

**ORTHOGONALSYSTEME VON POLYNOMEN
UND EXTREMUMPROBLEME DER
INTERPOLATIONSRECHNUNG**

VON

ARNOLD TUDEBERG

TARTU 1935

Im ersten Teil der vorliegenden Arbeit werden die wichtigsten allgemeinen Tatsachen über Orthogonalsysteme von Polynomen in wenigen Lehrsätzen dargestellt. Der zweite Teil beschäftigt sich mit einem Beispiel zu der allgemeinen Theorie; es ist dies eine Klasse von Polynomensystemen, die im wesentlichen aus gewissen Spezialfällen der Systeme *Jacobischer* Polynome besteht und ihrerseits u. a. die *Tschebyscheffschen* und die *Legendreschen* Polynome als Sonderfälle enthält. Die Ergebnisse des zweiten Teils dienen sodann dazu, um — im dritten Teil — eine Gruppe von Extremalaufgaben der Interpolationsrechnung von einem einheitlichen Gesichtspunkte aus zu bewältigen und die Lösungen der einzelnen Probleme miteinander zu vergleichen.

Orthogonalsysteme von Polynomen haben in verschiedener spezieller Form schon seit *Laplace*¹ und *Legendre*² in der Potentialtheorie, seit *Gauß*³ und *Tschebyscheff*⁴ in der Interpolationsrechnung und seit *Jacobi*⁵ in der Theorie der Differentialgleichungen eine Rolle gespielt; in ihrer vollen Allgemeinheit sind sie jedoch erst in der Lehre von den *Stieltjesschen*⁶ Kettenbrüchen aufgetreten und seitdem vielseitig untersucht worden.

¹ P. S. Laplace, Théorie des attractions des Sphéroïdes et de la figure des Planètes. *Mémoires de Mathématique et de Physique, tirés des registres de l'Académie Royale des Sciences. Année 1782.* Paris 1785.

² A. M. Legendre, Sur l'attraction des Sphéroïdes. *Mémoires de Mathématique et de Physique, présentés à l'Académie Royale des Sciences, par divers savans.* 10. Paris 1785.

³ C. F. Gauss, Methodus nova integralium valores per approximationem inveniendi. *Commentationes Societatis Regiae Scientiarum Gottingensis recentiores.* 3. 1816.

⁴ P. Tchëbychev, Sur les questions de Minima qui se rattachent à la représentation approximative des fonctions. *Mémoires de l'Académie Impériale des Sciences de Saint-Petersbourg.* VI^e série, 9, 1^e partie. 1859.

P. Tchëbichef, Sur les quadratures. *Journal de Mathématiques pures et appliquées.* (2), 19. 1874.

⁵ C. G. J. Jacobi, Untersuchungen über die Differentialgleichung der hypergeometrischen Reihe. *Journal für die reine und angewandte Mathematik.* 56. 1859.

⁶ T. J. Stieltjes, Recherches sur les fractions continues. *Annales de la Faculté des Sciences de Toulouse pour les sciences mathématiques et les sciences physiques.* 8. 1894.

Wenn nun hier der Gegenstand nochmals in Angriff genommen und alles aufs neue von Anfang an entwickelt wird, so veranlaßt dazu der Wunsch, einige in der umfangreichen Literatur zeitlich und örtlich zerstreute Dinge in ihrem inhaltlichen Zusammenhang aufeinanderfolgen zu lassen und womöglich daran auch hie und da eine neue Folgerung zu knüpfen.

Erster Teil.

Über Orthogonalsysteme von Polynomen.

§ 1. Definitionen und vorbereitende Sätze.

Die Funktion $\psi(x)$ sei im Intervall $a < x < b$ definiert und dort nur nichtnegativer Werte fähig:

$$(1) \quad \psi(x) \geq 0 \text{ für } a < x < b;$$

ihr (*Lebesguesches*) Integral, über dasselbe Intervall erstreckt, sei positiv:

$$(2) \quad \int_a^b \psi(x) dx > 0.$$

Die Integrale ⁷

$$\int_a^b x^a \psi(x) dx = m_a \quad (a = 0, 1, 2, \dots)$$

wollen wir die zur Funktion $\psi(x)$ als einer Belegungsfunktion gehörigen Momente nennen. Ferner definieren wir das (mit derselben Belegungsfunktion in demselben Intervall — im Belegungsintervall oder Grundgebiet — gebildete) innere Produkt (F, G) zweier Funktionen $F(x)$ und $G(x)$ durch das Integral

$$\int_a^b F(x) G(x) \cdot \psi(x) dx = (F, G).$$

⁷ Im ersten Teil sind alle Integrale im *Lebesgueschen* Sinne zu nehmen.

Die Funktionen $F(x)$ und $G(x)$ werden zueinander orthogonal genannt, falls dieses Integral verschwindet, d. h. wenn $(F, G) = 0$ ist. Das innere Produkt einer Funktion $F(x)$ mit sich selbst wollen wir als Norm dieser Funktion bezeichnen —

$$(F, F) = \int_a^b [F(x)]^2 \psi(x) dx = NF,$$

wofür wir also kurz NF schreiben.

Satz 1 (verschärfter Mittelwertsatz).

Es sei $\Phi(x) \geq 0$ in allen Punkten x einer linearen (beschränkten oder unbeschränkten) Punktmenge \mathfrak{B} ; das Integral von $\Phi(x)$, über die Menge \mathfrak{B} erstreckt, sei positiv; wenn nun irgendeine Funktion $F(x)$ so beschaffen ist, daß das Integral

$$\int_{\mathfrak{B}} F(x) \Phi(x) dx$$

existiert, dann liegt der (konstante) Quotient

$$\frac{\int_{\mathfrak{B}} F(x) \Phi(x) dx}{\int_{\mathfrak{B}} \Phi(x) dx}$$

oberhalb jeder unteren Schranke von $F(x)$ bzw. unterhalb jeder oberen Schranke von $F(x)$, falls $F(x)$ in \mathfrak{B} von unten bzw. von oben oder in beiden Richtungen beschränkt ist.

Beweis. Den linearen Ausdruck (in y)

$$(3) \quad y \int_{\mathfrak{B}} \Phi(x) dx - \int_{\mathfrak{B}} F(x) \Phi(x) dx$$

bezeichnen wir kurz mit $L(y)$; es ist also

$$(4) \quad L(y) = \int_{\mathfrak{B}} [y - F(x)] \Phi(x) dx.$$

Falls nun $F(x) > A$ für alle x in \mathfrak{B} , so ist $L(A) < 0$; das zeigen wir folgendermaßen. In (4) ist dann der Integrand $[A - F(x)] \Phi(x) \leq 0$ überall in \mathfrak{B} und daher sicherlich $L(A) \leq 0$;

es bleibt also noch nachzuweisen, daß $L(A) \neq 0$ ist. Die Menge derjenigen Punkte x von \mathfrak{P} , in denen $\Phi(x) \neq 0$ ist, — wir bezeichnen sie mit \mathfrak{N} —, hat ein nichtverschwindendes Maß, weil sonst ja $\int_{\mathfrak{P}} \Phi(x) dx = 0$ wäre; \mathfrak{N} ist zugleich die Menge aller Punkte von \mathfrak{P} , in denen $[A - F(x)] \Phi(x) < 0$ ist. Nun sei \mathfrak{M}_α die Menge solcher Punkte x von \mathfrak{P} , wo

$$[A - F(x)] \Phi(x) \leq -\frac{1}{\alpha}$$

ist, unter α eine positive ganze Zahl verstanden. Wir behaupten, daß mindestens eine der Mengen \mathfrak{M}_α ($\alpha = 1, 2, 3, \dots$) (und daher auch alle nachfolgenden) ein positives Maß haben muß. \mathfrak{N} ist offenbar die Vereinigungsmenge aller \mathfrak{M}_α ; wären nun sämtliche \mathfrak{M}_α Nullmengen, so wäre \mathfrak{N} als Vereinigungsmenge von abzählbar-vielen Nullmengen ebenfalls eine Nullmenge, was aber nicht der Fall ist. Folglich gibt es eine der Mengen \mathfrak{M}_α , etwa \mathfrak{M}_ν , vom Maß $m_\nu > 0$. Dann gilt offenbar

$$\int_{\mathfrak{P}} [A - F(x)] \Phi(x) dx \leq \int_{\mathfrak{M}_\nu} [A - F(x)] \Phi(x) dx \leq -\frac{m_\nu}{\nu} < 0,$$

also $L(A) < 0$.

Wegen der Voraussetzung $\int_{\mathfrak{P}} \Phi(x) dx > 0$ gilt andererseits, wie aus (3) leicht ersichtlich,

$$L(y) \rightarrow +\infty, \text{ wenn } y \rightarrow +\infty.$$

Der Wert des Quotienten

$$\frac{\int_{\mathfrak{P}} F(x) \Phi(x) dx}{\int_{\mathfrak{P}} \Phi(x) dx},$$

der die einzige Nullstelle von $L(y)$ ist, liegt daher tatsächlich, wie behauptet, oberhalb der Schranke A .

Im Falle $F(x) < B$ (für alle x in \mathfrak{P}) ergibt sich analog aus $L(B) > 0$ und

$$L(y) \rightarrow -\infty, \text{ wenn } y \rightarrow -\infty$$

der zweite Teil der Behauptung.

Der Fall $A < F(x) < B$ (für alle x in \mathfrak{B}) ist eigentlich durch die beiden vorangehenden bereits erledigt, am einfachsten aber direkt durch $L(A) < 0$ und $L(B) > 0$.

Satz 2.

Wenn eine Funktion $F(x)$ zu irgendwelchen $\nu + 1$ Polynomen $P_0(x), P_1(x), P_2(x), \dots, P_\nu(x)$ orthogonal ist und dabei jedes $P_\alpha(x)$ genau den Grad α hat, d. h.

$$P_\alpha(x) = p_0^{(\alpha)} x^\alpha + p_1^{(\alpha)} x^{\alpha-1} + \dots + p_{\alpha-1}^{(\alpha)} x + p_\alpha^{(\alpha)}$$

mit $p_0^{(\alpha)} \neq 0 \quad (\alpha = 0, 1, 2, \dots, \nu)$,

so ist $F(x)$ zu jedem beliebigen Polynom $Q(x)$ vom Grade $\leq \nu$ orthogonal⁸.

Beweis. Das Polynom $Q(x)$ sei vom Grade $\mu \leq \nu$:

$$Q(x) = q_0 x^\mu + q_1 x^{\mu-1} + \dots + q_{\mu-1} x + q_\mu.$$

Wir behaupten, daß es auf genau eine Weise möglich ist, das Polynom $Q(x)$ als ein lineares Aggregat der Polynome $P_0(x), P_1(x), \dots, P_\mu(x)$ darzustellen. Für $\mu = 0$ ist die Behauptung richtig; denn $Q(x)$ ist dann eine Konstante, nämlich q_0 , und

$$P_0(x) = p_0^{(0)} \neq 0, \text{ daher also } Q(x) = C_0 P_0(x) \text{ mit } C_0 = \frac{q_0}{p_0^{(0)}}.$$

Vorausgesetzt, daß die Behauptung für alle $\mu \leq \kappa < \nu$ zutrifft, folgt aber sofort ihre Gültigkeit auch für $\mu = \kappa + 1$. Denn setzt man versuchsweise

$$Q(x) = C_{\kappa+1} P_{\kappa+1}(x) + C_\kappa P_\kappa(x) + \dots + C_0 P_0(x),$$

so ergibt sich daraus durch Vergleich der Koeffizienten bei $x^{\kappa+1}$ die Bedingung

$$q_0 = C_{\kappa+1} p_0^{(\kappa+1)},$$

die immer (und zwar auf nur eine Weise) erfüllt werden kann (weil $p_0^{(\kappa+1)} \neq 0$):

$$C_{\kappa+1} = \frac{q_0}{p_0^{(\kappa+1)}};$$

⁸ Insbesondere ist $F(x)$ dann zu den sukzessiven Potenzen x^α ($\alpha = 0, 1, 2, \dots, \nu$) orthogonal.

die Differenz $Q(x) - C_{\mu+1} P_{\mu+1}(x)$ ist nur noch ein Polynom vom Grade $\leq \mu$, die Konstanten $C_{\mu}, C_{\mu-1}, \dots, C_0$ sind mithin voraussetzungsgemäß eindeutig bestimmt. Es schreibt sich daher allgemein

$$Q(x) = C_{\mu} P_{\mu}(x) + C_{\mu-1} P_{\mu-1}(x) + \dots + C_0 P_0(x).$$

Wir berechnen nun das innere Produkt (F, Q) . Die dazu erforderliche Integration läßt sich gliedweise ausführen ($\mu + 1$ Glieder), wodurch wir erhalten:

$$(F, Q) = C_{\mu}(F, P_{\mu}) + C_{\mu-1}(F, P_{\mu-1}) + \dots + C_0(F, P_0).$$

Da nach der Voraussetzung des Satzes sämtliche (F, P_{α}) für $\alpha \leq \nu$ verschwinden, verschwindet auch die rechtsstehende Summe und der Satz ist bewiesen.

Anmerkung. Bei den folgenden Sätzen (Sätze 3 bis 10) werden der Belegungsfunktion $\psi(x)$ stets dieselben Forderungen (1) und (2) gestellt. Will man aber die Behauptungen und Beweise auch im Falle eines unendlichen Grundgebietes bestehen lassen, — also wenn a durch $-\infty$ ersetzt wird, oder b durch $+\infty$, oder gleichzeitig a durch $-\infty$ und b durch $+\infty$, — so braucht man der Belegungsfunktion nur noch die weitere Voraussetzung aufzuerlegen, daß sämtliche zu ihr gehörige Momente existieren. Da sich dabei alles genau ebenso entwickelt (einige Beweise verkürzen sich bloß an manchen Stellen, was auch jeweils leicht einzusehen ist), brauchen wir auf diesen Fall nicht gesondert einzugehen.

Satz 3.

Jedes Polynom hat eine positive Norm.

Beweis. $P(x)$ sei ein beliebiges Polynom ν -ten Grades; seine Norm

$$NP = \int_a^b [P(x)]^2 \psi(x) dx$$

existiert und ist sicherlich ≥ 0 , weil in $a < x < b$ der Integrand nirgends negativ ist. Wir zeigen, daß sie nicht verschwinden kann.

Die Anzahl der reellen Nullstellen von $P(x)$ kann höchstens ν sein; von diesen mögen etwa μ im Integrationsintervall liegen. Diese μ (einfachen oder mehrfachen) Nullstellen x_1, x_2, \dots, x_μ zerlegen das Intervall $a < x < b$ in offene Teilintervalle:

$$a < x < x_1, \quad x_1 < x < x_2, \quad \dots, \quad x_\mu < x < b.$$

Wir fassen diese Teilintervalle zur Punktmenge \mathfrak{P} zusammen und wenden den Satz 1 an:

$$\text{da } \int_{\mathfrak{P}} \psi(x) dx = \int_a^b \psi(x) dx = m_0 > 0$$

und $[P(x)]^2 > 0$ für alle x in \mathfrak{P} ,

$$\text{so ist } \frac{\int_{\mathfrak{P}} [P(x)]^2 \psi(x) dx}{\int_{\mathfrak{P}} \psi(x) dx} > 0;$$

folglich auch

$$\int_a^b [P(x)]^2 \psi(x) dx = \int_{\mathfrak{P}} [P(x)]^2 \psi(x) dx > 0,$$

q. e. d.

Satz 4.

Wenn es ein Polynom

$$F(x) \equiv x^\nu + k_1 x^{\nu-1} + k_2 x^{\nu-2} + \dots + k_{\nu-1} x + k_\nu$$

gibt, das zu irgendwelchen Polynomen $P_\alpha(x)$ ($\alpha = 0, 1, 2, \dots, \nu-1$), je vom Grade α , orthogonal ist, so gilt für dieses $F(x)$ die Beziehung

$$NF = (F, x^\nu).$$

Beweis. Es ist

$$\begin{aligned} NF = (F, F) &= (F, x^\nu) + k_1 (F, x^{\nu-1}) + k_2 (F, x^{\nu-2}) + \dots + \\ &+ k_{\nu-1} (F, x) + k_\nu (F, 1), \end{aligned}$$

worin nach Satz 2

$$(F, x^{v-1}) = (F, x^{v-2}) = \dots = (F, x) = (F, 1) = 0.$$

Eine Funktionenfolge

$$F_0(x), F_1(x), F_2(x), F_3(x), \dots$$

wird als ein zur Belegungsfunktion $\psi(x)$ im Grundgebiet $a < x < b$ gehörendes Orthogonalsystem bezeichnet, wenn für je zwei dieser Funktionen die Orthogonalitätsbeziehung

$$(F_\alpha, F_\beta) = 0 \quad (\alpha \neq \beta)$$

stattfindet, wobei unter (F_α, F_β) das mit der Belegungsfunktion $\psi(x)$ in $a < x < b$ gebildete innere Produkt der Funktionen $F_\alpha(x)$ und $F_\beta(x)$ zu verstehen ist.

