x) & \text{in } 0 \leq x < (\mu-1)h \\ 0 & \text{in } (\mu-1)h \leq x < (\mu-\frac{1}{2})h \\ f_{2\mu}(a-\mu) Q_{2\mu}(a-\mu, x) & \text{in } (a-\frac{1}{2})h \leq x < ah \\ f_{2\mu}(a-\mu) Q_{2\mu}(a+1-\mu, x) & \text{in } ah \leq x < (a+\frac{1}{2})h \\ & \text{für } a = \mu, \mu+1, \dots, v-\mu \\ 0 & \text{in } (v-\mu+\frac{1}{2})h \leq x < (v-\mu+1)h \\ f_{2\mu-1}(v-2\mu+1) Q_{2\mu-1}(v-2\mu+2, x) & \text{in } \\ & (v-\mu+1)h \leq x \leq l, \end{cases}$$

$$(74) \quad q_{2\mu}(x) = \begin{cases} f_{2\mu}(0) Q_{2\mu}(0, x) & \text{in } 0 \leq x < (\mu-\frac{1}{2})h \\ 0 & \text{in } (\mu-\frac{1}{2})h \leq x < \mu h \\ f_{2\mu+1}(a-\mu) Q_{2\mu+1}(a-\mu, x) & \text{in } ah \leq x < (a+\frac{1}{2})h \\ f_{2\mu+1}(a-\mu) Q_{2\mu+1}(a+1-\mu, x) & \text{in } (a+\frac{1}{2})h \leq x < (a+1)h \\ & \text{für } a = \mu, \mu+1, \dots, v-\mu-1 \\ 0 & \text{in } (v-\mu)h \leq x < (v-\mu+\frac{1}{2})h \\ f_{2\mu}(v-2\mu) Q_{2\mu}(v-2\mu+1, x) & \text{in } (v-\mu+\frac{1}{2})h \leq x \leq l, \end{cases}$$

wobei in (73) die mittleren zwei Zeilen wegfallen, wenn $\nu = 2\mu - 1$, resp. in (74) zwei mittlere Zeilen, falls $\nu = 2\mu$.

Die Summe $\sum_{\alpha=0}^{\kappa} q_{\alpha}(x)$ ist offenbar, wie man auf Grund des Satzes 1 folgern kann, in $0 \leq x < \frac{\kappa}{2} h$ resp. $l - \frac{\kappa}{2} h \leq x \leq l$ ein Interpolationspolynom mit den Koinzidenzstellen $0, h, \dots, \kappa h$ resp. $l - \kappa h, l - \kappa h + h, \dots, l$ und hat dort allgemein den Grad κ ; dagegen besteht sie in $\frac{\kappa}{2} h \leq x < l - \frac{\kappa}{2} h$ aus „Stücken“ der Interpolationspolynome $(\kappa + 1)$ -ten Grades, und zwar ist sie im Teilintervall $(\frac{\kappa}{2} + a) h \leq x < (\frac{\kappa}{2} + a + 1) h$ (für $a = 0, 1, \dots, \nu - \kappa - 1$) identisch mit demjenigen Polynom, welches die Koinzidenzstellen $a h, (a + 1) h, \dots, (a + \kappa + 1) h$ hat.

Mit der Bezeichnung

$$L_{\alpha} = \int_0^l q_{\alpha}(x) dx$$

schreibt sich

$$(75) \quad \int_0^l f(x) dx = \sum_{\alpha=0}^{\kappa} L_{\alpha} + \mathfrak{R}_{\kappa},$$

als ein Reihenabschnitt + Restglied, wobei κ irgendeine nicht-negative ganze Zahl $\leq \nu$ bedeutet. In den nächsten Paragraphen sollen nun die Glieder L_{α} ($\alpha = 0, 1, \dots, \kappa$) und die Restglieder \mathfrak{R}_{κ} für alle möglichen Abschnitte (d. h. für $\kappa = 0, 1, \dots, \nu$) studiert werden.

§ 15. Umformung der Glieder L_{α} .

Das erste Glied

$$L_0 = \int_0^l q_0(x) dx = \sum_{\alpha=0}^{\nu-1} \left\{ h f(\alpha h) + \frac{h^2}{2} f_1(\alpha) \right\} = h \sum_{\alpha=0}^{\nu-1} \frac{f(\alpha h) + f(\alpha h + h)}{2}$$

stimmt mit K_0 des vorigen Kapitels überein,

$$(76) \quad L_0 = h \left\{ \frac{f(0) + f(l)}{2} + \sum_{\alpha=1}^{\nu-1} f(\alpha h) \right\},$$

und sein Bildungsgesetz ist identisch mit der bekannten Trapezregel.

Satz 22.

$$L_{2\mu-1} = -\frac{\sigma_{2\mu}^{\ddot{}}}{2\mu} h^{2\mu} [f_{2\mu-1}(0) - f_{2\mu-1}(\nu - 2\mu + 1)].$$

Beweis. Zunächst findet man in

$$(77) \quad L_{2\mu-1} = \int_0^{(\mu-1)h} f_{2\mu-1}(0) Q_{2\mu-1}(0, x) dx +$$

$$+ \sum_{\beta=0}^{\nu-2\mu} f_{2\mu}(\beta) \left[\int_{(\beta+\mu-\frac{1}{2})h}^{(\beta+\mu)h} Q_{2\mu}(\beta, x) dx + \int_{(\beta+\mu)h}^{(\beta+\mu+\frac{1}{2})h} Q_{2\mu}(\beta+1, x) dx \right] +$$

$$+ \int_{l-(\mu-1)h}^l f_{2\mu-1}(\nu - 2\mu + 1) Q_{2\mu-1}(\nu - 2\mu + 2, x) dx$$

für den ersten Term rechts

$$\sigma_{2\mu-1} h^{2\mu} f_{2\mu-1}(0)$$

und für den letzten

$$-\sigma_{2\mu-1} h^{2\mu} f_{2\mu-1}(\nu - 2\mu + 1).$$

Jeder Summand der in der Mitte stehenden Summe enthält einen aus zwei Integralen bestehenden Faktor

$$\int_{(\beta+\mu-\frac{1}{2})h}^{(\beta+\mu)h} Q_{2\mu}(\beta, x) dx + \int_{(\beta+\mu)h}^{(\beta+\mu+\frac{1}{2})h} Q_{2\mu}(\beta+1, x) dx,$$

der sich auf Grund der für beliebige γ und δ geltenden Relation

$$Q_{\lambda}(\gamma, x) \equiv Q_{\lambda}(\gamma - \delta, x - \delta h)$$

zu einem einzigen Integral $\int_{(\mu-1)h}^{\mu h} Q_{2\mu}(0, x) dx$ zusammenfassen lässt; dies Integral ist unabhängig von β . Die Summanden enthalten daher einen gemeinsamen Faktor, dessen Wert $\tau_{\mu} h^{2\mu+1}$ ist, und die erwähnte Summe wird

$$\tau_{\mu} h^{2\mu+1} \sum_{\beta=0}^{\nu-2\mu} f_{2\mu}(\beta).$$

Setzt man hierin noch

$$f_{2\mu}(\beta) = \frac{f_{2\mu-1}(\beta) - f_{2\mu-1}(\beta+1)}{-2\mu h},$$

so nimmt (77) folgende Gestalt an:

$$\begin{aligned} L_{2\mu-1} &= \sigma_{2\mu-1} h^{2\mu} [f_{2\mu-1}(0) - f_{2\mu-1}(\nu - 2\mu + 1)] - \\ &\quad - \frac{\tau_{2\mu}}{2\mu} h^{2\mu} [f_{2\mu-1}(0) - f_{2\mu-1}(\nu - 2\mu + 1)] = \\ &= (\sigma_{2\mu-1} - \frac{\tau_{2\mu}}{2\mu}) h^{2\mu} [f_{2\mu-1}(0) - f_{2\mu-1}(\nu - 2\mu + 1)]. \end{aligned}$$

Nach Satz 20 gilt aber

$$\sigma_{2\mu-1} - \frac{\tau_{2\mu}}{2\mu} = -\frac{\sigma_{2\mu}^*}{2\mu},$$

womit die Behauptung bewiesen ist.

F o l g e r u n g e n .

