

ÜBER DIE VIERFARBENFORMEL

VON

J. NUUT

TARTU (DORPAT) 1929

C. Mattiesen, Tartu (Dorpat).

1. Einführung.

In der Untersuchung „Über die Anzahl der Lösungen der Vierfarbenaufgabe“*) (abgekürzt *ALV*) habe ich eine Rekursionsformel entwickelt, die es ermöglicht die Anzahl der Vierfarbenbezeichnungen der Ecken eines Normalnetzes¹⁾ zu berechnen, unter Berücksichtigung spezieller Systeme von Nebenbedingungen. Die Nebenbedingungen beziehen sich allemal auf eine Auslese²⁾ von Randknotenpaaren und zerfallen in positive und negative Forderungen ($+AB$) resp. ($-CD$); erstere besagen, dass A, B identisch, letztere dagegen, dass C, D verschieden gefärbt werden sollen. Die Reduktion des Problems erfolgt auf dem Wege der Anordnung der Normalnetze nach Ordnungszahlen, d. h. nach der Anzahl der inneren Netzknoten. Die Erniedrigung der Ordnungszahl wird durch Spaltung des jeweiligen Netzes in Fächer und Residuum³⁾ erreicht. Die Randknotenpaare der getroffenen Auslese verteilen sich hierbei notwendig in 3 Kategorien, nämlich Paare vom Typus (FR), wo die eine Komponente F zum Fächer, die andere R zum Residuum gehört, ferner Paare vom Typus (FF), wo beide Komponenten zum Fächer, endlich Paare vom Typus (RR), wo beide Komponenten zum Residuum gehören. Die Paare (FR) erscheinen in linearer Anordnung als (F_1R_1), (F_2R_2), ... (F_lR_l) und bestimmen zusammen mit den Paaren (FF) auf dem Fächer einen Komplex reduzierter Maschenzahlen⁴⁾

$$\varrho_1, \varrho_2, \dots, \varrho_{l+1}, \varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_l. \quad (1)$$

Diese ϱ, φ sind ihrer Definition nach nicht-negative ganze Zahlen.

Bezeichnet dann ε die Zahl -1 , ferner a_n den Vierfarbennoeffizienten⁵⁾, der durch die Relation

$$a_n = \frac{1}{3} (2^n + \varepsilon^{n-1}) \quad (2)$$

definiert werden kann, und wird $N_{(Z)}$ als Symbol der durch die

*) Acta et Comm. Univ. Tartuensis A XV 3.

1) Vgl. *ALV* § 1. 2) *ALV* § 12. 3) *ALV* § 3. 4) *ALV* § 13. 5) *ALV* § 6.

Auslese (Z) bedingten Farbeninvariante⁶⁾ verwendet, so lautet die Formel der ALV :

$$\begin{aligned} & \overset{i}{N}_{(+FR)(+FF)(+RR)} = \\ & = 2^f a_{\varphi_1-1} \dots a_{\varphi_t-1} \left\{ a_{\varrho_1} \dots a_{\varrho_{t+1}} \overset{i-1}{N}_{(+RR)(-RP)} + \right. \\ & + \sum_{\mu=1}^{t+1} a_{\varrho_1} \dots a_{\varrho_{\mu-1}} \varepsilon^{\varrho_\mu} a_{\varrho_{\mu+1}} \dots a_{\varrho_{t+1}} \overset{i-1}{N}_{(+RR)(+R_{\mu-1}R_\mu)(-RP)} + \\ & \quad + \dots \dots \dots + \\ & \left. + \varepsilon^{\varrho_1} \varepsilon^{\varrho_2} \dots \varepsilon^{\varrho_{t+1}} \overset{i-1}{N}_{(+RR)(+R_0R_1) \dots (+R_tR_{t+1})(-RP)} \right\}. \quad (3) \end{aligned}$$

Hier bedeutet P das Zentrum⁷⁾ der ausgeführten Reduktionszerlegung, während $(-RP)$ abgekürzt die Auslese $(-R_1P)$ $(-R_2P) \dots (-R_tP)$ symbolisiert. Diese Formel (3) wird in der ALV als Vierfarbenformel⁸⁾ bezeichnet.

Die Auslese $(+FR)(+FF)(+RR)$ enthält ausschliesslich positive Paare, was aber keine weitere Einschränkung bedeutet, da laut § 12 der ALV die negativen Bedingungen sich auf einfache Weise durch positive ersetzen lassen (auch umgekehrt!). Nur um den auftretenden Formeln eine übersichtlich symmetrische Gestalt zu geben, haben wir die negativen Bedingungen überhaupt explizite verwendet.

Am Schluss der ALV ist der hypothetische allgemeine Vierfarbensatz⁹⁾ formuliert, laut welchem eine Farbeninvariante nur dann verschwinden kann, wenn die Auslese einen Widerspruch¹⁰⁾ enthält; dass sie dann allemal auch wirklich verschwinden muss, ist evident.

In den unten folgenden Betrachtungen sollen einige Konsequenzen aus der Vierfarbenformel gezogen werden, um den Beweis dieses allgemeinen Vierfarbensatzes auf rein arithmetischer Grundlage anzubahnen.

2. Vierfarbenreihen.

Die Vierfarbennoeffizienten genügen der leicht zu verifizierenden Relation

$$2 a_n + a_{n+1} = a_{n+2}. \quad (4)$$

6) ALV § 2. 7) ALV § 8. 8) ALV § 17. 9) ALV § 19. 10) ALV § 12.

Es liege eine Zahlenreihe

$$\dots a_{-t}, \dots a_{-2}, a_{-1}, a_0, a_1, a_2, \dots, a_t, \dots \quad (5)$$

vor, in der das folgende, der Relation (4) nachgebildete Erzeugungsgesetz gilt:

$$2 a_n + a_{n+1} = a_{n+2}. \quad (6)$$

Diese Reihe steht dann in engem Zusammenhange mit der Reihe der Vierfarbennoeffizienten. Aus diesem Grunde möge die Reihe (5) eine Vierfarbenreihe, und zwar, im Hinblick auf eine gleich folgende Verallgemeinerung, eine eindimensionale Vierfarbenreihe heißen. Für eine solche Vierfarbenreihe gelten u. a. folgende leicht zu beweisende Relationen:

$$a_{t+k} = a_k a_{t+1} + 2 a_{k-1} a_t, \quad (7)$$

$$s_k = a_1 + a_2 + \dots + a_k = a_k a_1 + \frac{1}{2} (a_{k+1} - 1) a_2. \quad (8)$$

Aus (6) ist ersichtlich, dass die Reihe der Differenzen einer Vierfarbenreihe wieder eine Vierfarbenreihe darstellt, welche letztere sich in ihrer Gesamtheit nur durch den Faktor 2 von der ursprünglichen unterscheidet.

Spezielle Beispiele von Vierfarbenreihen liefern Reihen, wo $a_t = \varepsilon^t a$, unter a eine Konstante verstanden, d. h. Reihen vom Typus

$$\dots + a, -a, +a, -a, \dots \quad (9)$$

Bei $a=1$ hat man den engeren Spezialfall $a_t = \varepsilon^t$, m. a. W. die Reihe

$$\dots + 1, -1, +1, -1, \dots \quad (10)$$

Um zur versprochenen Verallgemeinerung zu gelangen, betrachte man zunächst etwa die folgende, nach 2 Parametern λ, μ geordnete Zahlenreihe, deren Allgemeinglied

$$a_{\lambda, \mu} = a_\lambda a_\mu a, \quad (11)$$

wobei a eine Konstante ist. Auf Grund von (4) erweist sich

$$2 a_{\lambda, \mu} + a_{\lambda+1, \mu} = a_{\lambda+2, \mu} \quad (12)$$

$$2 a_{\lambda, \mu} + a_{\lambda, \mu+1} = a_{\lambda, \mu+2}.$$

Lässt man die spezielle Fassung der Definition (11) fallen, behält aber die Forderungen (12) bei, so gelangt man zum Begriff einer allgemeinen zweidimensionalen Vierfarbenreihe.

Ganz allgemein lautet nun folgende Festsetzung:

Eine Menge von Zahlen $a_{x_1 x_2 \dots x_p}$, die nach p unabhängigen ganzzahligen Parameterwerten x_1, x_2, \dots, x_p geordnet erscheinen, soll eine p -dimensionale Vierfarbenreihe heissen, wenn für jedes x_k die Forderung

$$2 \cdot a_{x_1 \dots x_{k-1} x_k x_{k+1} \dots x_p} + a_{x_1 \dots x_{k-1}, x_k+1, x_{k+1} \dots x_p} = a_{x_1 \dots x_{k-1}, x_k+2, x_{k+1} \dots x_p} \quad (13)$$

erfüllt ist.

Ein spezielles Beispiel einer solchen p -dimensionalen Vierfarbenreihe liefert

$$a_{x_1 \dots x_p} = \alpha_{x_1} \alpha_{x_2} \dots \alpha_{x_p} a, \quad (14)$$

wo a eine Konstante ist. Aber auch

$$a_{x_1 \dots x_p} = \alpha_{x_1+x_2+\dots+x_p+c} \cdot a, \quad (15)$$

wo c und a Konstanten sind, ergibt eine Reihe von gleichem Typus. Andere Reihen derselben Gattung entstehen, wenn in (14) oder (15) α_m durch ε^m ersetzt wird, oder aber lineare Verbindungen solcherweise erhaltener Ausdrücke gebildet werden.

Es seien in der Vierfarbenformel (3) die Anzahlen und Numerationen der Paare $(+FR)$ $(+FF)$ $(+RR)$ fixiert, das Residuum als unveränderlich betrachtet und die Lage sämtlicher Knoten R und des Knotens P festgelegt. Variiert man dann die Verteilung der Knoten F auf dem Fächer, sowie die Gesamtzahl der Maschen des Fächers, so entspricht dies einer Variation der reduzierten Maschenzahlen q, φ , während die rechts in (3) auftretenden Grössen $\overset{i-1}{N}_{(Z)}$ konstant verbleiben. Jeder Kombination (1) der $t+f+1$ reduzierten Maschenzahlen entspricht ein bestimmter Wert von $\overset{i}{N}_{(+FR)(+FF)(+RR)}$, den wir uns dieser Kombination q, φ zugeordnet denken. Damit ist aber die Farbeninvariante $\overset{i}{N}_{(+FR)(+FF)(+RR)}$ als von $t+f+1$ Parametern

$$x_1 = q_1, \dots, x_{t+1} = q_{t+1}, x_{t+2} = \varphi_1, \dots, x_{t+f+1} = \varphi_f \quad (16)$$

abhängige Zahl $a_{x_1 x_2 \dots x_{t+f+1}}$ aufgefasst. Eine aufmerksame

Betrachtung der rechten Seite der Vierfarbenformel (3) zeigt sofort, dass diese Zahlen $a_{x_1 x_2 \dots}$ eine $(t + f + 1)$ -dimensionale Vierfarbenreihe bilden. Dieses Resultat ist von grundlegender Bedeutung für alle weiteren Entwicklungen und soll demnach als Satz zusammengefasst werden:

Bei der Variation des Fächers ordnen sich die Farbeninvarianten $\overset{i}{N}_{(+FR)(+FF)(+RR)}$ zu einer $(t + f + 1)$ -dimensionalen Vierfarbenreihe.

3. Das allgemeine Glied einer Vierfarbenreihe.

Deutet man $a_{x_1 \dots x_p}$ als dem Punkte $(x_1|x_2|\dots|x_p)$ eines p -dimensionalen ganzzahligen Punktgitters zugeordnete Zahl, so darf man die entsprechende Vierfarbenreihe in ihrer Gesamtheit als Funktion des Punktgitters ansehen. Statt von einer Vierfarbenreihe kann man dann auch von einer Vierfarbentfunktion sprechen, deren Werte in den Gitterpunkten (x) eben die a_x sind.

Die Beziehung auf den p -dimensionalen Raum erleichtert wesentlich die fernere Nomenklatur. Für unsere Zwecke wäre folgendes zu beachten:

ν lineare Gleichungen zwischen den Koordinaten x_k definieren eine $(p - \nu)$ -dimensionale Ebene im Gitterraum ($\nu \leq p$), sofern diese Gleichungen linear unabhängig sind; jeder Punkt erscheint in dieser Auffassung als nulldimensionale, der Gitterraum selbst als p -dimensionale Ebene.