In den folgenden Paragraphen wollen wir nun solche Orthogonalsysteme behandeln, die ausschließlich aus Polynomen bestehen. Diese Polynome schreiben wir fortan in der Form

$$x^\alpha + q_1^{(\alpha)} x^{\alpha-1} + q_2^{(\alpha)} x^{\alpha-2} + \dots + q_{\alpha-1}^{(\alpha)} x + q_\alpha^{(\alpha)} \equiv Q_\alpha(x),$$

d. h. mit dem Koeffizienten Eins bei der höchsten Potenz.

§ 2. Allgemeine Sätze über Orthogonalsysteme von Polynomen.

Satz 5 (Fundamentalsatz).

Zu jeder Belegungsfunktion $\psi(x)$, die den Bedingungen (1) und (2) genügt, gibt es im Intervall $a < x < b$ ein und nur ein Orthogonalsystem von Polynomen

$$Q_\alpha(x) = x^\alpha + q_1^{(\alpha)} x^{\alpha-1} + q_2^{(\alpha)} x^{\alpha-2} + \dots + q_{\alpha-1}^{(\alpha)} x + q_\alpha^{(\alpha)} \quad (\alpha = 0, 1, 2, 3, \dots)$$

(die also bei der höchsten Potenz den Koeffizienten Eins haben).

Beweis. Das nullte Polynom ist durch die Forderung, daß der höchste Koeffizient Eins sein soll, allein schon eindeutig festgesetzt:

$$Q_0(x) = x^0 = 1,$$

$$\Delta_\nu = \begin{vmatrix} m_{2\nu-2} & m_{2\nu-3} & \cdots & m_{\nu-1} \\ m_{2\nu-3} & m_{2\nu-4} & \cdots & m_{\nu-2} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ m_{\nu-1} & m_{\nu-2} & \cdots & m_0 \end{vmatrix}.$$

Wir behaupten, daß die Determinante Δ_ν für alle ν von Null verschieden, und zwar positiv ist. Im Falle $\nu = 1$ trifft die Behauptung offenbar zu: $\Delta_1 = m_0 > 0$. Die allgemeine Gültigkeit unserer Behauptung beweisen wir nun durch den Schluß von ν auf $\nu + 1$. Angenommen, es sei $\Delta_\nu > 0$. Dann ist das Gleichungssystem (5) auf genau eine Weise lösbar, und die Lösung lautet:

$$q_\alpha^{(\nu)} = \frac{\Delta_{\nu+1}^{(\alpha+1)}}{\Delta_\nu} \quad (\alpha = 1, 2, 3, \dots, \nu),$$

wenn wir mit $\Delta_{\nu+1}^{(\beta)}$ die zum β -ten Element der ersten Reihe gehörende Unterdeterminante von $\Delta_{\nu+1}$ bezeichnen⁹. Das mit diesen Zahlen $q_\alpha^{(\nu)}$ als Koeffizienten (nach der obigen Vorschrift) gebildete Polynom $Q_\nu(x)$ ist aber dann zu sämtlichen Potenzen x^α , mit $\alpha = 0, 1, 2, \dots, \nu - 1$, orthogonal, und es ist daher nach Satz 4

$$NQ_\nu = (Q_\nu, x^\nu).$$

Diese Norm drückt sich somit durch die Momente folgendermaßen aus:

$$\begin{aligned} (Q_\nu, x^\nu) &= m_{2\nu} + q_1^{(\nu)} m_{2\nu-1} + q_2^{(\nu)} m_{2\nu-2} + \cdots + q_\nu^{(\nu)} m_\nu \\ &= \frac{1}{\Delta_\nu} \left(m_{2\nu} \Delta_{\nu+1}^{(1)} + m_{2\nu-1} \Delta_{\nu+1}^{(2)} + m_{2\nu-2} \Delta_{\nu+1}^{(3)} + \cdots + m_\nu \Delta_{\nu+1}^{(\nu+1)} \right) \\ &= \frac{\Delta_{\nu+1}}{\Delta_\nu}. \end{aligned}$$

⁹ Es ist also $\Delta_{\nu+1}^{(1)} = \Delta_\nu$,

$$\Delta_{\nu+2}^{(2)} = - \begin{vmatrix} m_{2\nu-1} & m_{2\nu-3} & m_{2\nu-4} & m_{\nu-1} \\ m_{2\nu-2} & m_{2\nu-4} & m_{2\nu-5} & m_{\nu-2} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ m_\nu & m_{\nu-2} & m_{\nu-3} & m_0 \end{vmatrix} \quad \text{u. s. f.}$$

Nach Satz 3 ist nun $NQ_r > 0$ und daher $\frac{\Delta_{r+1}}{\Delta_r} > 0$, woraus, wegen der Annahme $\Delta_r > 0$, folgt $\Delta_{r+1} > 0$. Also gilt unsere Behauptung für alle v .

Das Gleichungssystem (5) hat hiernach stets eine und nur eine Lösung; sämtliche $Q_\alpha(x)$ sind also eindeutig bestimmt, und der Satz ist bewiesen.

Folgerung. Sobald irgendwelche Polynome

$$P_\alpha(x) = p_0^{(\alpha)}x^\alpha + p_1^{(\alpha)}x^{\alpha-1} + \dots + p_{\alpha-1}^{(\alpha)}x + p_\alpha^{(\alpha)}$$

$$(\alpha = 0, 1, 2, \dots; \quad p_0^{(\alpha)} \neq 0)$$

ein Orthogonalsystem (in bezug auf die Belegungsfunktion $\psi(x)$ im Intervall $a < x < b$) bilden, so sind sämtliche $\frac{1}{p_0^{(\alpha)}} P_\alpha(x)$ ebenfalls zueinander orthogonal. Nach dem soeben bewiesenen Satze stimmt aber das Orthogonalsystem

$$\frac{1}{p_0^{(0)}} P_0(x), \quad \frac{1}{p_0^{(1)}} P_1(x), \quad \frac{1}{p_0^{(2)}} P_2(x), \dots$$

mit dem System $Q_0(x), Q_1(x), Q_2(x), \dots$ völlig überein.

Andererseits ist die Folge

$$C_0 Q_0(x), \quad C_1 Q_1(x), \quad C_2 Q_2(x), \dots$$

auch stets ein Orthogonalsystem, wobei man über die Konstanten C_0, C_1, C_2, \dots noch frei verfügen kann (es darf bloß keine darunter verschwinden).

Aus beiden Tatsachen folgt, daß durch die Angabe der Belegungsfunktion und des Grundgebietes also in dem zugehörigen Orthogonalsystem von Polynomen sämtliche Elemente (d. h. die einzelnen Polynome des Systems) bis auf multiplikative Konstanten eindeutig bestimmt sind.

Satz 6 (der erste Nullstellensatz).

Jedes Polynom eines Orthogonalsystems von Polynomen hat lauter einfache reelle Nullstellen, die sämtlich im Grundgebiete des Systems liegen.

Beweis. Es sei

$$Q_\nu(x) = x^\nu + q_1^{(\nu)} x^{\nu-1} + q_2^{(\nu)} x^{\nu-2} + \dots + q_\nu^{(\nu)}$$

ein Polynom unseres Orthogonalsystems und sein Grad ν sei positiv (für $\nu = 0$ ist die Behauptung noch sinnlos). Wir führen den Beweis in drei Schritten.

1) $Q_\nu(x)$ hat keine komplexe Nullstelle. Gäbe es eine solche, etwa $v + iw$, so wäre $v - iw$ ebenfalls eine Nullstelle von $Q_\nu(x)$, weil die Koeffizienten von $Q_\nu(x)$ reell sind. Dann könnte man $Q_\nu(x)$ in zwei reelle Faktoren zerlegen:

$$Q_\nu(x) = (x^2 - 2vx + v^2 + w^2)P(x),$$

von denen $P(x)$ ein Polynom $(\nu - 2)$ -ten Grades wäre. Es müßte daher nach Satz 2 $(Q_\nu, P) = 0$ sein. Nun ist aber

$$(Q_\nu, P) = \int_a^b (x^2 - 2vx + v^2 + w^2) [P(x)]^2 \psi(x) dx,$$

worin

$$x^2 - 2vx + v^2 + w^2 = (x - v)^2 + w^2 > 0$$

für alle reellen x ; nach Satz 3 ist ferner

$$\int_a^b [P(x)]^2 \psi(x) dx = NP > 0,$$

und daher nach Satz 1

$$(Q_\nu, P) > 0.$$

Die Annahme, daß eine komplexe Nullstelle vorhanden ist, führt also zu einem Widerspruch.

2) $Q_\nu(x)$ hat keine mehrfache Nullstelle. Denn hätte es eine solche, etwa u , so wäre $Q_\nu(x)$ durch mindestens die zweite Potenz von $x - u$ teilbar:

$$Q_\nu(x) = (x - u)^2 R(x),$$

und der Quotient $R(x)$ wäre ein Polynom $(\nu - 2)$ -ten Grades; hiermit würde einerseits aus Satz 2 folgen:

$$(Q_\nu, R) = 0,$$

andererseits aber — wenn wir $(x - u)R(x)$ kurz mit $S(x)$ bezeichnen — wäre $(Q_\nu, R) = NS$, und daher nach Satz 3 (weil $S(x)$ ein Polynom $(\nu - 1)$ -ten Grades ist)

$$(Q_\nu, R) > 0.$$

3) Alle Nullstellen von $Q_\nu(x)$ liegen im Intervall $a < x < b$. Gäbe es eine Nullstelle t derart, daß $t \equiv a$ [oder $t \equiv b$] gälte, so wäre in der Identität $Q_\nu(x) = (x - t) T(x)$ der Faktor $x - t > 0$ [oder $x - t < 0$] für $a < x < b$, und $T(x)$ wäre ein Polynom $(\nu - 1)$ -ten Grades. Da nun

$$(Q_\nu, T) = \int_a^b (x - t) [T(x)]^2 \psi(x) dx$$

und nach Satz 3

$$\int_a^b [T(x)]^2 \psi(x) dx > 0,$$

so würde hiermit aus Satz 1 folgen:

$$(Q_\nu, T) > 0 \quad [\text{oder } (Q_\nu, T) < 0].$$

Im Widerspruch dazu ergäbe sich aber aus Satz 2:

$$(Q_\nu, T) = 0.$$

Folgerung aus Satz 6.

$$Q_{2\alpha}(a) > 0, \quad Q_{2\alpha+1}(a) < 0 \quad \text{und} \quad Q_\alpha(b) > 0 \\ (\alpha = 0, 1, 2, \dots).$$

Satz 7 (Hilfssatz).

Für je drei aufeinanderfolgende Polynome $Q_\alpha(x)$ gilt die Identität

$$Q_{\nu+1}(x) - \left[x - \frac{(Q_\nu, xQ_\nu)}{NQ_\nu} \right] Q_\nu(x) + \frac{NQ_\nu}{NQ_{\nu-1}} Q_{\nu-1}(x) \equiv 0 \quad (\nu \geq 1).$$

Beweis. Die Differenz $Q_{\nu+1}(x) - xQ_\nu(x)$ ist offenbar ein Polynom vom Grade $\leq \nu$:

$$Q_{\nu+1}(x) - xQ_\nu(x) = (q_1^{(\nu+1)} - q_1^{(\nu)})x^\nu + (q_2^{(\nu+1)} - q_2^{(\nu)})x^{\nu-1} + \dots + \\ + (q_\nu^{(\nu+1)} - q_\nu^{(\nu)})x + q_{\nu+1}^{(\nu+1)},$$

und läßt sich daher als ein lineares Aggregat der Polynome $Q_0(x), Q_1(x), \dots, Q_\nu(x)$ darstellen:

$$(6) \quad Q_{\nu+1}(x) - xQ_\nu(x) = C_\nu Q_\nu(x) + C_{\nu-1} Q_{\nu-1}(x) + \dots + C_0 Q_0(x).$$

Zur Berechnung der Koeffizienten C_0, C_1, \dots, C_ν bilden wir an beiden Seiten der Gleichung (6) die inneren Produkte mit $Q_\alpha(x)$ und erhalten für $\alpha = 0, 1, 2, \dots, \nu$

$$(7) \quad -(xQ_\nu, Q_\alpha) = C_\alpha NQ_\alpha.$$

Nun gilt aber $(xQ_\nu, Q_\alpha) = (Q_\nu, xQ_\alpha)$ und, da $xQ_\alpha(x)$ ein Polynom $(\alpha + 1)$ -ten Grades ist, nach Satz 2:

$$(Q_\nu, xQ_\alpha) = 0 \quad \text{für } \alpha = 0, 1, 2, \dots, \nu - 2.$$

Ferner ist

$$xQ_{\nu-1}(x) = x^\nu + q_1^{(\nu-1)}x^{\nu-1} + q_2^{(\nu-1)}x^{\nu-2} + \dots + q_{\nu-1}^{(\nu-1)}x$$

und somit

$$(Q_\nu, xQ_{\nu-1}) = (Q_\nu, x^\nu) = NQ_\nu.$$

Aus (7) folgt dann:

$$C_0 = C_1 = C_2 = \dots = C_{\nu-2} = 0,$$

$$C_{\nu-1} = -\frac{NQ_\nu}{NQ_{\nu-1}}, \quad C_\nu = -\frac{(Q_\nu, xQ_\nu)}{NQ_\nu}.$$

Setzt man diese Werte in (6) ein, so ergibt sich die behauptete Identität.

Satz 8 (der zweite Nullstellensatz).

Zwischen je zwei aufeinanderfolgenden Nullstellen von $Q_\nu(x)$ ($\nu > 1$)¹⁰ liegt stets genau eine Nullstelle von $Q_{\nu-1}(x)$.

Beweis. Wenn wir allgemein die α Nullstellen von $Q_\alpha(x)$, der Größe nach geordnet, mit $x_1^{(\alpha)}, x_2^{(\alpha)}, \dots, x_\alpha^{(\alpha)}$ bezeichnen, lautet die Behauptung des Satzes im Falle $\nu = 2$:

$$x_1^{(2)} < x_1^{(1)} < x_2^{(2)}.$$

Nach Satz 7 ist

$$Q_2(x_1^{(1)}) = -\frac{NQ_1}{NQ_0} \cdot Q_0(x_1^{(1)}),$$

¹⁰ Für $\nu \leq 1$ wäre die Behauptung inhaltslos, denn $Q_0(x)$ hat ja gar keine Nullstelle und $Q_1(x)$ hat nur eine.

also — da $NQ_1 > 0$, $NQ_0 > 0$ und $Q_0(x) \equiv 1$ —

$$Q_2(x_1^{(1)}) < 0.$$

Ferner wissen wir aus Satz 6, daß $a < x_1^{(1)} < b$, und aus der Folgerung desselben Satzes, daß $Q_2(a) > 0$ und $Q_2(b) > 0$ ist. Es liegt daher zwischen a und $x_1^{(1)}$ mindestens eine Nullstelle von $Q_2(x)$, und zwischen $x_1^{(1)}$ und b mindestens noch eine; da nun $Q_2(x)$ nicht mehr als zwei Nullstellen haben kann, folgt hieraus:

$$a < x_1^{(2)} < x_1^{(1)} < x_2^{(2)} < b.$$

Die Behauptung unseres Satzes ist also im Falle $\nu = 2$ richtig.

Allgemein wird der Satz nun durch Schluß von ν auf $\nu + 1$ bewiesen. Wenn die Behauptung für irgendein ν gilt, so bedeutet dies, daß das Polynom $Q_{\nu-1}(x)$ an aufeinanderfolgenden Nullstellen von $Q_\nu(x)$ abwechselnde Vorzeichen hat¹¹:

$$\text{sg } Q_{\nu-1}(x_\alpha^{(\nu)}) = - \text{sg } Q_{\nu-1}(x_{\alpha+1}^{(\nu)}) \quad (\alpha = 1, 2, 3, \dots, \nu - 1),$$

und dabei, wegen Satz 6,

$$\text{sg } Q_{\nu-1}(x_1^{(\nu)}) = \text{sg } Q_{\nu-1}(a) = (-1)^{\nu-1},$$

$$\text{sg } Q_{\nu-1}(x_\nu^{(\nu)}) = \text{sg } Q_{\nu-1}(b) = +1.$$

Nach Satz 7 ist aber

$$Q_{\nu+1}(x_\alpha^{(\nu)}) = - \frac{NQ_\nu}{NQ_{\nu-1}} Q_{\nu-1}(x_\alpha^{(\nu)}) \quad (\text{für } \alpha = 1, 2, \dots, \nu),$$

also

$$\text{sg } Q_{\nu+1}(x_\alpha^{(\nu)}) = - \text{sg } Q_{\nu-1}(x_\alpha^{(\nu)}).$$

Der Folgerung von Satz 6 entnehmen wir noch:

$$\text{sg } Q_{\nu+1}(a) = \text{sg } Q_{\nu-1}(a) \quad \text{und} \quad \text{sg } Q_{\nu+1}(b) = \text{sg } Q_{\nu-1}(b) = +1.$$

¹¹ $\text{sg } u$ bedeutet im folgenden die *Kroneckersche* Vorzeichenfunktion, definiert durch

$$\text{sg } u = \begin{cases} 1 & \text{für } u > 0 \\ 0 & \text{für } u = 0 \\ -1 & \text{für } u < 0. \end{cases}$$

Somit haben wir für das Vorzeichen von $Q_{\nu+1}(x)$ in den Punkten $a, x_1^{(\nu)}, x_2^{(\nu)}, x_3^{(\nu)}, \dots, x_\nu^{(\nu)}$ und b folgendes gefunden:

$$\begin{aligned} \text{sg } Q_{\nu+1}(a) &= - \text{sg } Q_{\nu+1}(x_1^{(\nu)}), \\ \text{sg } Q_{\nu+1}(x_\alpha^{(\nu)}) &= - \text{sg } Q_{\nu+1}(x_{\alpha+1}^{(\nu)}) \quad (\alpha = 1, 2, 3, \dots, \nu - 1), \\ - \text{sg } Q_{\nu+1}(x_\nu^{(\nu)}) &= \text{sg } Q_{\nu+1}(b) = +1. \end{aligned}$$

Da $Q_{\nu+1}(x)$ aber genau $\nu + 1$ Nullstellen hat, folgt daraus:

$$a < x_1^{(\nu+1)} < x_1^{(\nu)} < x_2^{(\nu+1)} < x_2^{(\nu)} < x_3^{(\nu+1)} < \dots < x_\nu^{(\nu)} < x_{\nu+1}^{(\nu+1)} < b.$$

Also gilt die Behauptung des Satzes auch für $\nu + 1$, sobald sie für ν als gültig feststeht; für 2 war sie aber schlechthin richtig, folglich ist der Satz bewiesen.

