ÜBER DIE BEWEISBARKEIT EINIGER ANORDNUNGSAUSSAGEN IN GEOMETRISCHEN AXIOMENSYSTEMEN

VON

ARNOLD TUDEBERG

TARTU 1934

K. Mattiesens Buchdruckerei Ant.-Ges., Tartu, 1934.

Beim axiomatischen Aufbau einer Disziplin sollen die Grundaussagen zur Deduktion der übrigen Aussagen und die Grundbegriffe zur Definition der übrigen Begriffe hinreichend, dabei aber auch alle notwendig sein. Dieser letzteren (ökonomischen) Forderung gemäss darf also keine der Aussagen, die als Axiome (oder als deren Teile) in ein Axiomensystem aufgenommen sind, aus den übrigen Aussagen dieses Axiomensystems deduzierbar sein.

In seiner Untersuchung über die Grundlagen der Geometrie hat Herr Prof. J. Sarv sich unter anderem eben die Aufgabe gestellt die Anzahl der Grundbegriffe und Grundsätze zu reduzieren[1]. Es ist aber bereits von Herrn Doz. J. Nuut gezeigt worden[2], dass das System der von Sarv benutzten Grundsätze einige überflüssige (d. h. beweisbare) Aussagen enthält: die Vierpunktaxiome (Grundsätze V bis VIII) sind nicht völlig voneinander und von den vorangehenden unabhängig; an Stelle dieser vier Axiome sind von Nuut zwei andere (A und B) vorgeschlagen und ihre Unabhängigkeit nachgewiesen worden. Es blieb nur die Frage offen, ob in dem so erhaltenen System alles durch diese zwei Sätze Postulierte noch von den drei weiteren (nichtlinearen) Axiomen unabhängig ist.

In den nachstehenden Zeilen möchte ich diese Frage beantworten. Die Prüfung der von Sarv aufgestellten linearen Axiome führt zu dem Ergebnis, dass die Vierpunktsätze aus gewissen Aussagen deduzierbar sind (§ 1), von denen man weiterhin zeigen kann, dass sie entweder nur Teilaussagen des Nuutschen Axioms A sind oder sich nach Hinzunahme der Sarvschen ebenen Axiome beweisen lassen (§ 2). Als Nebenresultat ergibt sich dabei die Möglichkeit einige Anordnungs-

---

[1] J. Sarv, Geomeetria alused (Die Grundlagen der Geometrie). *Acta et Commentationes Univ. Tartuensis* A XIX. 4, 1931.

[2] J. Nuut, Einige Bemerkungen über Vierpunktaxiome. *Ibid.* A XXIII. 4, 1932.

aussagen (Aussagen des Zwischenliegens und der Nichtidentität) im Veblenschen Axiomensystem[3] zu streichen.

Es wird hierbei nötig sein, sämtliche Beweise vollständig, also in allen Einzelheiten, anzuführen, denn bei Erörterung der Frage, welche Aussagen in einem Axiomensystem in der Tat entbehrlich sind, kommt es ja gerade auf diese Einzelheiten an; um mich jedoch möglichst kurz zu fassen und einige Übersichtlichkeit der Beweisgänge zu erzielen, benutze ich die folgende verkürzte Ausdrucksweise:

1) eX für die Aussage „*es existiert der Punkt X*",

2) $X \equiv Y$ für „*der Punkt X ist identisch mit dem Punkt Y* (X und Y sind ein und derselbe Punkt)",

3) XYZ für „*der Punkt Y liegt zwischen dem Punkt X und dem Punkt Z*",

4) $\overline{\mathbf{p}}$ für die Negation der Aussage **p** (ein Beispiel für das Überstreichen einer Aussage: $\overline{XYZ}$; dies bedeutet also: „*der Punkt Y liegt nicht zwischen dem Punkt X und dem Punkt Z*"),

5) $\mathbf{p} \rightarrow \mathbf{q}$ für „*wenn die Aussage* **p** *wahr ist, so ist auch die Aussage* **q** *wahr*",

6) $\left\{\begin{array}{l}\mathbf{p}\\ \mathbf{q}\\ \vdots\\ \mathbf{s}\\ \mathbf{t}\end{array}\right.$ oder $\left.\begin{array}{l}\mathbf{p}\\ \mathbf{q}\\ \vdots\\ \mathbf{s}\\ \mathbf{t}\end{array}\right\}$ für „*die Aussagen* **p**, **q**, …, **s** *und* **t** *sind gleichzeitig gültig*",

7) $\left|\begin{array}{l}\mathbf{p}\\ \mathbf{q}\\ \vdots\\ \mathbf{s}\\ \mathbf{t}\end{array}\right.$ oder $\left.\begin{array}{l}\mathbf{p}\\ \mathbf{q}\\ \vdots\\ \mathbf{s}\\ \mathbf{t}\end{array}\right|$ für „*es gilt mindestens eine der Aussagen* **p**, **q**, …, **s** *und* **t**".

Ferner schreibe ich $\langle XYZ \rangle$ als Abkürzung für die Aussage $\left|\begin{array}{l}XYZ\\ YZX\\ ZXY\end{array}\right.$ und (XYZ) für $\left|\begin{array}{l}\langle XYZ\rangle\\ X\equiv Y\\ Y\equiv Z\\ Z\equiv X\end{array}\right.$. Wenn es irgend drei

[3] O. Veblen, A System of Axioms for Geometry. *Transactions of the American Math. Soc.* **5** (1904), pag. 343—384. Dieses Axiomensystem weist nämlich mit dem Sarvschen System eine so tiefgehende Verwandtschaft auf, dass seine Grundbegriffe — *point* und *order-relation* — als völlig identisch mit denen des Sarvschen Systems — *Punkt* und *Beziehung des Zwischenliegens* — anzusehen sind.

Punkte gibt, die zueinander in der Beziehung $\langle XYZ \rangle$ stehen[4], so sollen sie ein *echtes kollineares Punkttripel* heissen; drei Punkte, die der Bedingung (XYZ) genügen, nenne ich ein *allgemeines kollineares Punkttripel.* Das in den Beweisen öfters anzuwendende Adverbial „*auf Grund der im Satze* **S** *gegebenen Vorschrift*" drücke ich kurz durch **[:S]** aus.

Die Grundsätze **I** bis **X** von Sarv nehmen bei der oben erklärten Schreibweise folgende Gestalt an[5]:

$$\textbf{I.}\quad \mathbf{e}A \rightarrow \left\{ \begin{matrix} \mathbf{e}B \\ \overline{B \equiv A} \end{matrix} \right. \qquad\qquad \textbf{V.}\quad \left. \begin{matrix} ACB \\ ABD \end{matrix} \right\} \rightarrow CBD$$

$$\textbf{II.}\quad \overline{A \equiv B} \rightarrow \left\{ \begin{matrix} \mathbf{e}C \\ \overline{C \equiv A} \\ \overline{C \equiv B} \\ CBA \end{matrix} \right. \qquad\qquad \textbf{VI.}\quad \left. \begin{matrix} CAB \\ ABD \end{matrix} \right\} \rightarrow CBD$$

$$\textbf{VII.}\quad \left. \begin{matrix} ABC \\ ABD \\ \overline{C \equiv D} \end{matrix} \right\} \rightarrow \left| \begin{matrix} BCD \\ BDC \end{matrix} \right.$$

$$\textbf{III.}\quad ABC \rightarrow CBA$$

$$\textbf{IV.}\quad ABC \rightarrow \overline{ACB} \qquad\qquad \textbf{VIII.}\quad \left. \begin{matrix} ACB \\ ADB \\ \overline{C \equiv D} \end{matrix} \right\} \rightarrow \left| \begin{matrix} CDB \\ DCB \end{matrix} \right.$$

$$\textbf{IX.}\quad \overline{A \equiv B} \rightarrow \left\{ \begin{matrix} \mathbf{e}C \\ \overline{(ABC)} \end{matrix} \right.$$

$$\textbf{X.}\quad \left. \begin{matrix} \overline{(ABC)} \\ ABD \\ BEC \end{matrix} \right\} \rightarrow \left\{ \begin{matrix} \mathbf{e}F \\ AFC \\ \langle DEF \rangle \end{matrix} \right. .$$

[4] Ob es solche drei Punkte gibt, darüber sollen erst die Axiome Auskunft geben; ebenso bleibt zunächst dahingestellt, ob die Relationen XYZ, YZX, ZXY (resp. $\langle XYZ \rangle$ und $X \equiv Y$, $Y \equiv Z$, $Z \equiv X$) einander ausschliessen oder nicht. Jedenfalls folgt aus den obigen Erklärungen: $\langle XYZ \rangle \rightarrow \langle YZX \rangle$ und $(XYZ) \rightarrow (YZX)$.

