

EINIGE BEMERKUNGEN ÜBER VIERPUNKTAXIOME

VON

J. NUUT

TARTU 1932

In seiner Abhandlung über die Grundlagen der Geometrie „*Geometria alused*“¹⁾ entwickelt Prof. J. Sarv ein System, in welchem u. a. der Begriff der Geraden aus dem Fundamentalbegriff „zwischen“ mit Hilfe von 7 linearen Axiomen abgeleitet wird. Diese Axiome werden meines Erachtens einer Analyse besser zugänglich, wenn man ihren Inhalt in symbolischer Schreibweise präzisiert. Ich schreibe $a \vee bc$ für die Aussage „der Punkt a liegt zwischen dem Punkte b und dem Punkte c “ und schreibe andererseits $a \wedge bc$ für die kontradiktorisch entgegengesetzte Aussage „der Punkt a liegt nicht zwischen dem Punkte b und dem Punkte c “; hierbei ist zu beachten, dass die letztgenannte Nichtzwischenlage sowohl dadurch zustande kommen kann, dass a nicht der Strecke bc , als auch dadurch, dass a überhaupt nicht der Geraden bc angehört. Unter Beibehaltung der von J. Sarv verwendeten Numeration lassen sich dann die erwähnten 7 Axiome sinngemäss etwa folgendermassen wiedergeben:

- II. Bei vorgegebenen a, b existiert stets c so, dass $b \vee ca$ gilt.
- III. Wenn $b \vee ca$, so auch $b \vee ac$.
- IV. Wenn $b \vee ac$, so $c \wedge ab$.
- V. Wenn $b \vee ac$ und $c \vee ad$, so besteht $c \vee bd$.
- VI. Wenn $b \vee ac$ und $c \vee bd$, so besteht $c \vee ad$.
- VII. Wenn $b \vee ac$ und $b \vee ad$, dabei noch $c \wedge bd$, so besteht $d \vee bc$.
- VIII. Wenn $b \vee ad$ und $c \vee ad$, dabei noch $b \wedge ac$, so besteht $c \vee ab$.

Hierbei ist den Axiomen VII und VIII statt der von J. Sarv verwendeten Entweder-oder-Fassung die analytisch bequemere definite Form gegeben.

¹⁾ Acta et Commentationes Univ. Tartuensis A XIX.4, 1931.

Die 4 letzten Axiome V—VIII enthalten Behauptungen über Lagenbeziehungen in Punktquadrupeln; es handelt sich also um „Vierpunktaxiome“. Die hier zitierten Vierpunktaxiome stammen inhaltlich von E. H. Moore²⁾.

Das System II—VIII enthält sicherlich überzählige Aussagen. Um dies einzusehen, führe man zunächst den Begriff des kollinearen Punkttripels (der kollinearen Lage dreier Punkte) auf Grund folgender Definition ein:

Ein Punkttripel abc ist kollinear, wenn es möglich ist, diese Punkte so zu bezeichnen, dass $a \vee bc$ gilt.

Sind die Bezeichnungen der Punkte von vornherein fixiert, so enthält die Behauptung $a \vee bc$ offenbar mehr als die bloße Feststellung der Tatsache, dass das Tripel abc eine kollineare Lage hat. Nun ist aber leicht einzusehen, dass VIII durch das dementsprechend weniger fordernde Axiom

VIII*. Wenn $b \vee ad$ und $c \vee ad$, so bildet abc ein kollineares Tripel

ersetzt werden darf. Aus II—VII, VIII* folgt nämlich die Gültigkeit von VIII, denn $a \vee bc$ ist unter den in VIII genannten Voraussetzungen sicher nicht statthaft: $b \vee ad$, $a \vee bc$ würde ja nach III und VI $a \vee cd$ zur Folge haben, was aber der in VIII enthaltenen Annahme $c \vee ad$ wegen IV widerspricht.