Die $2p$ Gleichungen $x_k = 0$ resp. $x_k = 1$ definieren je für sich je eine spezielle $(p - 1)$ -dimensionale Ebene. Die Gesamtheit dieser $2p$ speziellen Ebenen, vereinigt mit der Gesamtheit ihrer sämtlichen Schnittebenen von niedrigerer Dimensionszahl, liefert ein Gebilde, welches als Fundamentalwürfel des Gitterraumes bezeichnet werden mag; jede zum Fundamentalwürfel zählende Ebene sei dementsprechend als Fundamentebene bezeichnet. Die Anzahl der $(p - \nu)$ -dimensionalen Fundamentebenen beträgt $2^\nu \binom{p}{\nu} = 2^\nu \binom{p}{p-\nu}$. Ist $\lambda < \mu$, so enthält jede μ dimensionale Fundamentebene genau $2^{\mu-\lambda} \binom{\mu}{\lambda}$ Fundamentebenen von der Dimension λ , und jede λ -dimensionale Fundamentebene

Hier bilden aber die Grössen $a_{x_1 x_2 \dots x_p 0}$, $a_{x_1 x_2 \dots x_p 1}$ jede für sich je eine p -dimensionale Vierfarbenreihe, auf welche (18) angewendet werden darf. Kombiniert man demnach (18) mit (20) und ordnet das Resultat, so erhält man, wie leicht zu übersehen, eine Formel von der Struktur (18), nur tritt $p+1$ an Stelle von p . Damit ist aber (18) allgemein bewiesen.

Man kann übrigens die Identität (18) in etwas allgemeinerer Gestalt schreiben, indem man zuvor die Parallelverschiebung $x' = x + \xi$ ausgeführt denkt. Der Fundamentalwürfel transformiert sich hierbei in einen solchen Würfel, dessen Eckkoordinaten die Werte ξ und $\xi+1$ annehmen.

4. Transformation der Vierfarbenformel.

Nach § 2 liefert die Vierfarbenformel (3) die Farbeninvariante $N_{(+FR)(+FF)(+RR)}$ als Vierfarbenfunktion, wobei die reduzierten Maschenzahlen ϱ , φ die Rolle der Parameter x übernehmen. Um dies anzudeuten, soll fernerhin, wo zweckmässig, $N_{\varrho_1 \dots \varrho_{l+1} | \varphi_1 \dots \varphi_l}$ für $N_{(+FR)(+FF)(+RR)}$, abgekürzt eventuell $N_{\varrho | \varphi}$, geschrieben werden.

Die Relation (18) gestattet $N_{\varrho | \varphi}$ durch die Fundamentalwerte, d. h. die Werte der $N_{\varrho | \varphi}$ in den Fundamentecken, auszudrücken. Dies soll nun ausgeführt werden. Aus der geometrischen Bedeutung der Farbeninvarianten ist ersichtlich, dass die Fundamentalwerte nicht negativ sind. Sobald ein Fundamentalwert null ist, verschwindet das entsprechende Glied in der Summe auf der rechten Seite von (18). Verschwindet ein Fundamentalwert unabhängig von der speziellen Lage der Punkte R auf dem Residuum, so sagen wir, der Fundamentalwert verschwinde identisch. Von Belang sind hier nur diejenigen Fundamentalwerte, die nicht identisch verschwinden. Es enthält die rechte Seite von (3) den gemeinschaftlichen Faktor $2^f \alpha_{\varphi_1-1} \alpha_{\varphi_2-1} \dots \alpha_{\varphi_f-1}$, der dann, aber auch nur dann, null wird, wenn mindestens eine der Koordinaten φ_k gleich 1 ist. Da in den Fundamentecken ausser dem Werte 1 für die Koordinaten nur noch der Wert 0 in Betracht kommt, so müssen

sämtliche φ_k gleich 0 sein, wenn der Fundamentalwert nicht identisch verschwinden soll. Bei $\varphi_1 = \varphi_2 = \dots = \varphi_f = 0$ hat man aber

$$2^f \alpha_{\varphi_1-1} \alpha_{\varphi_2-1} \dots \alpha_{\varphi_f-1} = 2^f \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^f = 1. \quad (21)$$

Der zugehörige Fundamentalwert $\overset{i}{N}_{\varrho|\varphi}$ ist daher gleich dem Wert des Vierfarbenpolynoms, d. h. des Ausdrucks in der Schleifenklammer der rechten Seite von (3). Sämtliche nicht identisch verschwindende Fundamentalwerte gehören also zur $(t+1)$ -dimensionalen Fundamentelebene $\varphi_1 = 0, \varphi_2 = 0, \dots, \varphi_f = 0$. Diese Fundamentelebene erscheint für sich betrachtet als $(t+1)$ -dimensionales Punktgitter, und besitzt als solches einen Fundamentwürfel, dessen Ecken erhalten werden, wenn man ϱ gleich 0 und 1 setzt. Die entsprechenden $\overset{i}{N}_{\varrho|\varphi}$ können ohne Missverständnisse einfach als $\overset{i}{N}_{\varrho}$ bezeichnet, und es darf von der Fundamentecke (ϱ) gesprochen werden.

Es sei nun diese Fundamentecke (ϱ) als $\varrho_a = \varrho_b = \dots = 0, \varrho_u = \varrho_v = \dots = 1$ definiert. Im zugehörigen Vierfarbenpolynom verschwinden dann sämtliche Glieder, in denen auch nur eine der Zahlen $\alpha_{\varrho_a}, \alpha_{\varrho_b}, \dots$ als Faktor auftritt; es verbleiben also nur diejenigen, deren Koeffizient den Komplex

$$\varepsilon^{\varrho_a} \varepsilon^{\varrho_b} \dots = 1 \quad (22)$$

enthält. In den zugehörigen, auf das Netz $(i+1)$ -ter Ordnung bezüglichen Farbeninvarianten zeigt die Bedingung u. a. überall die gemeinschaftliche Forderung $(+RR) (-RP) (+R_{a-1} R_a) (+R_{b-1} R_b) \dots$, wofür abgekürzt $(+RR) (-RP) (+R^0)$ geschrieben werden möge.

Nach Abspaltung des Faktors (22) verbleiben in den Koeffizienten der übriggebliebenen Glieder nur noch durch $\varrho_u, \varrho_v, \dots$ bedingte Faktoren vom Typus α_{ϱ_u} und ε^{ϱ_u} . Da $\alpha_{\varrho_u} = \alpha_{\varrho_v} = \dots = 1$ und $\varepsilon^{\varrho_u} = \varepsilon^{\varrho_v} = \dots = -1$, und sämtliche Kombinationen der ε^{ϱ_u} auftreten müssen, so erkennt man, dass die fraglichen Koeffizienten gleich $+1$ oder -1 sind, je nachdem eine gerade oder eine ungerade Anzahl von ε^{ϱ_u} in der zugehörigen Kombination vorkommt. Es ergibt sich auf diese Weise:

Denn sämtliche Glieder, die den Faktor α_{φ_k} enthalten würden, verschwinden; es entsteht demnach überall der gemeinsame Faktor $2^f \alpha_{\varphi_{1-1}} \dots \alpha_{\varphi_{f-1}}$.

5. Diskussion der Fälle, wo $N_{\varrho|\varphi}^i$ verschwindet.

Denjenigen Teil des Gitterraumes, in dem keine der Koordinaten negativ ist, nennen wir den Hauptraum. Die geometrische Interpretation der Zahl $N_{\varrho|\varphi}^i$ bezieht sich dem Wesen nach nur auf diesen Hauptraum, d. h. auf nicht-negative Werte von ϱ , φ , was aber bei rein analytischer Behandlung der aus (27) fliessenden Folgerungen nicht hindert, auch andere Koordinatenwerte in den Bereich der Erwägungen zu ziehen.

In der Gestalt (27) hat die Vierfarbenformel den Vorzug, dass rechts keine negativen Glieder auftreten, solange man sich auf den Hauptraum beschränkt. Es verschwindet also $N_{\varrho|\varphi}^i$ im Hauptraum dann und nur dann, wenn jedes Glied der rechten Seite von (27) einzeln verschwindet. Damit ist ein Gedankengang als Grundlage für den Beweis des allgemeinen Vierfarbensatzes vorgezeichnet.

Ein Gitterpunkt $(\varrho|\varphi)$ des Hauptraumes kann mehreren Fundamentalebene angehören; eine und nur eine dieser Fundamentalebene wird die kleinste Dimensionszahl zeigen. Diese Fundamentalebene kleinster Dimensionszahl ist nämlich durch den Komplex der Gleichungen definiert, die angeben, welche Koordinatenwerte 0 und welche 1 sein sollen. Sind im Gitterpunkt $(\varrho|\varphi)$ sämtliche Koordinaten grösser als 1, so gehört dieser Punkt überhaupt keiner Fundamentalebene an. Es ist aber dann zweckmässig, den ganzen Gitterraum selbst als null Bedingungen unterworfen und daher $(t + f + 1)$ -dimensionale Fundamentalebene anzusehen, die in diesem Falle dabei natürlich die $(\varrho|\varphi)$ enthaltende Fundamentalebene kleinster Dimensionszahl bildet. Einen anderen extremen Fall hätte man, wenn $(\varrho|\varphi)$ eine Fundamentalecke ist. Die zugehörige Fundamentalebene kleinster Dimensionszahl besteht dann aus diesem einzigen Punkt und ist von der Dimension null.

Es sei nun $(\varrho|\varphi)$ zur Fundamentalebene II von kleinster Dimensionszahl gehörig; wir fragen nach den Bedingungen, unter denen $N_{\varrho|\varphi}^i$ verschwindet.

Es wird $N_{\varrho|\varphi}^i$ zunächst allemal null, sobald in der Definition von Π für irgendein k die Forderung $\varphi_k = 1$ besteht. Die Knoten F', F'' , denen dieser Wert von φ_k zukommt, sind dann entweder benachbart, oder es wird der Teilfächer $F'PF''$ so von anderen Paaren $(+FF)$ überdeckt, dass nur eine Masche frei bleibt. Es sei $\underline{F'PF''}$ diese einzige freigebliebene Fächermasche, also etwa $\underline{F'PF'}$ und $\underline{F''PF''}$ völlig überdeckte Teilfächer, dann ergibt sich aus $(+FF)$ notwendig $F' \equiv \underline{F'}$ und $F'' \equiv \underline{F''}$, was weiter wegen $(+F'F'')$ zur Forderung $\underline{F'} \equiv \underline{F''}$ führt; letztere bedeutet aber einen Widerspruch, weil $\underline{F'}$ und $\underline{F''}$ benachbart sind. Also:

Verschwindet $N_{\varrho|\varphi}^i$ wegen $\varphi_k = 1$, so ist in den Forderungen $(+FF)$ sicher ein Widerspruch enthalten

Dies steht im Einklang mit dem allgemeinen Vierfarbensatz.

Es sei nun angenommen, dass Π an keine Forderung vom Typus $\varphi_k = 1$ geknüpft ist. Die Zahl $N_{\varrho|\varphi}^i$ kann in diesem Falle nur dann verschwinden, wenn die Schleifenklammer in (27) — das Vierfarbenpolynom — verschwindet. Es mögen für Π u. a. die Forderungen

$$\varrho_a = 0, \quad \varrho_b = 0, \dots \dots \dots \quad (28)$$

$$\varrho_u = 1, \quad \varrho_v = 1, \dots \dots \dots \quad (29)$$

gelten. Im Vierfarbenpolynom verschwinden dann sämtliche Glieder, die einen der Faktoren $\alpha_{\varrho_a}, \alpha_{\varrho_b}, \dots, \alpha_{\varrho_{u-1}}, \alpha_{\varrho_{v-1}}, \dots$ enthalten; es verbleiben also nur diejenigen, wo $\alpha_{\varrho_{a-1}}, \alpha_{\varrho_{b-1}}, \dots$

$\alpha_{\varrho_u}, \alpha_{\varrho_v}, \dots$ auftreten. Damit sondert sich vom Vierfarbenpolynom der gemeinschaftliche Faktor

$$2^\nu \alpha_{\varrho_{a-1}} \alpha_{\varrho_{b-1}} \dots \alpha_{\varrho_u} \alpha_{\varrho_v} \dots = 1 \quad (30)$$

ab, unter ν die Anzahl der Gleichungen (28) verstanden. Der verbleibende Rest ist von demselben Typus wie das in (27) definierte Polynom, nur hat sich die Gliederzahl verringert. Da einem jeden von a, b, \dots, u, v, \dots verschiedenen Index ein ϱ -Wert entspricht, der 1 übersteigt, so wird keiner der Koeffizienten im Restpolynom null; es müssen daher sämtliche in dieses Rest-

polynom eingehende Farbeninvarianten $N_{(Z)}^{i-1}$ gleich null sein, wenn das ursprüngliche Vierfarbenpolynom verschwinden soll.