[5] Unter den Prämissen des zweiten Axioms (und der folgenden) brauchen die blossen Existentialaussagen (wie $\mathbf{e}A$ und $\mathbf{e}B$) nicht noch gesondert aufgeführt zu werden; denn ein Punkt wird ja schon dadurch als existierend angenommen, dass man die sonstigen Prämissen als von ihm erfüllt voraussetzt. — Die Axiome **VII** und **VIII** von Sarv sind hier übrigens in einer etwas abgeschwächten Fassung wiedergegeben: anstatt „*dann gilt eine u nur eine der Aussagen BCD, BDC*" ist bloss gesagt „*dann gilt mindestens*

§ 1.

Das System der Axiome II bis VIII.

Wie Nuut bemerkt hat, kann der Grundsatz **VI**, unter Beibehaltung der übrigen, durch das weniger aussagende Postulat

$$\textbf{VI}^*.\quad \left.\begin{matrix} CAB \\ ABD \end{matrix}\right\} \to \langle BCD \rangle$$

ersetzt werden; wenn man dies nicht tut, lässt sich der achte Grundsatz auf

$$\textbf{VIII}^*.\quad \left.\begin{matrix} ACB \\ ADB \\ \overline{C \equiv D} \end{matrix}\right\} \to \langle BCD \rangle$$

abschwächen.

Ich will nun eine andere Möglichkeit zeigen: man kann den Grundsatz **VIII** abstreichen (weil er beweisbar ist) und dazu noch entweder 1) den Grundsatz **V** durch eine schwächere Aussage ersetzen, oder 2) die Grundsätze **VI** und **VII** zu zwei einfacheren Postulaten zusammenziehen[6]. Ehe ich zu der Auseinandersetzung der erwähnten Möglichkeit übergehe, ziehe ich drei Folgerungen allein aus den Grundsätzen **III** und **IV**.

Satz **C**. $\overline{ABC} \to \overline{CBA}$.

Beweis. Wenn die Behauptung nicht allgemein zutrifft, so müsste es mindestens einmal derlei drei Punkte geben, dass die Bedingung $\left\{\begin{matrix} \overline{ABC} \\ CBA \end{matrix}\right.$ erfüllt ist. Da aber $CBA \to ABC$ [: **III**], so kann es keine solchen Punkte geben, und die Behauptung ist bewiesen.

Satz **D**. $ABC \to \overline{BAC}$.

---

eine der Aussagen BCD, BDC"; dass dabei nur eine gelten kann, folgt ja schon aus **IV**.

Die Negation von „*es gilt mindestens eine der Aussagen* $\mathfrak{p}, \mathfrak{q}, \ldots, \mathfrak{s}$ *und* $\mathfrak{t}$" lautet: „*es gilt keine der Aussagen* $\mathfrak{p}, \mathfrak{q}, \ldots, \mathfrak{s}$ *und* $\mathfrak{t}$" oder „$\bar{\mathfrak{p}}, \bar{\mathfrak{q}}, \ldots, \bar{\mathfrak{s}}$ und $\bar{\mathfrak{t}}$ *sind gleichzeitig gültig*". $\overline{(ABC)}$ bedeutet also: *die Aussagen* $\overline{ABC}$, $\overline{BCA}$, $\overline{CAB}$, $\overline{A \equiv B}$, $\overline{B \equiv C}$ und $\overline{C \equiv A}$ *sind gleichzeitig gültig.*

[6] Beidemal benutze ich noch anstatt **II** das weniger aussagende **II**$^{-\,-}$.

Beweis[7]. $ABC \to CBA$ [:**III**], $CBA \to \overline{CAB}$ [:**IV**], $\overline{CAB} \to \overline{BAC}$ [:**C**].

Satz **E**. $ABC \to \begin{cases} \overline{A \equiv B} \\ \overline{B \equiv C} \end{cases}$.

Beweis. Wäre der Satz falsch, so müsste mindestens ein Punkttripel A, B und C existieren, für welches die Relation $\left\{\begin{array}{l} ABC \\ \left| \begin{array}{l} A \equiv B \\ B \equiv C \end{array} \right. \end{array}\right.$ besteht. Aus $\left.\begin{array}{c} ABC \\ A \equiv B \end{array}\right\} \to BAC$ und $ABC \to \overline{BAC}$ [:**D**]

bzw. aus $\left.\begin{array}{c} ABC \\ B \equiv C \end{array}\right\} \to ACB$ und $ABC \to \overline{ACB}$ [:**IV**]

ersieht man, dass es kein solches Tripel geben kann.

Die erste Variante.

Ich setze die Gültigkeit der Aussagen

$$\mathbf{II}^{--}.\quad \overline{A \equiv B} \to \begin{cases} \mathrm{e}\, C \\ ABC \end{cases} \quad \text{und} \quad \mathbf{V}^{--}.\quad \left.\begin{array}{c} ACB \\ ABD \end{array}\right\} \to (BCD)$$

und der Grundsätze **III**, **IV**, **VI** und **VII** voraus und deduziere die Sätze **V** und **VIII**.

Es ist leicht einzusehen, dass $\mathbf{V}^{--}$ sich sofort verschärfen lässt: $ACB \to \overline{C \equiv B}$ [:**E**], $ABD \to \overline{B \equiv D}$ [:**E**], ferner $\overline{C \equiv D}$ (da sonst aus $\left.\begin{array}{c} C \equiv D \\ ABD \end{array}\right\} \to ABC$ und $ABC \to \overline{ACB}$ [:**IV**] ein Widerspruch gegen die Prämisse ACB folgen würde) und somit:

$$\mathbf{V}^{-}.\quad \left.\begin{array}{c} ACB \\ ABD \end{array}\right\} \to \langle BCD \rangle,$$

weil per definitionem $\left.\begin{array}{c} (BCD) \\ \overline{B \equiv C} \\ \overline{C \equiv D} \\ \overline{D \equiv B} \end{array}\right\} \to \langle BCD \rangle$.

Hilfssatz **F**. $ABC \to \overline{A \equiv C}$.

[7] Aus **III**, **IV** und **D** folgt übrigens: wenn $\langle XYZ \rangle$, so gilt eine und nur eine der Aussagen XYZ, YZX und ZXY; und aus **III** allein: $\langle XYZ \rangle \to \langle ZYX \rangle$.

Beweis[8]. $ABC \to \overline{B \equiv C}$ [:E], $\overline{B \equiv C} \to \begin{cases} \mathrm{e}\,D \\ BCD \end{cases}$ [:II^{--}],

$$\left.\begin{matrix} ABC \\ BCD \end{matrix}\right\} \to ACD \text{ [:VI]}, \qquad ACD \to \overline{A \equiv C} \text{ [:E]}.$$

Beweis von Satz **V**. Der Satz besagt, dass von den in **V**$^{-}$ aufgezählten drei Fällen BCD, CDB und DBC der erste und der zweite auszuschliessen sind.

In der Tat, käme der erste Fall vor — gäbe es vier Punkte, die der Bedingung $\begin{cases} ACB \\ ABD \\ BCD \end{cases}$ genügen —, so würde folgen:

$$ACB \to BCA \text{ [:III]}, \; ABD \to \overline{A \equiv D} \text{ [:F]}, \; \left.\begin{matrix} BCA \\ BCD \\ \overline{A \equiv D} \end{matrix}\right\} \to \left|\begin{matrix} CAD \\ CDA \end{matrix}\right. \text{ [:VII]};$$

daraus müsste aber wegen

$$\left.\begin{matrix} BCA \\ CAD \end{matrix}\right\} \to BAD \text{ [:VI] und } \left.\begin{matrix} BCD \\ CDA \end{matrix}\right\} \to BDA \text{ [:VI]}$$

zwangsläufig $\left|\begin{matrix} BAD \\ BDA \end{matrix}\right.$ hervorgehen. Durch $BAD \to \overline{ABD}$ [:D] und $BDA \to ADB$ [:III], $ADB \to \overline{ABD}$ [:IV] führt dies also zum Widerspruch gegen die Prämisse ABD; folglich ist der erste Fall unmöglich.

Im zweiten Falle, $\begin{cases} ACB \\ ABD \\ CDB \end{cases}$, ergäbe sich aus

$$ABD \to DBA \text{ [:III]}, \; \left.\begin{matrix} CDB \\ DBA \end{matrix}\right\} \to CBA \text{ [:VI]},$$
$$CBA \to ABC \text{ [:III]}, \; ABC \to \overline{ACB} \text{ [:IV]}$$

ein Widerspruch gegen ACB. Damit ist der Satz bewiesen.

Beweis von Satz **VIII**. Zunächst kann man zu den Punkten A, B, C und D einen Punkt E folgendermassen hinzunehmen: $ACB \to \overline{A \equiv B}$ [:F], $\overline{A \equiv B} \to \begin{cases} \mathrm{e}\,E \\ ABE \end{cases}$ [:II^{--}].
Es ergibt sich nun aus $\left.\begin{matrix} ACB \\ ABE \end{matrix}\right\} \to CBE$ [:V] und $\left.\begin{matrix} ADB \\ ABE \end{matrix}\right\} \to DBE$ [:V] notwendigerweise $\begin{cases} CBE \\ DBE \end{cases}$, also auch $\begin{cases} EBC \\ EBD \end{cases}$ [:III]. Darauf ist aber infolge der dritten Prämisse des Satzes das Axiom **VII** anwendbar: $\left.\begin{matrix} EBC \\ EBD \\ \overline{C \equiv D} \end{matrix}\right\} \to \left|\begin{matrix} BCD \\ BDC \end{matrix}\right.$ [:VII]. Mit Hilfe von **III** folgt sodann die Behauptung $\left|\begin{matrix} DCB \\ CDB \end{matrix}\right.$.

