TOPOLOGISCHE GRUNDLAGEN DES ZAHLBEGRIFFS

VON

J. NUUT

TARTU (DORPAT) 1929

C. Mattiesen, Dorpat.

1. Fragestellung*).

Der geläufige Aufbau des Begriffs der reellen Zahl benutzt als Grundlage die Idee der Quantität, wobei dann die Rechenoperationen gleich zu Beginn als leitende Gedankengänge auftreten[1]). Dem steht gleichwertig eine andere Auffassungsweise gegenüber, bei welcher die Idee der linearen Anordnung als Ausgangspunkt der Betrachtungen dient, die reellen Zahlen als reine Ortssymbole eingeführt werden, während das Rechnen (die Metrik) erst später, und zwar in sehr allgemeiner Gestalt, als abgeleitete Gedankenbildung hinzukommt. Diese zweitgenannte Behandlungsweise läuft auf eine Entwickelung des Zahlbegriffs aus topologischen Grundlagen hinaus. Sollen hierbei Spekulationen metaphysischen Charakters vermieden werden, so hat man noch die Wahl zwischen zwei Wegen:

1) Man könnte einen absolut begründeten Zahlbegriff aufzubauen trachten, indem man jeden nötigen Hilfsbegriff formal-axiomatisch einführt. Es ist ein Grundproblem der Axiomatik zu entscheiden, ob diese Darstellungsart streng konsequent durchführbar ist.

2) Man kann sich mit einer relativen Begründung begnügen, indem man einen Komplex von Begriffen vorwiegend logischer Natur („Element", „Menge", „Identität", „Verschiedenheit", „Korrespondenz", „Widerspruch" u. a.) als dem Inhalt nach intuitiv gegeben ansieht; die axiomatische Unter-

---

*) Die vorliegende Arbeit bildet mit geringfügigen Änderungen eine gekürzte Wiedergabe des Inhalts der Doktorschrift des Verfassers: „Der lineare Raum als topologische Grundlage des Zahlbegriffs" (verteidigt vor der Mathem.-Naturwissensch. Fakultät der Univ. Tartu am 27. November 1926). Die hier unterdrückten Beweise sind in den handschriftlichen Exemplaren der Dissertation grösstenteils vollständig ausgeführt.

1) So z. B. bei der Definition der Irrationalzahlen mittels Cantor'scher Fundamentalreihen, wo der Begriff der Differenz wesentlich notwendig ist.

suchung hat dann erst bei der Bildung eigentlich mathematischer Begriffe einzusetzen.

Hier soll der zweite Weg beschritten werden. Dass Vorsicht geboten ist, bzw. dass den Resultaten dann nur eine bedingte, wahrscheinlich aber auch zu enge Gültigkeit zukommt, ist evident. Meines Wissens existiert zur Zeit kein unanfechtbar absolut begründetes mathematisches System[2]).

Aus naheliegenden Gründen soll der Sprachgebrauch sich an die Geometrie anlehnen, indem z. B. „Punkt“ und „Strecke“ statt „reelle Zahl“ und „Intervall“ Verwendung findet.

2. Einführung der natürlichen Zahlen.

Zur Vorbereitung der ferneren Entwickelungen bedarf man der Begriffe „endlich“, „abzählbar-unendlich“, „nichtabzählbar-unendlich“. Das hierzu gangbare Verfahren soll kurz angedeutet werden[3]).

Man konstatiert zunächst die Existenz solcher Mengen, wo jedes Element das nächstfolgende bestimmt (intuitiv gegebene Grundbegriffe sind in diesem Satz durch gesperrten Druck gekennzeichnet). Beispiel — die Menge der Stellenzeichen[4])

$$1, 2, 3, \ldots, n, n+1, n+2, \ldots \tag{1}$$

Solche Mengen mögen Folgen heissen.

Aus einer Folge F werde ein Element a_1 herausgegriffen. Ist das a_1 nächstfolgende Element a_2 von a_1 verschieden, so bildet die aus a_1 und a_2 bestehende Menge $T_2^{a_1}$ einen echten oder unechten Teil von F, je nachdem in F noch von

2) D. Hilbert's Untersuchungen in dieser Richtung — „Üb. d. Grundl. d. Logik u. Arithmetik“, Verh. d. III. Math. Kongr. (1904), S. 174, „Neubegr. d. Math.“, Abh. Hamburg. Sem. 1 (1922), S. 157, „D. logisch. Grundl. d. Math.“, Math. Ann. 88 (1922), S. 151, „Üb. d. Unendliche“, Math. Ann. 95 (1925), S. 161, „D. Grundl. d. Mathem.“, Abh. Hamburg. Sem. 6 (1928), S. 65, — sind Entwürfe, die erst nach tatsächlicher Ausführung streng gewertet werden können; bei der Bewertung dürfte aber die Verschiedenheit der Mentalität bei den Kritikern eine wesentliche Rolle spielen.

3) Die verwendeten Axiome A—E sind inhaltlich dem System von G. Peano („Sul concetto di numero“, Riv. Mat. 1, 1891) entlehnt.

4) Vgl. O. Hölder, „Die mathematische Methode“ (1924), S. 161.

a_1, a_2 verschiedene Elemente vorhanden sind oder nicht. Wir sagen, die mit a_1 begonnene Zählung von F breche bei a_2 ab, sofern das a_2 nächstfolgende Element von F zu $T_2^{a_1}$ gehört; widrigenfalls nennen wir diese Zählung über a_2 hinaus fortsetzbar. Ist im letzteren Falle a_3 das a_2 nächstfolgende Element, so kann die, von $T_2^{a_1}$ verschiedene, Teilmenge $T_3^{a_1}$ von F gebildet werden, die aus a_1, a_2, a_3 besteht, und es lässt sich nach analogen Prinzipien unterscheiden, ob die Zählung von F bei a_3 abbricht, oder aber über a_3 hinaus fortsetzbar ist.

Bei der geschilderten Zählung spielen die Stellenzeichen (1) eine wesentliche Rolle. Diese Stellenzeichen bilden eine Folge von speziellem Typus, nämlich die natürliche Zahlenreihe; wir bezeichnen letztere mit N und nennen ihre Elemente auch Ordnungszahlen (letztere werden also durch die Stellenzeichen repräsentiert). Für die Ordnungszahlen gelten folgende Axiome:

A. Ist n eine Ordnungszahl, $n+1$ die ihr nächstfolgende, so ist n von $n+1$ verschieden.

B. Ist die Ordnungszahl n von der Ordnungszahl m verschieden, so ist auch $n+1$ von $m+1$ verschieden.

C. Jede von 1 verschiedene Ordnungszahl $n+1$ bestimmt die Ordnungszahl n, zu der $n+1$ die nächstfolgende ist.

Wir nennen dann n die der Ordnungszahl $n+1$ nächstvorhergehende Ordnungszahl.

D. Zu der Ordnungszahl 1 gehört keine nächstvorhergehende.

E. Bezieht sich eine Aussage $A(n)$ auf die Ordnungszahl n, ist dabei $A(1)$ eine richtige Aussage, ferner $A(n+1)$ eine richtige Aussage, sobald $A(n)$ richtig ist, so ist die Aussage $A(x)$ richtig, sobald x irgendeine Ordnungszahl bedeutet.

Das Axiom E bildet das Prinzip der vollständigen Induktion (v. I.), welches eine fundamentale Gruppe „richtiger“ Aussagen erzeugt.

Aus den zitierten Axiomen ergeben sich die Folgerungen:

Zu verschiedenen Ordnungszahlen gehören verschiedene nächstvorhergehende.

Beginnt eine Zählung von N mit der Ordnungszahl 1, so existiert keine Ordnungszahl, bei der diese Zählung abbrechen könnte.

Bei einer solchen Zählung von N hat man sukzessive Teilmengen T_n^1 zu bilden, die aus den „schon gezählten" Ordnungszahlen bestehen. Jede solche Teilmenge T_n^1 soll für sich, als Element neuer Art aufgefasst, eine Kardinalzahl heissen und zur Vereinfachung mit k_n symbolisiert werden. Die Menge der Kardinalzahlen bezeichnen wir mit K.

Aus der Bildungsweise der Kardinalzahlen ist ersichtlich, dass eine Ordnungszahl m in k_{n+1} eingeht, sobald m in k_n eingeht. Durch v. I. folgt, dass 1 in jeder Kardinalzahl enthalten ist.

Lässt sich eine Kardinalzahl k_n angeben, die eine Ordnungszahl m enthält, eine andere Ordnungszahl p aber nicht enthält, so sagt man, m sei kleiner als p ($m<p$), oder, damit gleichbedeutend, p sei grösser als m ($p>m$). Es ist demnach 1 kleiner als jede von 1 verschiedene Ordnungszahl. Durch v. I. erkennt man, dass $m<p$, $p<m$ nicht gleichzeitig richtige Aussagen sein können. Durch nochmalige Anwendung der v. I. ergibt sich dann für voneinander verschiedene m, p notwendig entweder $m<p$, oder $p<m$; tertium non datur. Ist daher $m<p$ falsch, desgleichen $p<m$ falsch, so muss m mit p identisch sein, was $m=p$, oder $p=m$ geschrieben werden mag.

Als weitere Konsequenz ergibt sich hieraus nun $n+1>n$. Ferner erkennt man die Existenz der Kardinalzahl k_n für jede Ordnungszahl n. Diese Kardinalzahl k_n enthält ausser n nur noch jede Ordnungszahl, die kleiner ist als n. Als weitere Folgerung fliesst die Transitivität der Grössenbeziehung, d. h. der Satz:

Aus $m<n$, $n<p$, folgt $m<p$.

Ordnungszahlen, die kleiner sind als n, heissen n vorhergehende Ordnungszahlen; Ordnungszahlen, die grösser sind als n, heissen auf n folgende Ordnungszahlen. „Nächstvorhergehend" und „nächstfolgend" sind Spezialfälle dieser allgemeineren Begriffsbildungen.

Zwischen den Mengen N und K besteht eine Korrespondenz (eineindeutige Abbildung), die durch die wechselseitige Zuordnung der Ordnungszahl n aus N zur Kardinalzahl k_n aus K vermittelt wird. Diese Korrespondenz gestattet u. a. eine

Übertragung der Grössenanordnung auch auf die Kardinalzahlen ($k_n < k_m$ sobald $n < m$) und glättet überhaupt die aus den Definitionen resultierenden Unterschiede zwischen den Mengen N und K; man spricht daher gewöhnlich von natürlichen Zahlen schlechtweg, ohne genaue Angabe, ob Ordnungs- oder Kardinalzahlen gemeint sind. In entsprechend abgeänderter Gestalt behalten die Axiome A—E auch für Kardinalzahlen ihre Gültigkeit.

Ist $k_n < k_m$, so erweist sich die Menge k_n als ein echter Teil der Menge k_m. Dieses Kriterium könnte auch zur unabhängigen Definition der Grössenanordnung in K dienen.

Ist bei der Zählung einer beliebig gegebenen Folge F die Teilmenge $T_n^{a_1}$ gebildet, so sagen wir, diese Zählung sei bis zur Ordnungszahl n durchgeführt und k_n sei die Anzahl der gezählten Elemente von F. Der Zählungsprozess definiert dann eine Korrespondenz zwischen den Mengen $T_n^{a_1}$ und k_n, wobei a_1 der Ordnungszahl 1 entspricht. Um diese Korrespondenz explizite anzugeben, schreibt man a_p für das der Ordnungszahl p zugeordnete Element von F. Ist die Zählung von F bis zur Ordnungszahl n durchgeführt, dabei $p < n$, so ist die Zählung sicher über a_p hinaus fortsetzbar. Sollte $T_n^{a_1}$ mit F identisch sein, so bricht die Zählung notwendig bei a_n ab. Genügt hierbei F noch der Forderung, dass zu verschiedenen Elementen stets auch verschiedene nächstfolgende gehören, so bezeichnen wir diese Folge als einen endlichen Zyklus, symbolisch Z_n. Für einen endlichen Zyklus Z_n heisst k_n auch die Anzahl der Elemente des Zyklus. Es gilt der Fundamentalsatz:

> Ein endlicher Zyklus Z_n erweist sich als solcher, unabhängig von der Wahl des Anfangselements a_1; auch die Anzahl k_n der Elemente des Zyklus ist von der speziellen Wahl von a_1 unabhängig.

Um die Richtigkeit dieses Satzes einzusehen, hat man sich zunächst davon zu überzeugen, dass a_1 das a_n nächstfolgende Element von Z_n ist. Hierauf konstatiert man, dass eine Korrespondenz zwischen den Elementen von Z_n und k_n auch dann entsteht, wenn man der Ordnungszahl t das Element a_{t+1} zuordnet (unter a_{n+1} ist hierbei a_1 zu verstehen); der nächstfolgenden Ordnungszahl entspricht in der neuen Korrespondenz stets wieder das nächstfolgende Element. Diese neue Korrespondenz erweist sich deshalb einer mit a_2 beginnenden Zählung von Z_n gleichbedeutend, wobei $T_n^{a_1}$ mit Z_n identisch wird. Nimmt man a_x statt a_1, so bedeutet dies:

„Erweist sich Z_n als endlicher Zyklus von der Anzahl k_n, sobald die Zählung mit dem Element a_x beginnt, wo $x < n+1$, so gilt dasselbe auch dann, wenn die Zählung beim Element a_{x+1}, $x+1 < n+1$, begonnen wird".

Durch v. I. folgt hieraus der obengenannte Fundamentalsatz.

Wir sagen, das Element a_p sei aus einem Z_n „ohne Störung der Anordnung" entfernt, wenn in der Restmenge Z'_n im allgemeinen die frühere Aufeinanderfolge der Elemente gilt, dem a_p nächstvorhergehenden Element a_{p-1} aber das a_p nächstfolgende Element a_{p+1} als nächstfolgendes zugeordnet ist. Versteht man unter $n-1$ die n nächstvorhergehende Ordnungszahl, so hat man den Satz:

Wird aus einem endlichen Zyklus Z_n ein beliebiges Element a_p ohne Störung der Anordnung entfernt, so verbleibt als Restmenge ein endlicher Zyklus Z_{n-1}.

Man erkennt die Richtigkeit dieser Behauptung, wenn man die Zählung der Restmenge mit dem Element a_{p+1} $(p < n)$ resp. a_1 $(p = n)$ beginnt.

Hierauf stützt sich dann der Beweis des Satzes:

Besteht zwischen den endlichen Zyklen Z_n und Z_m eine Korrespondenz, so ist n mit m identisch, d. h. diese Zyklen besitzen ein und dieselbe Anzahl von Elementen.

Es ist zunächst direkt ersichtlich, dass zwischen einem Z_1 und einem Z_n bei $n > 1$ keine Korrespondenz besteht. Wird nun bei fixiertem m angenommen, dass zwischen Z_m und Z_n keine Korrespondenz bestehe, solange m von n verschieden ist, so gilt dasselbe für Z_{m+1} und Z_n, solange $m+1$ sich von n unterscheidet. Sollte nämlich im letztgenannten Falle doch eine Korrespondenz bestehen, wobei etwa das Element a aus Z_{m+1} dem Element b aus Z_n entspricht, so verbleibt nach Entfernung von a und b ohne Störung der Anordnung aus Z_{m+1} und Z_n, eine Korrespondenz zwischen einem Z_m und einem Z_{n-1}, was der Annahme widerspricht, da m von $n-1$ verschieden sein muss, sobald

$m+1$ von n verschieden ist. Der zu beweisende Satz ergibt sich somit durch v. I.