1. Wenn ν eine ungerade Zahl ist, $\nu = 2\mu - 1$, so ist $L_\nu = 0$.

2. Wenn $f(x)$ ein Polynom höchstens vom Grade $2\mu - 1$ ist, dann gilt auch für $2\mu - 1 < \nu$: $L_{2\mu-1} = 0$.

Satz 23.

$$L_{2\mu} = -\frac{\sigma_{2\mu+1}^*}{2\mu+1} h^{2\mu+1} [f_{2\mu}(0) + f_{2\mu}(\nu - 2\mu)].$$

Beweis. Nach den Definitionen von $L_{2\mu}$ und $q_{2\mu}$ ist

$$\begin{aligned} (78) \quad L_{2\mu} &= \int_0^{(\mu-\frac{1}{2})h} f_{2\mu}(0) Q_{2\mu}(0, x) dx + \\ &+ \sum_{\beta=0}^{\nu-2\mu-1} f_{2\mu+1}(\beta) \left\{ \int_{(\beta-\mu)h}^{(\beta+\mu+\frac{1}{2})h} Q_{2\mu+1}(\beta, x) dx + \int_{(\beta+\mu+\frac{1}{2})h}^{(\beta+\mu+1)h} Q_{2\mu+1}(\beta+1, x) dx \right\} + \\ &\quad + \int_{l-(\mu-\frac{1}{2})h}^l f_{2\mu}(\nu-2\mu) Q_{2\mu}(\nu-2\mu+1, x) dx. \end{aligned}$$

Die äussersten Terme in diesem Ausdruck von $L_{2\mu}$ reduzieren sich auf

$$\left(\sigma_{2\mu} - \frac{\tau_{2\mu}}{2}\right) h^{2\mu+1} f_{2\mu}(0) \quad \text{und} \quad \left(\sigma_{2\mu} - \frac{\tau_{2\mu}}{2}\right) h^{2\mu+1} f_{2\mu}(\nu - 2\mu).$$

Ferner gilt

$$\begin{aligned} & \int_{(\beta+\mu)h}^{(\beta+\mu+\frac{1}{2})h} Q_{2\mu+1}(\beta, x) dx + \int_{(\beta+\mu+\frac{1}{2})h}^{(\beta+\mu+1)h} Q_{2\mu+1}(\beta+1, x) dx = \\ & = \int_{(\mu-\frac{1}{2})h}^{(\mu+\frac{1}{2})h} \prod_{\alpha=0}^{2\mu} (x - \alpha h) \cdot dx = \int_{-\frac{1}{2}h}^{\frac{1}{2}h} x \prod_{\alpha=1}^{\mu} (x^2 - \alpha^2 h^2) \cdot dx = 0, \end{aligned}$$

also verschwindet die Summe in der Mitte der rechten Seite von (78), und es ist daher

$$L_{2\mu} = \left(\sigma_{2\mu} - \frac{\tau_{2\mu}}{2}\right) h^{2\mu+1} [f_{2\mu}(0) + f_{2\mu}(\nu - 2\mu)].$$

Beachtet man noch, dass nach Satz 18

$$\frac{\tau_{2\mu}}{2} = \frac{\omega_{2\mu}^*}{2\mu+1},$$

und mithin nach Satz 19

$$\sigma_{2\mu} - \frac{\tau_{2\mu}}{2} = -\frac{\sigma_{2\mu+1}^*}{2\mu+1},$$

so ist die Behauptung bewiesen.

§ 16. Restglieder.

Durch den Vergleich der Glieder $L_{2\mu}$ mit $K_{2\mu}$ wird man zu der Identität geführt: $\mathfrak{R}_{2\mu} \equiv R_{2\mu}$, und unter Rücksicht auf die Folgerung 1 des Satzes 22 ferner zu: $\mathfrak{R}_{2\mu+1} \equiv R_{2\mu}$, wenn $\nu = 2\mu + 1$, so dass nur noch die Restglieder $\mathfrak{R}_{2\mu-1}$ im Falle $\mu < \frac{\nu+1}{2}$ zu untersuchen bleiben.

Ähnlich wie in § 9 ergibt sich zunächst

$$\begin{aligned} \mathfrak{R}_{2\mu-1} &= \int_0^{(\mu-\frac{1}{2})h} f_{2\mu-1}(0|x) Q_{2\mu}(0,x) dx + \\ &+ \sum_{\alpha=0}^{v-2\mu} \int_{(\alpha+\mu-\frac{1}{2})h}^{(\alpha+\mu+\frac{1}{2})h} f_{2\mu}(\alpha|x) Q_{2\mu+1}(\alpha,x) dx + \\ &+ \int_{l-(\mu-\frac{1}{2})h}^l f_{2\mu-1}(v-2\mu+1|x) Q_{2\mu}(v-2\mu+1,x) dx. \end{aligned}$$

Produktintegration und Anwendung des Mittelwertsatzes, — $f(x)$ wird dabei zweimal-differenzierbar vorausgesetzt, — verwandeln den ersten Term dieses Ausdruckes in

$$(79) \quad \left(\sigma_{2\mu} - \frac{\tau_{2\mu}}{2}\right) h^{2\mu+1} f_{2\mu-1}\left(0 \mid \mu h - \frac{h}{2}\right) - f_{2\mu-1}(0 \mid u, u) h^{2\mu+2} \int_0^{\mu-\frac{1}{2}} \sigma_{2\mu}(x) dx$$

(wobei $0 < u < \mu h - \frac{h}{2}$)

und den letzten Term in

$$(80) \quad \left(\sigma_{2\mu} - \frac{\tau_{2\mu}}{2}\right) h^{2\mu+1} f_{2\mu-1}\left(v-2\mu+1 \mid l - \mu h + \frac{h}{2}\right) +$$

$$+ f_{2\mu-1}(v-2\mu+1 \mid v, v) h^{2\mu+2} \int_0^{\mu-\frac{1}{2}} \sigma_{2\mu}(x) dx$$

(mit $l - \mu h + \frac{h}{2} < v < l$),

die mittlere Summe formt sich aber folgendermassen um:

$$(81) \quad \int_{(\mu-\frac{1}{2})h}^{(\mu+\frac{1}{2})h} \left[\sum_{\alpha=0}^{v-2\mu} f_{2\mu}(\alpha \mid ah+x) \right] Q_{2\mu+1}(0,x) dx =$$

$$\begin{aligned}
 &= \left\{ \sum_{\alpha=0}^{\nu-2\mu} f_{2\mu}(\alpha | ah + \mu h + \frac{h}{2}) \right\} \int_{\mu h - \frac{h}{2}}^{\mu h + \frac{h}{2}} Q_{2\mu+1}(0, x) dx - \\
 &- \int_{\mu h - \frac{h}{2}}^{\mu h + \frac{h}{2}} \left[\sum_{\alpha=0}^{\nu-2\mu} f_{2\mu}(\alpha | ah + x, ah + x) \int_{\mu h - \frac{h}{2}}^x Q_{2\mu+1}(0, t) dt \right] dx = \\
 &= - \sum_{\alpha=0}^{\nu-2\mu} f_{2\mu}(\alpha | ah + w, ah + w) \int_{\mu h - \frac{h}{2}}^{\mu h + \frac{h}{2}} \left[\int_{\mu h - \frac{h}{2}}^x Q_{2\mu+1}(0, t) dt \right] dx = \\
 &= - (\nu - 2\mu + 1) h^{2\mu+3} f_{2\mu}[z | z + w, z + w] \int_{\mu - \frac{1}{2}}^{\mu + \frac{1}{2}} [\sigma_{2\mu+1}(x) - \sigma_{2\mu+1}(\mu - \frac{1}{2})] dx \\
 &\quad \left(\text{dabei } \mu h - \frac{h}{2} < w < \mu h + \frac{h}{2} \text{ und } 0 \leq z \leq l - 2\mu h \right).
 \end{aligned}$$

Aus all diesem ersieht man, dass hierdurch ganz entsprechende Terme herauskommen (teils mit gleichen, teils mit komplizierteren und unbequemerem Koeffizienten — allerdings aber mit Steigungen derselben Ordnungen), wie diejenigen, die man erhält, wenn schon anfangs

$$(82) \quad \mathfrak{R}_{2\mu-1} = L_{2\mu} + R_{2\mu}$$

geschrieben wird. Nach den Sätzen 23 und 13 wird nunmehr

$$\begin{aligned}
 \mathfrak{R}_{2\mu-1} &= - \frac{2 \sigma_{2\mu+1}^*}{2\mu+1} h^{2\mu+1} f_{2\mu}[a] - \\
 &- Q_{2\mu+1} h^{2\mu+3} [f'_{2\mu}(0 | b, b) + f_{2\mu}(\nu - 2\mu | c, c)] - \\
 &- (\nu - 2\mu) h^{2\mu+3} \{ \sigma_{2\mu+1} f'_{2\mu}[d | d + \mu h] - \tau_{\mu+1} f_{2\mu+1}[e | e + g] \}
 \end{aligned}$$

mit

$$0 \leq a \leq (\nu - 2\mu) h, \quad 0 < b < \mu h, \quad l - \mu h < c < l,$$

$$0 < d < l - 2\mu h, \quad 0 \leq e \leq l - (2\mu + 1) h, \quad \mu h < g < \mu h + h,$$

wovon die drei letzteren Ungleichungen wegfallen, wenn $\nu = 2\mu$.

Unter der Voraussetzung, dass $f(x)$ in $0 \leq x \leq l$ $(2\mu + 2)$ -mal differenzierbar ist, ergibt sich aus dem obigen durch den Cauchy'schen Satz

$$(83) \quad \mathfrak{R}_{2\mu-1} = -h^{2\mu+1} \cdot \frac{2^{\sigma_{2\mu+1}}}{(2\mu+1)!} f^{(2\mu)}(u) - \\ - h^{2\mu+3} \left\{ \left[\frac{2^{\sigma_{2\mu+1}}}{(2\mu+2)!} + (v-2\mu) \frac{\sigma_{2\mu+1}}{(2\mu+1)!} \right] f^{(2\mu+2)}(v) - \right. \\ \left. - (v-2\mu) \frac{\tau_{\mu+1}}{(2\mu+2)!} f^{(2\mu+2)}(w) \right\},$$

wobei u , v und w zwischen 0 und l liegen.