[8] Nach den Sätzen **E** und **F** besteht jedes echte kollineare Punkttripel aus drei voneinander verschiedenen Punkten. Die in den Grundsatz **II** aufgenommenen Aussagen $\overline{C \equiv B}$ und $\overline{C \equiv A}$ sind damit ebenfalls bewiesen.

Die zweite Variante.

Die drei Sätze **VI**, **VII** und **VIII** sind aus den Aussagen **II**$^{--}$, **III**, **IV**, **V**,

F. $ABC \rightarrow \overline{A \equiv C}$

und

P. $\left.\begin{array}{c} ABC \\ CAB \\ ABD \end{array}\right\} \rightarrow (ACD)$

deduzierbar.

Hilfssatz **G.** $\left.\begin{array}{c} ABC \\ ABD \\ \overline{C \equiv D} \end{array}\right\} \rightarrow \begin{array}{|c} ACD \\ ADC \end{array}.$

Beweis. $ABC \rightarrow \overline{A \equiv C}$ [:**F**], $ABD \rightarrow \overline{A \equiv D}$ [:**F**], also $\left.\begin{array}{c} ABC \\ ABD \\ \overline{C \equiv D} \end{array}\right\} \rightarrow \langle ACD \rangle$ [:**P**], weil per definitionem $\left.\begin{array}{c} (ACD) \\ \overline{A \equiv C} \\ \overline{C \equiv D} \\ \overline{D \equiv A} \end{array}\right\} \rightarrow \langle ACD \rangle.$

Der Satz behauptet nur noch, dass der in $\langle ACD \rangle$ enthaltene Fall DAC nie vorkommen kann; das muss bewiesen werden. Angenommen, es sei einmal die Bedingung $\left\{\begin{array}{c} ABC \\ ABD \\ DAC \end{array}\right.$ erfüllt; dann erhielte man aus

$ABD \rightarrow DBA$ [:**III**], $\left.\begin{array}{c} DBA \\ DAC \end{array}\right\} \rightarrow BAC$ [:**V**] und $BAC \rightarrow \overline{ABC}$ [:**D**] einen Widerspruch gegen die Annahme ABC.

Beweis von Satz **VII.** Aus den Prämissen des Satzes folgt $\begin{array}{|c} ACD \\ ADC \end{array}$ [:**G**]. Im Falle ACD folgt nun $\left.\begin{array}{c} ABC \\ ACD \end{array}\right\} \rightarrow BCD$ [:**V**] und im Falle ADC bzw. $\left.\begin{array}{c} ABD \\ ADC \end{array}\right\} \rightarrow BDC$ [:**V**]; es kann also tatsächlich, so wie der Satz behauptet, nur $\begin{array}{|c} BCD \\ BDC \end{array}$ gelten.

Beweis von Satz **VIII** verläuft Wort für Wort ebenso wie bei der ersten Variante.

Beweis von Satz **VI.** Es lässt sich zunächst feststellen, dass die Punkte C, B und D voneinander verschieden sind:

$$CAB \rightarrow \overline{C \equiv B} \; [:\mathbf{F}], \quad ABD \rightarrow \overline{B \equiv D} \; [:\mathbf{E}],$$

und da nun $CAB \rightarrow \overline{CBA}$ $[:\mathbf{IV}]$, $\overline{CBA} \rightarrow \overline{ABC}$ $[:\mathbf{C}]$, so ferner $\left.\begin{matrix}\overline{ABC}\\ ABD\end{matrix}\right\} \rightarrow \overline{C \equiv D}$. Nach den einfachen Umformungen $CAB \rightarrow BAC$ $[:\mathbf{III}]$ und $ABD \rightarrow DBA$ $[:\mathbf{III}]$ lässt sich das Postulat **P** in verschärfter Form anwenden:

$$\left.\begin{matrix}DBA\\ BAC\end{matrix}\right\} \rightarrow \langle BDC \rangle \text{ (weil ja definitionsgemäss } \left.\begin{matrix}(BDC)\\ \overline{B \equiv D}\\ \overline{D \equiv C}\\ \overline{C \equiv B}\end{matrix}\right\}. \rightarrow \langle BDC \rangle\text{).}$$

Der Satz behauptet nur noch, dass von den drei Fällen BDC, DCB und CBD nur der dritte möglich ist.

1) Wären der Behauptung entgegen einmal solche vier Punkte A, B, C und D vorhanden, dass die Aussage $\left\{\begin{matrix}CAB\\ ABD\\ BDC\end{matrix}\right.$ gälte, so würde dies, wie folgt:

$$BDC \rightarrow CDB \, [:\mathbf{III}], \; ABD \rightarrow \overline{A \equiv D} \, [:\mathbf{F}], \; \left.\begin{matrix}CAB\\ CDB\\ A - D\end{matrix}\right\} \rightarrow \left| \begin{matrix}ADB\\ DAB\end{matrix}\right. [:\mathbf{VIII}],$$

zu $\overline{ABD}$ führen (denn $ADB \rightarrow \overline{ABD}$ $[:\mathbf{IV}]$ und auch $DAB \rightarrow \overline{DBA}$ $[:\mathbf{VI}]$, $\overline{DBA} \rightarrow \overline{ABD}$ $[:\mathbf{C}]$) und somit einen Widerspruch gegen die Prämisse ABD ergeben.

2) Gäbe es aber einmal solche vier Punkte, dass der zweite Fall vorläge, d. h. $\left\{\begin{matrix}CAB\\ ABD\\ DCB\end{matrix}\right.$, so ergäbe sich aus

$$ABD \rightarrow DBA \; [:\mathbf{III}], \; \left.\begin{matrix}DCB\\ DBA\end{matrix}\right\} \rightarrow CBA \; [:\mathbf{V}], \; CBA \rightarrow \overline{CAB} \; [:\mathbf{IV}]$$

ein Widerspruch gegen die Prämisse CAB. Damit ist der Satz bewiesen.

§ 2.

Das System der linearen und ebenen Axiome.

Ich will nun zeigen, dass das System der Axiome **II** bis **X** mit dem folgenden (verkürzten) System[9] äquivalent ist:

[9] Darin enthält $\mathbf{II}^{-}$ gegenüber **II** eine Nichtidentitätsaussage weniger, bzw. $\mathbf{X}^{-}$ gegenüber **X** drei solche weniger, die Vierpunktaxiome **V** bis **VIII** aber sind durch ein einziges Postulat **Q** ersetzt.

$$\mathbf{II}^{-}.\quad \overline{A\equiv B} \rightarrow \begin{cases} \mathrm{e}\, C \\ \overline{C\equiv A} \\ ABC \end{cases} \qquad \mathbf{Q}.\quad \left.\begin{array}{l} \langle ABC\rangle \\ ABD \\ BCA \\ BDA \\ DAB \end{array}\right\} \rightarrow (ACD)$$

$$\mathbf{III}.\quad ABC \rightarrow CBA$$

$$\mathbf{IV}.\quad ABC \rightarrow A\overline{CB}$$

$$\mathbf{IX}.\quad \overline{A\equiv B} \rightarrow \begin{cases} \mathrm{e}\, C \\ (AB\overline{C}) \end{cases}$$

$$\mathbf{X}^{-}.\quad \left.\begin{array}{l} \overline{(ABC)} \\ ABD \\ BEC \end{array}\right\} \rightarrow \begin{cases} \mathrm{e}\, F \\ AFC\,. \\ (DEF) \end{cases}$$

Dazu muss ich einerseits die Aussagen **II**$^{-}$, **Q** und **X**$^{-}$ aus dem System **II** bis **X** deduzieren können und andererseits imstande sein, von dem verkürzten System ausgehend die Sätze **II**, **V** bis **VIII** und **X** zu beweisen. Der erste Teil dieser Aufgabe ist leicht zu erledigen. Mit **II** ist ja **II**$^{-}$ von selbst erfüllt; dasselbe gilt von **X** und **X**$^{-}$, da per definitionem $\langle DEF\rangle \rightarrow (DEF)$. Unter Anwendung von **III** und **IV** zerfallen die Voraussetzungen von **Q** in fünf einander ausschliessende Kombinationen, resp. der Satz **Q** in fünf Aussagen:

$$\mathbf{Q}_1.\ \left.\begin{array}{l} ABC \\ ABD \end{array}\right\} \rightarrow (ACD),\quad \mathbf{Q}_2.\ \left.\begin{array}{l} BCA \\ ABD \end{array}\right\} \rightarrow (ACD),\quad \mathbf{Q}_3.\ \left.\begin{array}{l} CAB \\ ABD \end{array}\right\} \rightarrow (ACD),$$

$$\mathbf{Q}_4.\ \left.\begin{array}{l} BCA \\ BDA \end{array}\right\} \rightarrow (ACD),\quad \mathbf{Q}_5.\ \left.\begin{array}{l} BCA \\ DAB \end{array}\right\} \rightarrow (ACD).$$