Ist es möglich, eine Korrespondenz zwischen einer gegebenen Menge E und einer Kardinalzahl k_n herzustellen, so ist es auch möglich, E in einen endlichen Zyklus Z_n umzuformen, denn die erwähnte Korrespondenz vermittelt ja für E die Umwandlung in eine Folge. Jede Menge E dieser Art heisst eine endliche Menge, k_n ist die Anzahl der Elemente von E. Der vorige Satz liefert direkt das Schroeder'sche Prinzip[5]:

Die Anzahl k_n der Elemente einer endlichen Menge E ist unabhängig von der speziellen Art der hergestellten Korrespondenz.

Widrigenfalls würde nämlich E eine Korrespondenz zwischen verschiedenen Kardinalzahlen vermitteln, was nicht angeht, da sonst auch zwischen endlichen Zyklen von verschiedener Elementenanzahl eine Korrespondenz herstellbar wäre.

Statt von einer „endlichen Menge, bei welcher die Anzahl der Elemente k_n beträgt", spricht man gewöhnlich einfacher von einer „aus n Elementen bestehenden (endlichen) Menge". Die vorliegenden Betrachtungen präzisieren den Sinn, in welchem die Zahlwörter „eins", „zwei", „drei", . ., „n", . . (Lautsymbole der natürlichen Zahlen) im weiteren Verwendung finden.

Durch v. I. wird erkannt:

Jede echte Teilmenge einer endlichen Menge ist eine endliche Menge von kleinerer Elementenanzahl.

Ist $p<n$, so besitzt eine endliche Menge, die aus n Elementen besteht, Teilmengen aus p Elementen.

Die Vereinigung einer endlichen Menge endlicher Mengen liefert eine endliche Menge.

---

5) Nach O. Hölder (vgl. Anm. 4) S. 4, die „Grundtatsache des Anzahlbegriffs". H. v. Helmholtz bezeichnet E. Schroeder als den ersten, „welcher erkannt hat, dass hierin ein Problem verborgen ist" (H. v. Helmholtz, Philos. Aufsätze, 1887; Wiederabdruck in der Jubiläumssammlung „Schriften zur Erkenntnistheorie", 1921, S. 71). Beweisversuch u. a. bei L. Kronecker, J. f. Math. 101 (1887).

„Unendliche" Menge bedeutet soviel, wie „Menge, die nicht zur Kategorie der endlichen Mengen gehört". Beispiele unendlicher Mengen sind N und K. Besteht zwischen einer Menge A und der Menge N eine Korrespondenz, so heisst die Menge A abzählbar-unendlich[6]). Aus dieser Korrespondenz resultiert die Möglichkeit A in eine Folge umzuformen. Bezeichnet man die Elemente von A in der durch die Korrespondenz vermittelten Weise als

$$a_1, a_2, a_3, a_4, \ldots, a_n, a_{n+1}, \ldots \tag{2}$$

und entfernt darauf das Element a_1, wobei als Restmenge A' verbleiben möge, so besteht doch noch eine Korrespondenz zwischen A und A', wie ersichtlich wird, wenn man dem Element a_t aus A das Element a_{t+1} aus A' zuordnet. Allgemeiner:

Wird aus einer abzählbar-unendlichen Menge eine endliche Menge endlicher Mengen entfernt, so verbleibt eine abzählbar-unendliche Restmenge.

Zwischen einer abzählbar-unendlichen Menge und jeder ihrer unendlichen Teilmengen besteht eine Korrespondenz, desgleichen zwischen jedem Paar abzählbar-unendlicher Mengen.

Jede endliche Menge abzählbar-unendlicher Mengen, desgleichen jede abzählbar-unendliche Menge abzählbar-unendlicher Mengen ist abzählbar-unendlich.

Eine aus natürlichen Zahlen gebildete Menge ist also entweder endlich oder abzählbar-unendlich (als Teilmenge von N). Wichtig ist der Satz:

Eine beliebig gegebene Menge natürlicher Zahlen enthält stets eine kleinste Zahl[7]).

Als „kleinste" Zahl ist hier eine solche bezeichnet, die in der Menge enthalten, dabei aber kleiner ist, als jede andere Zahl aus derselben Menge. Um die Existenz dieser kleinsten

6) G. Cantor, Math. Ann. 17 (1873), S. 355.

7) Die Menge der natürlichen Zahlen ist also im Cantor'schen Sinne „wohlgeordnet" (Math. Ann. 49, S. 207).

Zahl nachzuweisen, fixiere man eine in der gegebenen Menge M enthaltene natürliche Zahl t und und bilde k_{t-1}. Gehört keine Ordnungszahl aus k_{t-1} zu M, so erweist sich t als die gesuchte kleinste Zahl in M. Im anderen Falle erkennt man durch v. I., dass die kleinste Zahl von M unter den Ordnungszahlen aus k_{t-1} zu suchen ist und dort tatsächlich existiert.

Unendliche Mengen, die nicht zur Kategorie der abzählbar-unendlichen Mengen gehören, sollen hier ohne weitere Unterscheidung als nicht-abzählbare Mengen angesprochen werden. Eine spezielle Art der Konstruktion nicht-abzählbarer Mengen führt zum Begriff des Kontinuums (vgl. § 10, 11).

3. Axiome der Anordnung.

Als Grundlage der ferneren Betrachtungen dient uns der Begriff „zwischen“ in der durch die Hilbert'schen Axiome der Anordnung[8]) präzisierten Gestalt. Die ersten drei dieser Axiome (II_{1-3}) enthalten Bestimmungen über die Anordnung von Punkten einer Geraden, das letzte, II_4 (das Pasch'sche Axiom), formuliert eine die Ebene betreffende Aussage. Die „linearen“ Axiome II_{1-3} sind allein noch nicht ausreichend, um die intuitiv geläufige lineare Anordnung der Punkte einer Geraden (doppelpunktfreien offenen Linie) begrifflich vollständig zu beschreiben, wohl aber definieren die „Axiome der Verknüpfung“ I_{1-8} zusammen mit den Anordnungsaxiomen die Anordnung der Elemente des ein-, zwei- und dreidimensionalen Raumes vollständig, sobald das „ebene Axiom“ II_4 zu den linearen Axiomen II_{1-3} hinzugefügt wird. Diese merkwürdige Tatsache dürfte damit zusammenhängen, dass das Pasch'sche Axiom eigentlich mehr aussagt, als von einem reinen Anordnungsaxiom gefordert werden sollte (es enthält u. a. ja auch eine Stetigkeitsaussage). D. Hilbert formuliert in einer Fussnote[9]) die Aufgabe:

> „Es ist wünschenswert ein solches System von unabhängigen Axiomen aufzustellen, dass die auf die Anordnung der Punkte einer Geraden bezüglichen Axiome diese Anordnung vollständig beschreiben“.

---

8) D. Hilbert, „Grundlagen der Geometrie“, 5. Aufl. 1922. In der ersten Auflage waren 5 Axiome der Anordnung aufgestellt, von denen das vierte von E. H. Moore (Trans. Am. Math. Soc. 1902) als überflüssig erkannt wurde; vgl. Anm. [13]).

9) a. a. O., S. 6, Fussnote.

Man darf dies als Forderung ansehen, von dem Pasch'schen Axiom die in II_{1-3} noch nicht enthaltene Aussage über die lineare Anordnung explizite abzutrennen. Es soll hier zunächst dieses fehlende lineare Anordnungsaxiom als II_4' formuliert und daraufhin später untersucht werden, welchen Abänderungen das Pasch'sche Axiom nach Abspaltung von II_4' unterliegt; diese letztere Untersuchung ist übrigens für den Aufbau des Zahlbegriffs ohne wesentliche Bedeutung.

Punkte sollen durch kleine lateinische Buchstaben symbolisiert werden. Wenn von „zwei", „drei" usw. Punkten die Rede ist, sollen stets untereinander verschiedene Punkte damit gemeint sein. Als Symbol des Begriffs „zwischen" soll das Zeichen $\vee$ dienen [10]), und zwar soll die Aussage:

„Der Punkt a liegt zwischen dem Punkt b und dem Punkt c"

symbolisch $a \vee bc$ geschrieben werden. Das umgekehrte Symbol $\wedge$ soll die Verneinung „nicht zwischen" bezeichnen (so dass $\vee$ und $\wedge$ sich gegenseitig ausschliessen). Die Relation $a \wedge bc$ ist also gleichbedeutend mit der Aussage:

„Der Punkt a auf der Geraden bc liegt nicht zwischen dem Punkt b und dem Punkt c".

Die drei Axiome II_{1-3} lassen sich dann folgendermassen schreiben:

II_1. Wenn $b \vee ac$, so auch $b \vee ca$.

II_2. Wenn a und c einer Geraden angehören, so existiert b, so dass $b \vee ac$, und zugleich d, so dass $c \vee ad$.

II_3. Sind a, b, c drei Punkte einer Geraden, so bildet das gleichzeitige Bestehen der drei Beziehungen $a \wedge bc$, $b \wedge ac$, $c \wedge ab$ einen Widerspruch, desgleichen bildet das gleichzeitige Bestehen der zwei Beziehungen $a \vee bc$, $b \vee ac$ einen Widerspruch.

Aus $a \wedge bc$, $b \wedge ac$ folgt also $c \vee ab$; aus $a \vee bc$ folgt $b \wedge ac$.

Wo nicht ausdrücklich anders erwähnt, beschränken wir uns fernerhin auf Punkte ein und derselben Geraden. Es seien

10) Eine Verwechslung mit den abweichenden Bedeutungen der Zeichen $\vee$, $\wedge$ in den verschiedenen Begriffsschriftsystemen kommt hier nicht in Frage.

a, b zwei fixierte Punkte, x ein dritter veränderlicher Punkt. Man hat dann entweder $a \bigvee bx$ oder $a \bigwedge bx$. Im ersteren Falle sagen wir, x liege, in Bezug auf den Trennungspunkt a, mit b in verschiedenen Bereichen, — symbolisch geschrieben, x gehöre zum Bereich $T_b(a)$. Im letzteren Falle sagen wir, x liege, in Bezug auf den Trennungspunkt a, in demselben Bereich wie b, — symbolisch geschrieben, x gehöre zu $S_b(a)$. Den Punkt b selbst zählen wir dabei konsequent zum Bereich $S_b(a)$. Für jeden von a verschiedenen Punkt der Geraden ist es dann entschieden, welchem der beiden, durch a und b bestimmten Bereiche $S_b(a)$, $T_b(a)$ er angehört. Die Axiome II_{1-3} genügen aber nicht zum Nachweis, dass der Bereich $S_b(a)$ mit dem Bereich $S_c(a)$ übereinstimmt, sobald c dem Bereich $S_b(a)$ entnommen ist. Dies wird an folgendem Anschauungssubstrat ersichtlich, wobei allerdings schon der Begriff der reellen Zahl benutzt ist:

Die reellen Zahlen mögen in drei Kategorien verteilt sein, nämlich in 1) ganze Zahlen, 2) rationale Brüche (von ganzen Zahlen verschieden), 3) irrationale Zahlen. Als Symbole verwenden wir entsprechend g, r, i. Die Zwischenlage sei so fixiert, dass allemal $g \bigvee ri$, $g \bigvee ir$ bestehe, während in dem Falle, wo im Punkttripel mindestens zwei Punkte derselben Kategorie angehören (also zwei g-Punkte, oder zwei r-Punkte, oder zwei i-Punkte auftreten), die Zwischenlage auf „natürliche" Weise durch die Grössenanordung gegeben sein möge. Die Forderungen II_{1-3} sind dann erfüllt. Fixiert man aber nun die Zahlen $a = 1$, $b = 2$, $c = \sqrt{2}$, $d = 1^1/_2$, so gehört offenbar c zu $S_b(a)$, d zu $S_b(a)$, nicht aber c zu $S_d(a)$, — die Bereiche $S_b(a)$ und $S_d(a)$ sind somit wesentlich verschieden.

Es soll nun noch das folgende lineare Anordnungsaxiom hinzukommen:

> II_4'. Gehören a, b, c, d einer Geraden an, und gilt $d \bigvee ab$, so bedeutet das gleichzeitige Bestehen der zwei Beziehungen $d \bigwedge ac$, $d \bigwedge bc$ einen Widerspruch[11].

Diese Aussage lässt sich als eine spezielle Entartung des Pasch'schen Axioms deuten. Die Unabhängigkeit des Axioms

11) Bei M. Pasch, „Vorles. üb. neuere Geometrie" (1882), dienen zur Beschreibung der linearen Anordnung 8 „Grundsätze", aus denen sich u. a. das Axiom II_4' unseres Textes direkt herauslesen lässt.

II_4' von II_{1-3} erhellt aus dem oben angeführten Anschauungssubstrat, wo II_{1-3} erfüllt sind und doch $d \vee ab$, $d \wedge ac$, $d \wedge bc$ besteht. Es enthält das System der vier Axiome II_{1-3}, II_4' aber auch keinen Widerspruch, denn sämtliche vier Axiome zeigen sich erfüllt, wenn man die Zwischenlage im reellen Zahlenkontinuum für jedes Tripel durch die natürliche Grössenfolge bestimmt. Am deutlichsten ergibt sich dies auf analytischem Wege, sobald man die Definition der Zwischenlage dahin präzisiert, dass für die drei Zahlen ξ_1, ξ_2, ξ_3 die Beziehung $\xi_1 \vee \xi_2\xi_3$ zu gelten hat, wenn $(\xi_1 - \xi_2)(\xi_1 - \xi_3) < 0$, dagegen die Beziehung $\xi_1 \wedge \xi_2\xi_3$, wenn $(\xi_1 - \xi_2)(\xi_1 - \xi_3) > 0$.

4. Der Vierpunktsatz.

Die Kombination der vier linearen Aussagen II_{1-3}, II_4' führt sofort zu einer Verschärfung der in II_4' enthaltenen Behauptung. Es ist nämlich nicht möglich, dass die drei Beziehungen

$$d \vee ab, \quad d \vee ac, \quad d \vee bc \tag{3}$$

alle zugleich richtig sind. Denn wegen II_3 darf $a \vee bc$ angenommen werden, aus (3) folgt $a \wedge cd$, die Anwendung von II_4' auf das Tripel b, c, d und den vierten Punkt a ergibt daher $a \vee bd$, im Widerspruch zu der in (3) enthaltenen Annahme $d \vee ab$.

Es gilt somit der folgende Vierpunktsatz:

Wenn $d \vee ab$, $d \wedge bc$, so $d \vee ac$;
wenn $d \vee ab$, $d \vee ac$, so $d \wedge bc$;
wenn $d \wedge ab$, $d \wedge ac$, so $d \wedge bc$.

Dieser Satz fixiert dem Gedächtnis sich leicht einprägende Gesetze, nach denen mit den Symbolen $\vee$, $\wedge$ zu operieren ist.

Jetzt wird es möglich zu zeigen, dass $S_b(a)$ mit $S_c(a)$ identisch (also auch $T_b(a)$ mit $T_c(a)$ identisch) ist, sobald $a \wedge bc$ besteht, d. h. sobald c dem Bereich $S_b(a)$ entnommen ist. Es seien a, b fixiert, also $S_b(a)$, $T_b(a)$ bestimmt. Wegen II_2 existieren c und d der Art, dass $a \vee bd$, $c \vee ab$ gilt. Es gehört dann offenbar d zu $T_b(a)$, c zu $S_b(a)$, die Punkte c, d sind also sicher untereinander verschieden; dabei steht fest, dass diese Punkte auch von a, b verschieden sind. Es ist also stets möglich sowohl in $S_b(a)$ als auch in $T_b(a)$ Punkte zu nennen. Es sei ferner e ein fünfter Punkt. Liegt er in $S_b(a)$, so hat man

$$a \wedge bc, \quad a \vee bd, \quad a \wedge be, \tag{4}$$

also auf Grund des Vierpunktsatzes

$$a \vee de, \quad a \vee cd, \tag{5}$$

hieraus endlich auf dieselbe Weise

$$a \wedge ce; \tag{6}$$

es gehört also e dann sicher auch zu $S_c(a)$. Analog ergibt sich im Falle der Zugehörigkeit von e zu $T_b(a)$ zwangsläufig die Beziehung $a \vee ce$, d. h. e gehört dann auch zu $T_c(a)$. Damit ist die Identität von $S_b(a)$ mit $S_c(a)$ und von $T_b(a)$ mit $T_c(a)$ erwiesen.