Es lässt sich aber auch, unter Beibehaltung sämtlicher übriger Axiome, VI durch das weniger fordernde Axiom

VI*. Wenn $b \vee ac$ und $c \vee bd$, so bildet acd ein kollineares Tripel

ersetzen. Die Annahme $a \vee cd$ würde nämlich bei Verknüpfung mit $c \vee bd$, nach III und V, $c \vee ab$ zur Folge haben, was der Voraussetzung $b \vee ac$, wegen IV, widerspricht. Andererseits würde die Annahme $d \vee ac$ durch Verknüpfung mit $b \vee ac$ und $b \wedge cd$, wegen III und VIII, notwendigerweise $d \vee bc$ bedingen, im Widerspruch zu der in VI enthaltenen Voraussetzung $c \vee bd$. Als letzte Möglichkeit verbleibt also bloss $c \vee ad$, d. h. VI muss richtig sein.

²⁾ Vgl. J. Sary, a. a. O., S. 3, Fussnote 2.

Die Vierpunktaxiome V—VIII lassen noch in anderer Hinsicht zu wünschen übrig: sie sind schwer im Gedächtnis zu behalten. Es ist aber möglich, sie durch zwei leicht memorierbare zu ersetzen. Das erste, welches ich mit A bezeichnen will, lautet:

A . Wenn abc und abd kollineare Tripel sind, so ist auch das Tripel acd kollinear.

Zwei kollineare Tripel abc und abd lassen sich nach II—IV stets angeben: man nehme a, b beliebig, bestimme nach II hierauf c so, dass $b \vee ca$, und bestimme d so, dass $a \vee bd$ gilt, — dann sind, wegen III, IV — c, d, a, b untereinander sicher verschieden, und die Tripel abc, abd sind beide kollinear. Aus A folgt nun, dass im so gebildeten Quadrupel $abcd$ jedes Tripel kollineare Lage hat. Ein Quadrupel von solcher Beschaffenheit soll ein kollineares Quadrupel heißen. Es existieren also sicherlich kollineare Quadrupel.

Dem zweiten Axiom, das ich mit B bezeichne, gebe ich die folgende Fassung:

B . Es existiert kein kollineares Quadrupel $abcd$, in welchem die 5 Lagenbeziehungen $d \wedge ac, d \wedge ca, d \wedge bc, d \wedge cb, d \vee ab$ gleichzeitig gültig wären³⁾.

Wird III vorausgeschickt, so sind unter den 5 aufgezählten Lagenbeziehungen 2 überzählig. Man kann dann dem Axiom B auch die kürzere positive Formulierung geben:

Für ein kollineares Quadrupel folgt aus $d \wedge ac, d \wedge bc$ stets $d \wedge ab$.

Diese Fassung ist leicht zu behalten, sobald man beachtet, dass in den drei symbolisch geschriebenen Lagenbeziehungen rechts jede der drei Paarkombinationen aus drei Elementen, und links immer das vierte Element auftritt.

Als Folgerung aus B ergibt sich sofort für ein kollineares Quadrupel:

Wenn $d \vee ab, d \wedge ac$, so gilt sicher $d \vee bc$.

³⁾ Vgl. Axiom II_1' in der Arbeit des Verfassers: „Topologische Grundlagen des Zahlbegriffs“ — Acta et Comm. Univ. Tartuensis A XV.5, 1929, S. 13 und 20.

Aber auch die Umkehrung dieses letzteren Satzes ist richtig:

Wenn $d \vee ab$, $d \vee bc$, so gilt sicher $d \wedge ac$.

Wegen A sind hierbei die Tripel acd , abc sicher kollinear. Der Beweis kann demnach folgendermassen geführt werden: wäre $d \vee ab$, $d \vee bc$, $d \vee ac$ möglich, so dürfte infolge der Symmetrie $a \vee bc$ angenommen werden. Verknüpft man letzteres mit $a \wedge cd$, so folgt mittels B sofort $a \vee bd$, was aber doch der Voraussetzung $d \vee ab$ widerspricht.

Die Gesamtheit der drei auf kollineare Quadrupel bezüglichen Aussagen

Aus $d \wedge ac$, $d \wedge bc$ folgt $d \wedge ab$;
 Aus $d \vee ac$, $d \wedge bc$ folgt $d \vee ab$;
 Aus $d \vee ac$, $d \vee bc$ folgt $d \wedge ab$

bildet den für die Untersuchung linearer Lagenbeziehungen fundamentalen Vierpunktsatz⁴⁾.