§ 17. Die Quadraturreihe mit den von Laplace herrührenden Ausdrücken der Glieder L_α .

Die Steigungen mit äquidistanten Argumenten können bekanntlich durch einfachere und für Anwendungen bequemere Grössen ausgedrückt werden, die man Differenzen der Funktion $f(x)$ nennt und für ein konstantes h (= die zugrunde liegende Argumentendifferenz) sukzessiv durch die Gleichungen

$$\Delta^1 f(x) = f(x+h) - f(x),$$

$$\Delta^{\lambda+1} f(x) = \Delta^\lambda f(x+h) - \Delta^\lambda f(x) \quad (\lambda = 1, 2, \dots)$$

definiert. Durch vollständige Induktion lässt sich leicht beweisen, dass

$$\Delta^\lambda f(x) = \sum_{\alpha=0}^{\lambda} (-1)^{\lambda-\alpha} \binom{\lambda}{\alpha} f(x + \alpha h),$$

also besteht zwischen der Steigung und der Differenz ein und derselben Ordnung die (auch direkt aus ihren Definitionen hervorgehende) Relation

$$f_\lambda[x] = \frac{1}{\lambda! h^\lambda} \Delta^\lambda f(x).$$

Bezeichnet man kurz mit Δ_α^λ die Differenz $\Delta^\lambda f(x)$ für $x = \alpha h$, so schreibt sich nun (75) nach § 15 folgendermassen um:

$$(84) \quad \int_0^l f(x) dx = h \left\{ \left[\frac{f(0) + f(l)}{2} + \sum_{\alpha=1}^{v-1} f(\alpha h) \right] - \sum_{\alpha=1}^z \frac{\sigma_{z+1}^*}{(z+1)!} \left[\Delta_0^\alpha + (-1)^\alpha \Delta_{v-\alpha}^\alpha \right] \right\} + \mathfrak{R}_z,$$

wobei vom Restglied \mathfrak{R}_z das in § 16 gesagte gilt.

Die Tabelle der in (84) enthaltenen Koeffizienten $\frac{\sigma_\lambda^*}{\lambda!}$ lautet nach (68):

(85)	λ	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
	$\frac{\sigma_\lambda^*}{\lambda!}$	1	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{12}$	$\frac{1}{24}$	$-\frac{19}{720}$	$\frac{3}{160}$	$-\frac{863}{60480}$	$\frac{275}{24192}$	$-\frac{33953}{3628800}$	$\frac{8183}{1036800}$	$-\frac{3250433}{479001600}$
		11	12	13								...
		$\frac{4671}{788480}$	$-\frac{13695779093}{2615348796000}$	$\frac{2224234463}{475517952000}$								

§ 18. Historische Bemerkungen.

Die Quadraturreihe (84) ist zum erstenmal¹³ von Laplace¹⁴ aufgestellt worden; sie tritt bei ihm aber als eine unendliche Reihe (also ohne Restglied) auf und entbehrt übrigens der Herleitung. Später hat Clausen¹⁵ das Bildungsgesetz der Koeffizienten der

¹³ *Runge-Willers*, 97. Whittaker nennt die Reihe (84) allerdings Gregory-Newton'sche Quadraturformel (*Whittaker*, 144) — jedoch man weiss mit Sicherheit, dass sie den beiden Erfindern des Interpolationskalküls und der Anfänge der mechanischen Quadratur unbekannt war. Wem die Ehre der Entdeckung des Interpolationskalküls zugeschrieben werden soll — dem berühmten Isaac Newton oder seinem etwas älteren Zeitgenossen James Gregory —, darüber findet man näheres bei *Whittaker*, 12, Fussnote † und in der dort erwähnten Literatur. In welcher Form die Methoden der mechanischen Quadratur in Arbeiten und Briefen Gregorj's vorkommen, davon berichtet z. B. auch *M. Cantor*, Vorl. über Geschichte der Mathematik, III. Bd. 2. Aufl. Leipzig 1901: pag. 687 u. 688.

¹⁴ *Laplace*, 207.

¹⁵ *Clausen*, 288. Der von ihm gefundene Ausdruck

$$(\pm) \int_0^1 \frac{x(x-1)(x-2)\dots(x-\lambda)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot \lambda} dx$$

hat einen $(\lambda+1)$ -mal kleineren Nenner als richtig wäre. Dass das bloss ein Setzfehler ist, davon überzeugt man sich leicht auch durch Vergleich seiner berechneten Koeffizienten mit diesem Ausdruck.

Reihenglieder erkannt und zwölf von diesen berechnet. Die Herleitung der Reihe findet sich jetzt in vielen Lehrbüchern¹⁶; man geht von der Euler-Maclaurinschen Summenformel aus und führt dort Differenzen anstatt der Ableitungen ein. Charlier hat bei seiner Behandlung dieser Reihe die Hoffnung ausgesprochen, dass auf demselben Wege auch das allgemeine Restglied der Reihe sich in anwendbarer Form finden lasse¹⁷. Für fast alle von ihm untersuchten Quadraturformeln sind von Nielsen¹⁸ — allerdings mit Hilfe einer anderen Methode — Restglieder (in ziemlich unbrauchbarer Form¹⁹) angegeben worden; man hat geglaubt, dass Nielsen auch einen Ausdruck des Restgliedes der Laplaceschen Reihe gefunden habe²⁰, — ein aufmerksamerer Vergleich der Abhandlung Nielsens mit dem Lehrbuch Charliers zeigt aber, dass dies tatsächlich nicht der Fall ist. Nielsens Methode besteht darin, dass er die betreffende Quadraturformel aus einem Interpolationsverfahren entstehen lässt, wobei das Restglied sich aus dem entsprechenden Fehlerglied der Interpolationsformel herleitet. Obwohl diese Methode auch bei der Laplaceschen Reihe zum Ziel geführt hätte, hat Nielsen diese Reihe nicht behandelt.

Im Enzyklopädieartikel von Runge und Willers wird die Laplacesche Quadraturreihe noch zu jenen Integrationsformeln gezählt, die durch gewisse Relationen der Differenzenrechnung abgeleitet werden, im Gegensatz zu denen, die einfach aus Interpolation herrühren²¹.

Drittes Kapitel.

Über die Anwendung der Quadraturformeln.

§ 19. Allgemeines.

Die Aufgabe der mechanischen Quadratur — im Falle der äquidistanten Koinzidenzstellen, von denen die beiden äussersten mit den Integrationsgrenzen zusammenfallen — lässt sich fol-

¹⁶ Z. B. bei *Charlier*, 53 oder *Whittaker*, 143.

¹⁷ *Charlier*, 47.

¹⁸ *Nielsen*, passim.

¹⁹ Man vergl. dazu den Zusatz von Charlier am Ende der eben zitierten Abhandlung Nielsens, pag. 11 u. 12.

²⁰ *Whittaker*, 144.

²¹ *Runge-Willers*, 96, 55 und 100.

gendermassen formulieren. Eine Funktion $f(x)$ ist tabuliert für die im Intervall $\langle 0, l \rangle$ liegenden x -Werte $0, h, 2h, \dots, \nu h$, wobei $h = \frac{l}{\nu}$; es ist 1) aus dieser Tabelle

$$(86) \quad \begin{array}{c|c|c|c|c|c|c} x & 0 & h & 2h & \dots & (\nu-1)h & l \\ \hline f(x) & f(0) & f(h) & f(2h) & \dots & f(l-h) & f(l) \end{array}$$

der Wert des Integrals $\int_0^l f(x) dx$ zu berechnen und 2) irgendwie die Genauigkeit des Resultats abzuschätzen.

Für die Lösung des ersten Teils der Aufgabe — für die (allgemein gesagt: angenäherte) Berechnung des Integrals — soll also nur die vorhandene Tabelle benutzt werden: das ist eben die Bedeutung der mechanischen Quadratur.

Für den zweiten Teil der Aufgabe — die Fehlerabschätzung — reicht die Tabelle allein bestimmt nicht aus, denn es kommt dabei auf den Verlauf der Funktion zwischen je zwei aufeinanderfolgenden obigen Argumentwerten an. Da aber ohne den zweiten Teil der erste ganz bedeutungslos wäre (wenn man keine Schranken für den Fehler des aus einer Tabelle berechneten Wertes im Vergleiche zum Integral selber bestimmen kann, darf man ja überhaupt nicht von einem angenäherten Wert des Integrals sprechen), so ist die Frage nach den Anwendbarkeitsbedingungen der Methode der mechanischen Quadratur identisch mit der Frage, wodurch das Restglied einer Quadraturformel abgeschätzt werden kann. Es gibt dafür tatsächlich verschiedene Mittel (Einschliessungssätze²², Restgliederausdrücke), und im Prinzip können alle Verfahren benutzt werden, die nicht auf die direkte Integration von $f(x)$ hinauslaufen.