Die Bereiche S, T sind jeder für sich schon durch die alleinige Angabe des Trennungspunktes a gegeben. Besteht $a \vee bd$, so erweist sich $T_b(a)$ mit $S_d(a)$ als identisch; jeder der beiden Bereiche lässt sich also sowohl als S-Bereich, als auch als T-Bereich ansprechen, — die Unterscheidung ist nur dadurch bedingt, ob man eine positive Definition verwendet (einen Punkt b nennt, der dem Bereich angehört), oder von einer negativen Definition ausgeht (einen Punkt d nennt, der dem Bereich nicht angehört).

Die Bereiche S, T bilden die zwei Seiten der Geraden in Bezug auf a; man spricht auch wohl von „rechts" und „links" bezüglich a.

Bedeutet $P < Q$, dass die Menge P ein echter Teil der Menge Q ist, so kann man schreiben $T_b(a) < S_a(b)$, — es ist dies eigentlich nur eine Umformung der Aussage II_8. Durch verschiedene Trennungspunkte erzeugte Bereiche sind daher nie identisch. Als weitere Folgerung wird erkannt, dass die Menge der Punkte eines Bereiches nicht endlich sein kann: es enthält nämlich ein Bereich $S_a(b)$ stets die echte, dabei nicht leere Teilmenge $T_b(a)$, welch letztere ihrerseits wiederum als ein $S_c(a)$ aufgefasst werden darf, worauf die Schlussweise sich wiederholen lässt; es existiert mithin sicher ein Punkt x_1, der wohl $S_a(b)$, nicht aber der Teilmenge $S_c(a)$ angehört; durch v. I. gelangt man zu einer abzählbar unendlichen Punktfolge $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n, x_{n+1}, \ldots$ in $S_a(b)$, welche nicht existieren könnte, wenn $S_a(b)$ eine endliche Menge wäre.

5. Reihenfolge in einer endlichen Punktmenge.

Es seien n Punkte auf einer Geraden zu einer endlichen Menge G_n zusammengefasst. Dann gilt der Satz:

> Für die Punkte der Menge G_n und die Ordnungszahlen aus k_n besteht eine derartige Korrespondenz, dass in jedem Punkttripel a_p, a_l, a_m aus G_n dann und nur dann $a_l \vee a_m\, a_p$ ist, wenn entweder $p < l < m$, oder $m < l < p$, wo l, m, p Ordnungszahlen aus k_n bedeuten.

Dieser Satz ist sicher richtig für G_3, wo $a_2 \vee a_1\, a_3$ angenommen werden darf. Es sei die Richtigkeit des Satzes für G_n erkannt und eine G_{n+1} vorgelegt. Man entferne aus dieser G_{n+1} zunächst einen beliebigen Punkt b, — es verbleibt dann eine G_n, in der die Punkte im Einklang mit dem Satz als $a_1, a_2, \ldots, a_n$ bezeichnet werden können. Gilt dann im Tripel a_1, a_n, b die Beziehung $a_n \vee a_1 b$, so ordne man b der Ordnungszahl $n+1$ zu, bezeichne also b als a_{n+1}, — damit wird für G_{n+1} eine Korrespondenz der im Satz geforderten Art erhalten. Zum Nachweis braucht man nur solche Tripel zu untersuchen, die a_{n+1} wirklich enthalten. Für a_1, a_n, a_{n+1} besteht, wie erforderlich, $a_n \vee a_1\, a_{n+1}$. Für ein Tripel a_p, a_n, a_{n+1}, wo $1 < p < n$, besteht $a_p \vee a_1\, a_n$, $a_n \vee a_1\, a_{n+1}$, — der Vierpunktsatz liefert dann, wie erforderlich, $a_n \vee a_p\, a_{n+1}$. Für $p < q < n$ im Tripel a_p, a_q, a_{n+1} ergibt sich aus $a_q \vee a_p\, a_n$, $a_n \vee a_q\, a_{n+1}$ sofort $a_q \vee a_p\, a_{n+1}$. Dass bei $x < y < n+1$ nicht gleichzeitig auch $a_x \vee a_y\, a_{n+1}$ oder $a_{n+1} \vee a_x\, a_y$ bestehen kann, ist eine Folge von II_3. Damit ist die erste Annahme erledigt. Macht man nun die zweite Annahme $b \vee a_1\, a_n$, so lässt sich zunächst die kleinste Ordnungszahl x bestimmen, für welche $b \vee a_1\, a_x$ gilt; es sei $t+1$ dieses kleinste x. Man hat dann $b \vee a_t\, a_{t+1}$ (für $t+1=2$ ist dies direkt ersichtlich, für $t+1>2$ folgert man es aus $b \wedge a_1\, a_t$, $b \vee a_1\, a_{t+1}$). Die Bezeichnung der Punkte von G_{n+1} werde hierauf abgeändert: bei $y > t$ soll jeder früher als a_y bezeichnete Punkt nunmehr a_{y+1} heissen; der Punkt b soll a_{t+1} benannt werden; bei $y < t+1$ sollen die früheren Bezeichnungen beibehalten werden. Damit ist die gesuchte Korrespondenz hergestellt. Zum Nachweis darf man sich auf die Untersuchung nur solcher Tripel beschränken, die b, also a_{t+1} enthalten. In der neuen Notation hat man $a_{t+1} \vee a_t\, a_{t+2}$, $a_{t+1} \vee a_1\, a_{t+2}$. Für $1 < p < t$ folgt wegen $a_p \vee a_1\, a_t$ und

$a_t \vee a_1 a_{t+2}$ zunächst $a_t \vee a_p a_{t+2}$, $a_t \vee a_p a_{t+1}$, hierauf $a_{t+1} \vee a_p a_{t+2}$. Ist ferner $p < q < t$, also $a_q \vee a_p a_{t+2}$, $a_{t+1} \vee a_q a_{t+2}$, so folgt $a_q \vee a_p a_{t+1}$. Ist $p < t$, $t+2 < m$, so folgert man aus $a_{t+1} \vee a_p a_{t+2}$, $a_{t+2} \vee a_p a_m$ zuerst $a_{t+2} \vee a_m a_{t+1}$, hierauf $a_{t+1} \vee a_p a_m$. Ist endlich $t+1 < m < s$, so resultiert aus $a_{t+1} \vee a_t a_m$, $a_m \vee a_t a_s$ die Folgerung $a_m \vee a_{t+1} a_s$. Damit ist auch die zweite Annahme erledigt. Die letzte Annahme wäre $a_1 \vee a_n b$. Man reserviere dann für b die Neubezeichnung a_1 und ändere jedes frühere a_z in a_{z+1}. Damit wird die Korrespondenz erhalten. Tatsächlich ist dann $a_2 \vee a_1 a_{n+1}$ und, falls $2 < p < n+1$, wegen $a_p \vee a_2 a_{n+1}$ auch notwendig $a_2 \vee a_1 a_p$; ist $2 < p < q$, also $a_p \vee a_2 a_q$, so zeigt sich $a_p \vee a_1 a_q$, wie gefordert war.

Durch v. I. ergibt sich nun die allgemeine Gültigkeit des zu beweisenden Satzes.

Ist die Korrespondenz zwischen G_n und k_n hergestellt, so sagt man, die Punkte a_x von G_n liegen auf der Geraden in der durch den Index bestimmten R e i h e n f o l g e.

Ist t aus k_n von 1 und von n verschieden, so gilt stets $a_t \vee a_1 a_n$; die beiden ausgezeichneten Punkte a_1, a_n heissen R a n d p u n k t e von G_n, jeder andere Punkt a_t aus G_n ist ein i n n e r e r Punkt der Menge. Wählt man nach II_2 die Punkte p, q gemäss den Forderungen

$$a_1 \vee p a_n, \quad a_n \vee q a \,, \tag{7}$$

wobei p, q offenbar untereinander verschieden sein müssen und nicht G_n angehören können, so erweist es sich als zweckmässig, die Punkte p, q S c h r a n k e n von G_n zu nennen, und zwar p die auf der Seite a_1, q die auf der Seite a_n gelegene Schranke. Aus (7) folgen die Beziehungen $a_1 \vee pq$, $a \vee pq$. Zieht man noch $a_t \vee a_1 a_n$ in Betracht, so folgt mit Hilfe von (7) zunächst $a_n \vee a_t q$, hierauf $a_t \vee a_1 q$; andererseits zeigt sich $a_1 \vee a_t p$, — mithin gilt $a_t \vee pq$. Es ist also j e d e r Punkt der Menge G_n zwischen den Schranken p, q gelegen.

Es bleibt noch zu untersuchen, ob die Punkte einer G_n in v e r s c h i e d e n e n Reihenfolgen gelesen werden können, d. h. ob es möglich ist, die erforderliche Korrespondenz für eine fixierte G_n auf voneinander abweichende Arten herzustellen. Es seien a_x und b_x Symbole zweier verschiedener Reihenfolgen ein und derselben Punktmenge G_n. Da nur zwei Randpunkte existieren, so muss der Randpunkt b_1 entweder mit a_1 oder mit a_n identisch sein. Verfolgt man die Annahme $b_1 = a_1$, so ergibt sich durch v. I. $b_s = a_s$ für jedes s. Ist nämlich $b_s = a_s$ bei $s < m+1$ richtig, so muss b_{m+1} einem a_i entsprechen, wo $i > m$; sollte $i > m+1$, $a_{m+1} = b_j$, also $j > m+1$ sein, so genügt das Punkttripel b_1, b_j, b_{m+1} der Bedingung $b_{m+1} \vee b_1 b_j$, weshalb für die entsprechenden a_1, a_{m+1}, a_i notwendig $a_i \vee a_1 a_{m+1}$ gelten müsste, worin ein Widerspruch enthalten ist. Hieraus folgt, dass $b_1 = a_n$ sein muss, wenn die Reihenfolge der b_x von der Reihenfolge der a_x verschieden sein soll.

Man definiere nun eine Korrespondenz zwischen den Ordnungszahlen aus k_n und nochmals den Ordnungszahlen aus k_n auf folgende spezielle Weise: von k_{n+1} möge unter der Annahme $t < n+1$ die echte Teilmenge k_t abgespaltet werden, — es verbleibt dann eine Restmenge R, die sicher endlich ist; die Anzahl der Elemente von R sei k_τ, und es ist sicher $\tau < n+1$. In der zu definierenden speziellen Korrespondenz soll nun stets der Ordnungszahl t die Ordnungszahl τ entsprechen. Wir nennen τ die zu t k o m p l e m e n t ä r e Zahl aus k_n. Mit Hilfe der Sätze des § 2 lässt sich zeigen, dass umgekehrt t die zu τ komplementäre Zahl darstellt; die Beziehung ist also eine wechselseitige. Für τ soll auch das Symbol $n+1-t$ Verwendung finden. Die Zahlen 1 und n erweisen sich als wechselseitig komplementär. Wenn die Reihenfolge der b_x von der Reihenfolge der a_x verschieden ist, so bedeutet b_1 den a-Punkt mit komplementärem Index. Durch v. I. zeigt sich mit Hilfe einer Betrachtung, die der oben durchgeführten analog ist, dass dann auch für jede Ordnungszahl t stets b_t den a-Punkt mit komplementärem Index bedeuten muss; die Reihenfolge der b_x ist also durch die Reihenfolge der a_x bestimmt. Sucht man aus der Reihenfolge der b_x nach demselben Gesetz eine neue Reihenfolge c_x abzuleiten, so folgt aus der Wechselseitigkeit der Komplementarität die Identität der Reihenfolge der c_x mit der Reihenfolge der a_x. Es existieren also stets zwei und nur zwei verschiedene Reihenfolgen für jede G_n. Diese beiden Reihenfolgen heissen einander wechselseitig e n t g e g e n g e s e t z t.

Die in diesem Paragraphen entwickelten Resultate sind in ihrer Gesamtheit dem Satz 5 in D. H i l b e r t's „Grundlagen der Geometrie" gleichwertig, der dort (fünfte Auflage, S. 6) lautet:

> „Sind irgendeine endliche Anzahl von Punkten einer Geraden gegeben, so lassen sich dieselben stets in der Weise als A, B, C, D, E, ... K bezeichnen, dass der mit B

bezeichnete Punkt zwischen A einerseits und $C, D, E, \ldots, K$ andererseits, ferner C zwischen A, B einerseits und $D, E, \ldots, K$ andererseits, sodann D zwischen A, B, C einerseits und $E, \ldots, K$ andererseits usw. liegt. Ausser dieser Bezeichnungsweise gibt es nur noch die umgekehrte Bezeichnungsweise $K, \ldots, E, D, C, B, A$, die von der nämlichen Beschaffenheit ist".

Dieser Satz, der von Hilbert als für die lineare Anordnung charakteristisch gekennzeichnet wird, ist somit eine Folge der linearen Anordnungsaxiome II_{1-3}, II_4'. Der Satz zeigt die Möglichkeit einer solchen Bezeichnung von n Punkten einer Geraden, dass die Lagenbeziehungen direkt aus den Benennungen ablesbar werden. Ein ergänzendes Kriterium lautet:

Auf einer Geraden liegen n Punkte a_x $(x = 1, 2, \ldots, n)$ dann und nur dann in der durch die Indizes x bestimmten Reihenfolge, wenn die n—2 Bedingungen

$$a_t \vee a_{t-1} a_{t+1} \quad (t = 2,3,4, \ldots, n-1) \tag{8}$$

erfüllt sind.

Der Beweis erfolgt mit Hilfe des Vierpunktsatzes durch v. I.

6. Abhängigkeitsbetrachtungen.

Auf die Unabhängigkeit des Axioms II_4' von den Axiomen II_{1-3} ist schon im § 3 hingewiesen. Durch passend gewählte Anschauungssubstrate lässt sich zeigen, dass Systeme denkbar sind, in denen eines der drei Axiome II_{1-3} falsch wird, während die beiden anderen, desgleichen das Axiom II_4', gültig bleiben.

Ein System, wo II_{1-2}, II_4' richtig sind, II_3 aber nicht, erhält man einfach durch die Forderung jeden Punkt als zwischen jedem Punktepaar liegend anzusehen, wie dies z. B. auf einer Kreislinie veranschaulicht werden kann.

Sucht man ferner ein System, wo II_2 nicht gelten soll, so könnte man dieses Axiom vor allem in zwei Aussagen spalten, die voneinander unabhängig richtig oder falsch sein dürfen: die eine fordert die Existenz eines b, für welches $b \vee ac$, die andere die Existenz eines d, für das $c \vee ad$ besteht. Die Folge der (positiven und negativen) ganzen Zahlen bildet ein System, in welchem nur die erste Aussage falsch wird, wenn man die Zwischenlage nach der Grössenanordnung auf natürliche Weise definiert. Die reellen Zahlen eines abgeschlossenen Intervalls (also die beiden Randzahlen mit einbegriffen) erfüllen unter derselben Voraussetzung nur die Forderung der zweiten Aussage nicht. Die Punkte einer endlichen Menge G_n genügen keiner der beiden Aussagen von II_2, wohl aber den drei übrigen linearen Anordnungsaxiomen.

