DIE WAHRSCHEINLICHKEIT DER RICHTIGKEIT DES VIERFARBENSATZES

VON

E. KRAHN

TARTU (DORPAT) 1931

K. Mattiesens Buchdruckerei Ant.-Ges., Tartu (Dorpat), 1931.

Bei der Untersuchung der Gültigkeit des Vierfarbensatzes kann man sich auf solche ebene Gebietekomplexe beschränken, bei denen in jeder Ecke immer nur drei Kanten zusammenstossen, jedes Gebiet wenigstens drei Nachbargebiete berührt, und deren äusseres Gebiet auch immer als zum Komplex gehörig betrachtet wird.

Bevor zu einer Wahrscheinlichkeitsbetrachtung geschritten wird, soll eine Transformation des Problems durchgeführt werden.

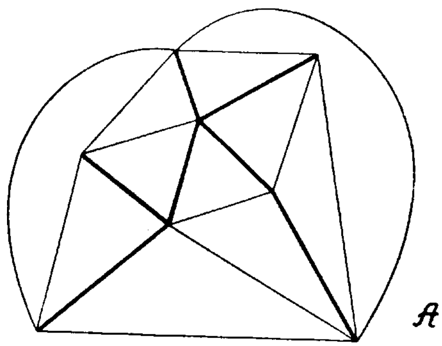

Abb. 1.

Es sei ein Gebietekomplex gegeben, der diesen Bedingungen entspricht und n Gebiete enthält.

Nun ordnet man jedem Gebiete einen Punkt und jedem Eckpunkte ein Gebiet zu und erhält so ein Dreiecknetz A, das an seinem äusseren Rande ebenfalls drei Eckpunkte aufweist. Zeichnen wir nun in diesem Dreiecknetz einen „Baum", das heisst solch einen zusammenhängenden Streckenkomplex, der alle Eckpunkte enthält und durch das Entfernen einer Strecke dieses Komplexes immer in zwei Teile zerfällt.

Nun denken wir uns jede Strecke des „Baumes" durch zwei nebeneinander liegende Strecken ersetzt und diese Strecken untereinander so verbunden, dass wir an Stelle des „Baumes“ einen zusammenhängenden, geschlossenen, doppelpunktfreien Streckenzug F erhalten. Im Inneren von F verbinden wir die Punkte von

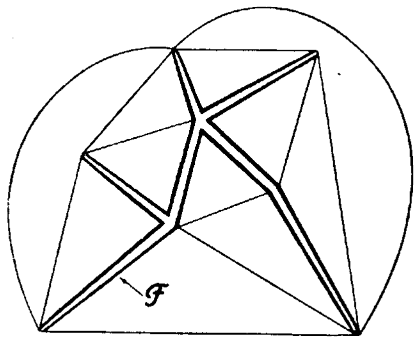

Abb. 2.

F, die aus denselben Punkten des „Baumes“ entstanden sind, der Reihe nach so, dass im Inneren von F an den Stellen der Punkte des „Baumes“ Strecken, Dreiecke, Vierecke u. s. w. entstehen.

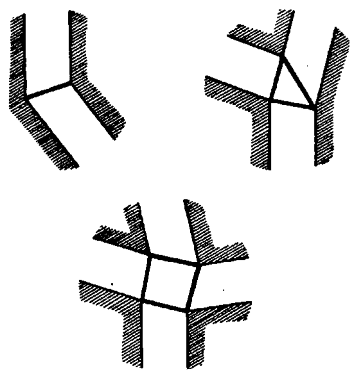

Abb. 3.

Jetzt deformieren wir den Streckenzug F zu einem konvexen Polygon F_1 und betrachten dessen äussere Seite C und die innere D, die aus dem Äusseren und dem Inneren von F bei der Deformation entstanden sind.

Das Dreiecknetz C können wir ersetzen durch ein von F_1 berandetes, im Inneren von F_1 gelegenes Netz C_1. In diesem können wir die ursprünglichen Strecken des Netzes A wieder durch Linien darstellen, die sich natürlich nirgends im Inneren (sondern nur auf F_1) schneiden und wieder ein aus Dreiecken bestehendes Netz bilden.