§ 3. Ergänzende Sätze über Systeme, die zu symmetrischen Belegungen gehören.

Wir sagen, daß eine symmetrische Belegung vorliegt, wenn die Belegungsfunktion $\psi(x)$ in zwei Punkten x und x' (des Belegungsintervalls) gleiche Werte annimmt, falls x von dem einen und x' von dem anderen Endpunkt des Intervalls gleichen Abstand haben. Einfachheitshalber denken wir uns den Punkt $x = 0$ in den Mittelpunkt des Belegungsintervalls verschoben und setzen fortan $a = -b$. Die Bedingung der symmetrischen Belegung lautet dann:

$$(8) \quad \psi(x) = \psi(-x) \quad \text{für } -b < x < b \quad (a = -b);$$

$\psi(x)$ soll also eine gerade Funktion sein.

Wir wollen im folgenden nun das Orthogonalsystem von Polynomen im Falle symmetrischer Belegung etwas weiter studieren. Unter den Voraussetzungen (1) und (2) bleiben alle Sätze des vorigen Paragraphen auch hier bestehen, lassen aber mit Rücksicht auf (8) noch einige Folgerungen zu. Zu diesen Folgerungen gelangt man durch Benutzung der einfachen Tatsachen über gerade und ungerade Funktionen:

$$\begin{aligned} \text{wenn } F(-x) &= F(x) \quad \text{und} \quad G(-x) = G(x), \\ \text{so } F(-x)G(-x) &= F(x)G(x); \end{aligned}$$

wenn $F(-x) = F(x)$ und $H(-x) = -H(x)$,

so $F(-x)H(-x) = -F(x)H(x)$;

wenn $K(-x) = -K(x)$ und $H(-x) = -H(x)$,

so $K(-x)H(-x) = K(x)H(x)$;

wenn $K(-x) = -K(x)$, so $\int_{-u}^u K(x) dx = 0$

(weil ja $\int_{-u}^0 K(x) dx = -\int_0^{-u} K(x) dx = -\int_0^+ K(-x) d(-x) = -\int_0^u K(x) dx$).

Satz 9.

Im Falle symmetrischer Belegung enthält das Polynom $Q_\nu(x)$ nur gerade Potenzen, falls ν eine gerade Zahl ist, und nur ungerade Potenzen, falls ν ungerade ist, d. h.

$$q_1^{(\nu)} = q_3^{(\nu)} = q_5^{(\nu)} = \dots = q_{\nu'}^{(\nu)} = 0, \quad \text{wobei } \nu' = \nu - \frac{1 + (-1)^\nu}{2}.$$

Beweis. Aus (8) folgt zunächst, daß die Momente mit ungeraden Indizes verschwinden: $m_{2\alpha+1} = 0$ ($\alpha = 0, 1, 2, \dots$). Zur Bestimmung der Koeffizienten $q_1^{(\nu)}, q_3^{(\nu)}, q_5^{(\nu)}, \dots, q_{\nu'}^{(\nu)}$ erhält man aus dem Gleichungssystem (5) (beim Beweise von Satz 5) ein homogenes Teilsystem, das aus der ersten, der dritten, der fünften, ... und der ν' -ten Gleichung des Systems (5) besteht. Sämtliche Gleichungen jenes Teilsystems sind voneinander linear-unabhängig, da alle Gleichungen von (5) dies waren; die Anzahl der Unbekannten $q_1^{(\nu)}, q_3^{(\nu)}, q_5^{(\nu)}, \dots, q_{\nu'}^{(\nu)}$ ist gleich der Anzahl der Gleichungen. Daher hat dies System eine einzige Lösung:

$$q_1^{(\nu)} = q_3^{(\nu)} = q_5^{(\nu)} = \dots = q_{\nu'}^{(\nu)} = 0.$$

Folgerung aus Satz 9.

$$Q_\nu(-x) = (-1)^\nu Q_\nu(x).$$

Satz 10.

Für je drei aufeinanderfolgende Polynome $Q_\alpha(x)$ ($\alpha \geq 1$) gilt im Falle symmetrischer Belegung die Identität

$$Q_{\alpha+1}(x) - x Q_\alpha(x) + \frac{NQ_\alpha}{NQ_{\alpha-1}} Q_{\alpha-1}(x) = 0.$$

Beweis. $[Q_\alpha(x)]^2$ ist stets eine gerade Funktion, da ja $Q_\alpha(x)$ nach Satz 9 entweder gerade oder ungerade ist. Folglich ist $x [Q_\alpha(x)]^2$ ungerade, also auch $x [Q_\alpha(x)]^2 \psi(x)$ ungerade, und somit

$$(Q_\alpha, x Q_\alpha) = \int_{-b}^b x [Q_\alpha(x)]^2 \psi(x) dx = 0.$$

Hiernach folgt aus Satz 7 die Behauptung.

Zweiter Teil.

Eine Klasse von Polynomensystemen.

§ 4. Polynome $Q_\alpha^{(p)}(x)$ und ihre Normen.

Die Klasse von Orthogonalsystemen von Polynomen $Q_\alpha(x)$, mit der wir uns jetzt beschäftigen wollen, sei durch folgende Daten festgesetzt:

1) das Grundgebiet (Belegungsintervall) ist das Intervall $-1 < x < 1$, und

2) die Belegungsfunktion lautet (also in $-1 < x < 1$):

$$(9) \quad \psi(x) = (1 - x^2)^p, \text{ wobei } p > -1 \text{ ist;}$$

für nichtganzzahlige Werte von p sei unter $\psi(x)$ stets $e^{p \log(1-x^2)}$ mit dem (für $-1 < x < 1$ reellen) Hauptzweig des Exponenten zu verstehen.

Jede in der Form (9) gegebene Belegungsfunktion erfüllt die Bedingungen (1) und (2), denn es ist

$$\begin{aligned} m_0 &= \int_{-1}^1 (1 - x^2)^p dx = 2^{2p+1} \int_0^1 t^p (1 - t)^p dt = {}^{12} \\ &= 2^{2p+1} B(p+1, p+1) = {}^{13} \\ &= \frac{2^{2p+1} [\Gamma(p+1)]^2}{\Gamma(2p+2)} > 0 \quad \text{für } p > -1; \end{aligned}$$

¹² Es ist die Substitution $x = 2t - 1$ benutzt worden.

¹³ Die Eulersche Betafunktion; sie drückt sich bekanntlich durch die

zu jeder gehört daher nach Satz 6 ein völlig bestimmtes Orthogonalsystem von Polynomen $Q_\alpha(x)$. Alle solche Systeme zusammen bilden unsere Klasse.

Zur Unterscheidung der einzelnen Systeme dieser Klasse führen wir obere Indizes ein: es sei nämlich

$$Q_0^{(p)}(x), Q_1^{(p)}(x), Q_2^{(p)}(x), Q_3^{(p)}(x), \dots$$

dasjenige Orthogonalsystem von Polynomen $Q_\alpha(x)$, das zur Belegungsfunktion $(1-x^2)^p$ (mit gleichem p) gehört; der obere Index gibt also den (das betreffende Polynomensystem kennzeichnenden) Wert des Klassenparameters p an.

Satz 11.

Es ist

$$(10) \quad Q_\nu^{(p)}(x) = \frac{(-1)^\nu \Gamma(2p + \nu + 1)}{\Gamma(2p + 2\nu + 1) (1-x^2)^p} \cdot \frac{d^\nu (1-x^2)^{p+\nu}}{dx^\nu}$$

für alle (nichtnegativen ganzzahligen) ν , wenn man unter $\frac{d^\nu (1-x^2)^{p+\nu}}{dx^\nu}$ einfach $(1-x^2)^p$ versteht.

Beweis. Für $\nu = 0$ ist die rechte Seite von (10) identisch gleich Eins, also die Behauptung richtig. Für $\nu > 0$ ergibt sich mit Rücksicht auf die (für beliebige u und v geltende) Identität

$$\frac{d}{dx} [x^u (1-x^2)^v] = [-(2v+u)x^{u+1} + ux^{u-1}] (1-x^2)^{v-1},$$

Gammafunktion folgendermaßen aus:

$$B(r, s) = \frac{\Gamma(r) \Gamma(s)}{\Gamma(r+s)}.$$

Die weiteren Eigenschaften der Gammafunktion, von denen im folgenden Gebrauch gemacht wird, sind:

- 1) $\Gamma(r) = (r-1)!$, wenn r positiv und ganz,
- 2) $\Gamma(r) = (r-1) \Gamma(r-1)$,
- 3) $\Gamma(r) > 0$, wenn $r > 0$,
- 4) $\Gamma(r) \rightarrow \infty$, wenn $r \rightarrow 0$ ($r > 0$),
- 5) $\Gamma(r) < 0$, wenn $-1 < r < 0$.

Die erwähnten fünf Eigenschaften sind übrigens einfache Folgerungen aus der allgemeinen Definition der Gammafunktion:

$$\Gamma(r) = \lim_{\alpha \rightarrow \infty} \frac{\alpha! \alpha^r}{r(r+1)(r+2)\dots(r+\alpha)}.$$

daß man

$$\frac{d^\nu (1-x^2)^{p+\nu}}{dx^\nu} = (1-x^2)^p P_\nu(x)$$

setzen kann, wobei $P_\nu(x)$ ein Polynom ν -ten Grades ist und zwar mit dem Gliede

$$(-1)^\nu (2p+2\nu)(2p+2\nu-1)(2p+2\nu-2)\dots(2p+\nu+1)x^\nu$$

anfängt. Folglich stellt die rechte Seite von (10) stets ein Polynom ν -ten Grades dar, und der Koeffizient bei x^ν ist Eins. Es bleibt also nur noch nachzuweisen, daß die rechte Seite von (10) im Falle $\nu \geq 1$ zu den sukzessiven Potenzen x^α (mit $\alpha = 0, 1, \dots, \nu-1$) orthogonal ist [bezüglich der gegebenen Belegungsfunktion $(1-x^2)^p$ und des Grundgebietes $-1 < x < 1$]. Das innere Produkt der rechten Seite von (10) mit x^α gestaltet sich ganz allgemein folgendermaßen:

$$\begin{aligned} \int_{-1}^1 \frac{(-1)^\nu \Gamma(2p+\nu+1)}{\Gamma(2p+2\nu+1)} \frac{d^\nu (1-x^2)^{p+\nu}}{dx^\nu} \cdot x^\alpha \cdot (1-x^2)^p dx &= \\ &= \frac{(-1)^\nu \Gamma(2p+\nu+1)}{\Gamma(2p+2\nu+1)} \int_{-1}^1 x^\alpha \frac{d^\nu (1-x^2)^{p+\nu}}{dx^\nu} dx. \end{aligned}$$

Die Funktion $(1-x^2)^{p+\nu}$ hat für $\nu \geq 1$ den Grenzwert Null an beiden Integrationsgrenzen, da $p > -1$, also $p+\nu > 0$ ist; ebenso verhält es sich mit ihren Ableitungen, deren Ordnungen $< p+\nu$ sind. Infolgedessen ist nun für $\nu \geq 1$ (weil dann $0 \leq \nu-1 < p+\nu$):

$$\int_{-1}^1 \frac{d^\nu (1-x^2)^{p+\nu}}{dx^\nu} dx = \left[\frac{d^{\nu-1} (1-x^2)^{p+\nu}}{dx^{\nu-1}} \right]_{x \rightarrow -1+0}^{x \rightarrow 1-0} = 0; \quad 14$$

ferner gilt, aus demselben Grunde, für $0 < \alpha \leq \nu$:

$$14 \quad \text{Unter } \left[\frac{d^{\nu-1} (1-x^2)^{p+\nu}}{dx^{\nu-1}} \right]_{x \rightarrow -1+0}^{x \rightarrow 1-0} \text{ ist hier}$$

$$\lim_{x \rightarrow 1-0} \frac{d^{\nu-1} (1-x^2)^{p+\nu}}{dx^{\nu-1}} - \lim_{x \rightarrow -1+0} \frac{d^{\nu-1} (1-x^2)^{p+\nu}}{dx^{\nu-1}} \text{ zu verstehen, und}$$

im folgenden allgemein:

$$\left[f(x) \right]_{x \rightarrow -1+0}^{x \rightarrow 1-0} = \lim_{x \rightarrow 1-0} f(x) - \lim_{x \rightarrow -1+0} f(x).$$

$$\int_{-1}^1 x^\alpha \frac{d^\nu (1-x^2)^{p+\nu}}{dx^\nu} dx = -a \int_{-1}^1 x^{\alpha-1} \frac{d^{\nu-1} (1-x^2)^{p+\nu}}{dx^{\nu-1}} dx,$$

also

$$(11) \int_{-1}^1 x^\alpha \frac{d^\nu (1-x^2)^{p+\nu}}{dx^\nu} dx = (-1)^\alpha a! \int_{-1}^1 \frac{d^{\nu-\alpha} (1-x^2)^{p+\nu}}{dx^{\nu-\alpha}} dx,$$

wie man durch einmalige bzw. α -malige Ausführung der Produktintegration leicht bestätigt, und außerdem

$$\int_{-1}^1 \frac{d^{\nu-\alpha} (1-x^2)^{p+\nu}}{dx^{\nu-\alpha}} dx = \left[\frac{d^{\nu-\alpha-1} (1-x^2)^{p+\nu}}{dx^{\nu-\alpha-1}} \right]_{x \rightarrow -1+0}^{x \rightarrow 1-0} = 0$$

für $0 < \alpha \leq \nu - 1$.

Folglich ist die rechte Seite von (10) in der Tat zu allen Potenzen x^α mit $0 \leq \alpha < \nu$ orthogonal, und der Satz ist bewiesen.

Satz 12.

$$NQ_\nu^{(p)} = 2^{2p+2\nu+1} \nu! \frac{\Gamma(2p+\nu+1) [\Gamma(p+\nu+1)]^2}{\Gamma(2p+2\nu+1) \Gamma(2p+2\nu+2)}.$$

Beweis. Im Falle $\nu = 0$ lautet die Behauptung:

$$NQ_0^{(p)} = 2^{2p+1} \frac{[\Gamma(p+1)]^2}{\Gamma(2p+2)};$$

dies trifft aber wirklich zu, weil ja allgemein

$$NQ_0 = m_0$$

ist und in bezug auf unsere Belegungsfunktion $(1-x^2)^p$

$$m_0 = 2^{2p+1} \frac{[\Gamma(p+1)]^2}{\Gamma(2p+2)}$$

gilt, wie wir am Anfang dieses Paragraphen gesehen haben.

Im Falle $\nu > 0$ ergibt sich aus Satz 4

$$NQ_\nu^{(p)} = (Q_\nu^{(p)}, x^\nu),$$

und somit nach Satz 11

$$NQ_\nu^{(p)} = (-1)^\nu \frac{\Gamma(2p+\nu+1)}{\Gamma(2p+2\nu+1)} \int_{-1}^1 x^\nu \frac{d^\nu (1-x^2)^{p+\nu}}{dx^\nu} dx.$$

Wegen (11) ist daher

$$NQ_v^{(p)} = \frac{\Gamma(2p + \nu + 1) \cdot \nu!}{\Gamma(2p + 2\nu + 1)} \int_{-1}^1 (1 - x^2)^{p+\nu} dx,$$

woraus mit Rücksicht auf die bekannte Beziehung

$$\int_{-1}^1 (1 - x^2)^u dx = \frac{2^{2u+1} [\Gamma(u+1)]^2}{\Gamma(2u+2)} \quad (u > -1)$$

die Behauptung folgt.