Damit es mindestens einen Sinn habe, nach dem Wert des Integrals $\int_0^l f(x) dx$ zu fragen, soll natürlich vorausgesetzt werden, dass die Funktion $f(x)$ im ganzen Intervall $\langle 0, l \rangle$ existiert und integrierbar ist. Es liegt aber in der Natur der Sache, dass eine derartige Aufgabe wie die oben formulierte keine einheitlichen „notwendigen und hinreichenden“ Lösbarkeitsbedingungen hat. Schon durch wenige Zahlenangaben über den Gesamtverlauf der Funktion $f(x)$ — z. B. durch die untere

²² G. Kowalewski, 58 und 69 bis 72.

und die obere Schranke ihrer Ableitung in $\langle 0, l \rangle$ — kann das Restglied mancher Quadraturformel abgeschätzt werden; wenn man aber mehr vom Verhalten der Funktion weiss — z. B. die Schranken ihrer Ableitungen verschiedener Ordnungen kennt —, dann lässt sich die Aufgabe etwa auf mehrere Weisen lösen und diejenige Lösung sich auswählen, deren Fehlerglied seinem absoluten Betrage nach am kleinsten ist.

Als einfachstes Beispiel für das oben Gesagte möge noch derjenige Fall kurz behandelt werden, dass man ausser den Tabellenwerten (86) der Funktion $f(x)$ bloss weiss, dass sie der Lipschitzbedingung genügt, — also dass

$$(87) \quad |f(x) - f(x')| < K |x - x'|$$

für beliebige $x \neq x'$ des Intervalls $\langle 0, l \rangle$ —, und den in dieser Ungleichung auftretenden konstanten Faktor K kennt. Die Quadraturaufgabe löst sich mit diesen Daten durch die übliche Trapezformel, denn für den Rest gibt es mit K eine Abschätzung;

$$(88) \quad \left| \int_0^l f(x) dx - h \left\{ \frac{f(0) + f(l)}{2} + \sum_{\alpha=1}^{v-1} f(ah) \right\} \right| <$$

$$< \frac{1}{4K} \sum_{\alpha=0}^{v-1} \{h^2 K^2 - [f(ah+h) - f(ah)]^2\} =$$

$$= \frac{K l^2}{4v} - \frac{1}{4K} \sum_{\alpha=0}^{v-1} [f(ah+h) - f(ah)]^2 \cong \frac{K l^2}{4} \cdot \frac{1}{v},$$

worin die zuletzt geschriebene Schranke proportional der ersten Potenz von $\frac{1}{v}$ absinkt. Die Relation (88) erhält man folgendermassen. Für $0 < t < 1$ ist auf Grund der Lipschitzbedingung einerseits

$$f(ah) - Kth < f(ah+th) < f(ah) + Kth$$

und andererseits

$$f(ah+h) - K(1-t)h < f(ah+th) < f(ah+h) + K(1-t)h.$$

Bezeichnet man nun mit t_α denjenigen Wert von t , der durch die Gleichung

$$f(ah) + Kth = f(ah+h) + K(1-t)h$$

bestimmt ist, d. h.

$$t_\alpha = \frac{Kh + f(ah+h) - f(ah)}{2Kh},$$

so schreibt sich

$$\int_{ah}^{(\alpha+1)h} f(x) dx - \frac{f(ah) + f(ah+h)}{2} h < \frac{h}{2} \cdot t_\alpha \cdot \{Kh - [f(ah+h) - f(ah)]\} = \\ = \frac{K^2 h^2 - [f(ah+h) - f(ah)]^2}{4K}$$

und infolgedessen nach Addition über $\alpha = 0, 1, 2, \dots, \nu-1$ die Ungleichung (88).

§ 20. Über die Anwendung der Laplace'schen Reihe.

Aus der Tabelle (86) werden die Differenzen der Funktion $f(x)$ durch sukzessive Subtraktion gebildet und in folgendes Schema zusammengefasst:

0	$f(0)$	Δ_0^1	Δ_0^2	...	$\Delta_0^{\nu-2}$	$\Delta_0^{\nu-1}$	Δ_0^ν
h	$f(h)$	Δ_1^1	Δ_1^2	...	$\Delta_1^{\nu-2}$	$\Delta_1^{\nu-1}$	
$2h$	$f(2h)$	Δ_2^1	Δ_2^2	...	$\Delta_2^{\nu-2}$		
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮			
$(\nu-2)h$	$f(l-2h)$	$\Delta_{\nu-2}^1$	$\Delta_{\nu-2}^2$				
$(\nu-1)h$	$f(l-h)$	$\Delta_{\nu-1}^1$					
l	$f(l)$						

(89)

Die in der Gleichung (84) vorkommenden Glieder L_α enthalten ausser den gegebenen Funktionswerten die Differenzen aus der oberen Zeile und dem schrägen unteren Rande des Schemas. Zwölf ihrer Koeffizienten $\frac{\sigma_{\alpha+1}^*}{(\alpha+1)!}$ sind als gewöhnliche Brüche in der Tabelle (85) wiedergegeben. Zur

Übersichtlichkeit des Verlaufes dieser Zahlen mit wachsendem Index und für mancherlei andere Zwecke seien zehn dieser Koeffizienten hier in Dezimalbruchdarstellung hingeschrieben.

a	$\frac{\sigma_{a+1}^*}{(a+1)!}$	a	$\frac{\sigma_{a+1}^*}{(a+1)!}$
1	- 0.08333 33333	6	0.01136 73942
2	0.04166 66667	7	- 0.00935 65366
3	- 0.02638 88889	8	0.00789 25540
4	0.01875 00000	9	- 0.00678 58500
5	- 0.01426 91799	10	0.00592 40564

Die Teilsumme $L_0 + L_1 + \dots + L_\lambda$ stellt einen angenäherten Wert des Integrals $\int_0^l f(x) dx$ dar, soweit das Restglied \mathfrak{R}_λ sich abschätzen lässt. Dafür nehme man zunächst an, dass die Funktion $f(x)$ im abgeschlossenen Intervall $0 \leq x \leq l$ mindestens λ mal differenzierbar ist, mithin die Ableitungen dort beschränkt sind —

$$|f'(x)| < M_1, \quad |f''(x)| < M_2, \quad \dots, \quad |f^{(\lambda)}(x)| < M_\lambda$$

—, und dass man die Zahlen $M_1, M_2, \dots, M_\lambda$ kennt, also entweder aus dem analytischen Ausdruck von $f(x)$ berechnen oder sonst irgendwie bestimmen kann. Dann gelten für Restglieder nach § 16 die Abschätzungen:

$$(90) \quad \begin{cases} |\mathfrak{R}_0| < A_0 l h^2 M_2 \\ |\mathfrak{R}_{2\mu-1}| < A_{2\mu-1} h^{2\mu+1} M_{2\mu} + [A_{2\mu} + (\nu - 2\mu) B_{2\mu}] h^{2\mu+3} M_{2\mu+2} \\ |\mathfrak{R}_{2\mu}| < [A_{2\mu} + (\nu - 2\mu) B_{2\mu}] h^{2\mu+3} M_{2\mu+2} \quad (2\mu \leq \lambda - 2), \end{cases}$$

wobei die Koeffizienten

$$A_0 = -\frac{\tau_1}{2}, \quad A_{2\mu-1} = \frac{2 \sigma_{2\mu+1}^*}{(2\mu+1)!}, \quad A_{2\mu} = \frac{2 \sigma_{2\mu+1}}{(2\mu+2)!},$$

$$B_{2\mu} = \frac{\sigma_{2\mu+1}}{(2\mu+1)!} + \frac{|\tau_{\mu+1}|}{(2\mu+2)!}$$

aus folgender Tabelle zu entnehmen sind.

(91)	x	A_x	B_x	x	x	A_x	B_x	x
	0	0·08333			6	0·00643	0·01073	6
	1	08333			7	01579		
	2	01111	0·05694	2	8	00506	00679	8
	3	03750			9	01185		
	4	00847	01427	4	10	00412	00531	10
	5	02274						

Übrigens werden in der Praxis kaum Quadraturformeln von höherer Ordnung als 10 benutzt.