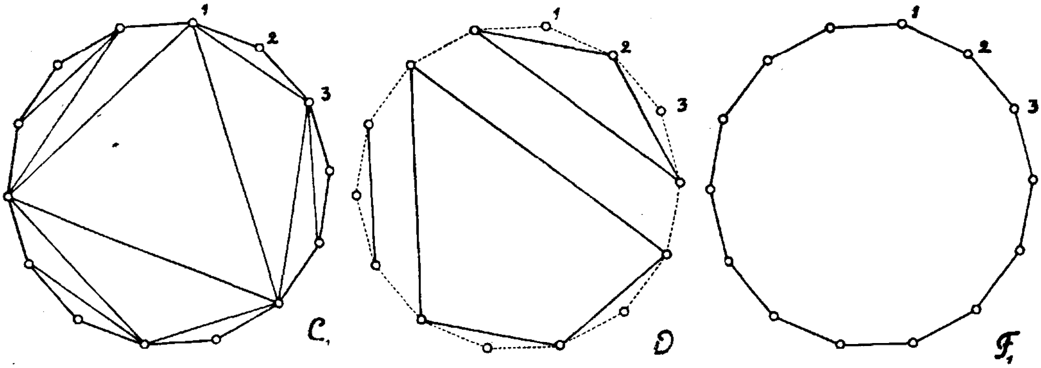

Abb. 4.

Im Inneren von D liegen Strecken, Dreiecke, Vierecke usw., wobei die einzelnen Gebilde niemals gemeinsame Eckpunkte haben.

Was bedeuten die Verbindungslinien in C_1 und D?

Eine Verbindungslinie in C_1 besagt, dass den durch sie verbundenen Punkten verschiedene Farben zugeordnet werden sollen. Die Randstrecken (Teile von F_1) haben in C_1 dieselbe Eigenschaft wie die inneren Strecken.

Eine Strecke in D verbindet zwei Punkte, denen gleiche Farben zugeordnet sein sollen (wobei sich diese Eigenschaft hier nicht auf die Randstrecken erstreckt).

Der „Baum" in A enthalte a_1 einfache, a_2 zweifache, $\cdots$ a_p p-fache Punkte. F und ebenso F_1 werden dann

$$s = a_1 + 2a_2 + 3a_3 + \cdots pa_p \tag{1}$$

Eckpunkte aufweisen. Hierbei ist

$$n = a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_p. \tag{2}$$

Auf wie viele Arten lassen sich nun den Eckpunkten von C_1 vier Farben zuordnen, so dass jedem Eckpunkt eine Farbe zugeordnet ist und keinen zwei in C_1 verbundenen Punkten die gleiche?

Gehen wir von einem beliebigen Dreieck in C_1 aus. Dessen Ecken kann man auf $4 \cdot 3 \cdot 2$ verschiedene Arten Farben zuordnen. Dem dritten Eckpunkt eines Nachbardreiecks lassen sich dann, jeder Zuordnung entsprechend, immer noch zwei verschiedene

Farben zuordnen. Indem wir immer zu benachbarten Dreiecken übergehen, sehen wir, dass man den Eckpunkten von C_1 auf $4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 2^{s-3} = 3 \cdot 2^s$ verschiedene Arten Farben zuordnen kann.

Auf wie viele Arten kann man den Eckpunkten von D Farben zuordnen, wenn man nur vier Farben benutzt?

Den Eckpunkten jedes einzelnen Gebildes in D (einzelner Punkt, Strecke, Dreieck, Viereck u. s. w.) müssen gleiche Farben zugeordnet sein. Gehen wir von irgendeinem Gebilde aus, so stehen uns dafür vier Farben zur Verfügung. Ist eine Farbe gewählt, so können wir jedem benachbarten Gebilde auf drei Arten eine Farbe zuordnen. Indem wir der Reihe nach alle n Gebilde durchgehen, sehen wir, dass wir D auf $4 \cdot 3^{n-1}$ verschiedene Arten Farben zuordnen können.

Wieviel verschiedene Zuordnungen von vier Farben, bei denen zwei benachbarten Punkten immer verschiedene Farben zugeordnet sind, gibt es im ganzen für die s Randpunkte von F_1?