Um ein Beispiel zu konstruieren, wo II_1 nicht gelten soll, muss man vor allem dem Axiom II_4' eine die Nichtkommutativität berücksichtigende Fassung geben, etwa die folgende:

„Das gleichzeitige Bestehen der fünf Bedingungen $d \bigvee ab$, $d \bigwedge bc$, $d \bigwedge cb$, $d \bigwedge ac$, $d \bigwedge ca$ bildet einen Widerspruch".

In der Menge der rationalen Zahlen r möge nun $r_1 \bigvee r_2 r_3$ dann und nur dann gelten, wenn

$$\begin{array}{ll} \text{entweder} & r_2 < r_1 < r_3, \quad r_3 - r_1 \leqq r_1 - r_2, \\ \text{oder} & r_2 > r_1 > r_3, \quad r_2 - r_1 \geqq r_1 - r_3. \end{array} \tag{9}$$

Das Axiom II_1 ist dann nicht erfüllt, denn es liegt z. B. der Punkt 1 wohl zwischen 0 und $1^1/_2$, und doch nicht zwischen $1^1/_2$ und 0, da $0 < 1 < 1^1/_2$ besteht und $1^1/_2 - 1 < 1 - 0$ erfüllt wird, $1^1/_2 - 1 > 1 - 0$ dagegen nicht. Die übrigen Axiome sind befriedigt.

Zur Charakteristik der linearen Anordnung ist also jedes der vier Axiome II_{1-3}, II_4' notwendig, die gleichzeitige Gültigkeit aller vier hinreichend. Die Forderungen II_{1-3}, II_4' sind voneinander absolut unabhängig.

Wird die Betrachtung auf die Ebene ausgedehnt, wobei I_{1-3}, II_{1-3}, II_4' als gültig angenommen sein mögen, so zeigt die Pasch'sche Forderung, die in der fünften Auflage der „Grundl. d. Geom." bei D. Hilbert als II_4 auftritt[12]), etwas wesentlich Neues, von dem vorigen Unabhängiges. Man erkennt dies sofort, sobald man als „Ebene" den dreidimensionalen Raum selbst auffasst, Punkt und Gerade dagegen in gewöhnlichem Sinne interpretiert; eine Gerade kann dann nämlich eine einzige Dreiecksseite schneiden, ohne eine der anderen notwendig zu treffen. Es ist aber das System I_{1-3}, II_{1-3}, II_4', II_4 kein absolut

12) In der ersten Auflage als II_5 bezeichnet.

unabhängiges, weil sich II_4' aus den übrigen 7 Axiomen ableiten lässt, wie dies inhaltlich von E. H. Moore [13]) erkannt worden ist. Ein Beweis sei kurz angedeutet:

Die Hilbert'sche Formulation des Axioms II_4 enthält eine unscharfe „Entweder-Oder"-Aussage, die auf zwei wesentlich verschiedene Arten verstanden werden kann. Es genügt aber die engere Auffassung, die darauf hinausläuft, dass eine Gerade in der Ebene mindestens zwei Seiten eines Dreiecks schneiden muss, sobald sie eine Seite schneidet, weil man leicht einsieht, dass alle drei Seiten nicht gleichzeitig geschnitten werden können [14]). Sollte nämlich die Gerade L das Dreieck abc in 3 Punkten u, v, w treffen, für die entsprechend $u \vee bc$, $v \vee ca$, $w \vee ab$ gilt, so darf $u \vee vw$ angenommen werden. Dann wäre das Dreieck avw von der Geraden bc nur in dem einen Punkt u getroffen, was II_4 widerspricht.

Es sei nun $d \vee ab$ beliebig und ein Dreieck abc konstruiert, ferner n ein vierter Punkt auf der Geraden ab. Die Gültigkeit von II_4' für das Quadrupel a, b, d, n lässt sich dann folgendermassen nachweisen:

Annahme 1: $n \vee ab$. Man wähle $m \vee bc$ und betrachte die Gerade mn. Sie trifft das Dreieck bcd in m; schneidet sie nach II_4 zugleich die Seite bd, so kann dies nur im Punkt n geschehen, man hat also $n \vee bd$; wird aber die Seite cd getroffen, so übertrage man die Betrachtungen auf das Dreieck cda. Es kann in letzterem ca nicht getroffen werden, weil sonst im Dreieck abc alle drei Seiten von mn geschnitten wären, — notwendigerweise existiert daher ein Schnitt mit ad und dieser kann nur n sein, d. h. es gilt $n \vee ad$.

Annahme 2: $n \vee ad$. Wieder wähle man $m \vee bc$ und betrachte die Gerade mn. Aus der Anwendung von II_4 auf das Dreieck bcd folgt, dass mn eine der Seiten bd, cd treffen muss. Bei der ersten Voraussetzung gilt $n \vee bd$; bei der zweiten erkennt man aus dem Dreieck acd, dass ac nicht getroffen werden kann, — dann zeigt aber das Dreieck abc einen Schnitt der Seite ab mit mn, woraus $n \vee ab$ folgt.

Annahme 3: $n \vee bd$. Vertauscht man in der Behandlung

13) "On the projective axioms of geometry", Trans. Am. Math. Soc., 1902.

14) Vgl. O. Veblen, "A system of axioms for geometry", Trans. Am. Math. Soc., 1904, speziell S. 355—358.

der Annahme 2 die Punkte a, b, so ergibt sich entweder $n \vee ad$ oder $n \vee ab$.

Damit ist bewiesen, dass n stets zwischen zwei Punktepaaren des Tripels a, b, d gelegen ist, sobald n zwischen einem Punktepaar dieses Tripels liegt; dies ist nichts anderes, als die Aussage II_4'.

7. Abtrennung der linearen Aussage vom Pasch'schen Axiom.

Wird für den Augenblick II_4' ausgeschaltet, also auf die Gerade nur II_{1-3} angewandt, so lässt sich, wie dies anlässlich des Begriffs der Dreiecksseite implizite schon im vorigen Paragraphen geschehen, die Strecke ab einer Geraden immer noch als Gesamtheit der zwischen a und b gelegenen Punkte definieren. Die Punkte einer solchen Strecke zerfallen aber in zwei wesentlich verschiedene Kategorien:

1) Es könnte bei $c \vee ab$ eine von ab verschiedene Strecke mn geben, die c enthält, wobei zugleich m, n und jeder Punkt der Strecke mn zu der Strecke ab gehört. Der Punkt c soll dann ein ordinärer Punkt von ab heissen.

2) Es könnte der Fall eintreten, dass eine solche Strecke mn nachweislich nicht existiert; dann soll c ein isolierter Punkt von ab heissen.

Dass sowohl ordinäre, als auch isolierte Punkte zu gleicher Zeit auf ab vorhanden sein können, ersieht man aus dem Beispiel: Gerade — die Menge der reellen Zahlen; Zwischenlagendefinition — für alle Tripel die natürliche, mit alleiniger Ausnahme des Tripels 0, 1, 2, für welches $0 \vee 12$ gelten soll. Dann ist $1^1/_2$ ein ordinärer Punkt der Strecke 12, dagegen 0 ein isolierter Punkt derselben Strecke.

Durch Hinzunahme des Axioms II_4', resp. des Vierpunktsatzes, werden in der Geometrie die isolierten Punkte ausgeschieden. Solange man aber ohne II_4' operiert, darf zwischen ordinären und singulären Geraden unterschieden werden, — erstere sind solche, auf denen jede Strecke ausschliesslich ordinäre Punkte enthält, letztere Gerade dagegen solche, auf denen Strecken konstruierbar sind, die isolierte Punkte tatsächlich enthalten. Die isolierten Punkte können u. a. auch so liegen, dass sie in jeder Strecke ab, der sie angehören, isoliert erscheinen; es ist sogar möglich singuläre Gerade zu konstruieren, auf denen jeder Punkt in solcher Weise isoliert ist. Man hätte dazu z. B. auf der aus rationalen Zahlen r und irrationalen Zahlen i bestehenden Geraden folgende Festsetzungen zu treffen:

$r_1 \vee r_2 r_3$, sobald r_1 die grösste der drei Zahlen r_1, r_2, r_3;
$i \vee r_1 r_2$, sobald i ein Mittelwert für r_1, r_2;
$r_1 \vee i\ r_2$, sobald r_2 ein Mittelwert für i, r_1;
$r \vee i_1 i_2$, sobald r ein Mittelwert für i_1, i_2;
$i_1 \vee i_2\ r$, sobald i_1 ein Mittelwert für r, i_2;
$i_1 \vee i_2 i_3$, sobald i_1 die kleinste der drei Zahlen i_1, i_2, i_3.

Die Axiome II_{1-3} zeigen sich hier erfüllt, und es folgt durch erschöpfende Analyse der verschiedenen denkbaren Fälle, dass eine Strecke B inklusive Randpunkte niemals ein Teil einer anderen, von B verschiedenen Strecke A sein kann, sondern dass stets Punkte angebbar sind, die zwar B, nicht aber A angehören. Diese Zwischenlagendefinition lässt sich dann auch auf jede andere Gerade der Ebene projizieren, so dass eine Ebene entsteht, wo jede Gerade ausschliesslich aus solcherweise isolierten Punkten gebildet ist.

Wünscht man der Hilbert'schen Forderung gemäss den linearen Teil II_4' vom Pasch'schen Axiom zu lösen, so genügt es letzteres Axiom in folgender, die mögliche Existenz singulärer Gerader berücksichtigenden Form auszusprechen:

II_5'. Es seien a, b, c drei nicht in gerader Linie gelegene Punkte und A eine Gerade in der Ebene abc, die keinen der Punkte a, b, c trifft; wenn dann die Gerade A durch einen Punkt der Strecke ab geht, und wenn ab, bc, ca ordinäre Gerade sind, so geht A entweder durch einen Punkt der Strecke bc oder durch einen Punkt der Strecke ac.

Wird II_4' hinzugenommen, m. a. W. die Existenz singulärer Gerader verneint, so resultiert aus II_5' sofort II_4 und damit das Hilbert'sche System. Andererseits kann aus I_{1-3}, II_{1-3}, II_5' allein noch nicht II_4' gefolgert werden, denn es ist offenbar statthaft in der Cartesischen Ebene die X-Achse (etwa in oben geschilderter Weise) als singulär zu definieren, auf jeder anderen Geraden aber die Zwischenlage in natürlicher Weise aufzufassen, wobei dann II_5' Geltung hat, II_4' in der Gesamtebene aber nicht.

Das System der fünf Anordnungsaxiome II_{1-3}, II_5', II_4' genügt mithin der im § 3 zitierten, von Hilbert gestellten Forderung.

8. Verallgemeinerter Streckenbegriff.

Die linearen Anordnungsaxiome II_{1-3}, II_4', die weiterhin allein benutzt werden sollen, gestatten einen topologischen Aufbau des Begriffs vom linearen Kontinuum in sehr allgemeiner Gestalt. Der eindimensionale Raumtypus, auf den die ferneren Betrachtungen beschränkt sind, ist durch die Gültigkeit der vier linearen Anordnungsaxiome ausreichend charakterisiert. Dieser eindimensionale oder „lineare“ [15]) Raum darf demnach durch folgende Definition eingeführt werden:

> Sind die Elemente einer Menge R_1 als Punkte bezeichnet, dabei für diese Elemente der Begriff der Zwischenlage im Einklang mit den Forderungen II_{1-3}, II_4' fixiert, so soll R_1 als ein linearer Raum bezeichnet werden.

Diese synthetische Definition ist von jeglicher Koordinatendarstellung unabhängig. Solange von einem alleinstehenden linearen Raum die Rede ist (ohne Bezugnahme auf eventuell gleichzeitig gedachte andere Räume), kann man unbedenklich den Begriff des linearen Raumes mit dem Begriff der Geraden identifizieren. Infolge der Korrespondenz zwischen Koordinatenräumen verschiedener Dimensionszahl ist es möglich, jeden gewöhnlichen analytischen Raum mit Hilfe einer passenden Zwischenlagendefinition als linearen Raum zu interpretieren. Die Eindimensionalität ist somit nicht eine Eigenschaft des Raumes an sich, sondern erscheint bedingt durch eine spezielle subjektive Art der Auffassung.

Die obige Definition des linearen Raumes führt zunächst zum geläufigen Streckenbegriff, wie dies schon im § 7 angedeutet wurde: eine Strecke ab ist der Inbegriff der zwischen a, b gelegenen Punkte des R_1. Wegen der anerkannten Gültigkeit von II_4' können isolierte Punkte nicht vorkommen. Noch mehr: aus $m \vee ab$,

15) In dem elementaren Sinne, in dem Hilbert von „linearen“ Axiomen spricht. Der Gedanke an „lineare“ (euklidisch-affine) Mannigfaltigkeiten im Sinne der Differentialgeometrie liegt hier dem Wesen nach fern.

$n \vee ab$, $c \vee mn$ folgt nach dem Vierpunktsatz zwangsläufig $c \vee ab$, d. h. jeder Punkt der Strecke mn ist gleichzeitig ein Punkt der Strecke ab, sobald m, n der Strecke ab beliebig entnommen sind.

Zur Vermeidung von Missverständnissen sei betont, dass die Randpunkte a, b selbst nicht zu der durch sie definierten Strecke ab gezählt werden sollen. In den vereinzelten Fällen, wo wir die Vereinigungsmenge der Punkte einer Strecke mit ihren beiden Randpunkten zu betrachten haben werden, soll der Ausdruck „abgeschlossene Strecke“ und das Symbol $[ab]$ Verwendung finden, wenn a und b die Randpunkte sind.

Die Punkte einer Strecke bilden schon für sich allein, bei ungeänderter Definition der Zwischenlage, einen linearen Raum. Eine Strecke enthält daher allemal mindestens abzählbar-unendlich viele Punkte.

Die eine Strecke bildende Teilmenge S des R_1 zeigt folgende drei Streckeneigenschaften:

1°. Sind c, d beliebige Punkte aus S, so gehört im R_1 jeder Punkt x, für den $x \vee cd$ gilt, gleichfalls zu S.

2°. Es existieren zu S gehörige Punkte y, z, für die $c \vee dy$ und $d \vee cz$ gilt.

3°. Es existieren im R_1 Punkte p, q, die S nicht angehören, wobei $c \vee dp$ und $d \vee cq$ gilt.

Die erste Eigenschaft ist schon oben erwähnt. Die zweite folgt aus der Möglichkeit y, z den Bedingungen $y \vee ac$, $z \vee db$ (wo a, b die Randpunkte von S bedeuten) zu unterwerfen, vorausgesetzt, dass die Bezeichnungen gemäss $c \vee ad$, $d \vee cb$ gewählt sind. Die dritte besteht, weil p, q sich so wählen lassen, dass $a \vee pc$, $b \vee dq$ wird.

Es existieren mithin tatsächlich Teilmengen S von R_1, welche die genannten drei Eigenschaften 1—3 zeigen, — man braucht ja bloss S mit der Menge der zwischen a und b gelegenen Punkte zu identifizieren, um eine Teilmenge der geforderten Art zu erhalten. Diese spezielle Art der Konstruktion solcher Teilmengen mit Hilfe zweier ausgezeichneter Punkte a, b ist aber nicht die einzig denkbare: man könnte nämlich, nachdem S als Strecke ab gebildet worden ist, aus R_1 die Randpunkte a, b entfernt denken, wobei von R_1 eine Restmenge R_1' verbleibt, und es zeigt offenbar die ungeändert gebliebene Menge S in Bezug auf R_1' dieselben drei Eigenschaften, wie vordem in Bezug auf R_1. Man kann aber zeigen, dass R_1' bei ungeänderter Definition der Zwischenlage ebenfalls ein linearer Raum ist. Es gilt nämlich der Satz:

> Wird aus einem linearen Raum eine endliche Menge von Punkten ohne Änderung der Definition der Zwischenlage entfernt, so verbleibt als Restmenge wiederum ein linearer Raum.