Die Fehlerabschätzung durch die Ungleichungen (90) fordert, streng genommen, die Berechnung der Extremwerte von $f''(x), f^{IV}(x), \dots, f^{(2\mu+2)}(x)$ in $\langle 0, l \rangle$, da die Zahlen $M_2, M_4, \dots, M_{2\mu+2}$ die Schranken der Absolutbeträge dieser Ableitungen sind. Es ist aber sehr umständlich und praktisch meistens unmöglich solche Extremumaufgaben zu lösen (man kann ja wissen, dass all diese Ableitungen existieren, ohne dass man den expliziten Ausdruck der Funktion, geschweige denn den ihrer Ableitungen kennt). Das wäre sogar überflüssig, wenn man weiss, dass die Ableitungen keine starken Schwankungen aufweisen können, so dass ein Extremwert von $f^{(z)}(x)$ sich relativ wenig unterscheidet vom Werte derselben Ableitung an einer beliebigen Stelle, die höchstens um xh von der betreffenden Extremumstelle entfernt ist. Denn in dem Fall lassen sich $M_1, M_2, \dots, M_\lambda$ ihrer Grössenordnung nach aus dem Differenzenschema bestimmen²³. Dafür bedient man sich einer Beziehung zwischen Differenzen und Ableitungen, die aus dem Cauchyschen Satze folgt:

$$(92) \quad \Delta^x f(x) = h^z f^{(z)}(u) \quad (x < u < x + xh).$$

Man sieht also, dass in der entsprechender Kolumne des Differenzenschemas eine Kollektive von $\nu + 1 - x$ solcher Werte $h^z f^{(z)}(u_\alpha)$ ($\alpha = 0, 1, \dots, \nu - x$) vorhanden ist. Bezeichnet man mit O_x ihren Höchstbetrag, d. h. $|\Delta_\alpha^z| \leq O_x$, so erhält man anstatt (90)

$$(93) \quad \begin{cases} |\mathfrak{R}_0| \leq A_0 O_x, \\ |\mathfrak{R}_{2\mu-1}| \leq h \{A_{2\mu-1} O_{2\mu} + [A_{2\mu} + (\nu - 2\mu) B_{2\mu}] O_{2\mu+2}\}, \\ |\mathfrak{R}_{2\mu}| \leq h [A_{2\mu} + (\nu - 2\mu) B_{2\mu}] O_{2\mu+2}, \end{cases}$$

mit Koeffizienten aus derselben obigen Tabelle (91).

²³ Man vergl. hierzu Runge-König, 262.

Anmerkungen.

1. Aus (92) ist ersichtlich, warum die Differenzen einer mehrmals-differenzierbaren Funktion desto rascher mit wachsender Ordnung ihrem Betrage nach abnehmen, je kleiner die Argumentendifferenz h gewählt wird; Δ_α^x strebt ja mit abnehmendem h im wesentlichen wie h^x gegen Null.

2. Die Abschätzungen (93) sind besser verwendbar bei einer langen Tabelle (d. h. wenn ν gross im Vergleich zu x ist), vermöge deren Differenzenschemas der ganze Verlauf der Ableitungen klar genug zutagekommt. Da die Anzahl der im Differenzenschema vorhandenen Werte von $h^x f^{(x)}(u_{x,\alpha})$ bei der Vergrösserung von x abnimmt, so lässt sich die Grössenordnung von $\mathfrak{R}_{\nu-1}$ und \mathfrak{R}_ν durch das geschilderte Verfahren überhaupt nicht mehr bestimmen.

3. Vergleicht man den Ausdruck von \mathfrak{R}_x mit demjenigen von L_{x+1} und die Tabellen ihrer Koeffizienten miteinander, so merkt man noch folgendes: wenn h so klein ist, dass $h^2 M_{\beta+2} \ll M_\beta$, und wenn die Ableitungen von $f(x)$ sich relativ wenig in $\langle 0, l \rangle$ verändern, dann ist der Rest \mathfrak{R}_x eines Abschnittes der Laplaceschen Reihe ungefähr so gross wie das nächste weggelassene Glied L_{x+1} .

§ 21. Weiteres über die Abschätzung der Laplaceschen Restglieder.

Es fragt sich nun: inwieweit ist die am Anfang des vorigen Paragraphen vorausgesetzte Existenz der höheren Ableitungen wirklich notwendig für die durch (93) ausgedrückten Abschätzungen? Zur Beantwortung dieser Frage greife man auf §§ 11 und 16 zurück. Bei dem dort entwickelten Gedankengang war es wesentlich, dass $f(x)$ zweimal-differenzierbar war. Denn es handelte sich in den Restgliedern \mathfrak{R}_x um die Grössen $f_{2\mu}(o | a, a)$, $f_{2\mu}(\nu - 2\mu | b, b)$, $-f_{2\mu}[c | c + \mu h] + f_{2\mu}[c + h | c + \mu h + h]$ und $f_{2\mu+1}[d | d + e]$, die unter dieser Voraussetzung sicherlich existieren. Das sind ja gewisse spezielle Werte der Funktionen, deren Ausdrücke sich aus $f(x)$ und $f'(x)$ folgendermassen zusammensetzen:

(94)

$$f_{2\mu}(0 | x, x) = \frac{f'(x)}{\prod_{\alpha=0}^{2\mu} (x - \alpha h)} + \sum_{\alpha=0}^{2\mu} \frac{(-1)^\alpha}{\alpha! (2\mu - \alpha)! h^{2\mu}} \cdot \frac{f(\alpha h) - f(x)}{(x - \alpha h)^2}$$

$$f_{2\mu}(\nu - 2\mu | y, y) = \frac{f'(y)}{\prod_{\alpha=0}^{2\mu} (y - l + \alpha h)} + \sum_{\alpha=0}^{2\mu} \frac{(-1)^\alpha}{\alpha! (2\mu - \alpha)! h^{2\mu}} \cdot \frac{f(l - \alpha h) - f(y)}{(y - l + \alpha h)^2}$$

$$\Delta^1 f_{2\mu}[z | z + \mu h] = \Delta^1 \left[\frac{(-1)^\mu f'(z + \mu h)}{(\mu!)^2 h^{2\mu}} + \sum_{\alpha=0}^{\mu-1} (-1)^\alpha \cdot \frac{f(z + 2\mu h - \alpha h) - f(z + \alpha h)}{\alpha! (2\mu - \alpha)! (\mu - \alpha) h^{\mu+1}} \right]$$

$$f_{2\mu+1}[u | u + v] = \frac{f(u + v)}{\prod_{\alpha=0}^{2\mu+1} (v + \alpha h)} + \sum_{\alpha=0}^{2\mu+1} \frac{(-1)^\alpha f(u + \alpha h)}{\alpha! (2\mu + 1 - \alpha)! h^{2\mu+1}} \cdot \frac{1}{v - \alpha h}$$

Die Abschätzung der Restglieder läuft also auf die Berechnung der folgenden vier Maxima hinaus:

$$\text{Max } | f_{2\mu}(0 | x, x) | \text{ in } 0 \leq x \leq \mu h$$

$$\text{Max } | f_{2\mu}(\nu - 2\mu | y, y) | \text{ in } l - \mu h \leq y \leq l$$

$$\text{Max } | \Delta^1 f_{2\mu}[z | z + \mu h] | \text{ in } 0 \leq z \leq l - 2\mu h$$

$$\text{Max } | f_{2\mu+1}[u | u + v] | \text{ in } \begin{cases} 0 \leq u \leq l(2\mu + 1)h \\ \mu h \leq v \leq \mu h + h. \end{cases}$$

Da die Existenz von $f''(x)$ im abgeschlossenen Intervall $\langle 0, l \rangle$ die Beschränktheit der Funktion $f(x)$ selber und ihrer ersten und zweiten Ableitung nach sich zieht, so existieren auch die erwähnten Maxima. Wenn man die Funktion $f(x)$ explizit kennt, ist es prinzipiell durchaus möglich, diese Maxima zu berechnen und mittels ihrer die Restglieder abzuschätzen. Immerhin ist dies in der Praxis noch umständlicher und fast ebenso oft unausführbar wie die Berechnung der in § 20 angedeuteten Schranken M_α .

Deswegen ist es wichtig zu untersuchen, ob und wann die Grössen (94) sich ihrer Grössenordnung nach aus dem Differen-

zenschema bestimmen lassen. Dazu vergleiche man $f_{2\mu}(0|x, x)$ mit einer üblichen Steigung von $f(x)$ etwa folgendermassen.

- 1) Wenn $\frac{x}{h}$ nicht ganzzahlig ist, so gibt es ein γ derart, dass
- $$0 \leq \gamma h < x < \gamma h + h \leq \mu h.$$

Nach seiner Definition ist $(f(x, x, t) = \lim_{\substack{a \rightarrow x \\ b \rightarrow x}} f(a, b, t)$ für alle Werte von t ; daher unterscheidet sich $f(x, x, t)$ von $f(a, b, t)$ schon für $a = \gamma h$, $b = \gamma h + h$ beliebig wenig — welchen Wert aus $0 \leq t \leq l$ auch t annehmen mag —, sobald dementsprechend nur h hinreichend klein ist.

Was mit $f_{2\mu}(0|x, x)$ bezeichnet wurde, lässt sich nun als eine gewöhnliche Steigung 2μ -ter Ordnung der Funktion $f(x, x, t)$ von t auffassen; dagegen ist jedes $f_{2\mu+2}(a)$ (mit $a \leq \gamma$) eine Steigung 2μ -ter Ordnung der Funktion $f(\gamma h, \gamma h + h, t)$ von t . Falls alle solche Steigungen $f_{2\mu+2}(a)$ von gleicher Grössenordnung sind, hat $f_{2\mu}(0|x, x)$ dieselbe Grössenordnung, weil ja die Funktionen, deren 2μ -te Steigungen sie sind, bei genügend kleinem h beliebig genau übereinstimmen. Allerdings gilt unter den gemachten Voraussetzungen der Höchstbetrag der Grössen $f_{2\mu+2}(a)$ als eine wahrscheinliche Schranke für $f_{2\mu}(0|x, x)$, also

$$|f_{2\mu}(0|x, x)| \lesssim \frac{O_{2\mu+2}}{(2\mu+2)! h^{2\mu+2}}.$$

2) Im Falle $x = \gamma h$ gehe man von $f(x, x, x, t)$ und $f(x-h, x, x+h, t)$ aus; es besteht wegen der Existenz der zweiten Ableitung $f''(x)$ die Limesgleichung

$$f(x, x, x, t) = \lim_{\substack{a \rightarrow x \\ b \rightarrow x}} f(a, x, b, t)$$

für alle $t \neq \gamma h$ des Intervalls $0 \leq t \leq l$. Ferner lässt sich wieder die obige Schlussweise verwenden, mit dem Unterschied, dass $f_{2\mu}(0|x, x)$ und $f_{2\mu+2}(a)$ jetzt die $(2\mu-1)$ -ten Steigungen von $f(x, x, x, t)$ und $f(x-h, x, x+h, t)$ in bezug auf die unabhängige Variable t sind.