Infolge der Existenz des gemeinsamen Faktors (30) enthält die Bedingung (Z) im Restpolynom allemal die Teilforderung

$$(+RR)(-RP)(+R_{a-1}R_a)(+R_{b-1}R_b)\dots(-R_{u-1}R_u)(-R_{v-1}R_v)\dots \quad (31)$$

Bedeutet m, n, \dots die von $a, b, \dots u, v, \dots$ verschiedenen Indizes der Reihe 1, 2, 3, $\dots, t+1$, so enthält (Z) ausser (31) noch die Forderungen

$$(\pm R_{m-1}R_m)(\pm R_{n-1}R_n)\dots, \quad (32)$$

und zwar kommt, aus leicht erkennbaren Gründen, jede überhaupt denkbare Kombination der Vorzeichen $+$, $-$ einmal und nur einmal vor.

Aus der geometrischen Bedeutung der Farbeninvarianten folgt für beliebige (M)

$$N_{(M)(+AB)} + N_{(M)(-AB)} = N_{(M)}. \quad (33)$$

Mittels vollständiger Induktion lässt sich diese Relation sofort dahin verallgemeinern, dass

$$\sum N_{(M)(\pm AB)(\pm CD)} \dots = N_{(M)}, \quad (34)$$

wenn die Summe über alle denkbaren Kombinationen der Vorzeichen $+$, $-$ erstreckt wird.

Bildet man demnach die Summe sämtlicher $N_{(Z)}$ des Restpolynoms, so treten $(R_{m-1}R_m)(R_{n-1}R_n) \dots$ an die Stelle der $(AB)(CD) \dots$ in (34), woraus

$$\sum N_{(Z)}^{i-1} = \sum N_{(+RR)(-RP)(+R_{a-1}R_a)\dots(-R_{u-1}R_u)\dots}^{i-1} \quad (35)$$

folgt. Weil nun $\sum N_{(Z)}^{i-1} = 0$, wenn jedes $N_{(Z)}^{i-1}$ einzeln null ist, so erhält man das Resultat:

Das Vierfarbenpolynom verschwindet dann und nur dann, wenn

$$N_{(+RR)(-RP)(+R_{a-1}R_a)\dots(-R_{u-1}R_u)\dots}^{i-1} = 0. \quad (36)$$

Hat man vorausgesetzt, der allgemeine Vierfarbensatz sei bis zu den Netzen $(i-1)$ -ter Ordnung bewiesen, so ist man jetzt be-

rechtigt in (31) einen Widerspruch zu suchen, wenn das Vierfarbenpolynom verschwinden soll. Dieser Widerspruch könnte auf dreifache Weise zustande kommen:

- I. die Forderung $(+RR)$ könnte Widersprüche enthalten;
- II. die Gesamtforderung positiven Charakters $(+RR)$ $(+R_{a-1}R_a)(+R_{b-1}R_b)$.. könnte Widersprüche enthalten;
- III. eines der Paare $(R_{a-1}R_a)$, $(R_{b-1}R_b)$, .. könnte von den in II genannten Forderungen abhängig¹²⁾ sein.

Die Möglichkeit, dass ein Paar (RP) von den in II genannten positiven Paaren abhängig wird, kommt nicht in Betracht, weil P unter den Punkten R sicher nicht vorkommt.

Bei der Annahme I ist der Widerspruch $(+RR)$ offenbar schon in dem Netze i -ter Ordnung, wo $(+RF)(+FF)(+RR)$ gefordert war, ebenfalls enthalten, somit das Verschwinden von $N_{\varrho|\varphi}$ wirklich durch einen Widerspruch im Netze i -ter Ordnung bedingt, wie es der Vierfarbensatz verlangt.

Bei der Annahme II bemerke man zunächst, dass wegen (28) im Gitterpunkt $(\varrho|\varphi)$ notwendig

$$F_{a-1} \equiv F_a, F_{b-1} \equiv F_b, \dots \quad (37)$$

gefordert ist, denn die Teilflächen $F_{a-1}PF_a$, $F_{b-1}PF_b$, ... erscheinen hier mit positiven Paaren $(+FF)$ völlig überdeckt. Wird nun für das Netz i -ter Ordnung noch die Forderung $(+RR)$ $(+FR)$ gestellt, die u. a.

$$F_{a-1} \equiv R_{a-1}, F_a \equiv R_a, \dots \quad (38)$$

besagt, so ist doch

$$R_{a-1} \equiv R_a, R_{b-1} \equiv R_b, \dots \quad (39)$$

eine logische Konsequenz von (37) und (38), d. h. die Paare $(R_{a-1}R_a)$, $(R_{b-1}R_b)$... sind im Punkte $(\varrho|\varphi)$ von $(+RR)(+RF)$ $(+FF)$ abhängig. Ein aus den in II genannten Forderungen resultierender Widerspruch ist dann eo ipso schon in der Forderung $(+RR)(+RF)(+FF)$ im Netze i -ter Ordnung enthalten.

Sollte endlich bei der Annahme III etwa $(R_{a-1}R_a)$ von $(+RR)(+R_{a-1}R_a)$.. abhängig sein, d. h. $R_{a-1} \equiv R_a$ mit Notwendigkeit aus $(+RR)(+R_{a-1}R_a)$.. fließen, so wäre nach dem Vorigen dieselbe Beziehung $R_{a-1} \equiv R_a$ auch schon eine

¹²⁾ Über den Begriff der „Abhängigkeit“ eines Paares von anderen vgl. *ALV* § 12.

Folge von $(+RR)(+RF)(+FF)$ im Netze i -ter Ordnung. Weil in $(+FR)$ aber auch die Forderungen

$$F_{u-1} \equiv R_{u-1}, F_u \equiv R_u \quad (40)$$

enthalten sind, so müsste im Netze i -ter Ordnung dann notwendig $F_{u-1} \equiv F_u$ sein, was aber einen Widerspruch bedeutet, da nach (29) $q_u = 1$ besteht. Damit ist auch diese Annahme erledigt. Also:

Gilt der allgemeine Vierfarbensatz für Netze, deren Ordnung $i-1$ nicht übersteigt, so gilt er in jedem Netz i -ter Ordnung für jede positive Auslese.

Für negative, resp. gemischte Auslesen ist damit noch nichts entschieden.

6. Einfache Fälle gemischter Auslesen.

Aus der Relation ¹³⁾

$$\begin{aligned} N_{(Z)}(-X_1 Y_1)(-X_2 Y_2) \cdots &= \\ = N_{(Z)} - \sum_u N_{(Z)}(+X_u Y_u) + \sum_{u,v} N_{(Z)}(+X_u Y_u)(+X_v Y_v) - \dots \end{aligned} \quad (41)$$

ergeben sich die Werte der Vierfarbeninvarianten für gemischte Auslesen.

Es bedeute $(-R' R')$ einen Komplex negativer Bedingungen, in denen ausschliesslich Randpunkte R' des Residuums Erwähnung finden. Aus (41) ersieht man dann sofort, dass die Reduktionsformel für

$$\overset{i}{N}_{(+FR)(+FF)(+RR)(-R' R')}$$

sich von der Reduktionsformel (27) nur um die rechts überall hinzutretende Ergänzungsforderung $(-R' R')$ unterscheidet.

Etwas komplizierter gestaltet sich die Reduktion von

$$\overset{i}{N}_{(+FR)(+FF)(+RR)(-R' R')(-F' F')},$$

wenn $(-F' F')$ eine sich ausschliesslich auf Fächerpunkte F' beziehende Forderung symbolisiert. Kombiniert man hier (27) mit (41), so erkennt man zunächst, dass die einzelnen Farbeninvarianten $\overset{i-1}{N}_{(M)}$, die rechts in (27) auftreten, für jeden Summanden in (41) dieselben sind, — es ändern sich aber jedesmal

13) vgl. ALV § 12.

die reduzierten Maschenzahlen ϱ, φ . Endgültige Formeln lassen sich folgendermassen ableiten:

Man betrachte den Komplex der Paare $(FF) (F_0 F_1) \dots (F' F')$ auf dem Fächer. Dieser Komplex bildet notwendig eine Auslese, sofern $(FR) (FF) (F' F')$ eine Auslese ist. Es seien

$$\varphi'_1, \varphi'_2, \dots, \varphi'_f, \varrho'_1, \varrho'_2, \dots, \varrho'_{t+1}, \psi'_1, \psi'_2, \dots, \psi'_n \quad (42)$$

die zugehörigen reduzierten Maschenzahlen dieses Komplexes; zur Abkürzung sollen dieselben Symbole auch als Bezeichnungen der zugehörigen Knotenpaare dienen. Zu jedem Paar ψ' gibt es ein und nur ein nächsthöheres Paar¹⁴⁾ φ' oder ϱ' , d. h. ein solches Paar φ' resp. ϱ' , in welchem der Teilfächer ψ' einen echten oder auch unechten Teil überdeckt, wobei keinem niedrigeren Paar φ' oder ϱ' dieselbe Eigenschaft bezüglich dieses fixierten ψ' zukommt. Das Paar ψ' soll dann mit diesem nächsthöheren φ' resp. ϱ' assoziiert heissen. Sämtliche mit demselben φ' resp. ϱ' assoziierten Paare ψ' mögen untereinander verwandt¹⁴⁾ heissen; ihre Gesamtheit bildet dementsprechend eine Verwandtschaft. In jeder Verwandtschaft gibt es Paare ψ' , die kein höheres verwandtes Paar besitzen, — es sind dies die relativen Maximalpaare dieser Verwandtschaft. Die Anzahl der zu φ'_k resp. ϱ'_k assoziierten relativen Maximalpaare ψ' möge als Charakteristik¹⁴⁾ λ_k resp. μ_k von φ'_k resp. ϱ'_k bezeichnet werden. Diese Charakteristik wird dann und nur dann null, wenn kein einziges assoziiertes Paar vorhanden ist. Auch für die ψ' soll analog der Begriff einer Charakteristik bestimmt werden: unter den mit ψ'_k verwandten aber niedrigeren Paaren sollen die nächstniedrigen ausgesucht werden, d. h. diejenigen, die nicht gleichzeitig niedrigere Paare niedrigerer Paare sind; die Anzahl τ_k dieser nächstniedrigeren Paare bilde die Charakteristik von ψ'_k . Man hat $\tau_k = 0$, sobald kein niedrigeres verwandtes Paar vorhanden ist.

Es gilt nun die Formel:

$$\begin{aligned} & N_{(+FR)(+FF)(+RR)(-F'F')}^i = \\ & = 2^f \alpha_{\varphi'_1 + \lambda_1 - 1} \dots \alpha_{\varphi'_f + \lambda_f - 1} \alpha_{\psi'_1 + \tau_1} \dots \alpha_{\psi'_n + \tau_n} \cdot \quad (43) \\ & \cdot \left\{ 2^{t+1} \alpha_{\varrho'_1 + \mu_1 - 1} \dots \alpha_{\varrho'_{t+1} + \mu_{t+1} - 1} N_{(+RR)(-RP)(+R_0R_1) \dots (+R_t R_{t+1})}^{i-1} \right. \\ & \left. + \dots + \alpha_{\varrho'_1 + \mu_1} \dots \alpha_{\varrho'_{t+1} + \mu_{t+1}} N_{(+RR)(-RP)(-R_0R_1) \dots (-R_t R_{t+1})}^{i-1} \right\}. \end{aligned}$$

14) ALV § 19.

Die Struktur dieser Formel ist derjenigen von (27) analog, nur sind φ und ϱ entsprechend durch $\varphi' + \lambda$ und $\varrho' + \mu$ ersetzt, und ausserdem die Faktoren $\alpha_{\psi' + \tau}$ hinzugekommen.