Diese Aussagen können folgendermassen deduziert werden [10]: die fünfte — $\left.\begin{array}{l} BCA \\ BAD \end{array}\right\} \rightarrow CAD$ [:**V**]; die dritte — $\left.\begin{array}{l} DBA \\ BAC \end{array}\right\} \rightarrow DAC$ [:**VI**]; die zweite — $\left.\begin{array}{l} ACB \\ ABD \end{array}\right\} \rightarrow CBD$ [:**V**], $\left.\begin{array}{l} DBC \\ BCA \end{array}\right\} \rightarrow DCA$ [:**VI**];
die erste, im Falle $\overline{C\equiv D}$, —

$\left.\begin{array}{l} ABC \\ ABD \\ \overline{C\equiv D} \end{array}\right\} \rightarrow \begin{array}{l} BCD \\ BDC \end{array}$ [:**VII**], $\left.\begin{array}{l} ABC \\ BCD \end{array}\right\} \rightarrow ACD$ [:**VI**], $\left.\begin{array}{l} ABD \\ BDC \end{array}\right\} \rightarrow ADC$ [:**VI**];

die vierte, im Falle $\overline{C\equiv D}$, — $\left.\begin{array}{l} BCA \\ BDA \\ \overline{C\equiv D} \end{array}\right\} \rightarrow \begin{array}{l} CDA \\ DCA \end{array}$ [:**VIII**];

und schliesslich — die erste und die vierte, im Falle $C\equiv D$, — $C\equiv D \rightarrow (ACD)$ [per definitionem].

[10] Wo dabei das Axiom **III** zur Verwendung kommt, ist ohne jeweilige besondere Angabe klar.

Beweis der Sätze II, X und V bis VIII.

Wollen wir uns jetzt dem zweiten Teil der Aufgabe zuwenden. Da die Sätze **C**, **D** und **E** im vorigen Paragraphen nur aus den Axiomen **III** und **IV** deduziert wurden, so behalten sie ihre Gültigkeit; aus $\mathbf{II}^-$ und **E** folgt aber sofort **II**. Der Beweis von **X** stützt sich auf den folgenden

$$\text{Hilfssatz } \mathbf{H}. \quad \left.\begin{matrix} \overline{(ABC)} \\ \langle ABK \rangle \\ BLC \end{matrix}\right\} \rightarrow \overline{K \equiv L}.$$

Beweis. Wäre die Behauptung falsch, so müsste es mindestens eine Möglichkeit des simultanen Bestehens der Prämissen und der Relation $K \equiv L$ geben; da aber $\left.\begin{matrix} \langle ABK \rangle \\ K \equiv L \end{matrix}\right\} \rightarrow \langle ABL \rangle$, $\langle ABL \rangle \rightarrow \langle BLA \rangle$ [per def.], $\left.\begin{matrix} \langle BLA \rangle \\ BLC \end{matrix}\right\} \rightarrow (BAC)$ [$: \mathbf{Q}_{1,2,3}$] und $(BAC) \rightarrow (ABC)$, so kann es keine solche Möglichkeit geben, und der Satz ist bewiesen.

Beweis von Satz **X**. Für die fünf Punkte A, B, C, D und E, die den Prämissen des Satzes genügen, existiert nach $\mathbf{X}^-$ solch ein Punkt F, der die Bedingung $\left\{\begin{matrix} AFC \\ (DEF) \end{matrix}\right.$ erfüllt. Da aber

$$\left.\begin{matrix} \overline{(ABC)} \\ ABD \\ BEC \end{matrix}\right\} \rightarrow \overline{D \equiv E} \; [:\mathbf{H}], \quad \left.\begin{matrix} \overline{(BCA)} \\ CEB \\ CFA \end{matrix}\right\} \rightarrow \overline{E \equiv F} \; [:\mathbf{H}] \text{ und}$$

$$\left.\begin{matrix} (BAC) \\ DBA \\ AFC \end{matrix}\right\} \rightarrow \overline{D \equiv F} \; [:\mathbf{H}], \text{ so folgt aus } \left.\begin{matrix} (DEF) \\ \overline{D \equiv E} \\ \overline{E \equiv F} \\ \overline{F \equiv D} \end{matrix}\right\} \rightarrow \langle DEF \rangle \text{ [per def.]},$$

dass von demselben Punkte F auch die Aussage $\left\{\begin{matrix} AFC \\ \langle DEF \rangle \end{matrix}\right.$ gilt.

Satz **F**. $ABC \rightarrow \overline{A \equiv C}$.

Beweis[11]. Wenn die Behauptung des Satzes nicht allgemein zuträfe, so müsste mindestens ein Gegenbeispiel möglich sein. Nehmen wir also an, dass tatsächlich ein Punkttripel existiere, das der Bedingung $\left\{\begin{matrix} ABC \\ A \equiv C \end{matrix}\right.$ genügt. Wollen wir zu-

---

[11] Axiom $\mathbf{II}^-$ besagt, dass es für jedes Paar voneinander verschiedener Punkte A und B mindestens einen solchen Punkt C gibt, der der Bedingung ABC genügt und dabei von A verschieden ist; der Satz behauptet nun, dass jeder Punkt C, der der Bedingung ABC genügt, von A verschieden sein müsse.

nächst von der Aussage $A \equiv C$ absehen; das Bestehen der Relation ABC gewährleistet jedenfalls — auf Grund unserer Axiome — die Existenz der Punkte D und E, die auf folgende Weise hinzugenommen werden:

$$ABC \rightarrow \overline{A \equiv B}\ [:\mathbf{E}],\ \overline{A \equiv B} \rightarrow \begin{cases} \mathrm{e}\, D \\ \overline{(ABD)} \end{cases} [:\mathbf{IX}],$$

$$\overline{(ABD)} \rightarrow \overline{B \equiv D}\ [\text{per def.}],\ \overline{B \equiv D} \rightarrow \begin{cases} \mathrm{e}\, E \\ \overline{E \equiv B} \\ BDE \end{cases} [:\mathbf{II}^{-}].$$

In betreff der Punkte A, B, D und E kann man einige Tatsachen feststellen:

1. A, B, D und E sind alle voneinander verschieden. A, B und D sind es wegen $\overline{(ABD)}$; $\overline{E \equiv B}$ war durch $\mathbf{II}^{-}$ gesichert; ferner $BDE \rightarrow \overline{D \equiv E}$ $[:\mathbf{E}]$. Gälte aber $E \equiv A$, so würde BDE in BDA übergehen und mit $\overline{(ABD)}$ einen Widerspruch ergeben; daher auch $\overline{E \equiv A}$.

2. $\overline{\langle ABE \rangle}$. Denn ABE steht wegen $\left.\begin{matrix} EDB \\ ABE \end{matrix}\right\} \rightarrow (BDA)$ $[:\mathbf{Q}_5]$ im Widerspruch mit $\overline{(ABD)}$; dasselbe gilt von BEA wegen $\left.\begin{matrix} EDB \\ BEA \end{matrix}\right\} \rightarrow (BDA)\, [:\mathbf{Q}_2]$, resp. von EAB wegen $\left.\begin{matrix} EDB \\ EAB \end{matrix}\right\} \rightarrow (BDA)\, [:\mathbf{Q}_4]$.

3. $\overline{(ABE)}$. Folgt aus den beiden vorausgehenden Tatsachen.

4. $\overline{\langle ADE \rangle}$. Denn $\langle ADE \rangle$ ergäbe durch $\left.\begin{matrix} \langle EDA \rangle \\ EDB \end{matrix}\right\} \rightarrow (EAB)$ $[:\mathbf{Q}]$ einen Widerspruch gegen die soeben bewiesene Aussage $\overline{(ABE)}$.

5. $\overline{(ADE)}$. Folgt aus 1. und 4.

Zu den Punkten A, B, C, D und E lässt sich noch ein Punkt F hinzunehmen:

$$\left.\begin{matrix} \overline{(ABE)} \\ ABC \\ BDE \end{matrix}\right\} \rightarrow \begin{cases} \mathrm{e}\, F \\ AFE \\ \langle CDF \rangle \end{cases} [:\mathbf{X}].$$

Erst jetzt wollen wir dem zweiten Teile unserer Bedingung Rechnung tragen, d. h. die Aussage $A \equiv C$ benutzen. Wenn also die Bedingung $\begin{cases} ABC \\ A \equiv C \end{cases}$ erfüllt werden könnte, so wäre es sicherlich möglich, unter Benutzung unserer Axiome solche

Punkte A, D, E und F anzugeben, die der Bedingung $\left\{\begin{matrix}\overline{(ADE)}\\ AFE\\ \langle ADF\rangle\end{matrix}\right.$ genügen. Da aber $\left.\begin{matrix}\langle AFD\rangle\\ AFE\end{matrix}\right\} \rightarrow (ADE)$ [: $\mathbf{Q}$], so kann die letztgenannte Bedingung keinesfalls erfüllt werden. Daher kann es auch kein Punkttripel A, B und C geben, das der Bedingung $\left\{\begin{matrix}ABC\\ A\equiv C\end{matrix}\right.$ genügte, und der Satz ist bewiesen.