Mit den drei übrigen Grössen kann man ähnlich verfahren, wobei sich herausstellt, dass

$$|f_{2\mu}(u-2\mu | y, y)| \lesssim \frac{O_{2\mu+2}}{(2\mu+2)! h^{2\mu+2}},$$

$$|\Delta^1 f_{2\mu}[z | z + \mu h]| \lesssim \frac{O_{2\mu+2}}{(2\mu+1)! h^{2\mu+1}},$$

$$|f_{2\mu+1}[u | u + v]| \lesssim \frac{O_{2\mu+2}}{(2\mu+2)! h^{2\mu+2}}.$$

Es folgt also, dass die Abschätzungen (93) schon dann erlaubt sind, wenn man nur weiss, dass $f(x)$ zweimal differenzierbar und h klein genug ist. Ob dies letztere zutrifft, kann man auch aus dem Differenzenschema einigermassen erkennen. Wenn nämlich die ersten und zweiten Differenzen in je drei aufeinanderfolgenden Zeilen des Schemas sich voneinander nur wenig unterscheiden (relativ zu ihren Werten selber), dann kann man mit grosser Gewissheit erwarten, dass $f'(x)$ und $f''(x)$ in einem Intervall der Länge h (oder $2h$) nur geringe Schwankungen aufweisen, und daher $f(x, x, t)$ mit einem $f(\gamma h, \gamma h + h, t)$ gut genug übereinstimmt (anal. die anderen).

§ 22. Quadraturformeln vom Catalanschen Typus.

Wenn die Funktion von solcher Beschaffenheit ist, dass die Schranken ihrer Ableitungen sich leicht bestimmen lassen, so ist es möglich schon von vornherein zu sagen, mit einem wie langen Abschnitt der Quadraturreihe die verlangte Genauigkeit sicherlich (wenn überhaupt) erreichbar ist. In diesem Fall kann man sich die — zwar einfache, aber immerhin lange — Arbeit der Herstellung des Differenzenschemas gänzlich ersparen; dazu braucht man nur die erwähnten Abschnitte ein für allemal durch tabulierte Funktionswerte auszudrücken. Das geschieht mittels der Relation

$$\Delta_x^\lambda = \sum_{\alpha=0}^{\lambda} (-1)^{\lambda-\alpha} \binom{\lambda}{\alpha} f(xh + \alpha h).$$

So gelangt man zu einer Serie von Formeln, deren jede das Integral $\int_0^l f(x) dx$ durch ein lineares Aggregat (gewogene

Summe) der in Tabelle (86) enthaltenen Funktionswerte näherungsweise ausdrückt. Die Koeffizienten von $f(ah)$ — die „Gewichte“ — sind in solch einer Formel symmetrisch verteilt: $f(ah)$ hat dasselbe Gewicht wie $f(l-ah)$ ($\alpha = 0, 1, \dots, \nu$); dabei haben in der λ ten Formel nur die ersten $\lambda + 1$ und die letzten $\lambda + 1$ Gewichte von h verschiedene Werte.

Diese Formeln lassen sich einheitlich so schreiben²⁴ — der Funktionswert $f(ah)$ kurz mit y_α bezeichnet:

$$(95) \quad \int_0^{\nu h} f(x) dx = h \left\{ \sum_{\alpha=0}^{\lambda} C_\alpha^{(\lambda)} (y_\alpha + y_{\nu-\alpha}) + \sum_{\beta=\lambda+1}^{\nu-\lambda-1} y_\beta \right\} + \mathfrak{R}_\lambda$$

($\lambda = 0, 1, \dots, \nu$),

also mit Restgliedern, von denen die Abschätzungen (90) gelten.

Die Koeffizienten

$$C_\alpha^{(\lambda)} = 1 - \sum_{\gamma=\alpha}^{\lambda} \frac{\sigma_{\gamma+1}^*}{(\gamma+1)!} \cdot (-1)^{\gamma-\alpha} \cdot \binom{\gamma}{\alpha} = 1 + \frac{(-1)^{\alpha+1}}{\alpha!} \sum_{\gamma=\alpha}^{\lambda} \frac{|\sigma_{\gamma+1}^*|}{(\gamma+1)(\gamma-\alpha)!}$$

bilden eine Tabelle, deren Anfang lautet:

λ	$C_0^{(\lambda)}$	$C_1^{(\lambda)}$	$C_2^{(\lambda)}$	$C_3^{(\lambda)}$	$C_4^{(\lambda)}$	$C_5^{(\lambda)}$	$C_6^{(\lambda)}$
0	$\frac{1}{2}$						
1	$\frac{5}{12}$	$\frac{13}{12}$					
2	$\frac{3}{8}$	$\frac{7}{6}$	$\frac{23}{24}$				
3	$\frac{251}{720}$	$\frac{299}{240}$	$\frac{211}{240}$	$\frac{739}{720}$			
4	$\frac{95}{288}$	$\frac{317}{240}$	$\frac{23}{30}$	$\frac{793}{720}$	$\frac{157}{160}$		
5	$\frac{19\ 067}{60\ 480}$	$\frac{84\ 199}{60\ 480}$	$\frac{18\ 869}{30\ 240}$	$\frac{37\ 621}{30\ 240}$	$\frac{55\ 031}{60\ 480}$	$\frac{61\ 343}{60\ 480}$	
6	$\frac{5\ 257}{17\ 280}$	$\frac{22\ 081}{15\ 120}$	$\frac{54\ 851}{120\ 960}$	$\frac{103}{70}$	$\frac{89\ 437}{120\ 960}$	$\frac{16\ 967}{15\ 120}$	$\frac{23\ 917}{24\ 192}$

²⁴ Die Summe $\sum_{\beta=\alpha}^{\lambda}$ für $\alpha > \lambda$ ist so zu verstehen: $\sum_{\beta=\alpha}^{\lambda} = - \sum_{\beta=\lambda+1}^{\alpha-1}$, und

mithin $\sum_{\beta=\alpha}^{\alpha-1} = - \sum_{\beta=\alpha}^{\alpha-1} = 0$.

Die nullte Formel (95) — d. h. diejenige, die $\lambda = 0$ entspricht, — ist die Trapezregel; die zweite ist unter dem Namen Catalansche Formel ²⁵ bekannt. Da das allgemeine Herleitungsverfahren der Formeln (95) schon bei dieser zweiten in allem wesentlichen benutzt wird, so kann man die in (95) zusammengefassten Formeln alle mit dem Namen Catalans benennen — also: verallgemeinerte Catalansche Formeln.

Im Spezialfall $\lambda = \nu$ stellt die rechte Seite der Gleichung (95) die Newton-Cotesische Formel ν ter Ordnung und ihr Restglied dar. Eine Cotesische Formel pflegt man bekanntlich durch Integration (von 0 bis νh) aus der Identität

$$f(x) \equiv \sum_{\alpha=0}^{\nu} f_{\alpha}(0) \cdot Q_{\alpha}(0, x) + f_{\nu}(0 | x) \cdot Q_{\nu+1}(0, x)$$

abzuleiten. Die dieser Herleitung entsprechende direkte Berechnung der Koeffizienten $\mathfrak{C}_{\alpha}^{(\nu)}$ für die Cotesische Formel

$$\int_0^{\nu h} f(x) dx = h \sum_{\alpha=0}^{\nu} \mathfrak{C}_{\alpha}^{(\nu)} y_{\alpha} + R_{\nu}$$

ist recht mühsam ²⁶; aber auf Grund des Zusammenhanges der Cotesischen Formeln mit den allgemeinen Catalanschen ergeben sich diese Koeffizienten ohne nennenswerte Rechenoperationen aus der Tabelle von $C_{\alpha}^{(\lambda)}$:

$$\mathfrak{C}_{\alpha}^{(\nu)} = C_{\alpha}^{(\nu)} + C_{\nu-\alpha}^{(\nu)} - 1.$$

Daher sind die Cotesischen Koeffizienten verknüpft mit den Grössen σ_{α}^* durch die Relation

²⁵ Runge-Willers, 108.

²⁶ Man vergleiche dazu — bei G. Kowalewski, 58, 59 — die Vermutung G. Kowalewskis über die Berechnungsmethoden von R. Cotes, der erstmalig diese Koeffizienten aufgestellt hat.