Aus dem Axiomensystem II—IV, A , B lässt sich nun die Richtigkeit der Behauptungen V—VIII ableiten.

Es sei $b \vee ac$, $c \vee ad$. Infolge A ist dann $abcd$ ein kollineares Quadrupel. Aus $c \vee ad$, $c \wedge ab$ folgt nach dem Vierpunktsatz nun sofort $c \vee bd$, also die Behauptung V.

Es sei $b \vee ac$, $c \vee bd$; wiederum ist das Quadrupel sicher kollinear. Aus $c \wedge ab$, $c \vee bd$ folgt nach dem Vierpunktsatz $c \vee ad$, also die Behauptung VI.

Es sei $b \vee ac$, $b \vee ad$, $c \wedge bd$. Das Quadrupel ist nach A jedenfalls kollinear. Wäre nun $d \wedge bc$, so hätte man aus $d \wedge ab$, $d \wedge bc$ auf Grund des Vierpunktsatzes die Folgerung $d \wedge ac$, mithin, wegen der kollinearen Lage des Tripels acd , entweder $c \vee ad$ oder $a \vee cd$. Die erste Annahme ergibt nach dem Vierpunktsatz aus $c \vee ad$, $c \wedge ab$ die Beziehung $c \vee bd$, was offenbar $c \wedge bd$ widerspricht. Die zweite Annahme führt über $a \vee cd$, $a \wedge bc$ auf analoge Weise zu $a \vee bd$, was aber der Voraussetzung $b \vee ad$ widerspricht. Die Annahme $d \wedge bc$ ist demnach im kollinearen Tripel bcd überhaupt nicht statthaft; damit ist VII bewiesen.

⁴⁾ Vgl. „Topologische Grundlagen des Zahlbegriffs“, S. 14—19.

Es sei endlich $b \vee ad$, $c \vee ad$, $b \wedge ac$. Wieder ist das Quadrupel kollinear. Wäre nun $c \wedge ab$, so folgte aus $c \vee ad$, $c \wedge ab$ nach dem Vierpunktsatz zunächst $c \vee bd$, also $b \wedge cd$. Infolge $b \vee ad$ führt letzteres aber wiederum mit Hilfe des Vierpunktsatzes zu $b \vee ac$, im Widerspruch mit der Voraussetzung $b \wedge ac$. Die Annahme $c \wedge ab$ ist also unter den erwähnten Voraussetzungen für das kollineare Tripel abc nicht gestattet, — dies ist aber gerade die Behauptung VIII.

Die Axiome II—IV, A , B sind untereinander absolut unabhängig. Dies lässt sich auf Grund entsprechend konstruierter Anschauungssubstrate erkennen.

Man erhält nämlich z. B. eine Geometrie, wo II nicht gilt, III, IV, A , B aber wohl gelten, wenn man als Punkte ausschliesslich die Punkte einer abgeschlossenen Strecke ab (also die Endpunkte a , b mit einbegriffen) ansieht, und dabei die Zwischenlage im gewöhnlichen visuellen Sinne definiert. Es existiert dann offenbar kein c , für welches $b \vee ca$ gelten würde, während III, IV, A , B in vollem Masse ihre Gültigkeit beibehalten.

Eine Geometrie, in der III nicht gilt, II, IV, A , B aber wohl gelten, wird erhalten, wenn man als Punkte etwa die Gesamtheit aller rationalen Zahlen ansieht, und dabei $a \vee bc$ dann und nur dann gelten lässt, wenn entweder $b < a < c$, $c - a \leq a - b$, oder aber $b > a > c$, $b - a \geq a - c$ erfüllt ist. Diese Zwischenlagen-Definition ist offenbar im allgemeinen nicht kommutativ, die Forderung III ist also nicht erfüllt. Die übrigen Axiome behalten ihre Gültigkeit. Das Axiom B ist dabei natürlich in der allgemeinen, die Nichtkommutativität berücksichtigenden Fassung anzuwenden ⁵⁾.

Um eine Geometrie zu erhalten, wo nur IV nicht gilt, braucht man sich bloss die Gesamtheit der Punkte einer einfachen geschlossenen Kurve zu denken, bei der dann visuell jeder Punkt zwischen jeden zwei anderen gelegen erscheint. II, III, A , B behalten ihre Richtigkeit.