Lägen die Punkte nicht auf einem geschlossenen, sondern auf einem offenen Streckenzug, so wären es $4 \cdot 3^{s-1}$. Da wir aber auch die Verbindung zwischen dem letzten und dem ersten Punkt haben und diesen verschiedene Farben zugeordnet sein müssen, so müssen wir von der Gesamtzahl der Zuordnungen $3^{s-1} - 3$ oder $3^{s-1} - 1$ ausschliessen, je nachdem ob s gerade oder ungerade ist. Es verbleiben also $3^s + 3$ resp. $3^s + 1$ verschiedene Zuordnungen. Es wird später gezeigt werden, dass s eine gerade Zahl ist.

Betrachten wir nun folgendes Problem. In einer Urne befinden sich k Kugeln. Davon haben r Kugeln einen roten Fleck und g Kugeln einen grünen Fleck. Wir wissen nicht, ob es Kugeln gibt, die gleichzeitig einen roten und einen grünen Fleck haben. Wir können aber fragen, wie gross die Wahrscheinlichkeit ist, dass keine der k Kugeln beide Flecke aufweist. Solange wir nicht wissen, ob die Verteilung der grünen und diejenige der roten Flecke voneinander abhängig sind oder nicht, wollen wir Unabhängigkeit dieser Verteilungen voraussetzen.

Dann ist die gesuchte Wahrscheinlichkeit

$$\left(1 - \frac{r}{k}\right) \left(1 - \frac{r}{k-1}\right) \left(1 - \frac{r}{k-2}\right) \cdots \left(1 - \frac{r}{k-g+1}\right) \leqq \left(1 - \frac{r}{k}\right)^g.$$

Diese Fragestellung können wir auf unser Problem anwenden. Wir wissen, dass alle $3 \cdot 2^s$ Farbenzuordnungen von C_1 ebenso wie alle $4 \cdot 3^{n-1}$ Farbenzuordnungen von D unter den $3^s + 3$ Farbenzuordnungen von F_1 vorkommen, wissen aber nicht, ob es Farbenzuordnungen gibt, die gleichzeitig für C_1 und D zutreffen. Die Wahrscheinlichkeit W dafür, dass es keine Farbenzuordnung gibt, die gleichzeitig für C_1 und D gilt, mit anderen Worten, die Wahrscheinlichkeit dafür, dass der Vierfarbensatz falsch ist, genügt nach der oben ausgeführten Formel der Ungleichung

$$W = \left(1 - \frac{4 \cdot 3^{n-1}}{3^s + 3}\right)^{3 \cdot 2^s}.$$

Diesen Ausdruck kann man einfacher darstellen. Zu dem Zwecke beachten wir, dass für einen „Baum" immer

$$(3) \qquad a_1 = 2 + a_3 + 2a_4 + 3a_5 \cdots + (p-2)\, a_p$$

ist, wovon man sich leicht durch sukzessives Aufbauen des „Baumes" überzeugt.

Multiplizieren wir (2) mit zwei und addieren wir das Produkt zu (3), so wird unter Beachtung von (1)

$$2n + a_1 = 2 + a_1 + s,$$

also

$$s = 2n - 2.$$

Setzen wir dies in die Ungleichung für W ein.

$$W \leqq \left(1 - \frac{4 \cdot 3^{n-1}}{3^{2n-2} + 3}\right)^{3 \cdot 2^{2n-2}} = \left(1 - \frac{4}{3^{n-1} + 3^{2-n}}\right)^{3 \cdot 4^{n-1}} =$$

$$= \left[\left(1 - \frac{4}{3^{n-1} + 3^{2-n}}\right)^{\frac{3^{n-1}}{4}}\right]^{9 \cdot \left(\frac{4}{3}\right)^n}.$$

Für $n > 4$ ist jedenfalls $W < 2^{-9 \cdot \left(\frac{4}{3}\right)^n}$.

Die Wahrscheinlichkeit, dass der Vierfarbensatz für einen aus n Gebieten bestehenden Gebietekomplex, der den am Anfang angeführten Bedingungen genügt, richtig ist, ist somit für $n > 4$ grösser als $1 - 2^{-9 \cdot \left(\frac{4}{3}\right)^n}$.

Für $n = 10$ z. B. ist die Wahrscheinlichkeit grösser als $1 - 10^{-45}$.