Der Beweis für (43) erfolgt durch vollständige Induktion. Bei $n=0$ existiert überhaupt kein Paar ψ' , $\dot{N}_{(+FR)(+FF)(+RR)(-F'F')}$ reduziert sich auf $\dot{N}_{(+FR)(+FF)(+RR)}$, die Charakteristiken verschwinden, die Faktoren $\alpha_{\psi' + \tau}$ kommen in Wegfall (ihre Anzahl beträgt n), und man gelangt zur schon bewiesenen Formel (27). Es bleibt noch aus der Gültigkeit für irgendein n die Gültigkeit für $n+1$ zu folgern.

Die Numeration der Paare $(F'F')$ ist willkürlich; man darf daher annehmen, dass das neu hinzugekommene $(n+1)$ -te Paar ein relatives Maximalpaar ist, weil solche Paare sicher existieren, sofern überhaupt die ψ' wirklich vorkommen.

Zur Unterscheidung mögen die reduzierten Maschenzahlen im System von n Paaren $(F'F')$ ohne Strichelung geschrieben werden, während für das System von $(n+1)$ Paaren die Strichelung verwendet werden soll. Man hat zwei Annahmen zu unterscheiden:

- I. ψ'_{n+1} ist mit einem φ'_s assoziiert;
- II. ψ'_{n+1} ist mit einem ϱ'_s assoziiert.

Im ersteren Falle sind sämtliche reduzierten Maschen von ψ'_{n+1} notwendig den reduzierten Maschen von φ_s entnommen, weil ψ'_{n+1} bezüglich φ_s ein Maximalpaar sein sollte. Hieraus folgt

$$\varphi'_s = \varphi_s - \psi'_{n+1}, \quad (44)$$

während im übrigen $\varphi' = \varphi$, $\varrho' = \varrho$, $\psi' = \psi$ gilt.

Nun ist aber

$$\dot{N}_{(Z)(-XY)} = \dot{N}_{(Z)} - \dot{N}_{(Z)(+XY)}. \quad (45)$$

Versteht man hier unter (XY) das Paar ψ'_{n+1} , während (Z) den Inbegriff aller übrigen Forderungen symbolisiert, so darf die rechte Seite von (45) auf Grund der Annahme nach der Formel (43) berechnet werden. Hierbei ist im Minuenden einfach die Existenz von n Paaren $(-F'F')$ zu berücksichtigen; im Subtrahenden tritt aber noch das positive, daher wie ein φ zu behandelnde Paar ψ'_{n+1} hinzu. Bei der Bestimmung der Charak-

teristiken sind überall nur die ersten n Paare ψ' als negative Paare in Rechnung zu setzen. Ist τ_{n+1} die Charakteristik von ψ'_{n+1} , die ja jedenfalls nur auf die übrigen n Paare ψ' bezogen erscheint, so ändert sich die frühere Charakteristik λ_s von φ_s durch die Hinzuzählung von ψ'_{n+1} unter die φ genau um $-\tau_{n+1}$ Einheiten, denn die τ_{n+1} Paare ψ' , die die Charakteristik von ψ'_{n+1} bestimmten, sind jetzt mit ψ'_{n+1} , also nicht mehr mit φ'_s assoziiert. Zugleich ist dies die einzige Änderung unter den Charakteristiken, die durch das Hinzutreten von ψ'_{n+1} unter die positiven Paare bewirkt wird, d. h. sämtliche übrigen λ, μ, τ bleiben unverändert. Daher entsteht sowohl für den Minuenden, als auch für den Subtrahenden von (45) ein und dasselbe Vierfarbenpolynom, — nur der Faktor vor diesem Polynom erleidet eine Änderung. In der Differenz hat man also dasselbe Polynom, multipliziert mit der Faktordifferenz

$$\begin{aligned} & 2^f a_{\psi'_{1+\tau_1}} \dots a_{\psi'_{n+\tau_n}} \cdot a_{\varphi'_{1+\lambda_1-1}} \dots a_{\varphi_s+\lambda_s-1} \dots a_{\varphi'_f+\lambda_f-1} + \\ & - 2^{f+1} a_{\psi'_{1+\tau_1}} \dots a_{\psi'_{n+\tau_n}} a_{\varphi'_{1+\lambda_1-1}} \dots a_{\varphi'_s+\lambda_s-\tau_{n+1}-1} \dots \\ & \dots a_{\varphi'_f+\lambda_f-1} a_{\psi'_{n+1+\tau_{n+1}-1}}. \end{aligned} \quad (46)$$

Hebt man hier den gemeinschaftlichen Teil

$$\begin{aligned} & 2^f a_{\psi'_{1+\tau_1}} \dots a_{\psi'_{n+\tau_n}} a_{\varphi'_{1+\lambda_1-1}} \dots a_{\varphi'_{s-1}+\lambda_{s-1}-1} a_{\varphi'_{s+1}+\lambda_{s+1}-1} \dots \\ & \dots a_{\varphi'_f+\lambda_f-1} \end{aligned} \quad (47)$$

heraus, so verbleibt noch der Faktor

$$a_{\varphi_s+\lambda_s-1} - 2 a_{\varphi'_s+\lambda_s-\tau_{n+1}-1} a_{\psi'_{n+1+\tau_{n+1}-1}}, \quad (48)$$

der wegen (44) mit

$$a_{\varphi'_s+\psi'_{n+1}+\lambda_s-1} - 2 a_{\varphi'_s+\lambda_s-\tau_{n+1}-1} a_{\psi'_{n+1+\tau_{n+1}-1}} \quad (49)$$

gleichbedeutend ist. Auf Grund einer für die Vierfarbennkoeffizienten gültigen Relation¹⁵⁾ ist aber (49) dasselbe, wie

$$a_{\varphi'_s+\lambda_s-\tau_{n+1}} a_{\psi'_{n+1+\tau_{n+1}}} \quad (50)$$

oder

$$a_{\varphi'_s+(\lambda_s-\tau_{n+1}+1)-1} a_{\psi'_{n+1+\tau_{n+1}}}. \quad (51)$$

15) *ALV* § 6, Formel (32).

Durch Hinzunahme dieser Faktoren (51) zu (47) entsteht die oben gesuchte Faktordifferenz. Nun ist aber $\lambda_s - \tau_{n+1} + 1$ die Charakteristik von φ'_s im System von $(n+1)$ Paaren ψ' , sobald auch ψ'_{n+1} als negatives Paar behandelt wird, denn das Paar ψ'_{n+1} ist dann selbst ein Maximalpaar für φ'_s , während die τ_{n+1} niedrigeren Paare ψ' keine Maximalpaare mehr sind — die frühere Charakteristik des φ'_s entsprechenden Paares ändert sich somit um $1 - \tau_{n+1}$ Einheiten; alle übrigen Charakteristiken bleiben unverändert. Verwendet man zur Kennzeichnung der Charakteristiken im System von $(n+1)$ negativen Paaren die Strichelung, so gelangt man auf diese Weise zur Formel:

$$\begin{aligned} & \overset{i}{N}_{\varphi' | \psi'} = \\ & = 2^f \alpha_{\psi'_{1+\tau'_1}} \cdots \alpha_{\psi'_{n+1+\tau'_{n+1}}} \alpha_{\varphi'_{1+\lambda'_1-1}} \cdots \alpha_{\varphi'_{f+\lambda'_f-1}} \cdot \quad (52) \\ & \cdot \left\{ 2^{t+1} \alpha_{\varphi'_{1+\mu'_1-1}} \cdots \alpha_{\varphi'_{t+1+\mu'_{t+1}-1}} \overset{i-1}{N}_{(+RR)(-RP)(+R_0R_1)} \cdots + \right. \\ & \left. + \dots + \alpha_{\varphi'_{1+\mu'_1}} \cdots \alpha_{\varphi'_{t+1+\mu'_{t+1}}} \overset{i-1}{N}_{(+RR)(-RP)(-R_0R_1)} \cdots \right\}. \end{aligned}$$

Sie stimmt mit (48) ihrer Struktur nach überein, — damit ist die Annahme I erledigt.

Analog gestaltet sich die Behandlung der Annahme II. Es ist hier

$$\varrho'_s = \varrho_s - \psi'_{n+1}, \quad (53)$$

im übrigen gilt $\varrho' = \varrho$, $\varphi' = \varphi$, $\psi' = \psi$. Als Ausgangspunkt dient wieder die Relation (45). Der Subtrahend enthält dort dann den im Minuenden fehlenden Faktor $2\alpha_{\psi'_{n+1+\tau_{n+1}-1}}$, ausserdem tritt im Subtrahenden jedesmal $\varrho'_s + \mu_s - \tau_{n+1}$ auf, wenn im Minuenden $\varrho_s + \mu_s$ steht. Solcherweise entstandene Glieder sind mit ein und derselben Farheninvariante $\overset{i-1}{N}_{(M)}$ verknüpft; fasst man sie entsprechend paarweise zusammen, so entsteht die Differenz

$$\alpha_{\varrho_s + \mu_s} - 2\alpha_{\psi'_{n+1+\tau_{n+1}-1}} \alpha_{\varrho'_s + \mu_s - \tau_{n+1}}, \quad (54)$$

resp.

$$\alpha_{\varrho_s + \mu_s - 1} - 2\alpha_{\psi'_{n+1+\tau_{n+1}-1}} \alpha_{\varrho'_s + \mu_s - \tau_{n+1} - 1}, \quad (55)$$

je nachdem die zugehörige Bedingung in der Farheninvariante

($-R_{s-1}R_s$) oder ($+R_{s-1}R_s$) lautet. Mit Hilfe von (53) ergeben sich hierfür die Ausdrücke

$$\alpha_{\psi'_{n+1}+\tau_{n+1}} \alpha_{\varrho'_s+\mu_s-\tau_{n+1}+1} \tag{56}$$

resp.

$$\alpha_{\psi'_{n+1}+\tau_{n+1}} \alpha_{\varrho'_s+\mu_s-\tau_{n+1}}. \tag{57}$$

Es sondert sich daher überall der gemeinschaftliche Faktor $\alpha_{\psi'_{n+1}+\tau_{n+1}}$ ab, und man gelangt wieder zu (52). Somit ist (49) bewiesen.

Auf Grund von (41) erkennt man weiter sofort, dass

$$\overset{i}{N}_{(+FR)(+FF)(+RR)(-F'F')(-R'R')}$$

einer Formel genügt, die sich von (43) nur dadurch unterscheidet, dass überall die Bedingung ($-R'R'$) hinzutritt:

$$\begin{aligned} & \overset{i}{N}_{(+FR)(+FF)(+RR)(-F'F')(-R'R')} = \\ & = 2^f \alpha_{\psi_1+\tau_1} \cdots \alpha_{\psi_n+\tau_n} \cdot \alpha_{\varphi_1+\lambda_1-1} \cdots \alpha_{\varphi_f+\lambda_f-1} \cdot \tag{58} \\ & \cdot \left\{ 2^{t+1} \alpha_{\varrho_1+\mu_1-1} \cdots \alpha_{\varrho_{t+1}+\mu_{t+1}-1} \overset{i-1}{N}_{(+RR)(-R'R')(-RP)(+R_0R_1)} \cdots + \right. \\ & \left. + \dots + \alpha_{\varrho_1+\mu_1} \cdots \alpha_{\varrho_{t+1}+\mu_{t+1}} \overset{i-1}{N}_{(+RR)(-R'R')(-RP)(-R_0R_1)} \cdots \right\}. \end{aligned}$$

Die Strichelung der Indizes ist hier nun überflüssig und daher unterblieben.