Es genügt diesen Satz für den Fall der Entfernung eines einzigen Punktes zu beweisen, weil dann das übrige durch v. I. folgt. Wegen der Invarianz der Zwischenlage bedarf hierbei nur das Existenzaxiom II_2 einer näheren Untersuchung. Es sei x der aus R_1 entfernte Punkt. Zwischen m, n muss nach II_2 stets ein Punkt s existieren. Gilt $x \wedge mn$, so ist $s \vee mn$ im R_1' vorhanden, weil s von x verschieden und im R_1 vorhanden ist. Gilt $x \vee mn$, so wähle man $s \vee mx$ im R_1 und hat dann auch $s \vee mn$ im R_1'. Der zweite Teil des Axioms fordert die Existenz eines Punktes t, für den bei vorgegebenen m, n die Beziehung $n \vee mt$ besteht. Im Falle $x \vee mn$ ist die Existenz von t sicher, ebenso im Falle $m \vee nx$; im Falle $n \vee mx$ wähle man $t \vee nx$, wodurch $n \vee mt$ erfüllt wird. Der Satz ist also richtig.

Die oben gebildete Menge S besitzt also im linearen Raum R_1' die drei Streckeneigenschaften, — andererseits ist aber leicht zu ersehen, dass S im R_1' nicht mehr als Menge der zwischen zwei Randpunkten gelegenen Punkte definierbar ist, aus dem einfachen Grunde, weil a, b im R_1' nicht mehr vorhanden sind.

Diese Erkenntnis gestattet folgenden verallgemeinerten Streckenbegriff aufzustellen:

> Jede echte Teilmenge von Punkten eines linearen Raumes, welche die drei Streckeneigenschaften 1—3 aufweist, soll, gleichviel ob zu dieser Teilmenge Randpunkte existieren oder nicht, als eine Strecke in diesem Raume bezeichnet werden.

Existieren im linearen Raum beide Randpunkte zur dort gebildeten Strecke S, so sagen wir, die Strecke S sei in diesem Raume abschliessbar; es kann aber auch der Fall eintreten, dass nur einer der beiden Randpunkte im R_1 vorhanden ist, oder auch, dass beide fehlen, — im ersteren Falle soll die Strecke einseitig-abschliessbar oder auch halboffen, im letzteren Falle offen heissen.

9. Streckenbüschel im linearen Raume.

Sind zwei Strecken M, N nicht punktfremd (d. h. besitzen sie gemeinsame Punkte), so bildet ihr Durchschnitt (die Menge ihrer gemeinsamen Punkte) notwendig wieder eine Strecke. Zum Beweis dieser Behauptung hat man die Punkte des Durchschnitts D in Bezug auf das Verhalten gegenüber den drei Streckeneigenschaften zu untersuchen. Ist i ein Punkt aus D, x ein beliebiger anderer Punkt des zu Grunde liegenden R_1, so müssen in den Bereichen $S_x(i)$, $T_x(i)$ (vgl. §§ 3, 4) Punkte sowohl aus M, als auch aus N existieren (zweite Streckeneigenschaft). Gehört m aus M und n aus N zu $S_x(i)$, so darf $n \vee im$ vorausgesetzt werden, da $i \vee mn$ ausgeschlossen ist; wegen der ersten Streckeneigenschaft von M ist dann aber n auch zu M, mithin auch zu D gehörig. Nachdem so die Existenz zweier gemeinsamer Punkte gesichert ist, folgt weiter, dass jeder zwischen zwei Punkten aus D gelegene Punkt sicher wieder zu D gehört, weil er M und N gleichzeitig angehört. Die erste Streckeneigenschaft ist somit vorhanden. Gleichzeitig zeigen sich auf beiden Seiten bezüglich i Punkte, die zu D zählen, weshalb auch die zweite Streckeneigenschaft vorhanden erscheint. Da jeder nicht zu M und auch nicht zu N zählende Punkt sicher D nicht angehört, so ist auch die dritte Streckeneigenschaft vorhanden. Es ist also D tatsächlich eine Strecke.

Sind nun M, N zwei beliebige Strecken, so nennen wir die Menge U derjenigen Punkte, die entweder M oder N, nicht aber M und N gleichzeitig angehören, den Unterschied von M und N, oder gleichbedeutend, von N und M. Es lassen sich Beispiele angeben, wo dieser Unterschied eine Strecke ist (man definiere etwa M als ab, N als ac, wobei $c \vee ab$, und entferne hierauf den Punkt c aus dem R_1). Ist U eine Strecke, oder wird U nach Entfernung oder Hinzufügung eines einzigen Punktes zu einer Strecke, so sagen wir, die Strecken M, N seien im R_1 zusammenstossend; die Unterschiedsstrecke symbolisieren wir dann auch mittels $|M—N|$ oder $|N—M|$.

Ist zur Bildung der Unterschiedsstrecke die Hinzufügung eines Punktes zum Unterschied nötig, so sind M, N punktfremd; ist die Entfernung eines Punktes nötig, so ist eine der Strecken M, N ein echter Teil der anderen.

Eine einfache Untersuchung zeigt nämlich, dass die Hinzufügung oder die Entfernung eines Punktes nur dann vonnöten sein kann, wenn mindestens ein Randpunkt existiert; der hinzugefügte oder entfernte Punkt ist stets ein Randpunkt mindestens einer der Strecken M, N. Ist die Hinzufügung dieses Randpunktes zum Unterschied erforderlich, so zeigen sich M, N auf entgegengesetzten Seiten bezüglich dieses Randpunktes als Trennungspunkt gelegen und sind daher punktfremd. Ist die Entfernung des Randpunktes nötig, so erweist sich dieser zu entfernende Randpunkt zugleich als Randpunkt der Unterschiedsstrecke und als Randpunkt des Durchschnitts; letzterer ist dabei mit einer der Strecken M, N identisch. Sind M, N zusammenstossende offene Strecken, so ist $|M-N|$ mit dem Unterschied von M, N identisch. Halboffene oder abschliessbare Strecken mit gemeinsamem Randpunkt sind allemal zusammenstossend.

Die Strecken M, N, P sollen gleichsinnig zusammenstossend heissen, wenn jedes Paar dieses Tripels zusammenstossend ist, dabei aber jede dieser Strecken von der Unterschiedsstrecke der beiden anderen verschieden bleibt. Ist die letzte Bedingung nicht erfüllt, so reden wir von ungleichsinnig zusammenstossenden Strecken. Es sind ab, ac, ad gleichsinnig, ab, bc, ac ungleichsinnig zusammenstossende Strecken.

Stossen M, N, P in jeder Paarung zusammen, so kann nicht jedes Paar dieses Tripels punktfremd sein. Wählt man nämlich 3 Punkte, m aus M, n aus N, p aus P, so darf $m \vee np$ vorausgesetzt werden; sollten dann N, P punktfremd sein, so gehören n und p zu $|N-P|$, — infolge der ersten Streckeneigenschaft muss jetzt aber auch m zu $|N-P|$ gehören, d. h. m gehört entweder zu N oder zu P.

Stossen M, N, P ungleichsinnig zusammen, so darf man P mit $|M-N|$ identifizieren, was symbolisch $P \equiv |M-N|$ geschrieben werden mag. Sind hierbei M, N punktfremd, so zeigt eine einfache Überlegung, dass dann auch $M \equiv |N-P|$ und $N \equiv |P-M|$. Sind jedoch M, N nicht punktfremd, so ist ihr

Durchschnitt entweder mit M oder mit N identisch, und wieder ergibt sich $M \equiv |N-P|$, $N \equiv |P-M|$. Bei der ersteren Annahme ist M, N das einzige punktfremde Paar, bei der letzteren Annahme P, N das einzige punktfremde Paar, wenn N den Durchschnitt von M, N darstellt. Also:

In einem ungleichsinnig zusammenstossenden Streckentripel ist jede Strecke die Unterschiedsstrecke der beiden anderen, dabei existiert im Tripel ein und nur ein punktfremdes Streckenpaar.

Für gleichsinnig zusammenstossende Strecken gilt daher der Satz:

Im gleichsinnig zusammenstossenden Tripel ist entweder kein einziges punktfremdes Streckenpaar vorhanden, oder es sind zwei und nur zwei Paare punktfremd.

Im Falle, wo M, N das einzige punktfremde Paar des Tripels ist, zeigt sich nämlich $P \equiv |M-N|$.

Eine (endliche oder unendliche) Menge Σ von Strecken des R_1 soll eine Verknotung von Strecken heissen, sobald jedes Streckenpaar aus Σ ein zusammenstossendes Paar bildet. Enthält Σ mehr als drei Strecken, so muss in Σ jedes Streckentripel gleichsinnig zusammenstossen. Wären nämlich A, B, C drei ungleichsinnig zusammenstossende Strecken aus Σ, so dürfte vorausgesetzt werden, dass A, B punktfremd sind, wobei $A < C$, $B < C$ (die Schreibweise $U < V$ soll hier und weiterhin besagen, dass die Menge U einen echten Teil der Menge V bildet). Ist dann eine vierte Strecke D aus Σ mit C punktfremd, so ist D auch mit A, B punktfremd. Dann könnten A, B, D aber nicht in jeder Paarung zusammenstossen. Es ist also notwendigerweise entweder $C < D$, oder $D < C$. Bei der ersteren Annahme gilt $A < D$, $B < D$; wählt man nun einen Punkt d aus D, der weder A noch B angehört, ferner zwei Punkte a, b entsprechend aus A, B, so gilt dann $d \wedge ab$, weil $|A-B|$ eine Strecke ist, desgleichen $b \wedge ad$, weil $|D-B|$ eine Strecke ist, ebenso $a \wedge bd$, weil $|A-D|$ eine Strecke ist; das Axiom II_3 wäre also nicht befriedigt. Bei der zweiten Annahme $D < C$ hat man die drei Fälle 1°: $A < D$, 2°: $D < A$, 3°: A, D punktfremd, zu unterscheiden. Im Falle 1 müssten Punkte existieren, die D, B gleichzeitig angehören, ohne dass jedoch jeder Punkt von B zu D, oder jeder Punkt von D zu B gehörte, — dann könnten aber B, D nicht zusammenstossen. Im Falle 2 müssten D, B punktfremd sein, dann gilt im Punkttripel a, b, d, wo a nicht zu D gehört, sicher $a \wedge bd$, weil $|B—D|$ eine Strecke, desgleichen $b \wedge ad$, weil A, B punktfremd, ebenso $d \wedge ab$, weil $|C—D|$ eine Strecke ist; man gelangt also aufs neue zu einem Widerspruch mit II_3. Der Fall 3 bedingt $D < B$; er wird nach Vertauschung von A mit B ebenso erledigt, wie 2. Damit ist die oben aufgestellte Behauptung bewiesen.

Eine etwas langwierige, inhaltlich keine Schwierigkeiten bietende Untersuchung aller denkbaren Einzelfälle, die hier übergangen werden soll, führt zur Erkenntnis des Kriteriums:

> Eine Menge Σ von Strecken des Raumes R_1 stellt eine Verknotung dar, sobald jede Strecke aus Σ mit zwei beliebig fixierten Strecken derselben Menge Σ gleichsinnig zusammenstösst.

M. a. W.: die Strecken A, B stossen zusammen, sobald A, M, N und B, M, N zwei gleichsinnig zusammenstossende Tripel sind. Das Kriterium enthält somit eine Aussage über die Transitivität des Begriffes zusammenstossender Strecken.

Man wähle nun zwei beliebige zusammenstossende Strecken M, N und rechne zu Σ zunächst diese beiden Strecken, ausserdem aber noch jede mit M, N gleichsinnig zusammenstossende Strecke. Die solcherweise definierte spezielle Verknotung soll der Streckenbüschel (M, N) heissen.

10. Nichtabzählbarkeit des Streckenbüschels.

Bedeuten X, Y beliebige Strecken aus (M, N), so zeigt sich (X, Y) mit (M, N) identisch. Denn erstens sind X, Y sicher zusammenstossende Strecken, zweitens ist jede Strecke A, die mit M, N gleichsinnig zusammenstösst, notwendig auch mit X, Y zusammenstossend, drittens bildet die Menge der Strecken A eine Verknotung, weshalb A, X, Y als gleichsinnig zusammenstossendes Tripel erkennbar ist; analoge Betrachtungen gelten für X, Y, M und X, Y, N. Hieraus ergibt sich aber die Identität von (X, Y) mit (M, N).

Es soll nun eine Definition der Zwischenlage gegeben werden, die es ermöglicht, (M, N) als linearen Raum aufzufassen, dessen „Punkte" (Elemente) eben die Strecken des Büschels sind. Es läuft dies auf eine Substitution der Worte „Punkt" für „Strecke" und „linearer Raum" für „Streckenbüschel" hinaus.

Man treffe folgende Festsetzungen:

Sind A, B aus (M, N) nicht punktfremd, so darf $A < B$ gesetzt werden; es heisst dann A die kleinere, B die grössere der beiden Strecken. Es ist eine Konsequenz der mit dem Teilbegriff verknüpften Vorstellungen, dass $A < B$, $B < C$ allemal $A < C$ bedingt. B heisst in diesem Falle die mittlere der drei Strecken.

Es sei U, V, W ein beliebiges Tripel aus (M, N). Sind die Paare dieses Tripels allesamt nicht punktfremd, so werde V durch die Forderungen $U < V$, $V < W$ als mittlere Strecke bestimmt; es soll in diesem Falle $V \vee UW$ gelten. Ist aber im Tripel nur ein einziges Paar V, W nicht punktfremd, so werde V durch die Forderung $V < W$ bestimmt; dann soll wieder $V \vee UW$ gelten. Diese Definitionen sind kommutativ zu verstehen, d. h. es soll gleichzeitig $V \vee WU$ sein. Die Axiome II_1 und II_3 sind auf diese Weise erfüllt. Es bleibt zu untersuchen, wie die hier getroffenen Verabredungen sich mit II_2 und II_4' vertragen.

Mit Hilfe der früher gefundenen Resultate lässt sich nachweisen, dass im Streckenbüschel zu jeder Strecke sowohl eine kleinere, als auch eine grössere Strecke angebbar ist. Noch mehr: ist im (M, N) ein Streckenpaar A, B beliebig vorgegeben, wobei $A < B$, so lässt sich im (M, N) eine Strecke C konstruieren, welche der Forderung $A < C$, $C < B$ Folge leistet. Der etwas langwierige, begrifflich nicht komplizierte Beweis dieser Behauptungen soll hier übergangen werden. Eine Paraphrase der Resultate zeigt die Gültigkeit des Axioms II_2 für die oben gegebene Zwischenlagendefinition der Strecken.

Auch II_4' ist erfüllt. Fixiert man nämlich A, B, C im Büschel, so darf $B \vee AC$, $B < C$ angenommen werden. Ist dabei $A < B$, so folgt die Gültigkeit von II_4' bei einer vierten Strecke D direkt aus der Transitivität des Begriffes „echter Teil"; ist aber A mit B punktfremd, so hat man drei Möglichkeiten:

1°. $D \vee BC$, also $D < C$, $B < D$, — dann ist auf Grund der Definitionen offenbar auch $D \vee AC$.