Die Tabelle der Koeffizienten $\mathfrak{C}_{\alpha}^{(\nu)}$ befindet sich in vielen Lehrbüchern und Abhandlungen, vor allem in: R. Cotes, Über die Newtonsche Differentialmethode (deutsche Übersetzung — A. Kowalewski, 12—25), pag. 25.

$$\mathfrak{C}_\alpha^{(\nu)} = 1 - \frac{(-1)^\alpha}{\alpha!} \sum_{\beta=\alpha}^{\nu} \frac{|\sigma_{\beta+1}^*|}{(\beta+1)(\beta-\alpha)!} - \frac{(-1)^{\nu-\alpha}}{(\nu-\alpha)!} \sum_{\beta=\nu-\alpha}^{\nu} \frac{|\sigma_{\beta+1}^*|}{(\beta+1)(\beta+\alpha-\nu)!}$$

Die Restglieder R_ν lassen sich durch die Ungleichungen

$$\begin{aligned} |R_1| &< A_0 h^3 M_2 \\ |R_{2\mu}| &< A_{2\mu} h^{2\mu+3} M_{2\mu+2} \\ |R_{2\mu+1}| &< (A_{2\mu} + B_{2\mu}) h^{2\mu+3} M_{2\mu+2} \end{aligned}$$

abschätzen, wobei die Faktoren M_2, M_4, \dots dieselbe Bedeutung haben wie in § 20 und die Koeffizienten $A_0, A_2, A_4, \dots, B_2, B_4, \dots$ der Tabelle (91) zu entnehmen sind.

§ 23. Formeln vom Simpsonschen Typus. Ihr Genauigkeitsvergleich mit den Catalanischen Formeln.

ν sei durch z teilbar, $\nu = \gamma z$. Die ν Teile des Integrationsintervalls mögen in γ Gruppen zusammengefasst werden, je z aufeinanderfolgende zu einer Gruppe. Wendet man nun auf jede solche Intervallengruppe die z te Cotesische Formel an, so ergibt sich als Summe dieser Resultate eine Formel vom Simpsonschen Typus, und zwar diejenige von der Ordnung z . Derartige Formeln bieten an sich ziemlich wenig Interesse; für die Anwendung auf eine gegebene Tabelle hat man unter diesen Formeln entweder eine sehr beschränkte oder praktisch überhaupt keine Auswahl (wenn z. B. $\nu = 19$). Bei einer bestimmten Ordnung z (schon von $z = 3$ an) ist ja die Teilbarkeitsbedingung von ν meistens nicht erfüllt (die Folge der Teilbarkeitswahrscheinlichkeiten — entsprechend der Folge der Ordnungen $z = 1, 2, 3, \dots$ — lautet $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \dots$).

Diese Schwierigkeit wird überwunden durch Hinzunahme eines passenden Zusatzgliedes, welches dem Werte des Integrals von $f(x)$ in etwaigen übrigbleibenden Teilintervallen Rechnung trägt. Für eine Formel von der Ordnung z würde man $z-1$ solche Zusatzglieder benötigen.

Die Formel zweiter Ordnung (die übliche Simpsonsche) bedarf nur eines Zusatzgliedes — für den Fall, dass ν ungerade ist. Als ein solches Zusatzglied wird gewöhnlich ein von Mansion herrührender Ausdruck benutzt, den man Fünf-Acht-Regel zu

nennen pflegt²⁷. Die Genauigkeitsbetrachtung für die Simpsonsche Formel samt ihrem zusätzlichen Fünf-Acht-Glied führt zu folgender Relation:

$$\int_0^{(2\gamma+1)h} f(x) dx = \frac{h}{3} \left(y_0 + y_{2\gamma} + 4 \sum_{\alpha=1}^{\gamma} y_{2\alpha-1} + 2 \sum_{\alpha=1}^{\gamma-1} y_{2\alpha} \right) + \frac{h}{12} (5 y_{2\gamma+1} + 8 y_{2\gamma} - y_{2\gamma-1}) - \gamma \cdot \frac{h^5}{90} f^{IV}(t) + \frac{1}{24} h^4 f'''(u)$$

(mit $0 < t < 2\gamma h$ und $2\gamma h - h < u < 2\gamma h + h$).

Eine fast ebenso einfache, aber im allgemeinen erheblich genauere Ergänzung der Simpsonschen Formel für den Fall $\nu = 2\gamma + 1$ erhält man dadurch, dass man irgendwo in der Mitte des Integrationsintervalls ein Stück mit der Länge h als den überzähligen Teil auffasst und dort die Funktion $f(x)$ mittels eines Interpolationspolynoms dritten Grades annähert. Die so ergänzte Formel (wobei als überzähliger Teil das dritte Teilintervall gewählt ist) und ihr Restausdruck ergeben die Identität

$$\int_0^{(2\gamma+1)h} f(x) dx = \frac{h}{3} \left\{ y_0 + y_{2\gamma+1} + \frac{1}{8} [31(y_1 + y_4) + 21(y_2 + y_3)] + \sum_{\alpha=3}^{\gamma} (2 y_{2\alpha-1} + 4 y_{2\alpha}) \right\} - \gamma \cdot \frac{h^5}{90} f^{IV}(v) + \frac{11}{720} h^5 f^{IV}(w)$$

(mit $0 < v < 2\gamma h + h$ und $h < w < 4h$).

Wenn $f(x)$ etwa ein Polynom dritten Grades ist, dann gibt die zuletzt erwähnte Formel noch einen genauen Wert des Integrals, während die Simpsonsche Formel mit dem Fünf-Acht-Glied schon als ungenau erscheint.

Auf die Zusatzglieder der Formeln höherer Ordnungen braucht hier nicht näher eingegangen zu werden. Was ausserdem noch einige Wichtigkeit hat, ist die Frage, welche Formeln für genauer zu halten sind, die Simpsonschen oder die Catalanschen. Der Einfachheit halber werde vorausgesetzt, dass die betreffende Simpsonsche Formel ohne irgendein Zusatzglied an-

²⁷ Runge-Willers, 106.

wendbar ist. Damit der Vergleich auf einem wohlbestimmten Grunde geschehe, werde zudem der Fall in Betrachtung gezogen, dass die im Simpsonschen Restglied enthaltene Ableitung im Integrationsintervall konstant ist (oder sich ohne beträchtlichen Fehler durch eine Konstante und alle höheren Ableitungen sich durch Null ersetzen lassen).

Für $x = 2\mu$ (also $v = \gamma \cdot 2\mu$) lautet das Simpsonsche Restglied (Argument der Ableitung weggelassen):

$$R_{2\mu} = -\gamma \cdot \frac{2 \varrho_{2\mu+1}}{(2\mu+2)!} h^{2\mu+3} f^{(2\mu+2)} = -\gamma \cdot \left[\frac{\sigma_{2\mu+2}^*}{(2\mu+2)!} + \frac{2 \sigma_{2\mu+3}^*}{(2\mu+3)!} \right] h^{2\mu+3} f^{(2\mu+2)}$$

und das Catalansche:

$$\begin{aligned} \mathfrak{R}_{2\mu} &= - \left\{ \frac{2 \varrho_{2\mu+1}}{(2\mu+2)!} + (v-2\mu) \left[\frac{\sigma_{2\mu+1}}{(2\mu+1)!} - \frac{\tau_{\mu+1}}{(2\mu+2)!} \right] \right\} h^{2\mu+3} f^{(2\mu+2)} = \\ &= \left\{ - \left[\frac{\sigma_{2\mu+2}^*}{(2\mu+2)!} + \frac{2 \sigma_{2\mu+3}^*}{(2\mu+3)!} \right] + (\gamma-1) \cdot 2\mu \cdot \frac{\sigma_{2\mu+2}^*}{(2\mu+2)!} \right\} h^{2\mu+3} f^{(2\mu+2)}. \end{aligned}$$

Im Falle $x = 2\mu - 1$ resp.

$$R_{2\mu-1} = -\gamma \left[\frac{2 \varrho_{2\mu-1}}{(2\mu)!} + \frac{\sigma_{2\mu-1}}{(2\mu-1)!} - \frac{\tau_{\mu}}{(2\mu)!} \right] h^{2\mu+1} f^{(2\mu)} = -\gamma \cdot \frac{2 \sigma_{2\mu+1}^*}{(2\mu+1)!} h^{2\mu+1} f^{(2\mu)}$$

und

$$\mathfrak{R}_{2\mu-1} = - \frac{2 \sigma_{2\mu+1}^*}{(2\mu+1)!} h^{2\mu+1} f^{(2\mu)}.$$

Aus den am Anfang des § 12 hingeschriebenen Ungleichungen folgt:

$$\frac{2\mu-1}{2\mu+3} \left| \sigma_{2\mu+2}^* \right| < \left| \sigma_{2\mu+2}^* + \frac{2}{2\mu+3} \sigma_{2\mu+3}^* \right| < \frac{2\mu+1}{2\mu+3} \left| \sigma_{2\mu+2}^* \right|;$$

also sind die Simpsonschen Formeln von geraden Ordnungen tatsächlich im allgemeinen etwas genauer als die entsprechenden Catalanschen. Bei ungeraden Ordnungen liegen die Verhältnisse aber umgekehrt.