Um die Gültigkeit des Axioms A auszuschalten, nehme man sämtliche Punkte einer Ebene, resp. komplexe Zahlen, und definiere im allgemeinen die Zwischenlage auf gewöhnliche, visuell vorgeschriebene Weise; ausserdem mögen aber stets

⁵⁾ Vgl. „Topologische Grundlagen des Zahlbegriffs“, S. 20.

auch noch Punkttupel von der Form $x_1 + yi$, $x_2 + yi$, $x_3 + (y+1)i$ und auch solche von der Form $x_1 + yi$, $x_2 + (y+1)i$, $x_3 + (y+1)i$ als kollineare angesehen werden, und zwar soll der jeweilig zweitgenannte Punkt als zwischenliegender gelten, sobald im ersten Tupel $x_2 > x_1$ und im zweiten Tupel $x_2 < x_3$ besteht. Diese Definition lässt sich so auffassen, dass die Axiome II, III, IV erfüllt werden, das Axiom *A* aber nicht: es sind z. B. im Quadrupel $a \equiv -1 - i$, $b \equiv -1$, $c \equiv +1$, $d \equiv 1 + i$ die beiden Tupel abc und bcd kollinear, die Tupel abd und acd dagegen nicht. Sobald jedoch bei den getroffenen Vereinbarungen 4 Punkte ein kollineares Quadrupel liefern, ist *B* erfüllt.

Man erhält endlich eine Geometrie, in der *B* nicht gilt, auf folgende Weise: als Punkte bezeichne man die Gesamtheit der reellen Zahlen; diese zerfallen in 3 Kategorien, nämlich in ganze Zahlen (*g*), in von ganzen Zahlen verschiedene rationale Brüche (*r*) und in irrationale Zahlen (*i*). Die Zwischenlagendefinition möge nun dahin lauten, dass die gewöhnliche visuelle Auffassung zu gelten hat, sobald im Tupel mindestens 2 Punkte ein und derselben Kategorie angehören; sobald aber im Tupel sämtliche 3 Kategorien vertreten sind, soll stets $g \vee r i$ (kommutativ) gelten. Die Behauptungen II–IV, *A* sind nun richtig, *B* dagegen falsch, wie das Beispiel $a \equiv 1$, $b \equiv 2$, $c \equiv \sqrt{2}$, $d \equiv \frac{1}{2}$ zeigt: hier gilt auf Grund der getroffenen Vereinbarungen $d \vee ab$, $d \wedge ac$, $d \wedge bc$ ⁶⁾.

Damit ist die gegenseitige absolute Unabhängigkeit im System II–IV, *A*, *B* erwiesen.

Es fällt nicht schwer sich zu überzeugen, dass dieses System mit dem von J. Sarv benutzten Axiomkomplex II–VIII gleichwertig ist, indem nämlich die Aussagen *A*, *B* im letzteren als Folgerungen enthalten sind. Man kann dies zunächst für *A* folgendermassen nachweisen:

Es seien abc und abd zwei kollineare Tupel. Auf Grund des Verhaltens des gemeinsamen Punktepaares ab ergibt sich unter Berücksichtigung der Symmetrie folgende ausreichende Disjunktion:

- 1) $c \vee ab$, $a \vee bd$; 2) $a \vee bc$, $b \vee ad$; 3) $a \vee bc$, $a \vee bd$;
- 4) $c \vee ab$, $d \vee ab$.

⁶⁾ Vgl. „Topologische Grundlagen des Zahlbegriffs“, S. 13.

Unter beständiger Anwendung von III folgt nun:

Für 1) aus V zunächst $a \vee cd$, also die kollineare Lage des Tripels acd ; aus $a \vee cd$, $c \vee ab$ folgt mittels VI $c \vee bd$, also die kollineare Lage des Tripels bcd .

Für 2) aus VI sowohl $b \vee cd$, also die kollineare Lage von bcd , als auch $a \vee cd$, d. h. die kollineare Lage des Tripels acd .