2^0. $D \vee AC$, also D entweder mit A oder mit C punktfremd. Im ersteren Falle gilt $D < C$; wenn dann auch $D < B$, so ist $D \vee AB$, wenn aber $B < D$, so besteht $D \vee BC$. Im letzteren Falle ist $D < A$, mithin $D \vee AB$.

3^0. $D < AB$, — dann ist stets auch $D \vee AC$.

Der Streckenbüschel erweist sich also tatsächlich infolge der oben gewählten Definition des Begriffs der Zwischenlage als ein linearer Raum. Als solcher muss er unendlich viele konstituierende Elemente enthalten. Eine Eigentümlichkeit des Streckenbüschels besteht aber darin, dass diese Unendlichkeit nicht-abzählbar ist. Der Gedankengang des Beweises dieser Behauptung sei kurz angedeutet[16]):

Es seien die Strecken des (M, N) abgezählt als A_1, A_2, A_3, ..., A_t, ... bezeichnet. Man bestimme dann eine Teilmenge Γ der A_t folgendermassen: Das Element A_1 soll zu Γ zählen; ausgeschieden werde jedes Element, welches grösser als A_1, oder zu A_1 punktfremd ist; unter den verbliebenen Elementen soll dasjenige mit kleinstem Index zu Γ gezählt und in $A^{(2)}$ umbenannt werden, zugleich soll für das schon zu Γ gezählte A_1 die Umbenennung $A^{(1)}$ Verwendung finden; ausgeschieden werde nun noch jedes Element, welches kleiner ist als $A^{(2)}$; unter den verbliebenen soll dasjenige mit kleinstem Index als $A^{(3)}$ zu Γ gezählt werden; ausgeschieden werde weiterhin jedes Element, welches grösser ist als $A^{(3)}$; unter den nunmehr noch verbliebenen soll dasjenige mit kleinstem Index ausgesucht und als $A^{(4)}$ der Teilmenge Γ einverleibt werden; ausgeschieden werde jede Strecke, die kleiner ist als $A^{(4)}$ usw. Dieses Bildungsgesetz liefert Γ als abgezählte unendliche Menge

$$A^{(1)},\ A^{(2)},\ A^{(3)},\ A^{(4)},\ \ldots,\ A^{(n)},\ \ldots \tag{10}$$

Durch v. I. erkennt man, dass

$$\begin{aligned} A^{(2g)} &< A^{(2f-1)}\ ; \\ A^{(2g)} &< A^{(2h)}\ ,\ \text{sofern } g < h; \\ A^{(2f-1)} &< A^{(2e-1)}\ ,\ \text{sofern } e < f. \end{aligned} \tag{11}$$

Im R_1, welchem der Streckenbüschel (M, N) entnommen ist, fixiere man nun die Punktmenge X, die aus solchen und nur solchen Punkten besteht, welche jeder Strecke $A^{(2f-1)}$ ange-

16) Die Idee des Beweisganges gehört G. Cantor (J. f. Math. 77, S. 259—260).

hören. Es ist denkbar, dass in X ein Punkt x_0 vorkommt, in Bezug auf welchen jeder andere Punkt x aus X in demselben Bereich $S_x(x_0)$ liegt; dieser ausgezeichnete Punkt x_0 soll, falls er existiert, aus X entfernt werden; die Restmenge sei X'. Eine Analyse zeigt dann, dass diese Menge X' die drei Streckeneigenschaften aufweist, und zwar ist X' eine Strecke des Büschels (M, N), weil X' mit $A^{(2)}$ und $A^{(4)}$ gleichsinnig zusammenstösst. Man erkennt, dass

$$A^{(2g)} < X' < A^{(2f-1)}, \tag{12}$$

für jedes Paar von Ordnungszahlen f, g. Hieraus folgt, dass X' nicht zu Γ gehört, ebenso aber auch nicht zu den bei der Bildung von Γ „ausgeschiedenen“ Strecken. Sollte aber (M, N) abzählbar sein, so hätte man bei bestimmtem t sicher $X' \equiv A_t$, und dann müsste X' notwendig entweder in Γ, oder unter den „ausgeschiedenen“ Strecken auftreten. Damit ist ein Widerspruch erwiesen.

Die Existenz nicht-abzählbarer linearer Räume ist somit gesichert.

11. Begriff des Kontinuums.

Haben zwei Strecken A, B eines Streckenbüschels einen gemeinsamen Randpunkt o, so ist dieser Punkt o gemeinsamer Randpunkt einer jeden Strecke des Büschels; zugleich ist o der einzige Punkt, der keiner Strecke des Büschels angehört. Es soll in diesem Falle o der Ursprung des Streckenbüschels heissen.

Man fixiere im R_1 einen Büschel mit dem Ursprung o. Interpretiert man (M, N), wie im § 10 dargelegt, als „linearen Raum“, so sind die „Punkte“ von (M, N) nichts anderes, als die Strecken des Büschels (M, N) im R_1; aus diesen „Punkten“ können wiederum „Strecken“ gebildet werden. Um Missverständnissen vorzubeugen, sollen hier die in der neuen Interpretation geltenden Begriffsbildungen durch Anführungszeichen gekennzeichnet werden. Eine „Strecke“ im „Raum“ (M, N) ist also eine gewissen Anforderungen genügende Menge von Strecken des Büschels (M, N) im R_1. Es erweist sich als zweckmässig, auch den Ursprung o des Büschels (obgleich dieser Ursprung keine Strecke des Büschels ist) zu den „Punkten“ des „Raumes“ zu zählen, — wir reden dann auch von der Nullstrecke o. Es müssen dann aber noch Vereinbarungen über die Zwischenlagendefinition für diese Nullstrecke getroffen werden. Sind A, B im (M, N) punktfremd, so soll $o \vee AB$ gelten, ist aber $A < B$, so hat $A \vee oB$ zu bestehen. In dem so ergänzten „Raum" gelten dann tatsächlich, wie man sich direkt überzeugt, die linearen Anordnungsaxiome II_{1-3}, II_4'. Der nach Hinzunahme der Nullstrecke zum Streckenbüschel entstandene „lineare Raum" werde mittels K_1 symbolisiert. Eine charakteristische Eigenschaft dieses K_1 besteht darin, dass im K_1 jede „Strecke" abschliessbar ist. Man erkennt dies schrittweise nach folgendem Schema:

Es sei eine aus „Punkten" J bestehende „Strecke" Σ im K_1 fixiert. Man greife zunächst einen beliebigen „Punkt" J dieser „Strecke" heraus und konstruiere im R_1 die Menge P derjenigen Punkte, welche J oder einem zu J nicht punktfremden „Punkt" von Σ angehören. Diese Menge P zeigt im R_1 die drei Streckeneigenschaften, wobei o sich als Randpunkt erweist; es ist demnach P eine Strecke des Büschels (M, N). Dabei gehört P sicher nicht zu Σ, wohl aber liegen sämtliche „Punkte" der „Strecke" Σ auf einer „Seite" bezüglich des „Punktes" P, und jeder „Punkt" L gehört zu Σ, falls $L \vee PJ$. P zeigt demnach alle Eigenschaften eines „Randpunktes" der „Strecke" Σ. Ein Randpunkt ist also sicher vorhanden. Sollte nun Σ „Punkte" E enthalten, die dem vorhin benutzten „Punkt" J gegenüber punktfremd sind, so greife man ein beliebiges solches E heraus und konstruiere mit seiner Hilfe, analog dem Vorigen, einen zweiten „Randpunkt" Q. Sollte jedoch ein solcher „Punkt" E in Σ nicht vorhanden sein, so sehe man, ob nicht eine Strecke U im Büschel existiert, die kleiner ist als J, dabei aber nicht zu Σ zählt. Im Falle der Existenz von U konstruiere man im R_1 die Punktmenge Q, die aus denjenigen Punkten besteht, welche solchen Strecken U angehören. Diese Menge Q erweist sich wieder als eine Strecke des Büschels (M, N) und zeigt in Bezug auf die „Strecke" Σ die Eigenschaften des zweiten „Randpunktes". Sollte aber auch keine Strecke U vorhanden sein, so hat man in der Nullstrecke o den gesuchten zweiten „Randpunkt" Q von Σ. Es ist also wirklich jede „Strecke" Σ im K_1 als Gesamtheit der zwischen zwei „Punkten" P, Q gelegenen „Punkte" darstellbar, m. a. W. jede „Strecke" Σ ist im K_1 abschliessbar.

Unabhängig von der speziellen Erzeugungsart soll nun ein linearer Raum, in welchem jede Strecke abschliessbar ist, ein lineares Kontinuum heissen und mit K_1 bezeichnet werden.

Der mit Hilfe des Streckenbüschels konstruierte „Raum" ist hiernach ein Spezialfall eines Kontinuums; die Anzahl seiner „Punkte" ist, nach § 10, sicher nicht-abzählbar. Letztere Eigenschaft gilt aber für jedes beliebige Kontinuum. Denn fixiert man im K_1 einen Ursprung o, so entsteht eine Korrespondenz zwischen den von o verschiedenen Punkten des K_1 und den Strecken des zu o gehörigen Büschels, — jeder Strecke entspricht nämlich ihr zweiter (sicher existierender) Randpunkt; weil aber die Strecken des Büschels nicht-abzählbar sind, so gilt dasselbe für die Punkte des K_1.

Eine Konsequenz hiervon ist, dass in jedem R_1, dessen Punkte abzählbar sind, stets nicht-abschliessbare Strecken angebbar sein müssen.

12. Irrationale Punkte.

Es sei R_1 kein Kontinuum. Man fixiere einen beliebigen Punkt o als Ursprung eines Büschels (M, N) in diesem Raume R_1 und betrachte zugleich das durch diesen Büschel bestimmte „lineare Kontinuum" K_1. Zwischen den abschliessbaren Strecken des Büschels (M, N) und den von o verschiedenen Punkten des R_1 besteht eine, der am Schluss des vorigen Paragraphen erwähnten analoge, Korrespondenz: jeder Strecke entspricht eineindeutig ihr von o verschiedener zweiter Randpunkt. Es möge nun noch die Nullstrecke dem Punkte o entsprechen. Die Korrespondenz ist dann, wie leicht zu ersehen, anordnungstreu, d. h. die Zwischenlage ist für je drei Elemente dieselbe, wie im korrespondierenden Tripel.

Man bereichere nun die Punktmenge R_1 um neue Elemente, die wir irrationale Punkte nennen wollen, wobei folgende Forderungen zu erfüllen sind:

Es soll eine Korrespondenz zwischen den irrationalen Punkten und den nicht-abschliessbaren Strecken des Büschels bestehen, zugleich die frühere Korrespondenz zwischen den abschliessbaren Strecken und den Punkten des R_1 beibehalten werden. Es besteht dann eine Korrespondenz zwischen den Strecken von (M, N) und der Vereinigungsmenge der irrationalen Punkte mit dem R_1, oder, was auf dasselbe hinausläuft, eine Korrespondenz zwischen dem K_1 und dieser Vereinigungsmenge. Mittels dieser Korrespondenz soll nun die Definition der Zwischenlage auf jedes Elemententripel der Vereinigungsmenge übertragen sein. Die Zwischenlage für jedes Tripel von Punkten des R_1 bleibt dann offenbar unverändert die frühere.

Die Vereinigungsmenge wird dadurch in ein lineares Kontinuum verwandelt, welches infolge der anordnungstreuen Korrespondenz von dem K_1 nicht wesentlich verschieden ist. Soll die Ableitung aus dem R_1 für die Vereinigungsmenge explizite angedeutet werden, so verwenden wir für diese Vereinigungsmenge das Symbol der Derivierten R_1'. Die ursprünglich schon im R_1 vorhandenen Punkte des R_1' nennen wir zur Unterscheidung dann rationale Punkte des R_1'. Die ursprüngliche Anordnung der rationalen Punkte erleidet durch das Hinzutreten der irrationalen Punkte keine Störung.

Zwischen zwei beliebigen Punkten des R_1' lässt sich stets ein rationaler Punkt angeben. Zwei verschiedene Strecken B, C des Büschels (M, N) müssen sich nämlich allemal mindestens um einen Punkt a aus R_1 unterscheiden; für die mit diesem a korrespondierende abschliessbare Strecke A gilt notwendig $A \vee BC$; entspricht also b aus R_1' der Strecke B, und c aus R_1' der Strecke C, so ist $a \vee bc$ sicher erfüllbar.

Die rationalen Punkte liegen also im R_1' überall dicht[17]).

Entfernt man aus einem Kontinuum eine endliche Anzahl von Punkten, so verbleibt als Rest wohl ein linearer Raum, jedoch kein Kontinuum, denn jede Strecke, deren Randpunkt zu den entfernten gehört, ist im Restraum nicht mehr abschliessbar.

Ein lineares Kontinuum zeigt sich stets mit Punkten so weit gesättigt, dass es nicht mehr möglich ist, diesem Kontinuum ohne Störung der Anordnung eine endliche Anzahl neuer Punkte im Einklang mit den linearen Anordnungsaxiomen einzufügen. Denn nach dem vorigen könnte ja dieser hypothetische „ergänzte“ lineare Raum kein Kontinuum darstellen, — er müsste daher nicht-abschliessbare Strecken aufweisen; eine solche nicht-abschliessbare Strecke müsste dann aus der Vereinigung einer Strecke des ursprünglichen Kontinuums mit einer endlichen Anzahl neuer Punkte bestehen. Auf Grund des § 5

---

17) G. Cantor, Math. Ann. 15 (1879), S. 2.

lässt sich aber nachweisen, dass diese neuen Punkte zwischen den Randpunkten der ursprünglichen Strecke liegen müssen, d. h. die früheren Randpunkte sind auch jetzt noch Randpunkte der Vereinigungsmenge, die Strecke wäre also doch abschliessbar.

Hier ist zu beachten, dass ein Kontinuum sich aber wohl durch Hinzunahme einer unendlichen (eventuell abzählbaren) Menge neuer Punkte ohne Störung der ursprünglichen Anordnung zu einem neuen linearen Raum ergänzen lässt. Man braucht dazu z. B. nur einen beliebigen Punkt des Kontinuums durch einen linearen Raum zu „substituieren" (den Punkt in eine Strecke „aufzulösen") und zweckmässige Festsetzungen über die Zwischenlage der neuen Punkte zu treffen, analog den im nächsten Paragraphen getroffenen Vereinbarungen.

Bei der Bildung des R_1' aus dem R_1 hätte man etwas allgemeiner verfahren können, indem man zunächst den R_1 nur um einen Teil der Menge der irrationalen Punkte, nicht gleich um jeden fehlenden irrationalen Punkt bereicherte. Der Aufbau übereinanderliegender Zahlkörper bei algebraischen Untersuchungen liefert Beispiele solcher Raumbildungen. Jeden auf diese Art entstandenen Raum über R_1 wollen wir, um die Rolle des Streckenbüschels bei dieser Begriffserweiterung anzudeuten, einen Büschelraum über dem R_1 nennen; enthält dieser Büschelraum jeden irrationalen Punkt, so erhält man das R_1 nächstliegende Büschelkontinuum. Ist der R_1 schon selbst ein Kontinuum, also jede Strecke im R_1 abschliessbar, so werden durch den Streckenbüschel überhaupt keine irrationalen Punkte definiert, — der R_1 ist dann mit dem ihm nächstliegenden Kontinuum identisch. In jedem Falle ist das nächstliegende Kontinuum durch R_1 bis auf die Wahl des Punktes o vollkommen bestimmt.