7. Diskussion.

Setzt man in (58) $i=1$, so ist das Residuum ein einfaches Dreieck, auf dem ja dann nur noch für die Knoten R_0 und R_{t+1} Platz vorhanden ist, wobei notwendig $t=0$. Es kommen also sämtliche Forderungen $(+FR)(+RR)(-R'R')$ in Wegfall, $R_0 \equiv R_1$ ist unerfüllbar, weil beide Knoten auf dem Dreieckrand benachbart sind, und man hat allemal $\overset{0}{N}_{(-R_0R_1)} = 1$. Schreibt man noch $\varphi-1$ für ϱ_1 , λ für μ_1 , so folgt aus (58)

$$\begin{aligned} & \overset{1}{N}_{(+FF)(-F'F')} = \\ & = 2^f \alpha_{\psi_1+\tau_1} \cdots \alpha_{\psi_n+\tau_n} \alpha_{\varphi_1+\lambda_1-1} \cdots \alpha_{\varphi_f+\lambda_f-1} \alpha_{\varphi+\lambda-1}, \tag{59} \end{aligned}$$

was inhaltlich mit der Formel (98) der *ALV* identisch ist. Wie schon dort dargelegt, folgt hieraus die Gültigkeit des allgemeinen Vierfarbensatzes für alle irreduziblen Normalnetze erster Ordnung.

Die Reduktionsformel (58) überträgt aber dann diesen allgemeinen Vierfarbensatz von Netzen $(i-1)$ -ter Ordnung auf solche von der Ordnung i , sofern man sich in letzteren Netzen auf Bedingungen vom Typus

$$(+FR)(+RR)(+FF)(-F'F')(-R'R') \quad (60)$$

beschränkt. M. a. W., man kann beweisen, dass die linke Seite von (58) nur dann verschwindet, wenn (60) einen Widerspruch enthält.

I. Verschwindet die fragliche Farbeninvariante infolge Nullwerdens eines Faktors vor der Schleifenklammer, so ist dieser Faktor entweder ein $a_{\psi+\tau}$, oder ein $a_{\varphi+\lambda-1}$. Die erstere Annahme hätte zur Folge $\psi = 0$, $\tau = 0$. Da dann ψ kein niedrigeres Paar derselben Verwandtschaft aufweist, — sonst könnte τ nicht Null sein, — so wird ψ von Teilfächern φ vollständig überdeckt. Daraus zeigt sich aber, dass für das Paar ψ identische Färbung gefordert wird, während es doch andererseits, als ein ψ , zu den negativen Paaren zählt. Darin liegt der Widerspruch. Die zweite Annahme $\varphi+\lambda-1 = 0$ wird erfüllt bei $\varphi = 0$, $\lambda = 1$ oder bei $\varphi = 1$, $\lambda = 0$. Ersteres besagt, dass der Teilfächer φ von einem ψ und eventuell noch anderen φ_s völlig überdeckt erscheint, dann müsste aber das diesem φ entsprechende Paar gleichzeitig positiv und negativ ausfallen, was einen Widerspruch bedeutet. Die Voraussetzung $\varphi = 1$, $\lambda = 0$ führt aus ähnlichen Gründen zu der Folgerung, dass die Knoten der einzigen reduzierten Masche von φ identisch gefärbt sein müssen, was unmöglich ist, da sie ja sicher benachbart sind. In allen Fällen bedeutet mithin das Verschwinden eines Vierfarbenkoeffizienten vor der Schleifenklammer das Vorhandensein eines Widerspruches in den Forderungen (60).

II. Sollte das Polynom in der Schleifenklammer verschwinden, so beachte man zunächst, dass dieses Polynom eine $(t+1)$ -dimensionale Vierfarbenreihe liefert, die von den Parametern $\varrho_1 + \mu_1$, $\varrho_2 + \mu_2$, \dots , $\varrho_{t+1} + \mu_{t+1}$ abhängt. Das Polynom möge demnach durch $Q_{\varrho_1+\mu_1 | \varrho_2+\mu_2 | \dots}$ oder kurz $Q_{\varrho+\mu}$ symbolisiert werden.

Die Fundamentalwerte dieses Polynoms sind durch die in der Formel (58) rechts auftretenden Farbeninvarianten $N_{(M)}$ ge-

geben. Sollte nun in einem Gitterpunkt $(\varrho + \mu)$, der zur Fundamentalebene

$$\varrho_a + \mu_a = 0, \varrho_b + \mu_b = 0, \dots \quad (61)$$

$$\varrho_u + \mu_u = 1, \varrho_v + \mu_v = 1, \dots \quad (62)$$

gehört, $Q_{\varrho+\mu}$ verschwinden, so folgt aus Betrachtungen, die denen des § 5 wörtlich entsprechen, dass

$$\overset{i-1}{N}_{(+RR)(-R'R')(-RP)(+R_{a-1}R_a)(+R_{b-1}R_b) \dots (-R_{u-1}R_u)(-R_{v-1}R_v) \dots} = 0 \quad (63)$$

sein muss.

Ist der dann notwendig in der Bedingung von (63) auftretende Widerspruch schon in der Forderung $(+RR)$ enthalten, so tritt dieser Widerspruch eo ipso im Netz i -ter Ordnung auf.

Enthält der Komplex $(+RR)(+R_{a-1}R_a)(+R_{b-1}R_b) \dots$ im Netz $(i-1)$ -ter Ordnung einen Widerspruch, so ist doch wegen (61) jedenfalls $\varrho_a = 0, \mu_a = 0, \varrho_b = 0, \mu_b = 0, \dots$, mithin $F_{a-1} \equiv F_a, F_{b-1} \equiv F_b, \dots$ eine notwendige Konsequenz der Forderungen $(+FF)$ im Netz i -ter Ordnung. Dann ist aber auch $R_{a-1} \equiv R_a, R_{b-1} \equiv R_b, \dots$ eine Folge von $(+FF)(+FR)$ im Netz i -ter Ordnung, und $(+FR)(+FF)(+RR)$ bedingt denselben Widerspruch, der in $(+RR)(+R_{a-1}R_a) \dots$ enthalten sein sollte.

Ist im Netz $(i-1)$ -ter Ordnung $(-R'R')$ unmöglich, sobald $(+RR)(R_{a-1}R_a) \dots$ besteht, so ist $(-R'R')$ auch im Netz i -ter Ordnung im Widerspruch zur Forderung $(+FR)(+FF)(+RR)$, weil aus letzterer ja $(+RR)(+R_{a-1}R_a) \dots$ resultiert.

Ist endlich etwa $(-R_{u-1}R_u)$ mit $(+RR)(+R_{a-1}R_a) \dots$, also auch mit $(+FR)(+FF)(+RR)$ im Widerspruch, so hätte man im Netz i -ter Ordnung notwendig $R_{u-1} \equiv R_u$, infolge $(+FR)$ dann aber auch $F_{u-1} \equiv F_u$, was jedoch wegen (62) unmöglich ist (vgl. die analogen Erörterungen unter I).

Da der Paarkomplex (RP) jedenfalls von $(+RR)(+R_{a-1}R_a) \dots$ unabhängig ist, so sind alle denkbaren Möglichkeiten erschöpft, die Annahme II somit erledigt.

Dadurch ist der allgemeine Vierfarbensatz auf das Netz i -ter Ordnung für den Fall der Bedingungen (60) übertragen. Im Vergleich zu den Resultaten des § 5 ist somit ein Fortschritt erzielt.

8. Erweiterung der negativen Bedingungen.

Der allgemeine Fall einer Auslese vom Typus

$$(+FR)(+FF)(+RR)(-F'R')(-F'F')(-R'R') \quad (64)$$

bietet wesentlich grössere Schwierigkeiten. Die Knoten F' der Paare $(-F'R')$ verteilen sich hierbei irgendwie auf die Fächerbögen $F_{s-1}F_s$. Jeder solche Knoten F' möge mit dem kleinsten Bogen $F_{s-1}F_s$, dem er angehört, resp. mit dem Knotenpaar $(F_{s-1}F_s)$ assoziiert heissen, wobei dann sämtliche mit ein und demselben $(F_{s-1}F_s)$ assoziierte F' als untereinander verwandt, die Gesamtheit der untereinander verwandten F' als eine Verwandtschaft bezeichnet werden soll.

Wir schreiben die zu $(F_{s-1}F_s)$ assoziierten F' in der Gestalt F_s^h , und zwar so, dass auf dem Bogen $F_{s-1}F_s$ die Reihenfolge

$$F_{s-1}, F_{s-1}^1, F_{s-1}^2, \dots, F_{s-1}^r, F_s \quad (65)$$

gilt. Die Knoten F_{s-1}, F_s könnten dieser Bezeichnung zweckentsprechend als F_{s-1}^0, F_s^0 mit eingeordnet werden. Fixiert man die Gesamtheit der Paare $(F_{s-1}^{h-1} F_{s-1}^h)$ gleichzeitig mit der Gesamtheit der Paare $(+FF)(-F'F')$ auf dem Fächer, so lassen sich auf schon erläuterte Weise reduzierte Maschenzahlen für jedes Paar bestimmen. Da die Forderung (64) sich auf eine Auslese bezieht, so darf kein Paar $(F_{s-1}^{h-1} F_{s-1}^h), (F_{s-1}^r F_s^0)$ einem höheren Paar φ oder ψ angehören. Daraus lässt sich ablesen, dass die Zahlen φ, ψ , ganz unabhängig von der speziellen Verteilung der Paare $(F_{s-1}^{h-1} F_{s-1}^h), (F_{s-1}^r F_s^0)$, reduzierte Maschenzahlen der Paare $(+FF)(-F'F')$ sind und bleiben. Entsprechendes gilt für die früher definierten Charakteristiken λ, τ . Für die $(F_{s-1}^{h-1} F_{s-1}^h)$ und $(F_{s-1}^r F_s^0)$ mögen sich die reduzierten Maschenzahlen q_{s-1}^h resp. q_s^0 ergeben.

Bei der Anwendung der Relation (41), die jetzt mit (58) zu kombinieren ist, erkennt man, dass sich im Ausdruck für die Farbeninvariante des Netzes i -ter Ordnung mit der Bedingung (64) ein Faktor

$$2^f a_{\psi_1+\tau_1} \dots a_{\psi_n+\tau_n} a_{\varphi_1+\lambda_1-1} \dots a_{\varphi_f+\lambda_f-1} \quad (66)$$

abspaltet, der dann noch mit einem Polynom Q komplizierter Struktur zu multiplizieren ist. Ein Nullwerden des Faktors (66) erfordert stets einen Widerspruch schon in der Bedingung $(+FF)(-F'F')$, wie im § 7, I dargelegt. Zum endgültigen Beweis des allgemeinen Vierfarbensatzes bliebe dann noch zu zeigen, dass auch $Q = 0$ allemal einen Widerspruch in (64) bedingt.

Aus der nach (41) und (58) resultierenden Struktur von Q lässt sich erkennen, dass dieses Q eine von den Parametern q_s^h abhängige Vierfarbenreihe definiert. Man hätte demnach Q für die Fundamentalecken zu bestimmen und darauf das gesuchte Resultat aus (18) abzuleiten.

Der angedeutete Weg führt sofort zum Ziel, sobald es gelingt die Fundamentalwerte von Q als Summen nicht-negativer Zahlen darzustellen, weil dann ein Nullwerden der Summe das Verschwinden eines jeden einzelnen Summanden erfordert, was die gesuchte Folgerung implizite enthält. In der Tat findet der Spezialfall $r < 2$, wo also jede Verwandtschaft von Knoten F_s^h höchstens einen Knoten enthält, auf diese Weise seine endgültige Erledigung, wie unten gezeigt werden soll.

9. Fundamentalwerte von Q für den Spezialfall.

Es möge h höchstens den Wert 1 haben. Die diesem Wert entsprechenden Elemente sollen durch Strichelung gekennzeichnet, der obere Index 0 dagegen überhaupt fortgelassen werden. Jedem q'_s resp. q_s entspricht im Bezug auf die Paare ψ eine Charakteristik μ'_s resp. μ_s . Als Koordinaten sollen die Summen

$$\xi'_s = q'_s + \mu'_s, \quad \xi_s = q_s + \mu_s \quad (67)$$

betrachtet werden. Den Wert von Q im Gitterpunkt (ξ) schreiben wir Q_ξ . Gesucht sind die Fundamentalwerte von Q_ξ .

Die Koordinaten verknüpfen sich in zusammengehörige Paare ξ'_{s-1} , ξ_s , sobald der Knoten F'_{s-1} wirklich existiert. In der Fundamentalecke (ξ) kann die Summe

$$\xi'_{s-1} + \xi_s = \eta_s \quad (68)$$

einen der drei Werte 0, 1, 2 annehmen. Sollte der Knoten F'_{s-1} nicht vorhanden sein, so fällt ξ'_{s-1} fort und η_s identifiziert sich mit ξ_s . In diesem letzteren Falle kommen für η_s nur die zwei

Werte 0, 1 in Betracht. Es soll zunächst Q_ξ für diejenigen Gitterpunkte berechnet werden, wo $\eta_s = 0$ oder $\eta_s = 1$, der Wert 2 also nicht auftritt. Dann ist mindestens eine der beiden Grössen ξ'_{s-1} , ξ_s gleich 0.