Für 3) aus VII zunächst die kollineare Lage des Tripels acd , und zwar darf aus Symmetriegründen $c \vee ad$ angenommen werden. Hierauf ergibt aber die Kombination $a \vee bc$, $c \vee ad$ nach VI die Folgerung $c \vee bd$, d. h. auch bcd erweist sich als ein kollineares Tripel.

Für 4) aus VIII die kollineare Lage sowohl des Tripels acd als auch des Tripels bcd .

Damit ist der Beweis für die Gültigkeit von A im System II—VIII erbracht⁷⁾. Beachtenswert ist, dass in diesem Beweise die Axiome II und IV nicht benutzt sind; es ist demnach A eine Folge von III, V—VIII allein.

Nun lässt sich aus II—VIII aber auch B folgern. Aus II—IV, A resultiert zunächst, wie schon vorher gezeigt, die Existenz kollinearer Quadrupel. Es sei dann $abcd$ ein solches kollineares Quadrupel, dabei $d \wedge ac$, $d \wedge bc$. Unter Bezugnahme auf III genügt es nun 3 Möglichkeiten zu unterscheiden:

- 1) $a \vee cd$, $b \vee cd$; 2) $a \vee cd$, $c \vee bd$; 3) $c \vee ad$, $c \vee bd$.

Im Falle 1) hat man nach VIII entweder $a \vee bd$ oder $b \vee ad$, jedenfalls also $d \wedge ab$, im Einklang mit B .

Im Falle 2) ist wegen V zunächst $c \vee ab$; wird dies mit $a \vee cd$ verknüpft, so ergibt sich nach VI $a \vee bd$, also jedenfalls wieder $d \wedge ab$.

Im Falle 3) ist $d \vee ab$ unmöglich, denn $c \vee ad$, $d \vee ab$ hätte nach V $d \vee bc$ zur Folge, was aber der Voraussetzung $c \vee bd$ widerspricht. Es muss also wiederum $d \wedge ab$ sein.

Damit ist B bewiesen. Da VII beim Beweise keine Verwendung findet, so ist B eine Folge von II—VI, VIII allein. Zum Nachweis der Existenz kollinearer Quadrupel bedarf man allerdings auch noch des Axioms VII.

⁷⁾ J. Sarv verwendet den Satz A zum Beweis der Fundamenteigenschaft der Geraden (a. a. O., S. 5), ohne jedoch A aus dem benutzten Axiomensystem explizite abzuleiten.

Auf Grund obiger Ausführungen sind die Systeme II—VIII und II—IV, A , B äquivalent, m. a. W., die 2 Vierpunktaxiome A , B sind mit den 4 Vierpunktaxiomen V—VIII gleichwertig, sobald die Axiome II—IV als gemeinsame Grundlage dienen.

Es dürfte zweckmässig sein, statt der 7 von J. Sarv benutzten linearen Axiome die 5 Axiome II—IV, A , B zum synthetischen Aufbau der betreffenden Geometrie zu verwenden. Hierdurch wird nicht nur eine Verminderung der Anzahl, sondern auch eine Vereinfachung des Inhalts der Axiome erzielt. Ich lege Wert auf den letzteren Umstand: der Versuch zeigt, dass eine analytische Untersuchung der Lagenbeziehungen in kollinearen Punktgruppen infolge des verhältnismässig komplizierten Inhalts der Sätze V—VIII im allgemeinen ziemlich mühselig ist, solange man sich ausschliesslich auf diese Sätze stützen will; die Verwendung des Vierpunktsatzes, m. a. W. des Axioms B , erweist sich für diesen Zweck wohl meistens als bedeutend leichter. Vom Standpunkt der Axiomatik hat zudem noch der Umstand Bedeutung, dass die Axiome II—IV, A , B untereinander unabhängig sind, während dagegen das System II—VIII zum mindesten überzählige Behauptungen enthält.

Eine für mich noch offene Frage ist es, ob die absolute Unabhängigkeit auch nach Hinzunahme des bei J. Sarv als X bezeichneten Veblenschen ebenen Axioms⁸⁾ bestehen bleibt; wahrscheinlich ist dies nicht der Fall.

⁸⁾ J. Sarv, a. a. O., S. 8.