Im Kontinuum ist jeder Streckenbüschel bestimmt, sobald sein Ursprung o (der im Kontinuum jedesmal sicher existiert) gegeben ist; der Ursprung darf daher als Symbol für den Büschel verwendet werden. Hat man zwei Büschel o, o', und lässt man die Strecke oa des einen Büschels stets der Strecke $o'a$ des anderen entsprechen, so erhält man eine anordnungstreue Korrespondenz der Strecken beider Büschel. Diese anordnungstreue Korrespondenz bleibt offenbar bestehen, wenn man auf den R_1 zurückgeht, zu dem unser Kontinuum als nächstliegendes gebildet war, m. a. W.:

Zwischen zwei beliebigen Streckenbüscheln eines beliebigen linearen Raumes besteht stets eine anordnungstreue Korrespondenz.

Infolge der im Kontinuumsbegriff enthaltenen Konzentration der Ideen gestaltet sich die Formulierung der in linearen Räumen geltenden Gesetze einfacher, sobald man diese Räume als Kontinua voraussetzt.

13. Die Menge der Streckenbüschel.

Es sei ein K_1 vorgelegt und in diesem dann jeder Streckenbüschel gebildet. Die Vereinigungsmenge der Elemente dieser Streckenbüschel sei kurz als Menge der Streckenbüschel bezeichnet, wobei aber zu beachten ist, dass die Elemente dieser Menge nicht die Büschel, sondern die Strecken (inklusive Nullstrecken) sein sollen. Diese Elemente sollen nun als „Punkte" aufgefasst werden; man bedarf dann noch einer zweckmässigen Definition der Zwischenlage, um die Menge der Streckenbüschel in einen „linearen Raum" zu verwandeln.

Das Kontinuum K_1 soll hierzu zunächst orientiert werden, was folgendermassen geschieht: Man fixiere zwei beliebige Punkte o, p im K_1; jeder zu $S_p(o)$ gehörige Punkt soll dann positiv bezüglich o, jeder zu $T_p(o)$ gehörige Punkt dagegen negativ gelegen heissen; ist o' ein beliebiger von o und p verschiedener Punkt, so hat man entweder $p \wedge oo'$ oder $p \vee oo'$, — im ersteren Falle heisse jeder $S_p(o')$ entnommene Punkt positiv bezüglich o', jeder $T_p(o')$ entnommene Punkt dagegen negativ bezüglich o' gelegen, im letzteren Falle soll umgekehrt jeder zu $T_p(o')$ zählende Punkt positiv, jeder zu $S_p(o')$ zählende Punkt negativ bezüglich o' gelegen heissen; jeder Punkt aus $T_o(p)$ soll als positiv bezüglich p, jeder Punkt aus $S_o(p)$ als negativ bezüglich p gelegen angesehen werden.

Ist nun ab eine Strecke des K_1, so ist es bestimmt, welcher der beiden Randpunkte a, b positiv bezüglich des anderen liegt. Die Strecke ab gehört stets zwei verschiedenen Büscheln mit den Ursprüngen a, b an. Ist b positiv bezüglich a gelegen, so nennen wir ab eine positive Strecke des Büschels a. In einem und nur einem der beiden Büschel a, b ist die Strecke *ab* positiv; der Büschel *a*, dem *ab* positiv angehört, ist durch diese Strecke bestimmt.

Sind nun A, B, C Strecken im K_1, also „Punkte“ des neuen „Raumes“, so wären drei Fälle zu unterscheiden:

1°. A, B, C sind positive Strecken dreier verschiedener Büschel a, b, c. Es soll dann $A \vee BC$ gelten, sobald $a \vee bc$ besteht.

2°. A, B sind positive Strecken eines Büschels a, dagegen C positiv in einem hiervon verschiedenen Büschel c. Weil positive Strecken ein und desselben Büschels nie punktfremd sein können, darf $A < B$ angenommen werden. Es soll dann $B \vee AC$ gelten, falls c positiv bezüglich a gelegen, dagegen $A \vee BC$, falls a positiv bezüglich c gelegen ist.

3°. A, B, C sind positive Strecken eines Büschels a. Die Zwischenlage $A \vee BC$ sei dann durch $B < A < C$ vorgeschrieben.

Die Nullstrecken sollen hierbei formal wie positive Strecken der durch sie bestimmten Büschel behandelt werden, mit der ergänzenden Bestimmung, dass die Nullstrecke kleiner sein soll, als jede andere positive Strecke des Büschels.

Man überzeugt sich dann direkt, dass die Axiome II_{1-3}, II_4' gelten. Die Menge der Streckenbüschel wird also auf diese Weise tatsächlich als ein „linearer Raum“ interpretiert. Dieser „Raum“ soll der über K_1 nächstliegende Streckenraum heissen. Er ist sicher kein Kontinuum. Fasst man nämlich in einem fixierten Büschel des K_1 die Menge der positiven Strecken dieses Büschels zusammen, so hat man damit eine Menge von „Punkten“, die den drei Eigenschaften einer „Strecke“ genügt. Diese „Strecke“ besitzt aber nur einen „Randpunkt“ im „Streckenraum“, nämlich die Nullstrecke des Büschels im K_1, — diese „Strecke“ ist also nicht „abschliessbar“.

Durch Hinzunahme der fehlenden irrationalen „Punkte“, m. a. W. durch Bildung des nächstliegenden Büschelkontinuums (über dem Streckenraum), gelangt man zu einem neuen Kontinuum, welches das K_1 nächstliegende Streckenkontinuum heissen möge.

Da die Gesamtheit der Nullstrecken des K_1 mit der Gesamtheit der Punkte desselben K_1 wesentlich identisch ist, und da das K_1 nächstliegende Streckenkontinuum die Gesamtheit dieser Nullstrecken als Teilmenge enthält, so darf man sich das Streckenkontinuum auch durch Ergänzung des K_1 mittels einer Menge idealer Punkte (derjenigen positiven Strecken des K_1, die keine Nullstrecken sind) entstanden denken, welche dann noch um eine Menge irrationaler idealer Punkte (bei der Bildung des Büschelkontinuums über dem Streckenraum) zu bereichern ist. Im Streckenkontinuum existieren Strecken, die keinen Punkt des ursprünglichen K_1 enthalten, — die oben erwähnte „Strecke" der positiven Strecken eines Büschels im K_1 liefert ein Beispiel hierfür.

Über dem Streckenkontinuum kann nun allemal ein neues nächstliegendes gebildet werden. Durch v. I. beweist man den Satz:

Ein beliebig gegebener linearer Raum R_1 bestimmt allemal zugleich eine abzählbar-unendliche Folge von Kontinuen

$$K_1^{(1)},\ K_1^{(2)},\ K_1^{(3)},\ \ldots\ K_1^{(n)},\ \ldots \tag{13}$$

Hier bedeutet $K_1^{(1)}$ das R_1 nächstgelegene Büschelkontinuum und $K_1^{(i+1)}$ das $K_1^{(i)}$ nächstgelegene Streckenkontinuum. Im $K_1^{(1)}$, welches eventuell auch mit R_1 identisch sein kann, liegen die Punkte von R_1 stets überall dicht. Im $K_1^{(j)}$ liegen die Punkte des $K_1^{(i)}$ bei $i<j$ nirgends dicht.

Es ist daher nicht statthaft mit der intuitiv naheliegenden Idee einer Geraden, die alle überhaupt denkbaren Punkte enthält, zu operieren.

14. Stetige Deformation.

Zwei lineare Räume, für deren Punkte eine anordnungstreue Korrespondenz herstellbar ist, sind einander ähnlich. Die Substitution eines linearen Raumes durch denselben linearen Raum, aber mit Vermittelung einer anordnungstreuen Korrespondenz zwischen den Punkten in der ersten und zweiten Auffassung, soll eine stetige Deformation dieses Raumes heissen; die identische Deformation, bei der jeder Punkt sich selbst entspricht, ist hierbei als Spezialfall mit einbegriffen. Die Gesamtheit der stetigen Deformationen eines R_1 bildet dann eine Gruppe, indem die aufeinanderfolgende Ausführung zweier stetiger Deformationen einer neuen stetigen Deformation gleichbedeutend ist. Die zur stetigen Deformation σ inverse Deformation σ^{-1} macht σ rückgängig, die Verknüpfung $\sigma^{-1}\sigma$ bedeutet also die identische Deformation. Letztere Beziehung ist eine wechselseitige, d. h. $(\sigma^{-1})^{-1}$ ist mit σ gleichbedeutend. Die n-malige Verknüpfung von σ mit sich selbst werde σ^n geschrieben, analog sei die n-malige Verknüpfung von σ^{-1} mit sich selbst durch σ^{-n} symbolisiert; σ^n und σ^{-n} erweisen sich als wechselseitig inverse Deformationen.

Der Begriff der Strecke ist eine Invariante für jede stetige Deformation, d. h. eine Strecke S erweist sich auch nach ausgeführter stetiger Deformation stets wieder als eine Strecke des deformierten Raumes.

Als Knoten der stetigen Deformation σ sollen diejenigen Punkte bezeichnet werden, die bei der durch σ bestimmten Zuordnung sich selbst entsprechen. Jeder Knoten von σ ist zugleich auch Knoten von σ^n und σ^{-n} bei jedem n. Bei der identischen Deformation ist jeder Punkt ein Knoten.

Es möge der Punkt a durch σ in a' übergehen, ferner a' durch dieselbe Deformation σ in a'', oder, was dasselbe besagt, a möge durch σ^2 in a'' übergehen. Besteht dann

$$a' \vee aa'', \tag{14}$$

so soll die Deformation σ monoton heissen. Diese Definition ist dadurch gerechtfertigt, dass in diesem Falle σ sich auch dann als monoton erweist, wenn statt a ein beliebiger anderer Ausgangspunkt b fixiert wird, wenn nur b kein Knoten von σ ist. Eine von der identischen Deformation verschiedene, nicht-monotone stetige Deformation besitzt höchstens einen Knoten. Ist für jeden Punkt a stets a'' mit a identisch, so reden wir von einer Spiegelung. Als ausgearteten Spezialfall darf man auch die identische Deformation unter die Spiegelungen zählen. Für eine Spiegelung ist σ^2 stets die identische Deformation.

Ist σ keine Spiegelung, so bedeutet σ^2 allemal eine monotone stetige Deformation. Damit ist die Frage der Bildung monotoner Deformationen auf die Frage der Bildung solcher Deformationen zurückgeführt, die keine Spiegelungen sind.

Ist σ monoton, so ist die inverse Deformation σ^{-1} gleichfalls monoton.

Ein charakteristischer Unterschied der Eigenschaften monotoner und nicht-monotoner Deformationen ist durch folgenden Satz gegeben:

Ist a' aus a und b' aus b durch σ entstanden, und ist hierbei $a' \vee ab$, so sind die abgeschlossenen Strecken $[aa']$, $[bb']$ punktfremd, sobald σ eine monotone Deformation darstellt; bei $b \wedge aa'$ sind $[aa']$, $[bb']$ nicht-punktfremd, sobald σ nicht-monoton ist.

Sämtliche in diesem Paragraphen angeführten Behauptungen ergeben sich als direkte Konsequenzen der Axiome II_{1-3}, II_4'.

Invariantes Verhalten in Bezug auf stetige Deformationen zeigen zusammenstossende Strecken, gleichsinnig zusammenstossende Strecken, Streckenbüschel, wovon man sich auf Grund derselben Axiome überzeugt.

15. Skala einer Deformation.

Es sei σ eine monotone stetige Deformation des R_1, σ^n und σ^{-n} die n-fachen Wiederholungen von σ resp. σ^{-1}. Die identische Deformation lässt sich folgerichtig als nullte Potenz σ^0 in die Reihe der σ^n, σ^{-n} einordnen. Es soll ein Punkt a fixiert sein, der durch σ^n in $a^{(n)}$, durch σ^{-n} in $a^{(-n)}$ übergehen möge; statt a darf dann auch konsequenterweise $a^{(0)}$ geschrieben werden. Die Punktfolge

$$\ldots,\ a^{(-n)},\ a^{[-(n-1)]},\ \ldots,\ a^{(-2)},\ a^{(-1)},\ a^{(0)},\ a^{(1)},\ a^{(2)},\ \ldots\ a^{(n-1)},\ a^{(n)},\ \ldots \tag{15}$$

soll dann die mittels σ aus a entwickelte Skala heissen.

Die Grössenbeziehung der Indizes ist in transitiver Weise definiert, sobald man übereinkommt, dass $0 < m$; $-i < 0$ zu gelten hat, und dass $-m < -i$, sobald $i < m$. Aus dem Begriff der Monotonie ergibt sich dann mit Hilfe der Anordnungsaxiome, dass $a^{(y)} \vee a^{(x)} a^{(z)}$, sobald entweder $x < y < z$, oder $z < y < x$. Schreibt man für $a^{[-(n-1)]}$ auch $a^{(-n+1)}$, für $a^{(0)}$ auch $a^{(-1+1)}$, für $a^{(1)}$ auch $a^{(0+1)}$, so ist stets $a^{(x+1)}$ der auf $a^{(x)}$ folgende Punkt der Skala.

Jede Strecke $a^{(x)} a^{(x+1)}$ bildet eine Elementarstrecke der Skala. Zwei verschiedene Elementarstrecken einer Skala sind notwendigerweise punktfremd.

Vereinigt man die Menge der Skalenpunkte $a^{(x)}$ mit der Menge der die Elementarstrecken bildenden Punkte zu einer neuen Punktmenge M, so zeigt M sämtliche drei Streckeneigenschaften, falls auf beiden Seiten von $a^{(0)}$ Knoten existieren. Ist der R_1 ein Kontinuum, so lassen sich dann zwei Randpunkte f, g für M angeben. Diese Punkte f, g sind dann sicher Knoten von σ, dabei ist aber die Menge M selbst knotenfrei, es ist also zwischen f, g kein Knoten mehr gelegen.

Die Menge M soll in allen Fällen ein durch σ erzeugter Massbereich heissen. Bei vorgegebener Deformation σ ist der Massbereich M durch Angabe eines einzigen beliebigen ihm angehörigen Punktes a bestimmt.

Ist der R_1 ein Kontinuum, dabei in Bezug auf die Deformation σ knotenfrei, so muss M mit dem Gesamtraum R_1 identisch sein.

Die Knoten einer monotonen stetigen Deformation σ können einen R_1 nicht überall dicht erfüllen, sofern σ von der identischen Deformation verschieden ist. Denn durch σ wird mindestens ein knotenfreier Massbereich definiert. Da eine nichtmonotone Deformation höchstens einen Knoten besitzt, so hat man den Satz:

Ist im Büschelkontinuum jeder rationale Punkt ein Knoten, so ist die ausgeführte Deformation die identische.

Wird in einem Kontinuum K_1 ein Massbereich M gebildet, hierauf aus K_1 jeder nicht zu M gehörige Punkt entfernt, so zeigt die verbliebene Punktmenge M bei ungeänderter Definition der Zwischenlage alle Eigenschaften eines Kontinuums. Hieraus folgt, dass es statthaft ist, solche monotone stetige Deformationen σ zu betrachten, für die der Massbereich das Gesamtkontinuum ist, sobald man die Existenz monotoner stetiger Deformationen überhaupt zugibt.