Folgerung. Zwischen je drei aufeinanderfolgenden Polynomen $Q_\alpha^{(p)}(x)$ besteht die Beziehung

$$(12) \quad Q_{\nu+1}^{(p)}(x) - x Q_\nu^{(p)}(x) + \frac{\nu(2p + \nu)}{(2p + 2\nu - 1)(2p + 2\nu + 1)} Q_{\nu-1}^{(p)}(x) = 0,$$

denn die Belegungsfunktion $(1 - x^2)^p$ genügt der Bedingung (8), also gilt für die $Q_\alpha^{(p)}(x)$ der Satz 10; der dabei auftretende Quotient der Normen läßt sich aber nach dem soeben bewiesenen Satze sofort berechnen:

$$\begin{aligned} \frac{NQ_\nu^{(p)}}{NQ_{\nu-1}^{(p)}} &= \frac{4\nu(2p + \nu)(p + \nu)^2}{(2p + 2\nu)(2p + 2\nu - 1)(2p + 2\nu + 1)(2p + 2\nu)} = \\ &= \frac{\nu(2p + \nu)}{(2p + 2\nu - 1)(2p + 2\nu + 1)}. \end{aligned}$$

§ 5. Endwerte und Nullstellen von $Q_\alpha^{(p)}(x)$.

Satz 13.

Es ist

$$Q_\alpha^{(p)}(1) = \frac{2^{\alpha-1} \Gamma(p + \alpha) \Gamma(2p + \alpha + 1)}{\Gamma(p + 1) \Gamma(2p + 2\alpha)}$$

für $\alpha > 0$.¹⁵

¹⁵ Für $\alpha = 0$ würde der angeführte Ausdruck seinen Sinn verlieren, wenn $p = 0$ oder $p = -\frac{1}{2}$ ist; denn im Zähler und im Nenner würde $\Gamma(0)$ bzw. im Zähler $\Gamma(0)$ und im Nenner $\Gamma(-1)$ stehen. Aber auch sonst wäre die Behauptung für $\alpha = 0$ trivial, weil ja $Q_0^{(p)}(x) \equiv 1$ schon vom Anfang an feststeht.

Beweis. Für $a = 1$ lautet die Behauptung:

$$Q_1^{(p)}(1) = \frac{\Gamma(p+1)\Gamma(2p+2)}{\Gamma(p+1)\Gamma(2p+2)} = 1;$$

dies trifft zu, weil ja nach Satz 9 $Q_1^{(p)}(x) = x$ ist. Ferner wird behauptet:

$$Q_2^{(p)}(1) = \frac{2\Gamma(p+2)\Gamma(2p+3)}{\Gamma(p+1)\Gamma(2p+4)} = \frac{2(p+1)}{2p+3};$$

mit $Q_0^{(p)}(x) \equiv 1$ und $Q_1^{(p)}(x) = x$ folgt aus (12):

$$Q_2^{(p)}(1) = 1 - \frac{2p+1}{(2p+1)(2p+3)} = \frac{2(p+1)}{2p+3},$$

also gilt unser Satz auch für $a = 2$.

Vorausgesetzt, daß die Behauptung für $a = \nu - 1$ und für $a = \nu$ richtig ist, erhält man nun wiederum aus (12):

$$\begin{aligned} Q_{\nu+1}^{(p)}(1) &= \frac{2^{\nu-1}\Gamma(p+\nu)\Gamma(2p+\nu+1)}{\Gamma(p+1)\Gamma(2p+2\nu)} - \\ &\quad - \frac{\nu(2p+\nu)}{(2p+2\nu-1)(2p+2\nu+1)} \cdot \frac{2^{\nu-2}\Gamma(p+\nu-1)\Gamma(2p+\nu)}{\Gamma(p+1)\Gamma(2p+2\nu-2)} = \\ &= \frac{2^{\nu-2}}{\Gamma(p+1)\Gamma(2p+2\nu+2)} \left[2(2p+2\nu)(2p+2\nu+1)\Gamma(p+\nu)\Gamma(2p+\nu+1) - \right. \\ &\quad \left. - \nu(2p+\nu)(2p+2\nu-2)(2p+2\nu)\Gamma(p+\nu-1)\Gamma(2p+\nu) \right] = \\ &= \frac{2^\nu\Gamma(p+\nu+1)\Gamma(2p+\nu+1)}{\Gamma(p+1)\Gamma(2p+2\nu+2)} [(2p+2\nu+1) - \nu] = \\ &= \frac{2^\nu\Gamma(p+\nu+1)\Gamma(2p+\nu+2)}{\Gamma(p+1)\Gamma(2p+2\nu+2)}, \end{aligned}$$

folglich gilt die Behauptung auch für $a = \nu + 1$, und der Satz ist bewiesen.

Folgerung. Dem Satz 9 zufolge ergibt sich aus dem Obigen noch:

$$Q_\alpha^{(p)}(-1) = (-1)^\alpha \cdot \frac{2^{\alpha-1}\Gamma(p+\alpha)\Gamma(2p+\alpha+1)}{\Gamma(p+1)\Gamma(2p+2\alpha)}.$$

Satz 14 (Hilfssatz).

Setzt man in $Q_v^{(p)}(x)$ das Argument $x = \cos t$, so schreibt sich

$$Q_v^{(p)}(\cos t) = \frac{1}{2^v} \sum_{\alpha=0}^v g_{v,\alpha}^{(p)} \cdot \cos(\nu - 2\alpha)t$$

mit den Koeffizienten

$$g_{v,0}^{(p)} = 1 \quad \text{und} \quad g_{v,\alpha}^{(p)} = \binom{v}{\alpha} \prod_{\beta=1}^{\alpha} \frac{2p-1+2\beta}{2p+2\nu+1-2\beta} \quad (\alpha > 0).$$

Beweis. Die Behauptung ist im Falle $\nu=0$ offenbar richtig:

$$Q_0^{(p)}(\cos t) = g_{0,0}^{(p)} \cos 0 = 1,$$

und desgleichen im Falle $\nu=1$:

$$Q_1^{(p)}(\cos t) = \frac{1}{2} [g_{1,0}^{(p)} \cos t + g_{1,1}^{(p)} \cos(-t)] = \cos t.$$

Wenn der Satz aber für $\nu-1$ und für ν als gültig feststeht, folgt aus (12), daß

$$Q_{\nu+1}^{(p)}(\cos t) = \frac{\cos t}{2^v} \sum_{\alpha=0}^v p_{v,\alpha}^{(p)} \cos(\nu-2\alpha)t - \frac{\nu(2p+\nu)}{(2p+2\nu-1)(2p+2\nu+1)} \cdot \frac{1}{2^{\nu-1}} \sum_{\alpha=0}^{\nu-1} g_{\nu-1,\alpha}^{(p)} \cos(\nu-1-2\alpha)t$$

ist. Nach Umformung

$$\cos t \cdot \cos(\nu-2\alpha)t = \frac{1}{2} [\cos(\nu+1-2\alpha)t + \cos(\nu-1-2\alpha)t]$$

ergibt sich daraus:

$$(13) \quad Q_{\nu+1}^{(p)}(\cos t) = \frac{1}{2^{\nu+1}} \left\{ g_{\nu,0}^{(p)} \cos(\nu+1)t + \sum_{\alpha=1}^{\nu} \left[g_{v,\alpha}^{(p)} + g_{v,\alpha-1}^{(p)} - \frac{4\nu(2p+\nu)}{(2p+2\nu-1)(2p+2\nu+1)} g_{\nu-1,\alpha-1}^{(p)} \right] \cos(\nu+1-2\alpha)t + g_{\nu,\nu}^{(p)} \cos(-\nu-1)t \right\}.$$

Es ist hierin nun definitionsgemäß

$$g_{\nu,0}^{(p)} = g_{\nu+1,0}^{(p)} = 1, \quad g_{\nu,\nu}^{(p)} = g_{\nu+1,\nu+1}^{(p)} = 1,$$

und ferner

$$\begin{aligned} & g_{\nu,1}^{(p)} + g_{\nu,0}^{(p)} - \frac{4\nu(2p+\nu)g_{\nu-1,0}^{(p)}}{(2p+2\nu-1)(2p+2\nu+1)} = \\ &= \nu \cdot \frac{2p+1}{2p+2\nu-1} + 1 - \frac{4\nu(2p+\nu)}{(2p+2\nu-1)(2p+2\nu+1)} = \\ &= 1 + \frac{\nu}{(2p+2\nu-1)(2p+2\nu+1)} [(2p+1)(2p+2\nu+1) - 8p - 4\nu] = \\ &= 1 + \frac{\nu(2p-1)}{2p+2\nu+1} = \frac{(\nu+1)(2p+1)}{2p+2\nu+1} = g_{\nu+1,1}^{(p)}. \end{aligned}$$

Für $\alpha > 1$ (und also $\nu \geq \alpha$) erhält man analog:

$$\begin{aligned} & g_{\nu,\alpha}^{(p)} + g_{\nu,\alpha-1}^{(p)} - \frac{4\nu(2p+\nu)g_{\nu-1,\alpha-1}^{(p)}}{(2p+2\nu-1)(2p+2\nu+1)} = \\ &= \binom{\nu}{\alpha} \prod_{\beta=1}^{\alpha} \frac{2p-1+2\beta}{2p+2\nu+1-2\beta} + \binom{\nu}{\alpha-1} \prod_{\beta=1}^{\alpha-1} \frac{2p-1+2\beta}{2p+2\nu+1-2\beta} - \\ & \quad - \frac{4\nu(2p+\nu)}{(2p+2\nu-1)(2p+2\nu+1)} \binom{\nu-1}{\alpha-1} \prod_{\beta=1}^{\alpha-1} \frac{2p-1+2\beta}{2p+2\nu-1-2\beta} = \\ &= \frac{\binom{\nu}{\alpha} \prod_{\beta=1}^{\alpha-1} (2p-1+2\beta)}{\binom{\nu-1}{\alpha-1} \prod_{\beta=1}^{\alpha-1} (2p+2\nu+3-2\beta)} \left[(\nu-\alpha+1)(2p+2\nu+1)(2p-1+2\alpha) + \right. \\ & \quad \left. + \alpha(2p+2\nu+1)(2p+2\nu+1-2\alpha) - 4(2p+\nu)\alpha(\nu-\alpha+1) \right], \end{aligned}$$

woraus, nach den einfachen Umformungen

$$(2p+2\nu+1)(2p-1+2\alpha) - 4\alpha(2p+\nu) = (2p-1)(2p+2\nu+1-2\alpha)$$

und

$$(\nu-\alpha+1)(2p-1) + \alpha(2p+2\nu+1) = (\nu+1)(2p-1+2\alpha),$$

folgt:

$$\begin{aligned}
 & g_{\nu, \alpha}^{(p)} + g_{\nu, \alpha-1}^{(p)} - \frac{4\nu(2p+\nu)g_{\nu-1, \alpha-1}^{(p)}}{(2p+2\nu-1)(2p+2\nu+1)} = \\
 & = \frac{\binom{\nu}{\alpha} \prod_{\beta=1}^{\alpha-1} (2p-1+2\beta)}{\alpha+1} \cdot (\nu+1)(2p-1+2\alpha)(2p+2\nu+1-2\alpha) = \\
 & = \binom{\nu+1}{\alpha} \prod_{\beta=1}^{\alpha} \frac{2p-1+2\beta}{2p+2\nu+3-2\beta} = g_{\nu+1, \alpha}^{(p)}.
 \end{aligned}$$

Die Koeffizienten rechts in (13) stimmen daher sämtlich mit den entsprechenden $g_{\nu+1, \alpha}^{(p)}$ ($\alpha = 0, 1, 2, \dots, \nu+1$) überein; aus der Gültigkeit der Behauptung für $Q_{\nu-1}^{(p)}(x)$ und $Q_{\nu}^{(p)}(x)$ folgt also ihre Gültigkeit auch für $Q_{\nu+1}^{(p)}(x)$, und der Satz ist bewiesen.

Satz 15.

Mit $p \geq -\frac{1}{2}$ und beliebigem ν besteht die Beziehung

$$|Q_{\nu}^{(p)}(x)| \leq Q_{\nu}^{(p)}(1)$$

für alle x des Intervalls $-1 \leq x \leq 1$, d. h. die Endwerte der Polynome $Q_{\nu}^{(p)}(x)$ sind zugleich die absolutgrößten Werte dieser Polynome im Belegungsintervall, wenn der Exponent p der Belegungsfunction $(1-x^2)^p$ mindestens $-\frac{1}{2}$ beträgt.

Beweis. Nach Satz 14 ist $Q_{\nu}^{(p)}(x)$ ein lineares Aggregat der Funktionen

$$\cos \nu t, \cos(\nu-2)t, \cos(\nu-4)t, \dots, \cos(2-\nu)t, \cos(-\nu)t$$

mit $t = \arccos x$ (für $-1 \leq x \leq 1$); die Koeffizienten $g_{\nu, \alpha}^{(p)}$ sind lauter nichtnegative Zahlen, wenn $p \geq -\frac{1}{2}$ ist (nur für $p = -\frac{1}{2}$ verschwinden sie mit Ausnahme des nullten und des ν -ten). Da nun der absolute Betrag von $\cos \beta t$ höchstens Eins und gerade für $t = 0$ Eins ist, so erhält man den größtmöglichen Wert von $Q_{\nu}^{(p)}(\cos t)$ in der Tat mit $t = 0$, also — wie behauptet — mit $x = 1$.

Anmerkung. Daß der Ungleichung $|Q_\nu^{(p)}(x)| \leq Q_\nu^{(p)}(1)$ im Falle $p < -\frac{1}{2}$ hingegen keine allgemeine Gültigkeit zukommt, ist ebenfalls leicht einzusehen. $Q_0^{(p)}(x) \equiv 1$ und $Q_1^{(p)}(x) = x$ sind zwar für alle p dieselben, ihre Endwerte werden mit $p < -\frac{1}{2}$ noch nirgends im Belegungsintervall übertroffen. Aber schon bei $Q_2^{(p)}(x)$ liegt die Sache anders; es zeigt sich nämlich, daß für $p < -\frac{1}{2}$

$$|Q_2^{(p)}(0)| > Q_2^{(p)}(1)$$

ist. Aus (12) erhält man:

$$Q_2^{(p)}(0) = -\frac{1}{2p+3},$$

und aus Satz 13:

$$Q_2^{(p)}(1) = \frac{2p+2}{2p+3},$$

also

$$\frac{|Q_2^{(p)}(0)|}{Q_2^{(p)}(1)} = \frac{1}{2p+2} > 1 \quad \text{für } -1 < p < -\frac{1}{2}.$$

Satz 16.

Mit wachsendem p nähern sich alle Nullstellen von $Q_\nu^{(p)}(x)$ dem Punkte $x=0$ als ihrem gemeinsamen Grenzwerte.

Beweis. Die Behauptung wird bewiesen sein, sobald wir gezeigt haben, daß die Quadratsumme der Nullstellen von $Q_\nu^{(p)}(x)$ mit wachsendem p abnimmt und Null zum Limes hat.

Da nun in $Q_\nu^{(p)}(x)$ entweder nur gerade oder nur ungerade Potenzen auftreten (je nachdem ob ν gerade oder ungerade ist), so drückt sich die Quadratsumme der Nullstellen durch den absoluten Betrag des Koeffizienten $q_2^{(\nu)}$ (bei $x^{\nu-2}$) aus. Wir behaupten, daß dieser Koeffizient

$$q_2^{(\nu)} = -\frac{\nu(\nu-1)}{2(2p+2\nu-1)}$$

ist. Für $\nu=2$ ist unsere Behauptung richtig, denn es ist

$$q_2^{(2)} = Q_2^{(p)}(0) = -\frac{1}{2p+3},$$

wie wir schon vorhin gefunden haben.

Durch Koeffizientenvergleich (bei $x^{\nu-1}$) in (12) erhält man allgemein:

$$q_2^{(\nu+1)} = q_2^{(\nu)} - \frac{\nu(2p+\nu)}{(2p+2\nu-1)(2p+2\nu+1)}.$$

Wenn nun unsere Behauptung für ν als richtig angenommen wird, so folgt sofort ihre Gültigkeit auch für $\nu+1$:

$$\begin{aligned} q_2^{(\nu+1)} &= -\frac{\nu(\nu-1)}{2(2p+2\nu-1)} - \frac{\nu(2p+\nu)}{(2p+2\nu-1)(2p+2\nu+1)} \\ &= -\frac{\nu[(\nu-1)(2p+2\nu+1)+4p+2\nu]}{2(2p+2\nu-1)(2p+2\nu+1)} \\ &= -\frac{\nu(\nu+1)(2p+2\nu-1)}{2(2p+2\nu-1)(2p+2\nu+1)} = -\frac{(\nu+1)\nu}{2(2p+2\nu+1)}. \end{aligned}$$

Die Quadratsumme der Nullstellen von $Q_\nu^{(p)}(x)$ ist daher

$$\frac{\nu(\nu-1)}{2(2p+2\nu-1)},$$

also tatsächlich ein Ausdruck, der mit wachsendem p abnimmt und den Limes Null hat. Damit ist der Satz bewiesen.