Satz **J**. $\left.\begin{matrix}\langle ABC\rangle\\ \langle ABD\rangle\end{matrix}\right\} \rightarrow (ACD).$

Beweis. Der Satz zerfällt nach **III** und **IV** in neun Aussagen, deren fünf das Postulat $\mathbf{Q}$ bilden. Von den übrigen vier:

$$\left.\begin{matrix}ABC\\ BDA\end{matrix}\right\} \rightarrow (ACD),\ \left.\begin{matrix}CAB\\ BDA\end{matrix}\right\} \rightarrow (ACD),\ \left.\begin{matrix}ABC\\ DAB\end{matrix}\right\} \rightarrow (ACD),\ \left.\begin{matrix}CAB\\ DAB\end{matrix}\right\} \rightarrow (ACD)$$

folgen die erste, zweite und dritte entsprechend aus den Teilaussagen $\mathbf{Q}_2$, $\mathbf{Q}_5$ und $\mathbf{Q}_3$ desselben, weil $(ADC) \rightarrow (ACD)$. Die vierte aber lässt sich auf folgende Weise verifizieren:

$$\left.\begin{matrix}BAC\\ BAD\end{matrix}\right\} \rightarrow (BCD)\ [:\mathbf{Q}_1],\quad BAC \rightarrow \overline{B\equiv C}\ [:\mathbf{F}],\quad BAD \rightarrow \overline{B\equiv D}\ [:\mathbf{F}];$$

wenn nun noch $\overline{C\equiv D}$, so gilt $\langle BCD\rangle$, und daher folgt:

$$\left.\begin{matrix}BCD\\ BAD\end{matrix}\right\} \rightarrow (DCA)\ [:\mathbf{Q}_4],\ \left.\begin{matrix}BAD\\ CDB\end{matrix}\right\} \rightarrow (DAC)\ [:\mathbf{Q}_5],\ \left.\begin{matrix}BAD\\ DBC\end{matrix}\right\} \rightarrow (DAC)\ [:\mathbf{Q}_2];$$

wenn dagegen $C\equiv D$, so gilt definitionsgemäss (ACD).

Satz **K**. $\left.\begin{matrix}\langle ABC\rangle\\ \langle ABD\rangle\\ \overline{C\equiv D}\end{matrix}\right\} \rightarrow \langle ACD\rangle\ .$

Beweis. Aus den beiden ersten Prämissen folgt nach Satz **J** zunächst (ACD). Nach der dritten Prämisse und den Sätzen **E** und **F** (auf die erste und die zweite Prämisse angewandt) sind die Punkte A, C und D voneinander verschieden; dies verschärft (ACD) auf $\langle ACD\rangle$.

Satz **L**. $\left.\begin{matrix}\overline{(ABC)}\\ (ABK)\\ (ACK)\end{matrix}\right\} \rightarrow K\equiv A.$

B e w e i s. Die Punkte A, B und C sind wegen $\overline{(ABC)}$ voneinander verschieden; ferner

$$\left.\begin{matrix}\overline{(ABC)}\\ (ABK)\end{matrix}\right\}\to\overline{K\equiv C}\quad\text{und}\quad\left.\begin{matrix}\overline{(ABC)}\\ (AKC)\end{matrix}\right\}\to\overline{K\equiv B}.$$

Wäre noch — der Behauptung entgegen — einmal $\overline{K\equiv A}$, so würden die zweite und die dritte Prämisse entsprechend in $\langle ABK\rangle$ und $\langle ACK\rangle$ übergehen und durch $\left.\begin{matrix}\langle ABK\rangle\\ \langle ACK\rangle\end{matrix}\right\}\to(ABC)$ **[:J]** zum Widerspruch gegen die erste Prämisse führen.

S a t z **X+**. $\left.\begin{matrix}\overline{(ABC)}\\ ABD\\ BEC\end{matrix}\right\}\to\left\{\begin{matrix}\mathrm{e}\,F\\ AFC.\\ DEF\end{matrix}\right.$

B e w e i s[12]. Aus den Prämissen folgt nach Satz **X**, dass es einen Punkt F gibt, der der Bedingung $\left\{\begin{matrix}AFC\\ \langle DEF\rangle\end{matrix}\right.$ genügt. Wollen wir zeigen, dass dieser Punkt F nur so beschaffen sein kann, dass die Aussage DEF gilt, so brauchen wir dazu nur festzustellen, dass jedes Gegenbeispiel unmöglich ist. Ein solches könnte bloss darin bestehen, dass einmal solche Punkte A, B, C, D, E und F vorhanden wären, die den Bedingungen $\overline{(ABC)}$, ABD, BEC und AFC, ausserdem aber noch entweder EFD oder FDE Genüge leisten.

1) Es gelte nämlich von den beiden letztgenannten EFD. Man betrachte die drei Punkte B, E und D; sie sind voneinander verschieden (dies folgt aus BEC, EFD und ABD nach **E** und **F**), ausserdem gilt noch $\overline{\langle BED\rangle}$ — denn sonst folgt aus

$$\left.\begin{matrix}\langle BED\rangle\\ BEC\\ \overline{C\equiv D}\end{matrix}\right\}\to\langle BCD\rangle\ \textbf{[: K]},\ \left.\begin{matrix}\langle BCD\rangle\\ ABD\end{matrix}\right\}\to(ABC)\ \textbf{[: J]}$$

und der Prämisse $\overline{(ABC)}$ ein Widerspruch. Daher also $\overline{(BED)}$. Weiterhin verwende man die folgende Beweisführung:

$$\left.\begin{matrix}\overline{(BED)}\\ BEC\\ EFD\end{matrix}\right\}\to\left\{\begin{matrix}\mathrm{e}\,G\\ BGD\\ \langle CFG\rangle\end{matrix}\right.\textbf{[:X]},\ \left.\begin{matrix}\langle CFG\rangle\\ AFC\end{matrix}\right\}\to(ACG)\ \textbf{[:J]},\ \left.\begin{matrix}BGD\\ ABD\end{matrix}\right\}\to(ABG)\ \textbf{[:J]},$$

also $\left.\begin{matrix}\overline{(ABC)}\\ (ABG)\\ (ACG)\end{matrix}\right\}\to G\equiv A$ **[: L]**, womit aus BGD folgt BAD.

Aber BAD widerspricht nun der Prämisse ABD **[: D]**; also kann EFD keinesfalls gültig sein.

[12] Zu vergl. S a r v, loc. cit., pag. 9 und V e b l e n, loc. cit., pag. 355.

2) Es gelte FDE. Betrachtet man dann die Punkte C, E und F, so ergibt sich:
$BEC \to \overline{C \equiv E}$ [:E], $FDE \to \overline{E \equiv F}$ [:F], $AFC \to \overline{F \equiv C}$ [:E];
ferner gilt noch $\overline{\langle CEF \rangle}$, weil sonst $\left.\begin{matrix}\langle CEF\rangle\\ AFC\\ \overline{A\equiv E}\end{matrix}\right\} \to \langle ACE \rangle$ [:K] und $\left.\begin{matrix}\langle ACE\rangle\\ BEC\end{matrix}\right\} \to (ABC)$ [:J] folgen würde. Daher $\overline{(CEF)}$.
Nun erhält man aus

$$\left.\begin{matrix}\overline{(CEF)}\\ CEB\\ EDF\end{matrix}\right\} \to \left\{\begin{matrix}\mathrm{e}\,H\\ CHF\\ \langle BDH\rangle\end{matrix}\right. \text{[:X]},\quad \left.\begin{matrix}\langle BDH\rangle\\ ABD\end{matrix}\right\} \to (ABH) \text{ [:J]},$$

$$\left.\begin{matrix}CHF\\ AFC\end{matrix}\right\} \to (ACH) \text{ [:J]} \quad \text{und} \quad \left.\begin{matrix}\overline{(ABC)}\\ (ABH)\\ (ACH)\end{matrix}\right\} \to H \equiv A \text{ [:L]}$$

wegen CHF schliesslich CAF, was der Annahme AFC widerspricht: $CAF \to \overline{CFA}$ [:IV], $\overline{CFA} \to \overline{AFC}$ [:C].