Mögen a, b, \dots die Werte des Index s sein, für die $\eta_s = 0$, ferner u, v, \dots die Werte von s , wo $\eta_s = 1$. Mit $m, n \dots$ sollen diejenigen Werte s bezeichnet sein, für welche die Knoten F'_{s-1} wirklich existieren, — hierher können also sowohl die $a, b \dots$, als auch die $u, v \dots$ ganz oder teilweise gehören. In der fixierten Fundamentalecke ist allemal mindestens eine der beiden Zahlen ξ'_{m-1} , ξ_m gleich 0, desgleichen mindestens eine der Zahlen ξ'_{n-1} , ξ_n gleich 0 usw.

Es sei (Z) ein abkürzendes Symbol für den Bedingungskomplex

$$(+FR)(+FF)(+RR)(-F'F')(-R'R'). \quad (69)$$

Nach (41) hat man

$$\begin{aligned} \dot{N}_{(Z)}(-F'R') &= \dot{N}_{(Z)} - \sum \dot{N}_{(Z)}(+F'_{m-1}R'_{m-1}) + \\ &+ \sum \dot{N}_{(Z)}(+F'_{m-1}R'_{m-1})(+F'_{n-1}R'_{n-1}) - \dots \end{aligned} \quad (70)$$

Bei der Berechnung von Q_ξ aus (58) hat man dort nur die Schleifenkammer zu berücksichtigen. Hierbei liefert $\dot{N}_{(Z)}$ den Beitrag

$$\dot{N}_{(+RR)(-R'R')(-RP)(+R_{a-1}R_a)(+R_{b-1}R_b) \dots (-R_{u-1}R_u)(-R_{v-1}R_v) \dots} \quad (71)$$

wie analog § 4 gefolgert werden kann.

Ist $\xi'_{m-1} = 0$, $\xi_m = 0$, d. h. etwa $m = a$, so ergibt $\dot{N}_{(Z)}(+F'_{m-1}R'_{m-1})$ den Beitrag

$$\begin{aligned} \dot{N}_{(+RR)(-R'R')(-RP)(+R_{a-1}R'_a)(+R'_{a-1}R_a)(+R_{b-1}R_b) \dots} \\ \dots (-R_{u-1}R_u)(-R_{v-1}R_v) \dots \end{aligned} \quad (72)$$

Diese Grösse lässt sich folgendermassen umformen, wenn die Forderungen $(+RR)(-R'R')(-PR)$ im Symbol (H) zusammengefasst werden:

$$\begin{aligned}
& \overset{i-1}{N}(H)(+R_{a-1}R_a)(+R_{b-1}R_b) \dots (-R_{u-1}R_u)(-R_{v-1}R_v) \dots (+R_{a-1}R'_{a-1}) \quad + \\
& + \overset{i-1}{N}(H)(+R_{a-1}R_a)(+R_{b-1}R_b) \dots (-R_{u-1}R_u)(-R_{v-1}R_v) \dots (+R'_{a-1}R_a) \quad + \\
& + \overset{i-1}{N}(H)(+R_{a-1}R_a)(+R_{b-1}R_b) \dots (-R_{u-1}R_u)(-R_{v-1}R_v) \dots \quad (73) \\
& \dots (+R_{a-1}R'_{a-1})(+R'_{a-1}R_a).
\end{aligned}$$

Ist $\xi'_{m-1} = 0$, $\xi_m = 1$, etwa $m = u$, so ergibt $\overset{i}{N}(Z)(+F'_{m-1}R'_{m-1})$ den Beitrag

$$\overset{i-1}{N}(H)(+R_{a-1}R_a)(+R_{b-1}R_b) \dots (+R_{u-1}R'_{u-1})(-R'_{u-1}R_u)(-R_{v-1}R_v) \dots, \quad (74)$$

was mit

$$\overset{i-1}{N}(H)(+R_{a-1}R_a)(+R_{b-1}R_b) \dots (-R_{u-1}R_u)(-R_{v-1}R_v) \dots (+R_{u-1}R'_{u-1}) \quad (75)$$

identisch ist.

Endlich folgt bei $\xi'_{m-1} = 1$, $\xi_m = 0$ auf Grund ähnlicher Erwägungen aus $\overset{i}{N}(Z)(+F'_{m-1}R'_{m-1})$ der Beitrag

$$\overset{i-1}{N}(H)(+R_{a-1}R_a)(+R_{b-1}R_b) \dots (-R_{u-1}R_u)(R_{v-1}R_v) \dots (+R'_{u-1}R_u). \quad (76)$$

Analog behandelt man $\overset{i}{N}(Z)(+F'_{m-1}R'_{m-1})(+F'_{n-1}R'_{n-1})$ usw. Werden dann die Resultate mit Hilfe von (70) zur Bildung von Q_ξ zusammengefasst, so folgt:

$$Q_\xi = \overset{i-1}{N}(H)(+R^0)(-R^1)(-R^0). \quad (77)$$

Hier bedeutet:

$(+R^0)$ den Bedingungskomplex $(+R_{a-1}R_a)(+R_{b-1}R_b) \dots$

$(-R^1)$ den Bedingungskomplex $(-R_{u-1}R_u)(-R_{v-1}R_v) \dots$

$(-R^0)$ den Komplex derjenigen Bedingungen vom Typus $(-R_{m-1}R'_{m-1})$, $(-R'_{m-1}R_m)$, wo die und nur die Paare eingehen, deren Koordinaten ξ'_{m-1} resp. ξ_m gleich null sind.

Wir wenden uns nun zu den allgemeineren Fundamental-ecken, wo η_s auch gleich 2 sein kann. Es seien x, y, z, \dots die Werte des Index s , wo $\eta_s = 2$, mithin $\xi'_{s-1} = 1, \xi_s = 1$. Die übrigen, von x, y, z, \dots verschiedenen Indizes bestimmen dann einen Bedingungskomplex $(H)(+R^0)(-R^1)(-R^0)$ [analog (77)], den wir abgekürzt mittels (E) symbolisieren. Für den Gitterpunkt (ξ) , der u. a. auch ξ'_{x-1}, ξ_x, \dots als Koordinaten enthält, gilt dann die Formel:

$$\begin{aligned}
 Q_\xi &= \sum_{x,y,z,\dots}^{i-1} \bar{N}_{(E)}(X)(Y)(Z) \dots + \\
 &+ \sum_{x,y,z,\dots}^{i-1} \bar{N}_{(E)}(\underline{X})(Y)(Z) \dots + \\
 &+ \sum_{x,y,z,\dots}^{i-1} \bar{N}_{(E)}(X)(\underline{Y})(Z) \dots + \tag{78} \\
 &+ \dots \dots \dots + \\
 &+ \sum_{x,y,z,\dots}^{i-1} \bar{N}_{(E)}(X)(Y)(\underline{Z}) \dots
 \end{aligned}$$

In dieser Darstellung bedeutet (X) eine beliebige der zwei Forderungen $(+R_{x-1}R'_{x-1}), (+R'_{x-1}R_x)$; analog lautet die Erklärung für $(Y), (Z), \dots$. Das Symbol (\underline{X}) bedeutet entweder die Forderung $(+R_{x-1}R_x)(-R_{x-1}R'_{x-1})(-R'_{x-1}R_x)$ oder die Forderung $(+PR'_{x-1})$; entsprechend ist die Bedeutung von $(\underline{Y}), (\underline{Z}), \dots$. Das Summenzeichen $\sum_{x,y,z,\dots}$ fordert die Bildung sämtlicher Wahlmöglichkeiten im Komplex $(X)(Y)(Z) \dots$. Das Summenzeichen $\bar{\sum}_{x,y,z,\dots}$ fordert entsprechendes für jede Kombination vom Typus $(\underline{X})(Y)(Z) \dots$, wo der Strich ein und nur einmal auftritt. Das Summenzeichen $\underline{\sum}_{x,y,z,\dots}$ fordert entsprechendes für jede Kombination der Möglichkeiten im Typus $(X)(\underline{Y})(Z) \dots$, wo der Strich zweimal auftritt usw. Ist σ die Anzahl der Indizes x, y, \dots , so besteht die Summe in der ν -ten Zeile von (78) aus genau $2^\nu \binom{\sigma}{\nu-1}$ Summanden. Die Gesamtzahl der einzelnen Glieder der rechten Seite von (78) beträgt demnach

$$2^\sigma \left\{ \binom{\sigma}{0} + \binom{\sigma}{1} + \binom{\sigma}{2} + \dots + \binom{\sigma}{\sigma} \right\} = 2^\sigma \cdot 2^\sigma = 4^\sigma. \tag{79}$$

Bei $\sigma = 0$, wenn also überhaupt kein x, y, z, \dots vorkommt, reduziert sich (78) auf die für diesen Fall schon anerkannte Formel (77). Die allgemeine Gültigkeit von (78) wird durch vollständige Induktion bewiesen. Der Beweisgang soll kurz angedeutet werden.

Es möge die Formel (78) für $\sigma - 1$ Werte y, z, \dots bewiesen sein, zu denen dann noch als neuer Wert x hinzutritt. Zerfällt die Forderung $(-F'R')$ in $(-F'_{x-1}R'_{x-1})$ und $(-\Phi)$, so hat man jedenfalls

$$\begin{aligned} & \overset{i}{N}_{(+FR)(+FF)(+RR)(-F'F')(-R'R')(-F'R')} = \\ & = \overset{i}{N}_{(+FR)(+FF)(+RR)(-F'F')(-R'R')(-\Phi)} + \quad (80) \\ & + \overset{i}{N}_{(+FR)(+FF)(+RR)(-F'F')(-R'R')(-\Phi)(+F'_{x-1}R'_{x-1})}. \end{aligned}$$

Es möge der Minuend den Wert $Q^{(1)}$ und der Subtrahend den Wert $Q^{(2)}$ liefern, so dass

$$Q_{\xi} = Q^{(1)} - Q^{(2)} \quad (81)$$

gilt.

In $Q^{(1)}$ hat eine Koordinate den Wert 2; unter Anwendung von (27) lässt sich aber dieser Wert eliminieren. Man findet mit Hilfe von (78) und (27):

$$\begin{aligned} Q^{(1)} = & 2 \sum_{y,z,\dots} \overset{i-1}{N}_{(E)(Y)(Z)\dots(+R_{x-1}R_x)} + \sum_{y,z,\dots} \overset{i-1}{N}_{(E)(Y)(Z)\dots(-R_{x-1}R_x)} + \\ & + 2 \sum_{y,z,\dots} \overset{i-1}{N}_{(E)(Y)(Z)\dots(+R_{x-1}R_x)} + \sum_{y,z,\dots} \overset{i-1}{N}_{(E)(Y)(Z)\dots(-R_{x-1}R_x)} + \quad (82) \\ & + \dots \dots \dots \end{aligned}$$

Für $Q^{(2)}$ ergibt sich direkt aus (78):

$$\begin{aligned} Q^{(2)} = & \sum_{y,z,\dots} \overset{i-1}{N}_{(E)(Y)(Z)\dots(-R_{x-1}R'_{x-1})(-R'_{x-1}R_x)(-PR'_{x-1})} + \\ & + \sum_{y,z,\dots} \overset{i-1}{N}_{(E)(Y)(Z)\dots(-R_{x-1}R'_{x-1})(-R'_{x-1}R_x)(-PR'_{x-1})} + \quad (82) \\ & + \dots \dots \dots \end{aligned}$$

Die Relation (82) lässt sich offenbar auch so schreiben :

$$\begin{aligned}
 Q^{(1)} = & \sum_{y,z,..}^{i-1} \bar{N}_{(E)(Y)(Z)} .. (+R_{x-1}R_x) + \sum_{y,z,..}^{i-1} \bar{N}_{(E)(Y)(Z)} .. + \\
 & + \sum_{y,z,..}^{i-1} \bar{N}_{(E)(Y)(Z)} .. (+R_{x-1}R_x) + \sum_{y,z,..}^{i-1} \bar{N}_{(E)(Y)(Z)} .. + \quad (84) \\
 & + \dots\dots\dots
 \end{aligned}$$

Die Relation (83) gestattet folgende Umformung :

$$\begin{aligned}
 Q^{(2)} = & \sum_{y,z,..}^{i-1} \bar{N}_{(E)(Y)(Z)} .. - \sum_{y,z,..}^{i-1} \bar{N}_{(E)(Y)(Z)} .. (+R_{x-1}R'_{x-1}) + \\
 & + \sum_{y,z,..}^{i-1} \bar{N}_{(E)(Y)(Z)} .. (+R'_{x-1}R_x) - \sum_{y,z,..}^{i-1} \bar{N}_{(E)(Y)(Z)} .. (+PR'_{x-1}) + \quad (85) \\
 & + \sum_{y,z,..}^{i-1} \bar{N}_{(E)(Y)(Z)} .. (+R_{x-1}R_x)(+R_{x-1}R'_{x-1}) + \\
 & + \dots\dots\dots
 \end{aligned}$$

Letztere Umformung stützt sich auf (41), wobei zu beachten ist, dass die Forderung $(+R_{x-1}R'_{x-1})(+PR'_{x-1})$ ebenso wie die Forderung $(+R'_{x-1}R_x)(+PR'_{x-1})$ im Widerspruch steht zu dem $(-PR_{x-1})(-PR_x)$ fordernden (E) , dass die entsprechenden Farbeninvarianten also verschwinden. In (85) ist nur die aus der ersten Zeile von (83) fließende Teilsumme explizite ausgeschrieben.