Übrigens sind es interessante und bemerkenswerte Tatsachen, die sich hierdurch klargestellt haben:

1) Catalan hat versucht die Simpsonsche Formel zu verbessern²⁸ — und ist zu einer Formel gelangt, die für die Anwendung zwar bequemer und geschmeidiger, aber immerhin etwas ungenauer ist als die Simpsonsche;

2) die „pulcherrima et utilissima regula“ Newtons²⁹ ist keine ausgezeichnete Quadraturformel dritter Ordnung — die allgemeine Catalansche Formel gleicher Ordnung hat ausser dem Vorteil der bequemerer Anwendbarkeit noch eine merklich grössere Genauigkeit.

§ 24. Historisches zum Anwendbarkeitsproblem der Quadraturformeln.

Zum Schluss möchte ich bemerken, dass die in dieser Arbeit benutzte Methode die Restglieder (§§ 10, 11) zu behandeln im wesentlichen von Steffensen³⁰ ausgebaut worden ist, ihre Anfänge aber bis Markoff, Biermann³¹ und Nielsen zurückreichen. Ein knapper Überblick über die historische Entwicklung der Anwendbarkeitsbedingungen der mechanischen Quadratur würde die Bedeutung der Methode Steffensens hervorheben und überhaupt für den heutigen Stand der Sache einigen Hintergrund liefern.

Nachdem gegen Ende des 17. Jahrhunderts die allgemeine Idee der Interpolation und der daran geknüpften mechanischen Quadratur gewonnen war, beschäftigte man sich begeistert mit der Zusammensetzung der „schönen und nützlichen Regeln“, die das gesuchte Integral „mit um so grösserer Genauigkeit liefern, je mehr Funktionswerte in dieser Operation benutzt werden“. Aber es sollte noch lange dauern, bis das Bedürfnis empfunden wurde, diese Genauigkeit wirklich irgendwie abzuschätzen.

Erst rund ein Jahrhundert später machte sich das Bestreben geltend, die Theorie der mechanischen Quadratur durch die Methoden der Fehlerabschätzung zu begründen. Den ersten systematischen und allgemeinen Versuch in dieser Richtung hat Gauss gemacht³². Seine Gedanken wurden von Encke weiter ausge-

²⁸ *Runge-Willers*, 108.

²⁹ *G. Kowalewski*, 60.

³⁰ *Steffensen* [2].

³¹ *Biermann*, 170—178.

³² C. E. Gauss, Neue Methode zur näherungsweise Auffindung von Integralwerten (1814), — in: *A. Kowalewski*, 26—62.

baut³³. Diese Untersuchungen gingen von der Annahme aus, dass die zu integrierende Funktion sich in eine im abgeschlossenen Integrationsintervall konvergente Potenzreihe entwickeln lässt. Wie nachher mehrfach bemerkt worden ist, entspricht eine derartige Voraussetzung keineswegs dem Wesen der Sache³⁴. Nicht nur wird dadurch die Klasse der Funktionen, auf die die Methode des mechanischen Quadrierens mit Gewissheit angewendet werden kann, wesentlich und dabei nicht einmal naturgemäss eingeschränkt, — sondern diese Annahme selber gewährleistet auch noch keine strenge Anwendbarkeit der zur Fehlerabschätzung errichteten Verfahren. Denn die Potenzreihe soll verhältnismässig rasch konvergieren, damit man sich im Fehlerausdruck, der in Form einer Reihe erscheint, mit ein paar ersten Gliedern begnügen könne.

Mit Markoff³⁵ beginnt eine Wendung in der Genauigkeitsbehandlung der Interpolation und Quadratur. Ausgehend von der Cauchyschen Form des Interpolationsrestgliedes, sucht Markoff den Fehler der Quadraturformel durch eine höhere Ableitung auszudrücken. Steffensen hat diese Behandlungsweise vervollständigt und mit restlos befriedigender Einfachheit und Strenge bei der Cotesischen Formelserie durchgeführt. Walther³⁶ hat dieselbe Methode auf die Untersuchung der Maclaurinschen Quadraturformeln übertragen.

Obwohl über die Voraussetzungen, unter denen die numerischen Quadraturmethoden angewendet werden können, seit den zuletzt erwähnten Untersuchungen allgemein schon einige Klarheit herrscht, gibt es noch später erschienene Lehrbücher, in denen Quadraturformeln als unendliche Reihen auftreten, ohne dass über ihre Restglieder ein Wort verloren wird³⁷.

³³ *Encke*, 103—116.

³⁴ *Walther*, 148; *Nörhund*, 205.

³⁵ *Markoff*, 50—60.

³⁶ *Walther*, 152—188.

³⁷ Z. B. *Lindow*, 64—75; besonders charakteristisch in dieser Hinsicht ist auch seine „Einleitende Bemerkung“, pag. 64.

Verzeichnis der zitierten Literatur.

- Biermann* O., Vorlesungen über mathematische Näherungsmethoden. Braunschweig 1905.
- Cauchy* A., Sur les fonctions interpolaires. Oeuvres, 1^e série, tome V, pag. 409–424, Paris 1885.
- Charlier* C. L., Die Mechanik des Himmels. II. Band, Leipzig 1907.
- Clausen* T., Über mechanische Quadraturen. Journal für die reine und angewandte Mathematik (Crelle's Journal), Band 6, pag. 287–289, Berlin 1830.
- Encke* J. F., Über die Cotes'schen Integrations-Faktoren. Gesammelte mathematische und astronomische Abhandlungen, I. Band, pag. 100–124, Berlin 1888.
- Kowalewski* A., Newton. Cotes. Gauss. Jacobi. Vier grundlegende Abhandlungen über Interpolation und genäherte Quadratur. Leipzig 1917.
- Kowalewski* G., Interpolation und genäherte Quadratur. Eine Ergänzung zu den Lehrbüchern der Differential- und Integralrechnung. Leipzig und Berlin 1932.
- Laplace* M., Mécanique céleste. Oeuvres, tome IV, Paris 1880.
- Lindow* M., Numerische Infinitesimalrechnung. Berlin und Bonn 1928.
- Markoff* A. A., Differenzenrechnung. Deutsche Übersetzung von Th. Friesendorf und H. Prümm. Leipzig 1896.
- Nielsen* H. P., Über die Restglieder einiger Formeln für mechanische Quadratur. Arkiv för Matematik, Astronomi och Fysik, Band 4, Nr. 21, Uppsala & Stockholm 1908.
- Nörlund* N.-E., Vorlesungen über Differenzenrechnung. Berlin 1924.
- „ [2], Leçons sur les séries d'interpolation. Paris 1926.
- Runge* C. und *König* H., Vorlesungen über numerisches Rechnen. Berlin 1924.
- Runge* C. und *Willers* A., Numerische und graphische Quadratur und Integration gewöhnlicher und partieller Differentialgleichungen. Enzyklopädie der math. Wissenschaften II C₂, pag. 47–179, Leipzig 1915.
- Steffensen* J. F., Interpolation. Baltimore 1927.
- „ [2], On the Remainder Form of Certain Formulas of Mechanical Quadrature. Skandinavisk Aktuarietidskrift 4, pag. 201–209, Uppsala 1921.
- Thiele* T. N., Interpolationsrechnung. Leipzig 1909.
- Walther* A., Zur numerischen Integration. Skandinavisk Aktuarietidskrift 8, pag. 148–162, Uppsala 1925.
- Whittaker* E. T. and *Robinson* G., The Calculus of Observations. 2^d edition, London and Glasgow 1929.

Inhaltsverzeichnis.

Vorwort	pag.	3
Einleitung (§§ 1, 2, 3)		4
Erstes Kapitel. Eine Kette von Interpolationsanordnungen und die entsprechende Quadraturreihe.		
§ 4. Vorbereitendes		8
5. Erzeugende Funktionenfolge für die Interpolationenkette und die Quadraturreihe		10
6. Allgemeine Glieder der Quadraturreihe		12
7. Vorzeichen der Koeffizienten		15
8. Weitere Umformung der allgemeinen Glieder		17
9. Restglieder		19
10. Umformungssätze für Restglieder		21
11. Herleitung der brauchbareren Restgliederausdrücke		25
12. Koeffizientensätze		30
13. Tabellen der Koeffizienten		35
Zweites Kapitel. Die Laplacesche Quadraturreihe.		
§ 14. Erzeugende Funktionenfolge		37
15. Umformung der Glieder L_{α}		38
16. Restglieder		41
17. Die Quadraturreihe mit den von Laplace herrührenden Ausdrücken der Glieder L_{α}		44
18. Historische Bemerkungen		45
Drittes Kapitel. Über die Anwendung der Quadraturformeln.		
§ 19. Allgemeines		46
20. Über die Anwendung der Laplaceschen Reihe		49
21. Weiteres über die Abschätzung der Laplaceschen Restglieder		52
22. Quadraturformeln vom Catalanschen Typus		55
23. Formeln vom Simpsonschen Typus. Ihr Genauigkeitsvergleich mit den Catalanschen Formeln		58
24. Historisches zum Anwendbarkeitsproblem der Quadraturformeln		61
Verzeichnis der zitierten Literatur		63