Satz **M**.
$$\left.\begin{matrix}\overline{(ABC)}\\ ALB\\ BMC\\ CNA\end{matrix}\right\} \to \overline{(LMN)}.$$

Beweis[13]. Zunächst notiere man folgende Tatsachen:

1. Die Punkte A, B, C, L, M und N sind alle voneinander verschieden. A, B und C sind voneinander verschieden wegen $\overline{(ABC)}$. Wendet man auf die Prämissen den Satz **H** an, so folgt, dass auch die Punkte L, M und N voneinander verschieden sind. Jeder von ihnen muss seinerseits von A, B und C verschieden sein; für L ergibt sich dies aus

$$ALB \to \left\{\begin{matrix}\overline{A\equiv L}\\ \overline{L\equiv B}\end{matrix}\right. \text{[:E]},\quad \left.\begin{matrix}\overline{(ACB)}\\ (ALB)\end{matrix}\right\} \to \overline{C\equiv L},$$

für M und N entsprechend aus $\left\{\begin{matrix}BMC\\ \overline{(BAC)}\end{matrix}\right.$ und $\left\{\begin{matrix}CNA\\ \overline{(CBA)}\end{matrix}\right.$.

2. $\overline{\langle ALN\rangle}$, $\overline{\langle BML\rangle}$, $\overline{\langle CNM\rangle}$. Denn $\langle ALN\rangle$ würde mit $\left\{\begin{matrix}ALB\\ CNA\end{matrix}\right.$ zum Widerspruch gegen die erste Prämisse führen:

$$\left.\begin{matrix}\langle ALN\rangle\\ ALB\\ \overline{N\equiv B}\end{matrix}\right\} \to \langle ANB\rangle \text{ [:K]},\quad \left.\begin{matrix}\langle ANB\rangle\\ CNA\end{matrix}\right\} \to (ABC) \text{ [:J]}.$$

Auf $\langle BML\rangle$ mit $\left\{\begin{matrix}BMC\\ ALB\end{matrix}\right.$, bzw. auf $\langle CNM\rangle$ mit $\left\{\begin{matrix}CNA\\ BMC\end{matrix}\right.$, ist genau dieselbe Schlussweise anwendbar.

[13] Vgl. Veblen, loc. cit., pag. 356.

3. $\overline{(ALN)}$, $\overline{(BML)}$, $\overline{(CNM)}$. Folgen aus 1. und 2.

Nun kann man untersuchen, ob es möglich wäre, die Behauptung des Satzes durch ein Gegenbeispiel zu widerlegen. Bei einem solchen Gegenbeispiel müsste alles Bisherige gültig sein (weil die Prämissen unbedingt erfüllt sein müssten), ausserdem müsste der Behauptung entgegen (LMN) gelten; wegen der Tatsache 1 kann dabei nur $\langle LMN \rangle$ in Frage kommen.

Wäre dies LMN, so würde folgen:

$$\left.\begin{matrix}\overline{(ALN)}\\ ALB\\ LMN\end{matrix}\right\} \rightarrow \left\{\begin{matrix}\mathrm{e}\ P\\ APN\\ BMP\end{matrix}\right. [:\mathbf{X}^+]$$

und ferner, wegen

$$\left.\begin{matrix}APN\\ CNA\end{matrix}\right\} \rightarrow (CAP)\ [:\mathbf{J}],\ \left.\begin{matrix}BMP\\ BMC\end{matrix}\right\} \rightarrow (CBP)\ [:\mathbf{J}] \text{ und } \left.\begin{matrix}\overline{(CAB)}\\ (CAP)\\ (CBP)\end{matrix}\right\} \rightarrow P \equiv C\,[:\mathbf{L}],$$

aus APN notwendigerweise ACN. Aber ACN widerspricht der Prämisse CNA, daher ist LMN ausgeschlossen.

Genau dieselbe Schlussweise lässt sich für MNL mit $\left\{\begin{matrix}\overline{(BML)}\\ BMC\end{matrix}\right.$, bzw. für NLM mit $\left\{\begin{matrix}\overline{(CNM)}\\ CNA\end{matrix}\right.$, verwenden und führt zum Widerspruch gegen ALB, bzw. gegen BMC. Es kann also keine der Aussagen LMN, MNL und NLM richtig sein, folglich kann kein Gegenbeispiel erbracht werden, und der Satz ist bewiesen.

Satz **X.** $\left.\begin{matrix}ACB\\ ABD\end{matrix}\right\} \rightarrow ACD.$

Beweis. Man nehme zunächst zwei Punkte (E und F) hinzu, wie folgt:

$$ACB \rightarrow \overline{A \equiv B}\ [:\mathbf{F}],\ \overline{A \equiv B} \rightarrow \left\{\begin{matrix}\mathrm{e}\ E\\ \overline{(ABE)}\end{matrix}\right. [:\mathbf{IX}],\ \overline{E \equiv A} \rightarrow \left\{\begin{matrix}\mathrm{e}\ F\\ \overline{F = E}\\ EAF\end{matrix}\right. [:\mathbf{II}^-].$$

Ferner gewährleistet der Satz **X**+ die Existenz zweier weiterer Punkte G und H folgendermassen:

$$\left.\begin{matrix}\overline{(EAB)}\\ EAF\\ ACB\end{matrix}\right\} \rightarrow \left\{\begin{matrix}\mathrm{e}\ G\\ EGB\\ FCG\end{matrix}\right. [:\mathbf{X}^+], \qquad \left.\begin{matrix}\overline{(ABE)}\\ ABD\\ BGE\end{matrix}\right\} \rightarrow \left\{\begin{matrix}\mathrm{e}\ H\\ AHE\\ DGH\end{matrix}\right. [:\mathbf{X}^+];$$

die Punkte G und H genügen dabei der Bedingung $\overline{(CGH)}$, wie man aus $\left.\begin{matrix}\overline{(ABE)}\\ ACB\\ BGE\\ EHA\end{matrix}\right\} \rightarrow \overline{(CGH)}$ [:**M**] ersieht.

Nun betrachte man die Punkte H, G und F; sie sind voneinander verschieden — $DGH \to \overline{H \equiv G}$ [:**E**], $FCG \to \overline{F \equiv G}$ [:**F**], $\overline{F \equiv H}$ wegen $\left\{\begin{matrix} EAF \\ EHA \end{matrix}\right.$ [:**IV**]. Ausserdem gilt $\overline{\langle HGF \rangle}$, da widrigenfalls $\langle HGF \rangle$ zu $\left.\begin{matrix} \langle HGF \rangle \\ FCG \end{matrix}\right\} \to (CGH)$ [:**J**] führen würde. So erhält man $\overline{(HGF)}$ und kann auf folgende Weise vorgehen:

$$\left.\begin{matrix} \overline{(HGF)} \\ HGD \\ GCF \end{matrix}\right\} \to \left\{\begin{matrix} \mathrm{e}\, J \\ HJF \\ DCJ \end{matrix}\right. [:\mathbf{X}\div].$$

Weiterhin lässt sich noch zeigen, dass der Punkt J mit A identisch sein muss: aus $\left\{\begin{matrix} \overline{(ABE)} \\ ACB \\ EHA \end{matrix}\right.$ folgt $\overline{(ACH)}$ genau nach demselben Gedankengang, wie die Tatsachen 3 beim Beweise des vorausgehenden Satzes; ferner

$$\left.\begin{matrix} ACB \\ ABD \end{matrix}\right\} \to \overline{C \equiv D} \text{ wegen } \mathbf{IV}, \text{ somit } \left.\begin{matrix} ACB \\ ABD \\ \overline{C \equiv D} \end{matrix}\right\} \to \langle ACD \rangle\ [:\mathbf{K}],$$

resp. $\left.\begin{matrix} EAF \\ EHA \end{matrix}\right\} \to \overline{F \equiv H}$ wegen **IV**, somit $\left.\begin{matrix} EAF \\ EHA \\ \overline{F \equiv H} \end{matrix}\right\} \to \langle AHF \rangle$ [:**K**],

folglich $\left.\begin{matrix} HJF \\ \langle AHF \rangle \end{matrix}\right\} \to (AHJ)$ [:**J**], $\left.\begin{matrix} DCJ \\ \langle ACD \rangle \end{matrix}\right\} \to (ACJ)$ [:**J**],

also, wie gesagt, $\left.\begin{matrix} \overline{(ACH)} \\ (ACJ) \\ (AHJ) \end{matrix}\right\} \to J \equiv A$ [:**L**].

Dadurch geht DCJ in DCA, also nach **III** in ACD über, und der Satz ist bewiesen.

S a t z **V.** $\left.\begin{matrix} ACB \\ ABD \end{matrix}\right\} \to CBD.$

B e w e i s. Wäre die Behauptung des Satzes falsch, so müsste es mindestens ein Gegenbeispiel geben, also solche Punkte A, B, C und D, dass die Relation $\left\{\begin{matrix} ACB \\ ABD \\ \overline{CBD} \end{matrix}\right.$ bestünde. Da aber $\left.\begin{matrix} ACB \\ ABD \end{matrix}\right\} \to \overline{C \equiv D}$ wegen **IV** und daher $\left.\begin{matrix} ACB \\ ABD \end{matrix}\right\} \to \langle CBD \rangle$ [:**K**], so könnte bei diesem Gegenbeispiel nur entweder BDC oder DCB gelten.

1) BDC führt durch $\left.\begin{matrix} BDC \\ BCA \end{matrix}\right\} \to BDA$ [:**N**] zum Widerspruch gegen die Prämisse ABD.