Vom zweiten Paragraphen her wissen wir, daß die Nullstellen eines Polynoms $Q_\nu^{(p)}(x)$ und die des Polynoms $Q_{\nu-1}^{(p)}(x)$ (das also den nächstniedrigeren Grad hat, aber demselben Orthogonalsystem angehört) sich gegenseitig trennen (Satz 8). Obwohl nun gemäß Satz 16 die Nullstellen von $Q_{\nu-1}^{(p+1)}(x)$ dem Absolutbetrage nach im allgemeinen kleiner sind als die Nullstellen von $Q_{\nu-1}^{(p)}(x)$, trennen auch sie die Nullstellen von $Q_\nu^{(p)}(x)$ auf dieselbe Weise. Wir behaupten dies in

Satz 17.

Zwischen je zwei aufeinanderfolgenden Nullstellen von $Q_\nu^{(p)}(x)$ ($\nu \geq 2$) liegt genau eine Nullstelle von $Q_{\nu-1}^{(p+1)}(x)$.

Beweis. Nach Satz 11 bestehen die Identitäten:

$$(14) \quad (1-x^2)^p Q_\nu^{(p)}(x) = \frac{(-1)^\nu \Gamma(2p+\nu+1)}{\Gamma(2p+2\nu+1)} \cdot \frac{d^\nu (1-x^2)^{p+\nu}}{dx^\nu},$$

$$(15) \quad (1-x^2)^{p+1} Q_{\nu-1}^{(p+1)}(x) = \frac{(-1)^{\nu-1} \Gamma(2p+\nu+2)}{\Gamma(2p+2\nu+1)} \cdot \frac{d^{\nu-1} (1-x^2)^{p+\nu}}{dx^{\nu-1}}.$$

Aus (15) ersieht man sofort, daß die Nullstellen von $Q_{\nu-1}^{(p+1)}(x)$ — wir bezeichnen sie der wachsenden Größe nach mit $x_1^{(p+1, \nu-1)}$, $x_2^{(p+1, \nu-1)}$, ..., $x_{\nu-1}^{(p+1, \nu-1)}$ — zugleich Nullstellen von

$$\frac{d^{\nu-1} (1-x^2)^{p+\nu}}{dx^{\nu-1}}$$

sind. Wegen $p+1 > 0$ ist ferner

$$\lim_{x \rightarrow -1+0} (1-x^2)^{p+1} = 0 \quad \text{und} \quad \lim_{x \rightarrow 1-0} (1-x^2)^{p+1} = 0,$$

also hat

$$\frac{d^{\nu-1} (1-x^2)^{p+\nu}}{dx^{\nu-1}}$$

in den beiden Endpunkten des Belegungsintervalls den Grenzwert Null. Nach dem *Rolléschen* Satze verschwindet daher

$$\frac{d^\nu (1-x^2)^{p+\nu}}{dx^\nu}$$

mindestens an einer Stelle zwischen -1 und $x_1^{(p+1, \nu-1)}$, je mindestens einmal zwischen $x_\alpha^{(p+1, \nu-1)}$ und $x_{\alpha+1}^{(p+1, \nu-1)}$ mit $\alpha = 1, 2, 3, \dots, \nu-2$, und schließlich mindestens einmal zwischen $x_{\nu-1}^{(p+1, \nu-1)}$ und 1 . Nach (14) können das nur Nullstellen von $Q_\nu^{(p)}(x)$ sein, da $(1-x^2)^p$ zwischen -1 und 1 nirgends

einfachsten mit Hilfe der inneren Produkte (A, x^α) zu finden, indem man $A(x)$ in der Form

$$A(x) = \frac{1}{(1-x^2)^p} \frac{d}{dx} \left[(1-x^2)^{p+1} \frac{dQ_\nu^{(p)}(x)}{dx} \right]$$

umschreibt. Es ist also

$$\begin{aligned} (A, x^\alpha) &= \int_{-1}^1 \frac{1}{(1-x^2)^p} \frac{d}{dx} \left[(1-x^2)^{p+1} \frac{dQ_\nu^{(p)}(x)}{dx} \right] \cdot x^\alpha (1-x^2)^p dx = \\ &= \int_{-1}^1 x^\alpha \frac{d}{dx} \left[(1-x^2)^{p+1} \frac{dQ_\nu^{(p)}(x)}{dx} \right] dx, \end{aligned}$$

woraus für $\alpha = 0$ folgt:

$$(17) \quad (A, 1) = \left[(1-x^2)^{p+1} \frac{dQ_\nu^{(p)}(x)}{dx} \right]_{x \rightarrow -1+0}^{x \rightarrow 1-0} = 0,$$

und im Falle $\alpha > 0$ (durch Produktintegration):

$$(18) \quad (A, x^\alpha) = -a \int_{-1}^1 x^{\alpha-1} (1-x^2)^{p+1} \frac{dQ_\nu^{(p)}(x)}{dx} dx.$$

Für $\alpha = 1$ ergibt sich ferner aus (18):

$$\begin{aligned} (19) \quad (A, x) &= - \left[(1-x^2)^{p+1} Q_\nu^{(p)}(x) \right]_{x \rightarrow -1+0}^{x \rightarrow 1-0} - \\ &\quad - 2(p+1) \int_{-1}^1 x (1-x^2)^p Q_\nu^{(p)}(x) dx = \\ &= -2(p+1) (x, Q_\nu^{(p)}) \end{aligned}$$

und für $\alpha > 1$:

$$\begin{aligned} (20) \quad (A, x^\alpha) &= -a \left[x^{\alpha-1} (1-x^2)^{p+1} Q_\nu^{(p)}(x) \right]_{x \rightarrow -1+0}^{x \rightarrow 1-0} + \\ &+ a \int_{-1}^1 \{ (a-1) x^{\alpha-2} (1-x^2)^{p+1} - 2(p+1) x^\alpha (1-x^2)^p \} Q_\nu^{(p)}(x) dx = \\ &= -a(2p+a+1) (x^\alpha, Q_\nu^{(p)}) + a(a-1) (x^{\alpha-2}, Q_\nu^{(p)}). \end{aligned}$$

Da nun $Q_\nu^{(p)}(x)$ zu allen x^α mit $\alpha = 0, 1, \dots, \nu - 1$ orthogonal ist, so folgt aus (17), (19) und (20):

$$(21) \quad (A, x^\alpha) = 0 \text{ mit } \alpha = 0, 1, \dots, \nu - 1;$$

nach Satz 2 ist daher auch

$$(A, Q_\alpha^{(p)}) = 0 \text{ mit } \alpha = 0, 1, \dots, \nu - 1.$$

Setzt man dies in (16) ein, so folgt:

$$C_0 = C_1 = \dots = C_{\nu-1} = 0.$$

Wegen (21) ist ferner

$$(A, Q_\nu^{(p)}) = (A, x^\nu),$$

also nach (17), (19) und (20) — mit Rücksicht auf Satz 4 —

$$(A, Q_\nu^{(p)}) = \begin{cases} 0, & \text{wenn } \nu = 0 \\ -2(p+1)NQ_\nu^{(p)} & \text{für } \nu = 1 \\ -\nu(2p+\nu+1)NQ_\nu^{(p)} & \text{für } \nu > 1, \end{cases}$$

was sich offenbar auch für alle ν so schreiben läßt:

$$(22) \quad (A, Q_\nu^{(p)}) = -\nu(2p+\nu+1)NQ_\nu^{(p)},$$

weil ja eben $\nu(2p+\nu+1)$ mit $\nu=0$ verschwindet und mit $\nu=1$ den Wert $2p+2$ annimmt. Aus (22) und der letzten Gleichung in (16) ergibt sich daher

$$C_\nu = -\nu(2p+\nu+1).$$

Es ist folglich

$$A(x) = -\nu(2p+\nu+1)Q_\nu^{(p)}(x),$$

d. h.

$$(23) \quad (1-x^2) \frac{d^2 Q_\nu^{(p)}(x)}{dx^2} - 2(p+1)x \frac{dQ_\nu^{(p)}(x)}{dx} = \\ = -\nu(2p+\nu+1)Q_\nu^{(p)}(x),$$

q. e. d.

Bemerkung. Das Polynom $Q_\nu^{(p)}(x)$ ist übrigens bis auf einen konstanten Faktor die einzige polynomiale Lösung seiner Differentialgleichung.

Diese Differentialgleichung

$$(1 - x^2)y'' - 2(p + 1)xy' + \nu(2p + \nu + 1)y = 0$$

hat stets die triviale Lösung $y \equiv 0$; daß aber jede nichttriviale polynomiale Lösung genau vom Grade ν sein soll, zeigt sich folgendermaßen. Geht man mit dem Ansatz

$$y = c_0 x^\kappa + c_1 x^{\kappa-1} + \dots + c_{\kappa-1} x + c_\kappa \quad (c_0 \neq 0)$$

in die Differentialgleichung ein, so erhält man durch Koeffizientenvergleich bei x^κ :

$$c_0[-\kappa(\kappa - 1) - 2(p + 1)\kappa + \nu(2p + \nu + 1)] = 0,$$

also:

$$(\nu - \kappa)(2p + \nu + \kappa + 1) = 0.$$

Wenn nun $2p + 1 + \nu + \kappa \neq 0$ ist, folgt daraus $\kappa = \nu$. Der Fall $2p + 1 + \nu + \kappa = 0$ kann nur für $p = -\frac{1}{2}$, $\nu = 0$ eintreten und führt dann eindeutig zu $\kappa = 0$ (also gleichfalls zu $\kappa = \nu$). Denn mit $p > -1$ ist auch $2p + 1 > -1$; damit nun $2p + 1 + \nu + \kappa$ für irgendwelche ganzzahlige nichtnegative κ und ν verschwindet, soll $2p + 1$ nichtpositiv und ganz sein. Die einzige Möglichkeit ist daher: $2p + 1 = 0$ (d. h. $p = -\frac{1}{2}$), und zwar liefert dies nur mit $\nu = 0$ für κ einen nichtnegativen ganzzahligen Wert: $\kappa = 0$.

Es sei dann

$$P_\nu(x) = c_0 x^\nu + c_1 x^{\nu-1} + \dots + c_{\nu-1} x + c_\nu \quad (c_0 \neq 0)$$

irgendeine polynomiale Lösung der obigen Differentialgleichung; nach Satz 18 ist das Polynom $Q_\nu^{(p)}(x)$ auch eine Lösung, und, da die Differentialgleichung in y , y' und y'' linear-homogen ist, soll

$$K_1 P_\nu(x) + K_2 Q_\nu^{(p)}(x)$$

(mit beliebigen Konstanten K_1 und K_2) ebenfalls eine Lösung sein, also insbesondere auch

$$P_\nu(x) - c_0 Q_\nu^{(p)}(x).$$

Dies ist aber ein Polynom höchstens $(\nu-1)$ -ten Grades und kann infolgedessen keine nichttriviale Lösung sein. Folglich ist

$$P_\nu(x) - c_0 Q_\nu^{(p)}(x) \equiv 0,$$

und jedes $P_\nu(x)$ stimmt daher bis auf einen konstanten Faktor mit dem Polynom $Q_\nu^{(p)}(x)$ überein.

Satz 19.

Für $\nu \geq 1$ ist

$$\left(\frac{d Q_\nu^{(p)}(x)}{dx}\right)_{x=1} = 2^{\nu-2} \nu \cdot \frac{\Gamma(p+\nu) \Gamma(2p+\nu+2)}{\Gamma(p+2) \Gamma(2p+2\nu)}.$$

Beweis. Setzt man in (23) $x = 1$, so hat man:

$$2(p+1) \left(\frac{d Q_\nu^{(p)}(x)}{dx}\right)_{x=1} = \nu(2p+\nu+1) Q_\nu^{(p)}(1).$$

Weiterhin braucht man nur noch für $Q_\nu^{(p)}(1)$ den durch Satz 13 ausgedrückten Wert einzusetzen, alsdann an beiden Seiten der Gleichung den (positiven) Faktor $2(p+1)$ zu unterdrücken, und der Satz ist bewiesen.

Folgerung. Mit Rücksicht auf die aus Satz 9 folgende Relation

$$\left(\frac{d Q_\nu^{(p)}(x)}{dx}\right)_{x=-1} = (-1)^{\nu-1} \cdot \left(\frac{d Q_\nu^{(p)}(x)}{dx}\right)_{x=1}$$

ergibt sich aus dem Obigen noch:

$$\left(\frac{d Q_\nu^{(p)}(x)}{dx}\right)_{x=-1} = (-1)^{\nu-1} 2^{\nu-2} \nu \cdot \frac{\Gamma(p+\nu) \Gamma(2p+\nu+2)}{\Gamma(p+2) \Gamma(2p+2\nu)}.$$

Wir kommen nun zur Berechnung der Integrale

$$(24) \quad \int_{-1}^1 Q_\nu^{(p)}(x) dx \quad \text{und} \quad \int_{-1}^1 x Q_\nu^{(p)}(x) dx,$$

In verschiedenen Spezialfällen kennen wir sie bereits.

1. Im Falle $p = 0$ ist die Belegungsfunktion $(1-x^2)^0 \equiv 1$ und nach Satz 12 $NQ_0^{(0)} = 2$ und $NQ_1^{(0)} = \frac{2}{3}$; es folgt somit aus der Orthogonalität der Polynome $Q_\alpha^{(0)}(x)$:

$$\int_{-1}^1 Q_\nu^{(0)}(x) dx = (Q_0^{(0)}, Q_\nu^{(0)}) = \begin{cases} 2 & \text{für } \nu = 0 \\ 0 & \text{für } \nu = 1, 2, 3, \dots \end{cases}$$

und

$$\int_{-1}^1 x Q_\nu^{(0)}(x) dx = (Q_1^{(0)}, Q_\nu^{(0)}) = \begin{cases} \frac{2}{3} & \text{für } \nu = 1 \\ 0 & \text{für } \nu \neq 1. \end{cases}$$

2. Wegen $Q_0^{(p)}(x) \equiv 1$ und $Q_1^{(p)}(x) \equiv x$ ist auch allgemein

$$\int_{-1}^1 Q_0^{(p)}(x) dx = 2 \quad \text{und} \quad \int_{-1}^1 x Q_1^{(p)}(x) dx = \frac{2}{3}.$$

3. Ferner ist allgemein (nach Satz 9) das Polynom $Q_\nu^{(p)}(x)$ entweder eine gerade oder eine ungerade Funktion, je nachdem der Index ν eine gerade oder ungerade Zahl ist; infolgedessen gilt:

$$\int_{-1}^1 Q_{2\mu+1}^{(p)}(x) dx = 0 \quad \text{und} \quad \int_{-1}^1 x Q_{2\mu}^{(p)}(x) dx = 0 \quad (\mu = 0, 1, 2, \dots).$$

Zur vollständigen Kenntnis der Integrale (24) — also für alle $p > -1$ und $\nu = 0, 1, 2, 3, \dots$ — haben wir daher nur noch die Integrale

$$\int_{-1}^1 Q_{2\mu}^{(p)}(x) dx \quad \text{und} \quad \int_{-1}^1 x Q_{2\mu+1}^{(p)}(x) dx$$

im Falle $p \neq 0$, $\mu > 0$ auszuwerten. Dies geschieht in den zwei nächsten Sätzen.

Satz 20.

$$\int_{-1}^1 Q_{2\mu}^{(p)}(x) dx = \frac{2^{2\mu+1}}{2\mu+1} \cdot \frac{\Gamma(p+2\mu)\Gamma(2p+2\mu)}{\Gamma(p)\Gamma(2p+4\mu)}$$

(für $p \neq 0$ und $\mu = 1, 2, 3, \dots$).

Beweis. Nach Satz 18 ist

$$\nu(2p + \nu + 1) Q_\nu^{(p)}(x) = (x^2 - 1) \frac{d^2 Q_\nu^{(p)}(x)}{dx^2} + 2(p + 1)x \frac{d Q_\nu^{(p)}(x)}{dx},$$

also:

$$(25) \quad \nu(2p + \nu + 1) \int_{-1}^1 Q_{\nu}^{(p)}(x) dx = \\ = \int_{-1}^1 (x^2 - 1) \frac{d^2 Q_{\nu}^{(p)}(x)}{dx^2} dx + 2(p + 1) \int_{-1}^1 x \frac{d Q_{\nu}^{(p)}(x)}{dx} dx.$$

Nun ist aber, wie man durch Produktintegration feststellt,

$$\int_{-1}^1 (x^2 - 1) \frac{d^2 Q_{\nu}^{(p)}(x)}{dx^2} dx = -2 \int_{-1}^1 x \frac{d Q_{\nu}^{(p)}(x)}{dx} dx$$

und

$$\int_{-1}^1 x \frac{d Q_{\nu}^{(p)}(x)}{dx} dx = [Q_{\nu}^{(p)}(1) + Q_{\nu}^{(p)}(-1)] - \int_{-1}^1 Q_{\nu}^{(p)}(x) dx.$$

Mit Benutzung dieser Beziehungen ergibt sich aus (25) im Falle $\nu = 2\mu$:

$$[2\mu(2p + 2\mu + 1) + 2p] \int_{-1}^1 Q_{2\mu}^{(p)}(x) dx = 2p [Q_{2\mu}^{(p)}(1) - Q_{2\mu}^{(p)}(-1)],$$

und hieraus, mit Rücksicht auf Satz 13, nach einfacher Rechnung

$$(2\mu + 1)(2p + 2\mu) \int_{-1}^1 Q_{2\mu}^{(p)}(x) dx = p \cdot 2^{2\mu+1} \cdot \frac{\Gamma(p + 2\mu) \Gamma(2p + 2\mu + 1)}{\Gamma(p + 1) \Gamma(2p + 4\mu)}.$$

Dies geht durch geeignete Kürzungen in unsere Behauptung über.