Subtrahiert man jetzt, wie in (81) gefordert, (85) von (84), so folgt :

$$\begin{aligned}
 Q_{\xi} = & \sum_{y,z,..}^{i-1} \bar{N}_{(E)(Y)(Z)} .. (+R_{x-1}R'_{x-1}) + \sum_{y,z,..}^{i-1} \bar{N}_{(E)(Y)(Z)} .. (+R'_{x-1}R_x) + \\
 & + \sum_{y,z,..}^{i-1} \bar{N}_{(E)(Y)(Z)} .. (+PR'_{x-1}) + \sum_{y,z,..}^{i-1} \bar{N}_{(E)(Y)(Z)} .. (+R_{x-1}R_x)(-R_{x-1}R'_{x-1}) + \\
 & + \dots\dots\dots \quad (86)
 \end{aligned}$$

Hier ist nun aber die rechte Seite nichts anderes als

$$\sum_{x,y,z,..}^{i-1} \bar{N}_{(E)(X)(Y)(Z)} .. + \sum_{x,y,z,..}^{i-1} \bar{N}_{(E)(X)(Y)(Z)} .. + \dots \quad (87)$$

Damit ist (78) bewiesen.

10. Diskussion des Falles, wo Q_ξ verschwindet.

Es sei (ξ) ein Gitterpunkt, in dem Q_ξ verschwindet. Wir wollen zeigen, dass dann infolge (78) in den Forderungen (64) ein Widerspruch nachweisbar ist.

Die Fundamentalebene kleinster Dimensionszahl (§ 5), zu welcher der Gitterpunkt (ξ) gehört, sei Π . Das Π definierende Gleichungssystem sei:

$$\begin{aligned} \xi'_{m-1} &= 0, & \xi'_{n-1} &= 0, & \dots & \dots & \dots \\ \xi_p &= 0, & \xi_q &= 0, & \dots & \dots & \dots \\ \xi'_{x-1} &= 1, & \xi_x &= 1, & \xi'_{y-1} &= 1, & \xi_y &= 1, & \dots & \dots \end{aligned} \quad (88)$$

Für gewisse Indizes, die wir mittels a, b, \dots bezeichnen wollen, folgt aus (88) dann noch $\eta_a = 0, \eta_b = 0, \dots$ Entsprechend folgen für gewisse andere, die als u, v, \dots angesprochen werden mögen, die Forderungen $\eta_u = 1, \eta_v = 1, \dots$

Bildet man nach (18) mit Hilfe der durch (78) bestimmten Fundamentalwerte die Zahl Q_ξ , so erkennt man, wie im § 5, dass ein Teil der Glieder von (18) verschwindet. Die den übriggebliebenen Gliedern entsprechenden Fundamentalwerte der Zahl Q_ξ müssen aber notwendig jeder einzeln verschwinden, wenn Q_ξ null werden soll. Diese letztgenannten Fundamentalwerte gehören den auf Π gelegenen Fundamentecken an. Sämtliche Farbeninvarianten, aus denen diese Fundamentalwerte laut (78) zusammengesetzt sind, enthalten u. a. die Forderung

$$\begin{aligned} & (+RR)(-R'R')(-PR)(+R_{a-1}R_a)(+R_{b-1}R_b) \dots \\ \dots & (-R_{u-1}R_u)(-R_{v-1}R_v) \dots (-R_{m-1}R'_{m-1}) \dots (-R'_{p-1}R_p), \end{aligned} \quad (89)$$

die wir abkürzend mit (E) symbolisierten.

Da jeder Fundamentalwert laut (78) eine Summe von Farbeninvarianten darstellt, so muss jede in einen verschwindenden Fundamentalwert eingehende Farbeninvariante einzeln verschwinden, desgleichen verschwindet jede Summe solcher Farbeninvarianten.

Man bilde nun die Summe S aller dieser verschwindenden Farbeninvarianten. Ist zwischen F_{g-1} und F_g überhaupt kein F'_{g-1} gelegen, so entspricht jeder Fundamentecke, wo $\eta_g = 0$, in den zugehörigen Farbeninvarianten die Forderung $(+R_{g-1}R_g)$, und jeder Fundamentecke, wo $\eta_g = 1$, die Forderung $(-R_{g-1}R_g)$.

Bei entsprechender Paarung der Farbeninvarianten in S nach dem in (33) angedeuteten Prinzip und Zusammenfassung der Paare zu neuen Farbeninvarianten kommen dann in den Bedingungen die das Knotenpaar $(R_{g-1}R_g)$ betreffenden Forderungen in Wegfall. Daraus folgt, dass jede einzelne der S bildenden Farbeninvarianten auch dann null ist, wenn die auf $(R_{g-1}R_g)$ bezüglichen Bedingungen einfach fortgelassen werden.

Es sei nun s ein Index, der von den in (88) genannten verschieden ist, dabei ein solcher, für den R'_{s-1} wirklich existiert. Unter den letztgenannten verschwindenden Farbeninvarianten hat man dann allemal Komplexe, die sich auf die Annahmen

$$\begin{aligned} (\xi'_{s-1} = 0, \xi_s = 0); (\xi'_{s-1} = 0, \xi_s = 1); (\xi'_{s-1} = 1, \xi_s = 0); \\ (\xi'_{s-1} = 1, \xi_s = 1) \end{aligned} \quad (90)$$

beziehen. In jedem einzelnen dieser Komplexe treten neben übrigen gleichen Bedingungen entsprechend die Forderungen

$$\begin{aligned} (+R_{s-1}R_s)(-R_{s-1}R'_{s-1})(-R'_{s-1}R_s), (-R_{s-1}R_s)(-R_{s-1}R'_{s-1}), \\ (-R_{s-1}R_s)(-R'_{s-1}R_s), (+R_{s-1}R'_{s-1}), (+R'_{s-1}R_s), \\ (+R_{s-1}R_s)(-R_{s-1}R'_{s-1}), (+PR'_{s-1}) \end{aligned} \quad (91)$$

auf. Es ist aber bei beliebigem (M)

$$\begin{aligned} N_{(M)}(+R_{s-1}R_s)/(-R_{s-1}R'_{s-1}) + N_{(M)}(-R_{s-1}R_s)/(-R_{s-1}R'_{s-1}) + \\ + N_{(M)}(-R_{s-1}R_s)/(-R'_{s-1}R_s) + N_{(M)}(+R_{s-1}R'_{s-1}) + \\ + N_{(M)}(+R'_{s-1}R_s) + N_{(M)}(+R_{s-1}R_s)(-R'_{s-1}R_s) = \\ = N_{(M)}(-R_{s-1}R'_{s-1}) + N_{(M)}(-R'_{s-1}R_s) + N_{(M)}(+R_{s-1}R'_{s-1}) + \\ + N_{(M)}(+R'_{s-1}R_s) = 2 \cdot N_{(M)}. \end{aligned} \quad (92)$$

Dieses $N_{(M)}$ muss demnach null sein, sobald sämtliche Farbeninvarianten, deren Summe zur Bildung dieses $N_{(M)}$ laut (92) erforderlich war, verschwinden. Man erkennt auf diesem Wege die Möglichkeit durch geeignete Zusammenfassung der Glieder in S zu solchen Farbeninvarianten zu gelangen, die an keines

der Paare $(R_{s-1}R'_{s-1}), (R'_{s-1}R_s), (R_{s-1}R_s)$ explizite gebunden sind. M. a. W., sämtliche auf diese letztgenannten Paare bezüglichen Bedingungen dürfen fortgelassen werden, — die Farbeninvarianten verschwinden dann immer noch. Diese verbleibenden „reduzierten“ Farbeninvarianten sind nur noch an die Forderungen (E) und auf die Indizes x, y, \dots von (88) bezügliche Forderungen vom Typus $(X), (Y), \dots (\underline{X}), (\underline{Y}), \dots$ (§ 9) gebunden, und eine einfache Überlegung führt zur Erkenntnis, dass sämtliche in (78) geforderten Kombinationen in den Bedingungen wirklich auftreten. Aus $S=0$ folgt demnach das Bedingungs-
system:

$$\begin{aligned}
 N_{(E)(X)(Y)}^{i-1} \dots &= 0 \\
 N_{(E)(\underline{X})(Y)}^{i-1} \dots &= 0 \\
 N_{(E)(X)(\underline{Y})}^{i-1} \dots &= 0 \\
 \dots \dots \dots & \\
 N_{(E)(\underline{X})(\underline{Y})}^{i-1} \dots &= 0 \\
 \dots \dots \dots &
 \end{aligned}
 \tag{93}$$

An (93) knüpfen sich nun folgende Betrachtungen:

Sollte in (E) ein Widerspruch vorhanden sein, wodurch dann das Verschwinden der Farbeninvarianten (93) erklärlich wird, so hat man 3 Annahmen zu unterscheiden:

I. $(+RR)(-R'R')$ könnte im Residuum einen Widerspruch zeigen. Dieser Widerspruch besteht dann notwendigerweise auch schon im Gesamtnetz i -ter Ordnung.

II. $(+RR)(-R'R')(+R_{a-1}R_a)(+R_{b-1}R_b) \dots$ könnte im Residuum Widersprüche zeigen. Wegen $\eta_a = 0, \eta_b = 0, \dots$ ist dann jedenfalls für diesen Gitterpunkt (§) im Gesamtnetz $F_{a-1} \equiv F_a, F_{b-1} \equiv F_b, \dots$, dann folgt aber $R_{a-1} \equiv R_a, R_{b-1} \equiv R_b, \dots$ aus den Forderungen $(+F_{a-1}R_{a-1})(+F_aR_a)(+F_{b-1}R_{b-1})(+F_bR_b) \dots$. Der Widerspruch $(+RR)(-R'R')(+R_{a-1}R_a)(+R_{b-1}R_b) \dots$ ist deshalb schon im Gesamtnetz in den Forderungen $(+RR)(-R'R')(+FF)(FR)(-F'F')$ implizite enthalten.

III. Aus $(+RR)(+R_{a-1}R_a)(+R_{b-1}R_b) \dots$ könnte im Residuum $(+R_{u-1}R_u)$ oder $(+R_{m-1}R'_{m-1})$ oder $(+R'_{p-1}R_p)$ folgen.

Dieselbe Folgerung müsste sich dann im Gesamtnetz aus $(+RR)(+FR)(+FF)(-F'F')$ ableiten lassen. Aus $(+FR)$ und $(+R_{u-1}R_u)$ ergibt sich dann $(+F_{u-1}F_u)$, was unmöglich ist, da $\eta_u = 1$ (vgl. § 7). Aus $(+FR)$ und $(+R_{m-1}R'_{m-1})$ bei $\xi'_{m-1} = 0$, also $F_{m-1} \equiv F'_{m-1}$, folgt $(+F'_{m-1}R'_{m-1})$, was doch der im Gesamtnetz gestellten Forderung $(-F'_{m-1}R'_{m-1})$ widerspricht. Dieselbe Folgerung erhält man aus der Voraussetzung $(+R'_{p-1}R_p)$.