2) Es bleibt nur noch die Aussage DCB zu prüfen. Die Punkte E und F können hinzugenommen werden, ebenso wie beim Beweise des vorangehenden Satzes:

$ABD \rightarrow \overline{A \equiv B}$ [:E], $\overline{A \equiv B} \rightarrow \left\{\begin{matrix} \mathrm{e}\, E \\ \overline{(ABE)} \end{matrix}\right.$ [:IX], also $\overline{E \equiv A}$, mithin

$\overline{E \equiv A} \rightarrow \left\{\begin{matrix} \mathrm{e}\, F \\ \overline{F \equiv E} \\ EAF \end{matrix}\right.$ [:II⁻].

Es zeigt sich nun, dass dabei $\overline{(EAD)}$ und $\overline{(BDE)}$ gelten müssen; in der Tat, die Punkte A, B, D und E sind voneinander verschieden — A, B und E sind es wegen $\overline{(ABE)}$, D ist von A und B verschieden wegen ABD, und schliesslich D von E verschieden wegen $\left\{\begin{matrix} \overline{(ABE)} \\ ABD \end{matrix}\right.$ —, dass aber $\langle EAD \rangle$ und $\langle BDE \rangle$ sicherlich unmöglich sind, ersieht man entsprechend aus $\left.\begin{matrix} \langle EAD \rangle \\ ABD \end{matrix}\right\} \rightarrow (ABE)$ [:J] und $\left.\begin{matrix} \langle BDE \rangle \\ ABD \end{matrix}\right\} \rightarrow (ABE)$ [:J].

Beachtet man noch, dass $\left.\begin{matrix} ACB \\ ABD \end{matrix}\right\} \rightarrow ACD$ [:N], so ergibt sich einerseits:

$\left.\begin{matrix} \overline{(EAB)} \\ EAF \\ ACB \end{matrix}\right\} \rightarrow \left\{\begin{matrix} \mathrm{e}\, G \\ EGB \\ FCG \end{matrix}\right.$ [:X+], $\left.\begin{matrix} \overline{(EAD)} \\ EAF \\ ACD \end{matrix}\right\} \rightarrow \left\{\begin{matrix} \mathrm{e}\, H \\ EHD \\ FCH \end{matrix}\right.$ [:X+], $\left.\begin{matrix} FCH \\ FCG \end{matrix}\right\} \rightarrow (CHG)$ [:J],

und andererseits: $\left.\begin{matrix} \overline{(BDE)} \\ BCD \\ DHE \\ EGB \end{matrix}\right\} \rightarrow \overline{(CHG)}$ [:M].

Somit ist man zu folgendem Ergebnis gelangt: wenn es solche Punkte A, B, C und D gäbe, die der Bedingung $\left\{\begin{matrix} ACB \\ ABD \\ DCB \end{matrix}\right.$ genügten, so könnte man sofort solche Punkte H und G angeben, dass die Bedingung $\left\{\begin{matrix} (CHG) \\ \overline{(CHG)} \end{matrix}\right.$ erfüllt wäre; folglich kann die Relation $\left\{\begin{matrix} ACB \\ ABD \\ DCB \end{matrix}\right.$ nie bestehen, und der Satz ist bewiesen.

Die übrigen drei Sätze **VI**, **VII** und **VIII** können nun Wort für Wort so bewiesen werden, wie es im vorigen Paragraphen bei der zweiten Variante geschah [14]; denn alles,

[14] Man könnte aber ebensogut anstatt der Sätze **N** und **V** die Sätze **VI** und **VII** beweisen und dann zu der ersten Variante übergehen. Die Beweise von **VI** und **VII**, die man z. B. bei Veblen, loc. cit., pag. 356 & seq. (Lemmata 1 und 2 von Theorem 9) findet, lassen sich auch hier mit geringen Änderungen verwenden, obwohl sie dort von einem anderen Axiomensystem ausgehend geführt worden sind.

was bei diesen Beweisen benutzt wurde, hat man auch jetzt: **F** und **V** sind deduziert worden, das Axiom $\mathbf{II}^{-}$ gewährleistet die Gültigkeit der Aussage $\mathbf{II}^{--}$ und das Axiom **Q** diejenige von **P**. Damit ist der zweite Teil der gestellten Aufgabe erledigt und die Äquivalenz des verkürzten Axiomensystems mit dem Sarvschen System erwiesen.

Aus der eben besprochenen Verkürzungsmöglichkeit folgt sehr einfach noch eine andere, die ich hier angeben will. Es geht nämlich das am Anfang dieses Paragraphen aufgestellte Axiomensystem $\mathbf{II}^{-}$, **III**, **IV**, **Q**, **IX** und $\mathbf{X}^{-}$ in ein äquivalentes System über, wenn man $\mathbf{II}^{-}$ durch

$$\mathbf{II}^{--}.\quad \overline{A\equiv B}\rightarrow\left\{\begin{array}{l}\mathrm{e}\,C\\ ABC\end{array}\right.$$

und gleichzeitig **Q** durch

$$\mathbf{R}.\quad \left.\begin{array}{l}\langle ABC\rangle\\ (ABD)\end{array}\right\}\rightarrow(CDA)$$

[oder durch $\mathbf{R}'.\ \begin{array}{l}ABC\\ \left.\begin{array}{l}BCA\\ (ABD)\end{array}\right\}\end{array}\rightarrow(CDA)$ oder $\mathbf{R}''.\ \left.\begin{array}{l}\left.\begin{array}{l}BCA\\ (ABD)\end{array}\right\}\\ \left.\begin{array}{l}ABC\\ ABD\end{array}\right\}\\ DAB\end{array}\right|\rightarrow(CDA)$]

ersetzt; das System $\mathbf{II}^{--}$, **III**, **IV**, **R**, **IX** und $\mathbf{X}^{-}$ ist also ebenfalls mit dem System der Grundsätze **II** bis **X** von Sarv äquivalent.

Zum Nachweis, dass die Sätze $\mathbf{II}^{--}$ und **R**, bezogen auf das System $\mathbf{II}^{-}$, **III**, **IV**, **Q**, **IX** und $\mathbf{X}^{-}$, richtige, also beweisbare Sätze sind, genügt folgendes zu bemerken: $\mathbf{II}^{--}$ ist eine Folge von $\mathbf{II}^{-}$ allein; die Behauptung $\left.\begin{array}{l}\langle ABC\rangle\\ \langle ABD\rangle\end{array}\right\}\rightarrow(ACD)$ ist bereits als Satz **J** bewiesen worden, die Relation (ABD) an sich enthält aber ausser $\langle ABD\rangle$ noch die Fälle $A\equiv B$, $B\equiv D$ und $D\equiv A$; von diesen fällt der erste nach den Sätzen **E** und **F** wegen der Prämisse $\langle ABC\rangle$ weg, im dritten Falle ergibt sich (CDA) trivialerweise aus der Definition und im zweiten Falle aus der Prämisse $\langle ABC\rangle$ unter Anwendung von **III**:

$$\left.\begin{array}{l}\langle ABC\rangle\\ B\equiv D\end{array}\right\}\rightarrow\langle ADC\rangle,\ \langle ADC\rangle\rightarrow\langle CDA\rangle\,[:\mathbf{III}],\ \langle CDA\rangle\rightarrow(CDA)\,[\text{per def.}].$$

Andererseits habe ich zu zeigen, dass die Sätze $\mathbf{II}^{-}$ und **Q** aus $\mathbf{II}^{--}$, **R** und den übrigen Axiomen deduzierbar sind.

Q ist, wie leicht ersichtlich, eine Folge von **R** allein. Was aber den Satz **II**$^-$ anbelangt, so gilt er als bewiesen, sobald man den Satz **F** verifiziert hat. Der folgende

Beweis von Satz **F**. $ABC \to \overline{A \equiv C}$ stützt sich nur auf die Axiome **IV**, **R** und **IX**. Bei jedem Gegenbeispiel $\left\{\begin{matrix} LMN \\ L \equiv N \end{matrix}\right.$ würde folgen für einen beliebigen Punkt X:

$$L \equiv N \to (NLX) \text{ [per def.]}, \quad LMN \to \langle NLM \rangle \text{ [per def.]},$$

$$\left.\begin{matrix} \langle NLM \rangle \\ (NLX) \end{matrix}\right\} \to (MXN) \text{ [: R]}, \quad (MXN) \to (NMX) \text{ [per def.]}.$$

Da aber andererseits

$$LMN \to \overline{N \equiv M} \text{ wegen IV, und } \overline{N \equiv M} \to \left\{\begin{matrix} \text{e } P \\ \overline{(NMP)} \end{matrix}\right. \text{ [: IX]},$$

so kann (NMX) schon für $X = P$ nicht mehr gelten; somit ist jedes Gegenbeispiel unmöglich und der Satz **F** bewiesen.

Dass die Aussagen **R**′ und **R**″, an Stelle von **R** gesetzt, wiederum zu äquivalenten Systemen führen, ersieht man daraus, dass 1) **R**′ eine Folge von **R** bzw. **R**″ eine Folge von **R**′ allein ist und 2) **R** aus **R**′ und **III** bzw. **R**′ aus **R**″, **III** und **IV** deduziert werden kann, wie im nachstehenden gezeigt wird.