Satz 21.

$$\int_{-1}^1 x Q_{2\mu+1}^{(p)}(x) dx = 2^{2\mu+2} \cdot \frac{2p + 2\mu + 1}{2\mu + 3} \cdot \frac{\Gamma(p + 2\mu + 1) \Gamma(2p + 2\mu)}{\Gamma(p) \Gamma(2p + 4\mu + 2)}$$

(für $p \neq 0$ und $\mu = 1, 2, 3, \dots$).

Beweis. Wir berufen uns auf die Beziehung zwischen $Q_{\nu+1}^{(p)}(x)$, $Q_{\nu}^{(p)}(x)$ und $Q_{\nu-1}^{(p)}(x)$ (Folgerung von Satz 12) und erhalten daraus durch Integration:

$$\int_{-1}^1 x Q_{\nu}^{(p)}(x) dx = \int_{-1}^1 Q_{\nu+1}^{(p)}(x) dx + \frac{\nu(2p+\nu)}{(2p+2\nu-1)(2p+2\nu+1)} \int_{-1}^1 Q_{\nu-1}^{(p)}(x) dx.$$

Alsdann drücken wir für den Fall $p \neq 0$, $\nu = 2\mu + 1$ die rechterhand stehenden Integrale durch die Werte der Gammafunktion aus (gemäß Satz 20) und haben:

$$\begin{aligned} \int_{-1}^1 x Q_{2\mu+1}^{(p)}(x) dx &= \frac{2^{2\mu+3}}{2\mu+3} \cdot \frac{\Gamma(p+2\mu+2)\Gamma(2p+2\mu+2)}{\Gamma(p)\Gamma(2p+4\mu+4)} + \\ &+ \frac{(2\mu+1)(2p+2\mu+1)}{(2p+4\mu+1)(2p+4\mu+3)} \cdot \frac{2^{2\mu+1}}{2\mu+1} \cdot \frac{\Gamma(p+2\mu)\Gamma(2p+2\mu)}{\Gamma(p)\Gamma(2p+4\mu)}. \end{aligned}$$

Wegen

$$\frac{\Gamma(p+2\mu)}{(2p+4\mu+1)(2p+4\mu+3)\Gamma(2p+4\mu)} = \frac{4\Gamma(p+2\mu+2)}{\Gamma(2p+4\mu+4)}$$

ergibt sich daraus:

$$\begin{aligned} \int_{-1}^1 x Q_{2\mu+1}^{(p)}(x) dx &= \\ &= 2^{2\mu+3} \cdot \frac{2p+2\mu+1}{2\mu+3} \cdot \frac{\Gamma(p+2\mu+2)\Gamma(2p+2\mu)}{\Gamma(p)\Gamma(2p+4\mu+4)} \cdot (2p+2\mu+2\mu+3) = \\ &= 2^{2\mu+3} \cdot \frac{2p+2\mu+1}{2\mu+3} \cdot \frac{\Gamma(p+2\mu+2)\Gamma(2p+2\mu)}{\Gamma(p)\Gamma(2p+4\mu+3)}. \end{aligned}$$

Beachtet man ferner, daß

$$\frac{\Gamma(p+2\mu+2)}{\Gamma(2p+4\mu+3)} = \frac{(p+2\mu+1)\Gamma(p+2\mu+1)}{(2p+4\mu+2)\Gamma(2p+4\mu+2)} = \frac{1}{2} \cdot \frac{\Gamma(p+2\mu+1)}{\Gamma(2p+4\mu+2)}$$

ist, so gelangt man zur Behauptung des Satzes.

Dritter Teil.

Extremalaufgaben der Interpolationsrechnung.

§ 7. Bezeichnungen und Problemstellungen.

Die zu interpolierende (resp. zu integrierende) Funktion bezeichnen wir mit $f(x)$. Ihre Steigungen definieren wir sukzessiv durch die Gleichungen

$$(26) \quad f(x_1, x) = \frac{f(x) - f(x_1)}{x - x_1},$$

$$(27) \quad f(x_1, x_2, \dots, x_\kappa, x) = \frac{f(x_1, x_2, \dots, x_{\kappa-1}, x) - f(x_1, x_2, \dots, x_{\kappa-1}, x_\kappa)}{x - x_\kappa}$$

($\kappa = 2, 3, \dots$),¹⁶

wobei im Falle $x = x_\kappa$ der obige Differenzenquotient durch seinen Grenzwert

$$\lim_{x \rightarrow x_\kappa} f(x_1, x_2, \dots, x_\kappa, x) = f(x_1, x_2, \dots, x_\kappa, x_\kappa)$$

zu ersetzen ist.

Unter Benutzung dieser Ausdrücke schreibt sich die allgemeine Formel der sogenannten parabolischen Interpolation mit beliebigen (reellen) Koinzidenzstellen x_1, x_2, \dots, x_ρ in der Form (die *Newtonsche* Interpolationsformel):

$$(28) \quad f(x) = \sum_{\alpha=1}^{\rho} f(x_1, x_2, \dots, x_\alpha) \prod_{\beta=1}^{\alpha-1} (x - x_\beta) +$$

$$+ f(x_1, x_2, \dots, x_\rho, x) \prod_{\alpha=1}^{\rho} (x - x_\alpha).^{17}$$

Da hierin die Summe

$$\sum_{\alpha=1}^{\rho} f(x_1, x_2, \dots, x_\alpha) \prod_{\beta=1}^{\alpha-1} (x - x_\beta)$$

ein Polynom $(\rho - 1)$ -ten Grades ist — die Steigungen $f(x_1, x_2, \dots, x_\alpha)$ sind ja gewisse konstante Koeffizienten —,

¹⁶ Unter $f(x_1, x_2, \dots, x_{\kappa-1}, x_\kappa)$ verstehen wir dabei den Wert der bereits definierten Steigung $f(x_1, x_2, \dots, x_{\kappa-1}, x)$ für $x = x_\kappa$.

¹⁷ Die Steigung $f(x_1, x_2, \dots, x_\alpha)$ bedeutet im Falle $\alpha = 1$ einfach $f(x_1)$; das „leere“ Produkt $\prod_{\beta=1}^0 \Phi_\beta$ ist gleich Eins zu setzen, abgesehen davon, was für ein Ausdruck Φ_β hinter dem Produktzeichen steht (analog ist die „leere“ Summe $\sum_{\beta=1}^0 \Phi_\beta$ stets Null).

so nennen wir auch die Formel (28) eine Interpolationsformel ($\varrho - 1$)-ten Grades. Das letzte Glied

$$f(x_1, x_2, \dots, x_\varrho, x) \prod_{\alpha=1}^{\varrho} (x - x_\alpha) = R_\varrho(x)$$

bezeichnen wir als Restglied der Interpolationsformel (28).

Aus der Gleichung (27) erhalten wir nun

$$(29) \quad f(x_1, x_2, \dots, x_{\varrho-1}, x) = f(x_1, x_2, \dots, x_{\varrho-1}, x_\varrho) + \\ + (x - x_\varrho) f(x_1, x_2, \dots, x_\varrho, x),$$

eine Beziehung, die es gestattet, durch Umformung des Restgliedes $R_\varrho(x)$ den Grad der Interpolationsformel (28) schrittweise zu erhöhen¹⁸.

Durch Integration erhält man aus (28) die allgemeine Quadraturformel

$$(30) \quad \int_a^b f(x) dx = \sum_{\alpha=1}^{\varrho} f(x_1, x_2, \dots, x_\alpha) \int_a^b \prod_{\beta=1}^{\alpha-1} (x - x_\beta) \cdot dx + \\ + \int_a^b f(x_1, x_2, \dots, x_\varrho, x) \prod_{\alpha=1}^{\varrho} (x - x_\alpha) \cdot dx,$$

worin das vom Restglied $R_\varrho(x)$ herrührende Integral

$$\int_a^b f(x_1, x_2, \dots, x_\varrho, x) \prod_{\alpha=1}^{\varrho} (x - x_\alpha) \cdot dx = \mathfrak{R}_\varrho$$

als Restglied der Quadraturformel (30) bezeichnet wird.

Vorausgesetzt, daß die Funktion $f(x)$ in dem von den Zahlen $x_1, x_2, \dots, x_\varrho, x$ aufgespannten Intervall ϱ -mal differen-

¹⁸ Ausgehend von der Gleichung (26), die, in der Form

$$f(x) = f(x_1) + (x - x_1) f(x_1, x)$$

geschrieben, offenbar als eine Interpolationsformel nullten Grades angesehen werden kann, läßt sich übrigens durch die erwähnte schrittweise Erhöhung des Grades auch die allgemeine Formel (28) herleiten.

zierbar ist, gibt es für diese Funktion in diesem Intervall (nach einem Satze von *Cauchy*) mindestens eine, durch die Zahlen $x_1, x_2, \dots, x_\varrho, x$ bestimmte Zahl u derart, daß

$$f(x_1, x_2, \dots, x_\varrho, x) = \frac{1}{\varrho!} f^{(\varrho)}(u)$$

ist. Folglich verschwindet das Restglied $R_\varrho(x)$ identisch, sobald $f^{(\varrho)}(x) \equiv 0$, d. h. $f(x)$ ein Polynom vom Grade $\leq \varrho - 1$ ist, und zwar nur in diesem Falle.

Das Restglied \mathfrak{R}_ϱ verschwindet gewiß auch, wenn $f^{(\varrho)}(x) \equiv 0$ ist, kann aber noch für solche $f(x)$ verschwinden, die Polynome etwas höheren Grades als des $(\varrho - 1)$ -ten sind. Dabei kommt es auf die Verteilung der Argumentwerte $x_1, x_2, \dots, x_\varrho$ an; wählt man sie beispielsweise so, daß

$$\int_a^b \prod_{\alpha=1}^{\varrho} (x - x_\alpha) \cdot dx = 0$$

ist, so verschwindet das Restglied \mathfrak{R}_ϱ noch im Falle

$$f^{(\varrho)}(x) \equiv \text{const} \neq 0.$$

Wir sagen, daß die Quadraturformel (30) vom Grade σ sei, wenn das Restglied \mathfrak{R}_ϱ im Falle $f^{(\sigma+1)}(x) \equiv 0$ verschwindet und im Falle $f^{(\sigma+1)}(x) \equiv \text{const} \neq 0$ von Null verschieden ausfällt.

Wir kommen nun zur Formulierung unserer Extremalaufgaben.

I. Wie sind die Argumentwerte $x_1, x_2, \dots, x_\varrho$ (bei festem ϱ) zu wählen, damit die Quadraturformel (30) einen möglichst hohen Grad hat?

II. Wenn man die Endpunkte des Integrationsintervalls unter die ϱ Argumentwerte aufnimmt (etwa $x_1 = a$ und $x_\varrho = b$ setzt), wie müssen dann die übrigen $\varrho - 2$ Werte gelegen sein, damit die Quadraturformel (30) ihren höchsten Grad erreicht?

III*. Mit welchen ϱ Koinzidenzstellen $x_1, x_2, \dots, x_\varrho$ fällt im Intervall $a \leq x \leq b$ das Restglied $R_\varrho(x)$ der Interpolationsformel (28) im Mittel am kleinsten aus?

IV*. Fixiert man zwei Koinzidenzstellen in die Endpunkte des Interpolationsintervalls (etwa $x_1 = a$, $x_\rho = b$), welches müssen dann die übrigen Koinzidenzstellen sein, damit das Restglied $R_\rho(x)$ im Mittel am kleinsten wird?

Die zwei letzteren Fragen bedürfen zunächst noch einer prinzipiellen Erläuterung und Präzisierung. Das Integral $\int_a^b [R_\rho(x)]^2 dx$ stellt ein natürliches Maß für die mittlere Größe des Restgliedes dar¹⁹; es liegt nun nach Satz 1 der Quotient

$$\frac{\int_a^b [f(x_1, x_2, \dots, x_\rho, x)]^2 \prod_{\alpha=1}^{\rho} (x - x_\alpha)^2 \cdot dx}{\int_a^b \prod_{\alpha=1}^{\rho} (x - x_\alpha)^2 \cdot dx}$$

zwischen denselben Schranken wie $[f(x_1, x_2, \dots, x_\rho, x)]^2$, und es gibt daher, wenn die Steigung $f(x_1, x_2, \dots, x_\rho, x)$ für alle x in $a \leq x \leq b$ existiert und stetig ist, eine Zahl v in $a < x < b$ derart, daß

$$\int_a^b [R_\rho(x)]^2 dx = [f(x_1, x_2, \dots, x_\rho, v)]^2 \int_a^b \prod_{\alpha=1}^{\rho} (x - x_\alpha)^2 \cdot dx$$

ist. Das linksstehende Integral, das durch eine gehörige Wahl der Koinzidenzstellen möglichst klein gemacht werden soll, zerfällt also in zwei Faktoren, von denen der letztere allerdings nur von den Koinzidenzstellen, der erstere aber noch von der zu interpolierenden Funktion selber abhängt. Will man sich nun auf keine speziellen Funktionen $f(x)$ beschränken, so bleibt nichts übrig, als die Abhängigkeit des Integrals $\int_a^b [R_\rho(x)]^2 dx$ von dem Faktor $[f(x_1, x_2, \dots, x_\rho, v)]^2$ zu vernachlässigen (d. h. so zu verfahren, als wenn sich diese Abhängigkeit „im Durch-

¹⁹ Das (quadratische) Mittel \bar{R}_ρ von $R_\rho(x)$ in $a \leq x \leq b$ definieren wir, wie üblich, durch die Relation

$$\bar{R}_\rho^2 = \frac{1}{b-a} \int_a^b [R_\rho(x)]^2 dx.$$

Bei den obigen Fragen kommt es daher allein auf das erwähnte Integral an.

schnitt für alle $f(x)$, die wir je zu interpolieren haben“, aus-
gliche, und nur den anderen Faktor $\int_a^b \prod_{\alpha=1}^{\varrho} (x - x_{\alpha})^2 \cdot dx$ mög-
lichst klein zu machen. Die Fragen III* und IV* ersetzen wir
daher durch die folgenden:

III. Wie sollen die Zahlen $x_1, x_2, \dots, x_{\varrho}$ gewählt sein, da-
mit das Integral

$$\int_a^b \prod_{\alpha=1}^{\varrho} (x - x_{\alpha})^2 \cdot dx$$

am kleinsten wird?

IV. Mit welchen Zahlen x_1, x_2, \dots, x_{ν} wird das Integral

$$\int_a^b (x - a)^2 (x - b)^2 \prod_{\alpha=1}^{\nu} (x - x_{\alpha})^2 \cdot dx$$

am kleinsten?

§ 8. Lösung der Aufgaben I und II.

Der Einfachheit halber setzen wir $a = -1$ und $b = 1$,
was keine wesentliche Einschränkung der Allgemeinheit be-
deutet²⁰. Die erste Aufgabe besteht darin, solche Zahlen
 $x_1, x_2, \dots, x_{\varrho}$ zu bestimmen, daß in der nach (29) formal gel-
tenden Entwicklung

$$\begin{aligned} & \int_{-1}^1 f(x_1, x_2, \dots, x_{\varrho}, x) \prod_{\alpha=1}^{\varrho} (x - x_{\alpha}) \cdot dx = \\ & = \sum_{\alpha=1}^{\tau} f(x_1, x_2, \dots, x_{\varrho}, x_{\varrho+1}, \dots, x_{\varrho+\alpha}) \int_{-1}^1 \prod_{\beta=1}^{\varrho} (x - x_{\beta}) \cdot \prod_{\gamma=1}^{\alpha-1} (x - x_{\varrho+\gamma}) \cdot dx + \\ & \quad + \int_{-1}^1 f(x_1, x_2, \dots, x_{\varrho}, x_{\varrho+1}, \dots, x_{\varrho+\tau}, x) \prod_{\alpha=1}^{\varrho+\tau} (x - x_{\alpha}) \cdot dx \end{aligned}$$

bei möglichst großem τ sämtliche rechtsstehende Glieder mit
Ausnahme des letzten verschwinden, wie auch immer die
hinzugekommenen Argumentwerte $x_{\varrho+1}, x_{\varrho+2}, \dots, x_{\varrho+\tau}$ gelegen

²⁰ Man kann ja die unabhängige Variable x stets auf solche Weise
linear transformieren, daß ein beliebiges Intervall $a \leq x \leq b$ in $-1 \leq X \leq 1$
übergeht; die Transformation lautet: $x = \frac{a+b}{2} + \frac{b-a}{2} X$.

sein mögen. Es soll also das Polynom ϱ -ten Grades (mit reellen Nullstellen) $\prod_{\alpha=1}^{\varrho} (x - x_{\alpha})$ zu beliebigen Polynomen, deren Grad einen möglichst langen Abschnitt der Folge $0, 1, 2, 3, \dots$ durchläuft, orthogonal sein, und zwar in bezug auf die Belegungsfunktion $\psi(x) \equiv 1$ und das Intervall $-1 < x < 1$.