Damit ist erwiesen, dass ein Widerspruch in (E) allemal auch einen Widerspruch in den für das Gesamtnetz i -ter Ordnung gestellten Bedingungen (64) bedeutet.

Es sei nun die Widerspruchslosigkeit von (E) vorausgesetzt. Die positiven Forderungen der Auslese (E) könnten eventuell $(+R_{x-1}R'_{x-1})$ oder $(+R'_{x-1}R_x)$ usw. notwendig bedingen. Es dürften in der Indexreihe x, y, \dots auch solche Werte z vorkommen, für welche sowohl die Paare $(R_{z-1}R'_{z-1})$, als auch die Paare $(R'_{z-1}R_z)$ von (E) unabhängig sind. Nun ist in (93) sicherlich u. a. die Forderung

$$N_{(E)}^{i-1}(X)(Y) \dots (+R_{z-1}R_z)(-R_{z-1}R'_{z-1})(-R'_{z-1}R_z) \dots = 0 \quad (94)$$

enthalten, wo $(X), (Y), \dots$ gerade die von (E) abhängigen Paare bedeuten. Da diese $(X), (Y), \dots$ dann nicht explizite genannt zu werden brauchen, so reduziert sich (94) auf

$$N_{(E)}^{i-1}(+R_{z-1}R_z)(-R_{z-1}R'_{z-1})(-R'_{z-1}R_z) \dots = 0. \quad (95)$$

Wir wollen zeigen, dass dies unerfüllbar ist, und verfahren zu diesem Zweck folgendermassen:

Schaltet man auf dem Rande des Residuums das Stück R_0PR_{i+1} aus, so gehört zu jedem Knotenpaar des übriggebliebenen Randstückes ein eindeutig bestimmter Bogen. Besteht dieser Bogen aus ν Einzelfäden, so sagen wir, dem Knotenpaar entspreche die Distanz ν . Ist auf dem Bogen (AB) eine Auslese ausgezeichneter Paare (RR) getroffen, so soll unter der reduzierten Distanz von (AB) die Anzahl nur derjenigen Fäden verstanden werden, die nicht zugleich einem Bogen (RR) angehören. Ist (Z) eine beliebige, den Knoten P nicht enthaltende Auslese auf dem Residuumrand, so entspricht jedem Paar dieser Auslese eindeutig seine zugehörige reduzierte Distanz. Man

erkennt in dieser Begriffsbildung sofort eine Übertragung des Begriffs der reduzierten Maschenzahl vom Fächer auf das Residuum.

Eine einfache Überlegung überzeugt von der Richtigkeit des Satzes:

Eine positive Auslese (Z) auf dem Residuum zeigt dort dann und nur dann einen Widerspruch, wenn mindestens einem ihrer Paare die reduzierte Distanz 1 zukommt.

Auf Grund dieses Satzes zeigt sich sofort, dass die positiven Forderungen aus (E) zusammen mit den Forderungen $(+R_{z-1}R_z)$ keinen Widerspruch erzeugen können, solange (E) widerspruchsfrei ist. Es ist nämlich die reduzierte Distanz der Paare $(R_{z-1}R_z)$ jedesmal mindestens gleich 2, da widrigenfalls entweder $(+R_{z-1}R'_z)$ oder $(+R'_zR_z)$ eine logische Folge von (E) wäre, was der Definition der z widerspricht. Hierbei ist der Bogen $(R_{z-1}R_z)$ sicher kein Teil eines Bogens (RR) oder $(R_{a-1}R_a)$, $(R_{b-1}R_b)$, ..., denn sonst würde auf dem Gesamtnetz ein Paar (FR) von einem Paare (RR) getrennt werden. Daraus folgt aber, dass die Hinzufügung der Paare $(R_{z-1}R_z)$ zu den (E) keine der früher bestimmten reduzierten Distanzen dieser Paare (E) ändert; die reduzierte Distanz 1 kann demnach in der Auslese, die aus den positiven Forderungen der (E) und den Forderungen $(+R_{z-1}R_z)$ besteht, nicht auftreten, — ein Widerspruch im Residuum ist also nicht vorhanden.

Versteht man unter einer Bogenkette eine Reihe derartiger Randbögen, dass der Anfangsknoten des nächstfolgenden stets mit dem Endknoten des nächstvorhergehenden identisch ist, unter der Resultante einer solchen Bogenkette den Bogen, der im Anfang des ersten Bogens beginnt und im Ende des letzten Bogens endet, so gilt, wie man leicht einsieht, der Satz:

Jedes von einer positiven Auslese (Z) abhängige Paar ergibt eine Resultante einer in (Z) enthaltenen Bogenkette.

Die aus den positiven Paaren von (E) bestehende Auslese definiert einen Bogenkomplex, der in den Intervallen $R_{z-1}R'_z$ und R'_zR_z allemal Lücken aufweist, denn sonst wäre $(+R_{z-1}R'_z)$ resp. $(+R'_zR_z)$ eine logische Folge von (E). Es ist also nicht möglich, von R_{z-1} resp. R_z mittels einer durch

positive Paare von (E) bestimmten Bogenkette zu R'_{z-1} zu gelangen. Daran kann auch die Hinzunahme neuer Bögen $(R_{z-1}R_z)$ zu den früheren (E) nichts ändern, da durch diese neuen Bögen bloss ein Übergang von den R_{z-1} zu den R_z oder umgekehrt vermittelt wird. Dies besagt aber, dass $(R_{z-1}R'_{z-1})$ resp. $(R'_{z-1}R_z)$ nie als Resultante einer Bogenkette der Auslese (E) $(+R_{z-1}R_z)$.. auftritt, d. h. $(R_{z-1}R'_{z-1})$ und $(R'_{z-1}R_z)$ sind von (E) $(+R_{z-1}R_z)$.. unabhän- g i g. Aber auch die Paare $(R_{u-1}R_u)$, . . . , $(R_{m-1}R'_m)$, . . . $(R'_{p-1}R_p)$.. sind von (E) $(+R_{z-1}R_z)$.. unabhängig. Sucht man nämlich etwa eine von R_{u-1} zu R_u führende Bogenkette, so kann die alleinige Benutzung von positiven Bögen (E) nicht zum Ziele führen, weil sonst, gegen die Voraussetzung, (E) einen Widerspruch enthalten würde. Sollte nun die Hinzunahme eines $(R_{z-1}R_z)$ notwendig sein, so muss der Bogen $(R_{z-1}R_z)$ in der fraglichen Bogenkette doch einmal vorkommen, und es darf angenommen werden, dass dies auch nur einmal geschieht, da bei etwa vorliegenden Wiederholungen die zwischenliegenden Kettenglieder zu schon benutzten Knoten zurückführen und deshalb ausgeschaltet werden können. Es müsste somit eine Kette in (E) etwa von R_{u-1} zu R_{z-1} und zugleich eine Kette in (E) von R_u zu R_z führen. Dies ist unmöglich, weil einerseits die Bögen $(R_{u-1}R_u)$, $(R_{z-1}R_z)$ fädenfremd sind, d. h. kein gemeinsames Stück aufweisen, und andererseits $(R_{z-1}R_z)$ von Bögen (E) nicht lückenlos überdeckt wird. Durch vollständige Induktion zeigt sich, dass auch die Hinzunahme sämtlicher $(R_{z-1}R_z)$ an der Sachlage nichts ändert. Derselbe Schluss gilt für die Paare $(R_{m-1}R'_m)$, . . . , $(R'_{p-1}R_p)$, . . .

Damit wäre erwiesen, dass die Forderung (95) bei widerspruchsfreiem (E) nicht befriedigt werden kann. Ein Widerspruch in (E) bedeutet aber Widersprüche im Gesamtnetz, — somit ist der allgemeine Vierfarbensatz im Netz i -ter Ordnung für die behandelten speziellen Auslesetypen richtig.

Die Verwendung des Begriffs der Bogenkette veranschaulicht den Gedankengang des Beweises, könnte aber durch formalere Behandlung des Problems auch vermieden werden.

11. Ausblicke.

Der in den §§ 9, 10 entwickelte Beweisgang ist prinzipiell verallgemeinerungsfähig. Hierbei zeigen sich jedoch für

$r > 1$ (§ 8) in einigen sehr speziellen Fällen Komplikationen, die im wesentlichen darin bestehen, dass die Entfernung negativer Glieder für einige Fundamentalwerte ausschliesslich mit Hilfe der bisher verwendeten Prinzipien nicht immer gelingen will. Gestattet man Zweifel an der Richtigkeit des Vierfarbensatzes, so kann man hierin Fingerzeige sehen, wie Netze zu konstruieren sind, die dem Vierfarbensatz nicht Folge leisten; eine Kontrolle ist für jedes vorliegende Netz auf Grund der Vierfarbenformel durchführbar. Sieht man aber in der Zwangsläufigkeit der Beweisführung der definit erledigten Fälle eine, allerdings gefühlsmässige, Gewähr für die allgemeine Gültigkeit des Satzes, so wird man suchen eine direkte Entscheidung eventuell mit Hilfe bisher unbenutzter Kunstgriffe zu erzwingen. Als ein solcher Kunstgriff bietet sich das Prinzip

$$N_{(Z)(-AB)(-AC)(-AD)(-AE)(-BC)(-BD)(-BE)(-CD)(-CE)(-DE)} = 0 \quad (96)$$

dar, welches rein arithmetischer Natur ist. Es besagt nämlich, dass 4 Farben nicht genügen, um 5 Knoten so zu färben, dass jedes Knotenpaar verschieden gefärbt erscheint, m. a. W., dass die Kardinalzahlen 4 und 5 von verschiedener Mächtigkeit sind. Das Prinzip (96) steht nicht im Widerspruch zu dem allgemeinen Vierfarbensatz, wie es auf den ersten Blick scheinen könnte, weil in (96) sich gegenseitig trennende Paare notwendigerweise auftreten, während der allgemeine Vierfarbensatz sich ausschliesslich auf Auslesen bezieht. Es gelingt tatsächlich die widerstrebenden Fundamentalwerte mit Hilfe von (96) als Summen nicht-negativer Glieder darzustellen. In einigen, wieder spezialisierten Fällen sind dann aber die Bedingungen in den eine untere Schranke des Fundamentalwertes bildenden Farbeninvarianten keine Auslesen mehr, wodurch die direkte Anwendung der Vierfarbenformel ausgeschaltet wird. Nimmt man dann Transformationen vor, die zu Auslesen zurückführen, so wird man gezwungen u. a. das folgende Theorem als richtig anzuerkennen:

Besitzt ein Normalnetz genau r Randknoten A_1, A_2, \dots, A_r , so ist

$$(4-r) N + \sum N_{(+A_i A_j)} - \sum N_{(+A_i A_j A_k)} + \sum N_{(+A_i A_j A_k A_l)} - \dots > 0. \quad (97)$$

Hier bedeutet $(+A_i A_j A_k \dots)$ die Forderung $A_i \equiv A_j \equiv A_k \equiv \dots$; die Summation ist über alle denkbaren Kombinationen der Indizes i, j, k, \dots zu erstrecken.

Der Vierfarbensatz ist in diesem Theorem als Spezialfall $r = 3$ enthalten; andererseits ist das Theorem selbst ein Spezialfall eines noch allgemeineren Satzes, über den ein anderes Mal berichtet werden soll.

Die verwickelte Natur des Vierfarbenproblems wird jedenfalls durch die komplizierte arithmetische Relation (97) ins rechte Licht gerückt: die Möglichkeit einer Entscheidung auf Grund bisher übersehener einfacher geometrischer Erwägungen ist höchst unwahrscheinlich. Noch mehr: es ist denkbar, dass der Vierfarbensatz einer unendlichen Gruppe sich gegenseitig bedingender, von bewiesenen topologischen Sätzen aber unabhängiger Sätze gleichwertig ist. Die auf Überlieferung und Gewöhnung gestützten Anschauungen über die Grundlagen der Arithmetik der ganzen Zahlen müssten in diesem Falle sorgfältig revidiert werden.