Für den einzigen in **R**′ fehlenden, aber in **R** enthaltenen Fall $\left\{\begin{matrix} CAB \\ (ABD) \end{matrix}\right.$ ergibt sich (CDA) aus **R**′ mit Hilfe von **III** allein:

$$CAB \to BAC \text{ [:III]}, \quad (ABD) \to (DBA) \text{ [:III]}, \quad (DBA) \to (BAD) \text{ [per def.]},$$

$$\left.\begin{matrix} BAC \\ (BAD) \end{matrix}\right\} \to (CDB) \text{ [:R']}, \quad (CDB) \to (BDC) \text{ [:III]}, \quad (BDC) \to (CBD) \text{ [per def.]},$$

$$\left.\begin{matrix} BAC \\ (CBD) \end{matrix}\right\} \to (ADC) \text{ [:R']}, \quad (ADC) \to (CDA) \text{ [:III]}.$$

Und schliesslich sind es nur die vier Fälle

$$\left\{\begin{matrix} ABC \\ BDA \end{matrix}\right., \quad \left\{\begin{matrix} ABC \\ A \equiv B \end{matrix}\right., \quad \left\{\begin{matrix} ABC \\ B \equiv D \end{matrix}\right. \text{ und } \left\{\begin{matrix} ABC \\ D \equiv A \end{matrix}\right.,$$

die in **R**′ mitgezählt sind, aber in **R**″ fehlen; von diesen fällt der zweite wegen der Axiome **III** und **IV** weg; im ersten Falle erhält man (CDA) mit Hilfe von **R**″ und **III**:

$$\left.\begin{matrix} BDA \\ ABC \end{matrix}\right\} \to (DCA) \text{ [:R'']}, \quad (DCA) \to (ACD) \text{ [:III]}, \quad (ACD) \to (CDA) \text{ [per def.]},$$

und im dritten Falle aus **III** allein:

$$\left.\begin{matrix} ABC \\ B \equiv D \end{matrix}\right\} \to ADC, \quad ADC \to CDA \text{ [:III]}, \quad CDA \to (CDA) \text{ [per def.]};$$

der vierte Fall aber ist trivial:

$$D \equiv A \to (CDA) \text{ [per def.]}.$$

Schlussbemerkungen.

Die in betreff des Sarvschen Systems erhaltenen Ergebnisse lauten:

1) der Grundsatz **VIII** ist aus seinen übrigen Grundsätzen deduzierbar;

2) im System der linearen Grundsätze enthält ausserdem noch der fünfte Grundsatz einige beweisbare Aussagen;

3) im System der linearen und ebenen Axiome sind die Grundsätze **II** und **X** schon in einer schwächeren Fassung hinreichend; zudem können die vier Grundsätze **V, VI, VII** und **VIII** durch ein einziges Axiom ersetzt werden[15].

Über die von Nuut vorgeschlagenen Axiome A und B kann man daher sagen:

1) sein Axiom A bedarf der Einschränkung $\overline{c \equiv d}$, sonst ist es nicht allgemein gültig[16]; dies Axiom zerfällt eigentlich (gemäss der von Nuut benutzten Definition des kollinearen Punkttripels) in 36 Aussagen, von denen 31 aus den übrigen fünf (ohne Benutzung des Axioms B) deduzierbar sind; der von Nuut erbrachte Unabhängigkeitsbeweis[17] gilt für A als für eine Aussagengruppe in bezug auf die Aussagen **II, III, IV** und B;

---

[15] Der bei Sarv — op. cit., pag. 3 (Zeilen 6 bis 8 von oben im Text) — gesperrt gedruckte Satz „Wenn unter vier Punkten zwei Tripel so beschaffen sind, dass in beiden je ein Punkt zwischen zwei anderen liegt, so sieht man, dass dort die übrigen Tripel von derselben Beschaffenheit sind", als Postulat aufgenommen, vermag die Vierpunktaxiome **V** bis **VIII** schon völlig zu ersetzen, enthält aber selber noch beweisbare Behauptungen.

[16] Dass die Benutzung des Axioms A im Falle $c \equiv d$ nicht statthaft ist, ersieht man aus folgendem: im Beweise von Satz **F** (pag. 13 u. 14) kann man das Axiom **Q** ohne weiteres durch A ersetzen, aus A folgt aber schon mit Hilfe der Sätze **E** und **F** notwendigerweise $\overline{c \equiv d}$.

[17] Derselbe Gedankengang lässt sich natürlich auch auf das Postulat **Q** resp. **R** übertragen.

2) Nuuts Axiom B ist aus den übrigbleibenden fünf Aussagen von A und den Axiomen **II**, **III**, **IV**, **IX** und **X** beweisbar[18];

3) die erwähnten Umstände vermindern keineswegs den Wert von A (mit der Einschränkung $\overline{c \equiv d}$) und B als von zwei kurz formulierbaren, leicht memorierbaren und bequem verwendbaren Sätzen (die sehr häufige Verwendbarkeit von A ist ja durch die grosse Anzahl der darin enthaltenen Aussagen bedingt).

Das Veblensche Axiomensystem betreffend möchte ich noch folgendes bemerken:

1) das Axiom V von Veblen bedarf nur einer kleinen Ergänzung (wodurch es in das als **II**$^{-}$ bezeichnete Axiom der vorliegenden Abhandlung übergeht), um sein Axiom IV beweisbar zu machen[19]; sein Axiom VI, das in unserer Ausdrucksweise und gemäss unseren Definitionen folgendermassen lautet:

$$\left.\begin{array}{c} \overline{A \equiv B} \\ (ABC) \\ (ABD) \\ \overline{C \equiv D} \end{array}\right\} \rightarrow (CDA),$$

besteht (ausser den sechs trivialen Fällen $C \equiv A$, $C \equiv B$, $D \equiv A$, $D \equiv B$, $\left\{\begin{array}{l} C \equiv A \\ D \equiv B \end{array}\right.$ und $\left\{\begin{array}{l} C \equiv B \\ D \equiv A \end{array}\right.$) aus neun Aussagen, von denen vier beweisbar, also überflüssig sind[20];

2) wenn man aber sein Axiom VI durch das einfacher formulierbare Postulat **R** ersetzt, auch dann wird sein Axiom IV beweisbar und kann (und muss folglich) weggelassen werden.

Durch die angeführten Erwägungen hat sich also herausgestellt, dass ein kürzeres System von linearen und planaren Axiomen als das Sarvsche (**I** bis **X**) bzw. das Veblensche (I bis VIII), welches dabei mit den beiden äquivalent ist und

[18] Dass die Sarvschen Vierpunktsätze aus den genannten Postulaten deduzierbar sind, haben wir gesehen; wie sich der Nuutsche Satz B seinerseits aus den Vierpunktsätzen deduzieren lässt, das findet man bei Nuut, op. cit., pag. 9.

[19] Näheres dazu in Fussnote 14.

[20] Das Axiomensystem von Veblen tritt in einer etwas modifizierten Form bei O. Veblen and J. W. Young auf: Projective Geometry, vol. II, Boston 1918, pag. 60. Die obige Bemerkung kann ebenfalls auf dies spätere System bezogen werden, und zwar betrifft sie die dortigen Axiome I, III und V.

ebenso einfach zu handhaben wie das letztgenannte, etwa folgendermassen lauten könnte[21]:

1. $\mathrm{e}\,A \to \begin{cases} \mathrm{e}\,B \\ \overline{A \equiv B} \end{cases}$

2. $\overline{A \equiv B} \to \begin{cases} \mathrm{e}\,C \\ ABC \end{cases}$

3. $ABC \to CBA$

4. $ABC \to ACB$

5.[22] $\left.\begin{matrix} \langle ABC\rangle \\ (ABD) \end{matrix}\right\} \to (CDA)$

6.[23] $\overline{A \equiv B} \to \begin{cases} \mathrm{e}\,C \\ (ABC) \end{cases}$

7. $\left.\begin{matrix} (ABC) \\ ABD \\ BEC \end{matrix}\right\} \to \begin{cases} \mathrm{e}\,F \\ AFC\,. \\ (DEF) \end{cases}$

---

[21] Wegen der Definitionen sei auf die Einleitung hingewiesen.

[22] Die im letzten Absatz von § 2 erörterten Fälle, die durch **5** und die vorangehenden Axiome (**3** und **4**) doppelt bestimmt sind (worüber man sich allerdings klar sein soll!), ebenso wie einige unnötige triviale Fälle können aus diesem Axiom beseitigt werden — jedoch auf Kosten der Kürze und Übersichtlichkeit der Formulierung.

[23] Dass das Axiom **6** mit dem Axiom VII von Veblen völlig äquivalent, im Gebrauch aber viel bequemer ist, lässt sich fast unmittelbar einsehen; die Äquivalenz der beiden hat übrigens R. L. Moore gezeigt: *Transactions of the American Math. Soc.* **13** (1912), pag. 75.