Dies setzt zunächst eine obere Schranke für den Grad σ der Quadraturformel (30); das Produkt $\prod_{\alpha=1}^{\varrho} (x - x_{\alpha})$ kann nämlich keineswegs zu beliebigen Polynomen ϱ -ten Grades orthogonal sein, weil es dann insbesondere zu sich selbst orthogonal sein müßte (was nach Satz 3 unmöglich ist); folglich gilt stets

$$\tau - 1 < \varrho$$

und (wegen $\sigma = \varrho + \tau - 1$)

$$\sigma < 2\varrho.$$

Der Fall $\sigma = 2\varrho - 1$ tritt aber gerade für

$$\prod_{\alpha=1}^{\varrho} (x - x_{\alpha}) = Q_{\varrho}^{(0)}(x)$$

ein: 1) nach Satz 5 ist ja $Q_{\varrho}^{(0)}(x)$ das einzige Polynom ϱ -ten Grades mit dem höchsten Koeffizienten Eins, das zu sämtlichen Polynomen vom Grade $< \varrho$ orthogonal ist (bezüglich der Belegungsfunktion $\psi \equiv 1$ und des Grundgebietes $-1 < x < 1$), und 2) nach Satz 6 hat $Q_{\varrho}^{(0)}(x)$ lauter reelle Nullstellen.

Die Lösung der ersten Aufgabe lautet daher: die Nullstellen des Polynoms $Q_{\varrho}^{(0)}(x)$ als Argumentwerte $x_1, x_2, \dots, x_{\varrho}$ gewähren der Quadraturformel (30) den höchsten möglichen Grad $2\varrho - 1$.

Bei der Lösung der zweiten Aufgabe gehen wir aus von dem Restgliede²¹

$$\mathfrak{R}_{\nu+2} = \int_{-1}^1 f(-1, 1, x_1, x_2, \dots, x_{\nu}, x) \cdot (x^2 - 1) \prod_{\alpha=1}^{\nu} (x - x_{\alpha}) \cdot dx$$

und denken es vermöge (29) folgendermaßen umgeformt:

²¹ Wir fangen mit der Numeration der Argumentwerte erst nach den zwei vorgeschriebenen (-1 und 1) an; der Index $\varrho = \nu + 2$ bei \mathfrak{R} bezieht sich auf ihre Gesamtanzahl.

$$\mathfrak{R}_{\nu+2} = \sum_{\alpha=1}^{\tau} f(-1, 1, x_1, x_2, \dots, x_{\nu}, x_{\nu+1}, \dots, x_{\nu+\alpha}) \cdot \int_{-1}^1 (x^2 - 1)^{\nu+\alpha-1} \prod_{\beta=1}^{\nu+\alpha-1} (x - x_{\beta}) \cdot dx +$$

$$+ \int_{-1}^1 f(-1, 1, x_1, x_2, \dots, x_{\nu}, x_{\nu+1}, \dots, x_{\nu+\tau}, x) \cdot (x^2 - 1)^{\nu+\tau} \prod_{\gamma=1}^{\nu+\tau} (x - x_{\gamma}) \cdot dx.$$

Gefragt wird also nach solchen Argumentwerten x_1, x_2, \dots, x_{ν} , daß für ein möglichst großes τ sämtliche Integrale

$$(31) \quad \int_{-1}^1 (x^2 - 1)^{\nu+\alpha-1} \prod_{\beta=1}^{\nu+\alpha-1} (x - x_{\beta}) \cdot dx \quad (\alpha = 1, 2, \dots, \tau)$$

verschwinden, ganz abgesehen davon, was die (reellen) Zahlen $x_{\nu+1}, x_{\nu+2}, \dots, x_{\nu+\tau-1}$ sind.

Schreibt man nun den Ausdruck (31) in der Form

$$- \int_{-1}^1 \prod_{\beta=1}^{\nu} (x - x_{\beta}) \cdot \prod_{\gamma=1}^{\alpha-1} (x - x_{\nu+\gamma}) \cdot (1 - x^2) dx,$$

so ist dies Integral ein inneres Produkt der Polynome

$$\prod_{\beta=1}^{\nu} (x - x_{\beta}) \quad \text{und} \quad \prod_{\gamma=1}^{\alpha-1} (x - x_{\nu+\gamma}),$$

in bezug auf die Belegunsfunktion $1 - x^2$ und das Belegungsintervall $-1 < x < 1$. Die Forderung, daß das Integral (31) verschwinden soll, bedeutet also, daß das Polynom

$$\prod_{\alpha=1}^{\nu} (r - x_{\alpha})$$

zu einem beliebigen Polynom $(\alpha - 1)$ -ten Grades (mit reellen Nullstellen) orthogonal sein soll. Ähnlich wie früher, erhalten wir daraus auch hier eine obere Schranke für τ und daher eine für σ :

$$\tau - 1 < \nu, \quad \sigma < 2\nu + 2, \quad [\text{d. h. } \sigma < 2\rho - 2],$$

denn es ist ja, gemäß der früheren Festsetzung,

$$\nu + 2 = \rho \quad \text{und} \quad \sigma = \rho + \tau - 1.$$

Der Grad $\sigma = 2\nu + 1$ ist aber schon erreichbar, und zwar nur durch

$$\prod_{\beta=1}^{\nu} (x - x_{\beta}) = Q_{\nu}^{(1)}(x),$$

wie aus den Sätzen 5 und 6, analog wie oben, folgt.

Unter der Bedingung, daß in der Endpunkten (-1 und 1) des Integrationsintervalls je einer der Argumentwerte liegen soll, hat die Quadraturformel (30) also höchstens den Grad $2\varrho - 3$, und dieser wird nur dann erreicht, wenn für die übrigen $\varrho - 2$ Argumentwerte die Nullstellen des Polynoms $Q_{\varrho-2}^{(1)}(x)$ eingesetzt werden. Damit ist die zweite Aufgabe gelöst.

§ 9. Lösung der Aufgaben III und IV.

Setzt man, wie im vorigen Paragraphen, $a = -1$ und $b = 1$, so lautet die dritte Aufgabe wie folgt. Es sind die (reellen) Zahlen $x_1, x_2, \dots, x_{\varrho}$ so zu bestimmen, daß das Integral

$$(32) \quad \int_{-1}^1 \prod_{\alpha=1}^{\varrho} (x - x_{\alpha})^2 \cdot dx$$

seinen minimalen Wert annimmt.

Das Produkt $\prod_{\alpha=1}^{\varrho} (x - x_{\alpha})$ ist jedenfalls ein Polynom ϱ -ten

Grades mit reellen Nullstellen, also auch reellen Koeffizienten, und zwar mit dem Koeffizienten Eins bei der ϱ -ten Potenz; folglich ist es in der Form

$$\prod_{\alpha=1}^{\varrho} (x - x_{\alpha}) = Q_{\varrho}^{(0)}(x) + C_{\varrho-1} Q_{\varrho-1}^{(0)}(x) + C_{\varrho-2} Q_{\varrho-2}^{(0)}(x) + \dots + C_0 Q_0^{(0)}(x)$$

darstellbar, wobei $C_0, C_1, \dots, C_{\varrho-1}$ irgendwelche reelle Zahlen sind. Daraus ergibt sich nun, wegen der Orthogonalitätseigenschaft der Polynome $Q_{\varrho}^{(0)}(x)$,

$$\int_{-1}^1 \prod_{\alpha=1}^{\varrho} (x - x_{\alpha})^2 \cdot dx = N Q_{\varrho}^{(0)} + C_{\varrho-1}^2 N Q_{\varrho-1}^{(0)} + C_{\varrho-2}^2 N Q_{\varrho-2}^{(0)} + \dots + C_0^2 N Q_0^{(0)}.$$

Das Minimum des rechtsstehenden Ausdrucks tritt offenbar für

$$C_0 = C_1 = \dots = C_{\rho-1} = 0$$

ein; es fragt sich nur, ob das linksstehende Integral dies Minimum wirklich erreichen kann, wenn für x_1, x_2, \dots, x_ρ nur reelle Werte zugelassen werden. Da nun $Q_\rho^{(0)}(x)$ lauter reelle Nullstellen hat, ist diese Frage zu bejahen; Aufgabe III ist also lösbar, und die Lösung lautet: die Nullstellen von $Q_\rho^{(0)}(x)$, für x_1, x_2, \dots, x_ρ eingesetzt, liefern dem Integral (32) seinen kleinsten Wert.

Die vierte Aufgabe besteht darin, die Wahl der (reellen) Zahlen x_1, x_2, \dots, x_ν so zu treffen, daß

$$(33) \quad \int_{-1}^1 (x^2 - 1)^2 \prod_{\alpha=1}^{\nu} (x - x_\alpha)^2 \cdot dx$$

am kleinsten wird.

Das Integral (33) ist die Norm des Polynoms $\prod_{\alpha=1}^{\nu} (x - x_\alpha)$ in bezug auf die Belegungsfunktion $(1 - x^2)^2$ und das Intervall $-1 < x < 1$. Es folgt somit, indem man

$$\prod_{\alpha=1}^{\nu} (x - x_\alpha) = Q_\nu^{(2)}(x) + C_{\nu-1} Q_{\nu-1}^{(2)}(x) + C_{\nu-2} Q_{\nu-2}^{(2)}(x) + \dots + C_0 Q_0^{(2)}(x)$$

setzt,

$$\begin{aligned} \int_{-1}^1 (x^2 - 1)^2 \prod_{\alpha=1}^{\nu} (x - x_\alpha)^2 \cdot dx = \\ = NQ_\nu^{(2)} + C_{\nu-1}^2 NQ_{\nu-1}^{(2)} + C_{\nu-2}^2 NQ_{\nu-2}^{(2)} + \dots + C_0^2 NQ_0^{(2)}. \end{aligned}$$

Das Integral (33) hat also den kleinsten Wert, wenn

$$C_0 = C_1 = \dots = C_{\nu-1} = 0, \quad \text{d. h.} \quad \prod_{\alpha=1}^{\nu} (x - x_\alpha) = Q_\nu^{(2)}(x)$$

ist. Folglich müssen x_1, x_2, \dots, x_ν die Nullstellen des Polynoms $Q_\nu^{(2)}(x)$ sein.

§ 10. Vergleichende und ergänzende Bemerkungen.

1. Die erste und die dritte Aufgabe haben ein und dieselbe Lösung — die Gesamtheit der Nullstellen von $Q_v^{(0)}(x)$. Obwohl nun die zweite Aufgabe gegenüber der ersten und die vierte gegenüber der dritten den gleichen Unterschied aufweisen (nämlich, daß zwei von den Argumentwerten x_1, x_2, \dots, x_p in den Endpunkten des Intervalls festgelegt sind), ist dennoch die Lösung der zweiten Aufgabe von jener der vierten im allgemeinen verschieden. Denn außer den zwei trivialen Fällen

$$Q_0^{(1)}(x) \equiv Q_0^{(2)}(x) \equiv 1 \quad \text{und} \quad Q_1^{(1)}(x) \equiv Q_1^{(2)}(x) \equiv x$$

sind die Polynome $Q_v^{(1)}(x)$ und $Q_v^{(2)}(x)$ nicht miteinander [und auch nicht mit den $Q_v^{(0)}(x)$] identisch, also stimmen auch ihre entsprechenden Nullstellen keineswegs sämtlich überein. Die Polynome $Q_v^{(0)}(x)$ und ihre Nullstellen $x_1^{(0,\nu)}, x_2^{(0,\nu)}, \dots, x_p^{(0,\nu)}$ sind²² z. B. für $\nu = 2, 3, 4, 5$:

$$Q_2^{(0)}(x) = x^2 - \frac{1}{3},$$

$$x_1^{(0,2)} = -\sqrt{\frac{1}{3}}, \quad x_2^{(0,2)} = \sqrt{\frac{1}{3}},$$

$$Q_3^{(0)}(x) = x^3 - \frac{3}{5}x,$$

$$x_1^{(0,3)} = -\sqrt{0.6}, \quad x_2^{(0,3)} = 0, \quad x_3^{(0,3)} = \sqrt{0.6},$$

$$Q_4^{(0)}(x) = x^4 - \frac{6}{7}x^2 + \frac{3}{35}.$$

$$x_1^{(0,4)} = -\sqrt{\frac{3 + 2\sqrt{1.2}}{7}}, \quad x_2^{(0,4)} = -\sqrt{\frac{3 - 2\sqrt{1.2}}{7}},$$

$$x_3^{(0,4)} = \sqrt{\frac{3 - 2\sqrt{1.2}}{7}}, \quad x_4^{(0,4)} = \sqrt{\frac{3 + 2\sqrt{1.2}}{7}},$$

$$Q_5^{(0)}(x) = x^5 - \frac{10}{9}x^3 + \frac{5}{21}x,$$

$$x_1^{(0,5)} = -\frac{1}{3}\sqrt{5 + 2\sqrt{\frac{10}{7}}}, \quad x_2^{(0,5)} = -\frac{1}{3}\sqrt{5 - 2\sqrt{\frac{10}{7}}},$$

$$x_3^{(0,5)} = 0, \quad x_4^{(0,5)} = \frac{1}{3}\sqrt{5 - 2\sqrt{\frac{10}{7}}}, \quad x_5^{(0,5)} = \frac{1}{3}\sqrt{5 + 2\sqrt{\frac{10}{7}}},$$

²² Der Kürze halber bezeichnen wir im folgenden den positiven Zweig der Quadratwurzel (aus einer positiven Zahl u) mit \sqrt{u} (anstatt mit $|\sqrt{u}|$).

die entsprechenden $Q_\nu^{(1)}(x)$ und ihre Nullstellen $x_1^{(1,\nu)}, x_2^{(1,\nu)}, \dots, x_\nu^{(1,\nu)}$:

$$Q_2^{(1)}(x) = x^2 - \frac{1}{5},$$

$$x_1^{(1,2)} = -\sqrt{\frac{1}{5}}, \quad x_2^{(1,2)} = \sqrt{\frac{1}{5}},$$

$$Q_3^{(1)}(x) = x^3 - \frac{3}{7}x,$$

$$x_1^{(1,3)} = -\sqrt{\frac{3}{7}}, \quad x_2^{(1,3)} = 0, \quad x_3^{(1,3)} = \sqrt{\frac{3}{7}},$$

$$Q_4^{(1)}(x) = x^4 - \frac{2}{3}x^2 + \frac{1}{21},$$

$$x_1^{(1,4)} = -\sqrt{\frac{1+2\sqrt{\frac{1}{7}}}{3}}, \quad x_2^{(1,4)} = -\sqrt{\frac{1-2\sqrt{\frac{1}{7}}}{3}},$$

$$x_3^{(1,4)} = \sqrt{\frac{1-2\sqrt{\frac{1}{7}}}{3}}, \quad x_4^{(1,4)} = \sqrt{\frac{1+2\sqrt{\frac{1}{7}}}{3}},$$

$$Q_5^{(1)}(x) = x^5 - \frac{10}{11}x^3 + \frac{5}{33}x,$$

$$x_1^{(1,5)} = -\sqrt{\frac{5+2\sqrt{\frac{5}{3}}}{11}}, \quad x_2^{(1,5)} = -\sqrt{\frac{5-2\sqrt{\frac{5}{3}}}{11}},$$

$$x_3^{(1,5)} = 0, \quad x_4^{(1,5)} = \sqrt{\frac{5-2\sqrt{\frac{5}{3}}}{11}}, \quad x_5^{(1,5)} = \sqrt{\frac{5+2\sqrt{\frac{5}{3}}}{11}},$$

und die Polynome $Q_\nu^{(2)}(x)$ mit ihren Nullstellen:

$$Q_2^{(2)}(x) = x^2 - \frac{1}{7},$$

$$x_1^{(2,2)} = -\sqrt{\frac{1}{7}}, \quad x_2^{(2,2)} = \sqrt{\frac{1}{7}},$$

$$Q_3^{(2)}(x) = x^3 - \frac{1}{3}x,$$

$$x_1^{(2,3)} = -\sqrt{\frac{1}{3}}, \quad x_2^{(2,3)} = 0, \quad x_3^{(2,3)} = \sqrt{\frac{1}{3}},$$

$$Q_4^{(2)}(x) = x^4 - \frac{6}{11}x^2 + \frac{1}{33},$$

$$x_1^{(2,4)} = -\sqrt{\frac{3+4\sqrt{\frac{1}{3}}}{11}}, \quad x_2^{(2,4)} = -\sqrt{\frac{3-4\sqrt{\frac{1}{3}}}{11}},$$

$$x_3^{(2,4)} = \sqrt{\frac{3-4\sqrt{\frac{1}{3}}}{11}}, \quad x_4^{(2,4)} = \sqrt{\frac{3+4\sqrt{\frac{1}{3}}}{11}},$$

$$Q_5^{(2)}(x) = x^5 - \frac{10}{13}x^3 + \frac{15}{143}x,$$

$$x_1^{(2,5)} = -\sqrt{\frac{5 + 4\sqrt{\frac{5}{11}}}{13}}, \quad x_2^{(2,5)} = -\sqrt{\frac{5 - 4\sqrt{\frac{5}{11}}}{13}},$$

$$x_3^{(2,5)} = 0, \quad x_4^{(2,5)} = \sqrt{\frac{5 - 4\sqrt{\frac{5}{11}}}{13}}, \quad x_5^{(2,5)} = \sqrt{\frac{5 + 4\sqrt{\frac{5}{11}}}{13}}.$$

Berechnet man für alle obigen Nullstellen ihre Näherungsbrüche (etwa Dezimalbrüche bis zu einer gewissen Zehnerpotenz), so ist es leicht, das Bestehen der in den Sätzen 8 und 17 allgemein hergeleiteten Beziehungen in diesen Spezialfällen zu erblicken.

2. Setzt man die Nullstellen von $Q_\rho^{(0)}(x)$ als Argumentwerte x_1, x_2, \dots, x_ρ in die Formel (30) ein (im Falle $a = -1, b = 1$), so erhält man bekanntlich die Quadraturformel von *Gauß*. Diese hat, gemäß der Lösung der ersten Aufgabe, den Grad $2\rho - 1$ und ihr Restglied lautet:

$$\mathfrak{R}_\rho = \int_{-1}^1 f(x_1^{(0,\rho)}, x_2^{(0,\rho)}, \dots, x_\rho^{(0,\rho)}, x_{\rho+1}, \dots, x_{2\rho}, x) Q_\rho^{(0)}(x) \prod_{\alpha=1}^{\rho} (x - x_{\rho+\alpha}) \cdot dx,$$

wobei den Größen $x_{\rho+1}, x_{\rho+2}, \dots, x_{2\rho}$ beliebige Werte beigelegt werden können. Für den Fall, daß die Funktion $f(x)$ in $-1 < x < 1$ stetig und an den Nullstellen von $Q_\rho^{(0)}(x)$ differenzierbar ist, ergibt sich, indem man $x_{\rho+\alpha} = x_\alpha^{(0,\rho)}$ wählt, nach Satz 1:

$$\begin{aligned} \mathfrak{R}_\rho &= \int_{-1}^1 f(x_1^{(0,\rho)}, x_1^{(0,\rho)}, x_2^{(0,\rho)}, x_2^{(0,\rho)}, \dots, x_\rho^{(0,\rho)}, x_\rho^{(0,\rho)}, x) [Q_\rho^{(0)}(x)]^2 dx = \\ &= f(x_1^{(0,\rho)}, x_1^{(0,\rho)}, x_2^{(0,\rho)}, x_2^{(0,\rho)}, \dots, x_\rho^{(0,\rho)}, x_\rho^{(0,\rho)}, u) \cdot NQ_\rho^{(0)} \end{aligned}$$

(worin $-1 < u < 1$),

und daher, falls die 2ρ -te Ableitung von $f(x)$ in $-1 < x < 1$ überall existiert, unter Anwendung des *Cauchyschen* Satzes:

$$\mathfrak{R}_\rho = \frac{NQ_\rho^{(0)}}{(2\rho)!} f^{(2\rho)}(v) \quad (\text{mit } -1 < v < 1),$$

also

$$\mathfrak{R}_\varrho = \frac{\varrho!}{2^{\varrho-1} (2\varrho+1) [(2\varrho-1)!!]^3} f^{(2\varrho)}(v),$$

weil nach Satz 12 ja $NQ_\varrho^{(0)} = \frac{2(\varrho!)^2}{(2\varrho-1)!!(2\varrho+1)!!}$ ist.

Die *Gaußsche* Quadraturformel ersten Grades enthält einen einzigen Argumentwert $x_1^{(0,1)} = 0$; sie ist die unter dem Namen „Tangententrapezregel“ bekannte Formel

$$\int_{-1}^1 f(x) dx = 2f(0) + \frac{1}{3} f''(v) \quad (-1 < v < 1).$$

In den nächsten Formeln (vom Grade 3, 5, 7, ...) treten schon irrationale Argumentwerte auf, was bei mancher praktischen Anwendung einen erheblichen Nachteil bedeuten kann.

3. Mit den Endpunkten des Integrationsintervalls und den ν Nullstellen des Polynoms $Q_\nu^{(1)}(x)$, d. h. mit den Zahlen $-1, x_1^{(1,\nu)}, x_2^{(1,\nu)}, \dots, x_\nu^{(1,\nu)}, 1$ als Argumentwerten erhält man eine Quadraturformel, die (laut der Lösung der dritten Aufgabe) den Grad $2\nu+1$ hat, während jede andere Wahl von ν Zahlen (mit denselben zwei festgehaltenen Argumentwerten -1 und 1) sicherlich zu einer Quadraturformel niedrigeren Grades führt.

Da die Zahlen $-1, x_1^{(1,\nu)}, x_2^{(1,\nu)}, \dots, x_\nu^{(1,\nu)}, 1$ voneinander verschieden sind, kann man diese Quadraturformel (etwa von der *Lagrangeschen* Interpolationsformel ausgehend) folgendermaßen schreiben:

$$(34) \quad \int_{-1}^1 f(x) dx = H_0^{(\nu)} f(-1) + \sum_{\alpha=1}^{\nu} H_\alpha^{(\nu)} f(x_\alpha^{(1,\nu)}) + H_{\nu+1}^{(\nu)} f(1) + \mathfrak{R}_{\nu+2}$$

mit den Koeffizienten (den Gewichtskoeffizienten bei den Funktionswerten)

$$H_0^{(\nu)} = \frac{1}{2Q_\nu^{(1)}(-1)} \int_{-1}^1 (1-x) Q_\nu^{(1)}(x) dx,$$

$$H_{\alpha}^{(\nu)} = \frac{\int_{-1}^1 \frac{Q_{\nu}^{(1)}(x)}{x - x_{\alpha}^{(1, \nu)}} (1 - x^2) dx}{\left[(1 - x^2) \frac{dQ_{\nu}^{(1)}(x)}{dx} \right]_{x=x_{\alpha}^{(1, \nu)}}} \quad (\text{für } \alpha = 1, 2, \dots, \nu),$$

$$H_{\nu+1}^{(\nu)} = \frac{1}{2Q_{\nu}^{(1)}(1)} \int_{-1}^1 (1+x) Q_{\nu}^{(1)}(x) dx$$

und dem Restglied

$$\mathfrak{R}_{\nu+2} = \int_{-1}^1 f(-1, x_1^{(1, \nu)}, x_2^{(1, \nu)}, \dots, x_{\nu}^{(1, \nu)}, 1, x) (x^2 - 1) Q_{\nu}^{(1)}(x) dx,$$

welches für eine in $-1 \leq x \leq 1$ stetige und in den Punkten $x_1^{(1, \nu)}, x_2^{(1, \nu)}, \dots, x_{\nu}^{(1, \nu)}$ differenzierbare Funktion $f(x)$ in der Form

$$\begin{aligned} \mathfrak{R}_{\nu+2} &= \int_{-1}^1 f(-1, x_1^{(1, \nu)}, x_1^{(1, \nu)}, \dots, x_{\nu}^{(1, \nu)}, x_{\nu}^{(1, \nu)}, 1, x) (x^2 - 1) [Q_{\nu}^{(1)}(x)]^2 dx \\ &= -f(-1, x_1^{(1, \nu)}, x_1^{(1, \nu)}, x_2^{(1, \nu)}, x_2^{(1, \nu)}, \dots, x_{\nu}^{(1, \nu)}, x_{\nu}^{(1, \nu)}, 1, u) N Q_{\nu}^{(1)} \\ &\quad (\text{mit } -1 < u < 1) \end{aligned}$$

darstellbar ist, und daher für eine in $-1 \leq x \leq 1$ $(2\nu + 2)$ -mal differenzierbare Funktion $f(x)$ in der Form

$$\mathfrak{R}_{\nu+2} = -\frac{f^{(2\nu+2)}(v)}{(2\nu+2)!} \cdot N Q_{\nu}^{(1)} = -\frac{\nu+2}{2\nu+3} \cdot \frac{\nu!}{2^{\nu} [(2\nu+1)!!]^3} \cdot f^{(2\nu+2)}(v) \quad (\text{mit } -1 < v < 1).$$

Die Koeffizienten $H_0^{(\nu)}$ und $H_{\nu+1}^{(\nu)}$ lassen sich übrigens ganz allgemein berechnen. Wir erhalten nämlich aus den Sätzen 20 und 21

$$\int_{-1}^1 (1 \pm x) Q_{\nu}^{(1)}(x) dx = \begin{cases} \frac{2 \cdot \nu!}{(2\nu+1)!!} & \text{für } \nu = 2\mu \\ \pm \frac{2 \cdot \nu!}{(2\nu+1)!!} & \text{für } \nu = 2\mu + 1 \quad (\mu = 0, 1, 2, \dots). \end{cases}$$

aus Satz 13

$$Q_\nu^{(1)}(1) = (-1)^\nu Q_\nu^{(1)}(-1) = \frac{(\nu+2)!}{2(2\nu+1)!!},$$

und somit

$$H_0^{(\nu)} = H_{\nu+1}^{(\nu)} = \frac{2}{(\nu+1)(\nu+2)}.$$

4. Die Formel (34) ist für $\nu=0$ die übliche Trapezregel (Sehnentrapezregel):

$$\int_{-1}^1 f(x) dx = f(-1) + f(1) - \frac{2}{3} f''(v) \quad (-1 < v < 1),$$

und für $\nu=1$ die *Simpsonsche* Regel:

$$\int_{-1}^1 f(x) dx = \frac{1}{3} f(-1) + \frac{4}{3} f(0) + \frac{1}{3} f(1) - \frac{1}{90} f^{IV}(v) \quad (-1 < v < 1).$$

Von den nächsten Spezialfällen ($\nu=2$)

$$\int_{-1}^1 f(x) dx = \frac{1}{6} f(-1) + \frac{5}{6} f(-\sqrt{0.2}) + \frac{5}{6} f(\sqrt{0.2}) + \frac{1}{6} f(1) - \frac{2}{23\ 625} f^{VI}(v)$$

und ($\nu=3$)

$$(35) \quad \int_{-1}^1 f(x) dx = 0.1 [f(-1) + f(1)] + \frac{1}{3} \left\{ 7.3 [f(-\sqrt{\frac{3}{7}}) + f(\sqrt{\frac{3}{7}})] + 1.6 f(0) \right\} - \frac{f^{VIII}(v)}{2\ 778\ 300}$$

ist der letztere in mancher Hinsicht bemerkenswert: die Formel (35) drückt das Integral von $f(x)$ durch fünf Funktionswerte aus, von denen nur zwei zu den irrationalen Argumentwerten

gehören, und hat dabei den Grad 7. Die *Gaußsche* Formel desselben Grades lautet:

$$\int_{-1}^1 f(x) dx = \left(\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{30}}{36}\right) \left[f\left(-\sqrt{\frac{3+2\sqrt{12}}{7}}\right) + f\left(\sqrt{\frac{3+2\sqrt{12}}{7}}\right) \right] + \\ + \left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{30}}{36}\right) \left[f\left(-\sqrt{\frac{3-2\sqrt{12}}{7}}\right) + f\left(\sqrt{\frac{3-2\sqrt{12}}{7}}\right) \right] + \\ + \frac{f^{VIII}(v)}{3\,472\,875},$$

enthält also vier irrationale Argumentwerte, und die Gewichtskoeffizienten bei den entsprechenden Funktionswerten sind auch sämtlich irrational.

Was nun das Restglied der Formel (34) und das der *Gaußschen* Formel desselben Grades betrifft, so können sie hinsichtlich der Größe des Koeffizienten bei der $2q$ -ten Ableitung ganz allgemein verglichen werden. Dieser Koeffizient beträgt im Restglied der Formel (34) (indem man $\nu + 1 = q$ setzt)

$$-\frac{q+1}{2q+1} \cdot \frac{(q-1)!}{2^{q-1} [(2q-1)!!]^3}$$

und im Restglied der *Gaußschen* Formel

$$+\frac{q!}{(2q+1) \cdot 2^{q-1} [(2q-1)!!]^3},$$

also sind die beiden von gleicher Größenordnung; der zweite ist allerdings etwas kleiner als der erste, ihr Quotient

$$-\frac{q+1}{q}$$

strebt aber mit wachsendem q gegen -1 .

Aus der Tatsache, daß diese Koeffizienten entgegengesetzte Vorzeichen haben, folgt der *Einschließungssatz*:

wenn $f(x)$ eine in $-1 < x < 1$ zeichenbeständige $2q$ -te Ableitung besitzt, so liegt der durch (34) angegebene Näherungsausdruck (d. h. die rechtsstehende „gewogene Summe“ der Funktionswerte, ohne Restglied) an der einen Seite und der *Gaußsche* Näherungsausdruck an der anderen Seite des zu berechnenden Integrals.

5. Die Interpolationsformel (28) mit den Nullstellen von $Q_\rho^{(0)}(x)$ als Koinzidenzstellen pflegt man die *Gaußsche* Interpolationsformel zu nennen. Für den mittleren Wert \bar{R}_ρ ihres Restgliedes $R_\rho(x)$ in $-1 \leq x \leq 1$ erhalten wir, wenn $f(x)$ in $-1 < x < 1$ ρ -mal differenzierbar ist,

$$\begin{aligned} \bar{R}_\rho^2 &= \frac{1}{2} [f(x_1^{(0,\rho)}, x_2^{(0,\rho)}, \dots, x_\rho^{(0,\rho)}, u)]^2 NQ_\rho^{(0)} \\ &= \frac{[f^{(\rho)}(v)]^2}{(2\rho - 1)!! (2\rho + 1)!!} \\ &\quad (\text{mit } -1 < u < 1 \text{ und } -1 < v < 1). \end{aligned}$$

Für die Schranken des Restgliedes $R_\rho(x)$ in $-1 \leq x \leq 1$ ergibt sich, mit Rücksicht auf die Sätze 13 und 15,

$$|R_\rho(x)| < \frac{M_\rho}{(2\rho - 1)!!},$$

indem man die obere Schranke von $|f^{(\rho)}(x)|$ in $-1 \leq x \leq 1$ mit M_ρ bezeichnet.

Setzt man die Nullstellen von $Q_\nu^{(2)}(x)$ und die Zahlen -1 und 1 als Koinzidenzstellen in die Formel (28) ein, so gelangt man zu einer Interpolationsformel, deren Restglied durch die Beziehungen

$$\begin{aligned} (\bar{R}_{\nu+2})^2 &= \frac{1}{2} [f(-1, x_1^{(2,\nu)}, x_2^{(2,\nu)}, \dots, x_\nu^{(2,\nu)}, 1, u)]^2 NQ_\nu^{(2)} \\ &= \frac{(\nu + 3)(\nu + 4)}{(\nu + 1)(\nu + 2)} \cdot \frac{[f^{(\nu+2)}(v)]^2}{(2\nu + 3)!! (2\nu + 5)!!} \end{aligned}$$

$$(\text{mit } -1 < u < 1 \text{ und } -1 < v < 1)$$

und

$$|R_{\nu+2}(x)| < \frac{(\nu + 3)(\nu + 4)}{8} \cdot \frac{M_{\nu+2}}{(2\nu + 3)!!} \cdot (1 - x^2) \quad (\text{in } -1 < x < 1)$$

charakterisiert ist.

Zum Vergleiche der Restglieder der beiden Interpolationsformeln ist natürlich $\nu + 2 = \rho$ zu nehmen.

Inhaltsverzeichnis.

Vorwort	3
Erster Teil. Über Orthogonalsysteme von Polynomen.	
§ 1. Definitionen und vorbereitende Sätze	4
2. Allgemeine Sätze über Orthogonalsysteme von Polynomen . .	10
3. Ergänzende Sätze über Systeme, die zu symmetrischen Belegungen gehören	18
Zweiter Teil. Eine Klasse von Polynomensystemen.	
4. Polynome $Q_\alpha^{(p)}(x)$ und ihre Normen	20
5. Endwerte und Nullstellen von $Q_\alpha^{(p)}(x)$	24
6. Differentialgleichung der Polynome $Q_\nu^{(p)}(x)$ und Integralsätze	32
Dritter Teil. Extremalaufgaben der Interpolationsrechnung.	
7. Bezeichnungen und Problemstellungen	39
8. Lösung der Aufgaben I und II	44
9. Lösung der Aufgaben III und IV	47
10. Vergleichende und ergänzende Bemerkungen	49