Es sei R_1' das R_1 nächstliegende Büschelkontinuum, σ eine monotone Deformation, für welche der Massbereich mit R_1' identisch wird, dabei r die Punkte aus R_1, s die entsprechenden Punkte nach der Deformation. Da die r im R_1' überall dicht liegen, so gilt dasselbe auch für die s. Sollte nun σ_1 eine zweite monotone Deformation sein, die denselben Massbereich ergibt und dabei stets r ebenfalls in s deformiert, so wäre auf Grund der Gruppeneigenschaft $\sigma_1 \sigma^{-1} = \tau$ gleichfalls eine stetige Deformation. Es führt aber σ^{-1} jeden Punkt s in den zugehörigen Punkt r über, andererseits σ_1 jeden Punkt r in s, — die Deformation τ lässt daher die s ungeändert, d. h. letztere sind Knoten von τ. Weil die s im R_1' überall dicht liegen, muss τ daher notwendig die identische Deformation sein, mithin ist σ_1 die zu σ^{-1} inverse Deformation, also mit σ identisch. Zwei verschiedene monotone Deformationen können somit nicht ein und dieselbe Deformation der Punkte des R_1 im R_1' erzeugen, m. a. W.:

> Die Deformation σ im Büschelkontinuum ist definiert, sobald bekannt ist, welchen Punkten σ die rationalen Punkte zuordnet.

Ist der Massbereich M mit dem Gesamtraum identisch, so wollen wir die Skala (15) eine archimedische nennen. Bei vorgegebener Deformation σ erweist sich jede Skala als archimedisch, sobald eine Skala archimedisch ist. Es darf daher dann auch die Deformation σ selbst eine archimedische genannt werden. Eine archimedische Deformation ist knotenfrei; im Kontinuum ist umgekehrt jede knotenfreie monotone stetige Deformation eine archimedische.

Existiert in einem R_1 eine archimedische Deformation σ, so existiert im nächstgelegenen Büschelkontinuum R_1' eine und nur eine solche monotone stetige Deformation, welche im R_1' die Punkte des R_1 (also die rationalen Punkte) nach dem durch σ vermittelten Gesetz abbildet.

16. Das Dedekind'sche Kontinuum.

Abzählbare lineare Räume sind stets einander ähnlich. Sind nämlich $a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$ die abgezählten Punkte des Raumes $R_1^{(a)}$, analog $b_1, b_2, \ldots, b_n, \ldots$ die abgezählten Punkte des Raumes $R_1^{(b)}$, dann erhält man eine anordnungstreue Korrespondenz zwischen den a und den b folgendermassen:

Es werde zunächst das Paar a_1, a_2 entsprechend dem Paar b_1, b_2 zugeordnet; man bestimme hierauf die Lagenbeziehung im Tripel a_1, a_2, a_3 und suche die kleinste Ordnungszahl m, bei welcher im Tripel b_1, b_2, b_m entsprechend dieselbe Lagenbeziehung gilt, — dann werde a_3 dem Punkte b_m zugeordnet; ist nun m von 3 verschieden, so bestimme man die Reihenfolge der Punkte des Quadrupels b_1, b_2, b_m, b_3 und suche die kleinste Ordnungszahl n, für welche im Quadrupel a_1, a_2, a_3, a_n die entsprechende Reihenfolge besteht, — darauf werde a_n dem Punkt b_3 zugeordnet usw. Das hiermit angedeutete Verfahren kann unbeschränkt fortgesetzt werden, wobei zu jedem a das entsprechende b, und umgekehrt, sich finden lässt. Durch v. I. erkennt man auf Grund der Anordnungsaxiome, dass auf diese Weise tatsächlich eine anordnungstreue Korrespondenz zwischen beiden Räumen entsteht.

Eine direkte Folge der Ähnlichkeit abzählbarer Räume besteht darin, dass Büschelkontinuen über abzählbaren Räumen sich ebenfalls als ähnlich erweisen müssen.

Da bei anordnungstreuer Korrespondenz jedes Gesetz eben mittels dieser Korrespondenz von dem einen Raum auf den anderen übertragbar ist, so darf man untereinander ähnliche Räume als nicht wesentlich verschiedene Vertreter eines und desselben Raumtypus ansehen.

Nach R. Dedekind kann man die Menge der reellen Zahlen als die Menge der Schnitte[18]) in der Gesamtheit der rationalen Brüche definieren. Letztere Gesamtheit bildet aber bei natürlicher Definition der Zwischenlage einen abzählbaren linearen Raum. Man erkennt leicht, dass die Menge der Dedekind'schen Schnitte begrifflich mit dem Büschelkontinuum über dem Raum der rationalen Brüche zusammenfällt. Dieses spezielle Büschelkontinuum ist nun aber, laut dem oben Gesagten, dem nächstliegenden Büschelkontinuum über einem beliebigen abzählbaren Raume ähnlich. Man ist daher berechtigt diesen Kontinuumtyp als Dedekind'sches Kontinuum anzusprechen. Die Definition lässt sich auch dahin modifizieren, dass ein Kontinuum als ein Dedekind'sches zu gelten hat, sobald eine in diesem Kontinuum überall dicht liegende abzählbare Punktmenge angebbar ist. Hieraus folgt, dass ein Dedekind'sches Kontinuum jeder diesem Kontinuum entnommenen Strecke ähnlich ist.

Da im Raum der rationalen Zahlen archimedische Deformationen ausführbar sind (eine solche Deformation bildet z. B. der Übergang vom Bruch $\frac{m}{n}$ zum Bruch $\frac{m+n}{n}$), so folgt sofort

18) R. Dedekind, „Stetigkeit und irrationale Zahlen", 1872.

die Ausführbarkeit knotenfreier monotoner stetiger Deformationen im Dedekind'schen Kontinuum.

Eine charakteristische Eigenschaft des Dedekind'schen Kontinuums fixiert der Satz:

Jede Menge punktfremder Strecken eines Dedekind'schen Kontinuums ist endlich oder höchstens abzählbar-unendlich.

Es muss nämlich im Dedekind'schen Kontinuum K_1 eine überall dicht gelegene abzählbare Punktmenge R_1 vorhanden sein, und jede Strecke des K_1 muss mindestens einen Punkt dieser Menge enthalten, — es ist daher möglich, jeder Strecke einen nur ihr angehörigen Punkt der Menge R_1 zuzuordnen, sobald in der Menge der Strecken jedes Streckenpaar punktfremd erscheint. Eine Abzählung der zugeordneten Punkte liefert dann zugleich eine Abzählung der Strecken.

Bildet man das einem Dedekind'schen Kontinuum K_1 nächstgelegene Streckenkontinuum $K_1^{(2)}$, so erweist es sich als möglich, in diesem $K_1^{(2)}$ nicht-abzählbar unendlich viele punktfremde Strecken anzugeben. Man braucht dazu bloss mit solchen „Strecken" (§ 13) zu operieren, deren „Punkte" jedesmal positive Strecken ein und desselben Büschels sind. Das Streckenkontinuum $K_1^{(2)}$ ist daher dem Dedekind'schen Kontinuum sicher nicht ähnlich, da widrigenfalls mit Hilfe der anordnungstreuen Korrespondenz auch im Dedekind'schen Kontinuum nicht-abzählbar viele punktfremde Strecken angebbar wären, was ausgeschlossen ist.

Untersucht man auf dieselbe Weise die gesamte Folge übereinanderliegender Streckenkontinuen (13), wo das Ausgangskontinuum $K_1^{(1)}$ als ein Dedekind'sches angenommen sein mag, so erweist sich $K_1^{(i)}$ mit $K_1^{(j)}$ als nicht-ähnlich, solange i von j verschieden ist. Es existieren somit unendlich viele wesentlich verschiedene Kontinuumtypen. In Anbetracht der schon von G. Veronese durchgeführten Konstruktionen [19]) könnte man diese höheren Kontinuen als Veronese'sche bezeichnen. Fasst man $i-1$ als Ordnungsindex des Kontinuums $K_1^{(i)}$ auf, so ist das Dedekind'sche Kontinuum als uneigentlicher

19) G. Veronese, „Fondamenti di geometria", 1891 (deutsch v. A. Schepp, „Grundzüge der Geometrie", 1894).

Spezialfall ein Veronese'sches Kontinuum nullter Ordnung. In einem eigentlichen Veronese'schen Kontinuum ist keine überall dicht liegende abzählbare Punktmenge enthalten. Man kann das $K_1^{(2)}$ durch eine Menge abgeschlossener Strecken erschöpfen, wobei keine zwei dieser abgeschlossenen Strecken zusammenstossen.

Der geläufige Begriff der reellen Zahl ist auf das Dedekind'sche Kontinuum beschränkt, auf welches man sofort geführt wird, sobald man mit abzählbaren Mengen operiert. Da die höheren Kontinuen ohne jegliche Metaphysik ebenso wohldefiniert sind, wie das Dedekind'sche, so ist es ein Akt der Willkür, nicht der Notwendigkeit, wenn man beim ersten Schritt stehen bleibt. An sich ist auch das Dedekind'sche Kontinuum in der Analysis entbehrlich, weil alles begrifflich nötige in nuce schon im Begriff des abzählbaren Raumes vorhanden ist; die Verwendung des Dedekind'schen Kontinuums bedeutet im wesentlichen nur eine konventionelle Vereinfachung der Formulierungen. Da kein Zwang vorliegt allen mathematischen Problemen ein und dasselbe Kontinuum zu Grunde zu legen, so entsteht die Frage, ob die Hinzuziehung passender höherer Kontinuen bei einzelnen Problemstellungen zweckmässig wäre, indem man dadurch z. B. zu formalen Vereinfachungen gelangen könnte. Man denke z. B. an die Methoden der Variationsrechnung. Weiter soll hier darauf aber nicht eingegangen werden.

17. Verfeinerung der Skala im Dedekind'schen Kontinuum.

Die Metrik des Dedekind'schen Kontinuums lässt sich schrittweise mit Hilfe des Begriffs der archimedischen Deformation aufbauen.

Man fixiere zunächst im Dedekind'schen Kontinuum K_1 einen Streckenbüschel o. Den zweiten Randpunkt p der positiven Strecke P dieses Büschels nenne man die Länge von P; der Ursprung o werde hierbei auch als Länge null der Nullstrecke des Büschels zugesprochen. Für zwei Längen p_1, p_2 hat $p_1 < p_2$ zu gelten, sobald $p_1 \vee op_2$; null hat als kleiner zu gelten, als jede andere Länge. Die Grössenbeziehung der Strecken (§ 10) ist dann auf die Grössenbeziehung der Längen übertragen.

Es werde hierauf noch eine archimedische Deformation σ im K_1 fixiert. Nun komme man überein, die Länge p nicht nur der Strecke P, sondern auch jeder Strecke $P^{(n)}$, $P^{(-n)}$ zuzuordnen, in die P mittels σ^n resp. σ^{-n} deformierbar ist. Die Strecken $P^{(n)}$, $P^{(-n)}$ sind dann nicht mehr an den Büschel o gebunden. Strecken von identischer Länge sollen wechselseitig k o n g r u e n t bezüglich σ heissen. Die Beziehung der Kongruenz ist dann auch transitiv.

Jede Strecke, der eine Länge zukommt, möge m e s s b a r heissen. Die bisherigen Festsetzungen definieren eine nicht-abzählbare Menge messbarer Strecken, — es bleiben aber immer noch gleichfalls nicht-abzählbar unendlich viele Strecken übrig, die nicht-messbar sind. Von zwei messbaren Strecken hat diejenige als kleinere zu gelten, deren Länge die kleinere ist.

In der Bezeichnung einer Strecke mit Hilfe ihrer beiden Randpunkte soll der negativ bezüglich des anderen gelegene Randpunkt weiterhin an erster Stelle stehen; es ist dann ab stets eine p o s i t i v e Strecke des Büschels a. Die positive Lage einer Strecke im Büschel bleibt bei monotonen stetigen Deformationen invariant.

Es sei $o^{(0)}$ mit o identisch und

$$\ldots,\ o^{(-m)},\ \ldots,\ o^{(-1)},\ o^{(0)},\ o^{(1)},\ \ldots,\ o^{(m)}, \ldots \tag{16}$$

die mittels σ aus o entwickelte Skala, wobei wir uns $o^{(1)}$ positiv bezüglich $o^{(0)}$ gelegen denken. Eine Strecke ab erweist sich nach den bisherigen Festsetzungen dann und nur dann als messbar, wenn ihr Ursprung a zur Skala (16) gehört. Gehört auch b zu dieser Skala, so ist die Länge von ab ein Skalenpunkt aus (16) mit positivem Index; ist $o^{(m)}$ diese Länge, so sagen wir auch, die Strecke ab enthalte g e n a u m Masseinheiten. Es ist m die Anzahl der in ab enthaltenen Elementarstrecken der Skala (16).

Ist a nicht in (16) enthalten, so fixiere man die mittels σ aus a entwickelte Skala

$$\ldots,\ a^{(-m)},\ \ldots,\ a^{(-1)},\ a^{(0)},\ a^{(1)},\ \ldots,\ a^{(m)},\ \ldots \tag{17}$$

Hier ist $a^{(y)}$ positiv bezüglich $a^{(x)}$ gelegen, sobald $x < y$. Sollte nun b mit dem Punkt $a^{(m)}$ der Skala (17) identisch sein, so ordnen wir ab wiederum die Länge $o^{(m)}$ zu und sagen, m sei die Anzahl der in ab g e n a u aufgehenden Masseinheiten. Der Bereich messbarer Strecken wird hierdurch erweitert. Man erkennt in den früheren Festsetzungen Spezialfälle der zuletzt getroffenen Vereinbarung.

Ist ab nun immer noch nicht messbar, so gehört b einer Elementarstrecke $a^{(m)}a^{(m+1)}$ der Skala (17) an. Wir sagen dann, die Strecke ab enthalte mehr als m und weniger als $m+1$ Masseinheiten, und betrachten die Punkte $o^{(m)}$, $o^{(m+1)}$ als zwei Schranken der Länge von ab.

Zur Bestimmung der Anzahl der in ab genau oder näherungsweise enthaltenen Masseinheiten bedarf man eines Eichmasses, d. h. einer Vorrichtung, die $a^{(m-1)}$ und $a^{(m+1)}$ bestimmt, sobald $a^{(m)}$ gegeben ist.

Strecken, die nun mittels σ messbar geworden sind, brauchen darum noch nicht mittels σ^2 messbar zu sein, wie das Beispiel $oo^{(1)}$, $o^{(1)}o^{(2)}$ lehrt, — dagegen folgt aus der Messbarkeit mittels σ^p umgekehrt stets die Messbarkeit mittels σ, weil die durch σ^p entwickelten Skalenpunkte notwendig in (16) bzw. (17) mit enthalten sind. Die Skala der Deformation σ soll, in Bezug auf die durch die Deformation σ^p entwickelte Skala, eine p-fach verfeinerte Skala heissen.

Ist eine archimedische Deformation σ gegeben, so lässt sich im Dedekind'schen Kontinuum K_1 allemal auch eine solche archimedische Deformation τ konstruieren, dass σ mit τ^p identisch wird, die Skala für τ also eine p-fache Verfeinerung der Skala für σ darstellt. Es sind nämlich zwei beliebige Strecken im Dedekind'schen Kontinuum stets ähnlich, und die anordnungstreue Korrespondenz dieser Strecken kann auch so bestimmt werden, dass zwei beliebig vorgeschriebenen Punkten der einen Strecke zwei beliebig vorgeschriebene Punkte der anderen entsprechen. Man kann daher die abgeschlossenen Strecken $[ab]$, $[bc]$ so aufeinander ähnlich abbilden, dass a in b, b in c übergeht. Soll also die Skala (16) p-fach verfeinert werden, so wähle man auf der Elementarstrecke $oo^{(1)}$ beliebig $p-1$ Punkte $o^{(x)}$ so, dass die Reihenfolge

$$o,\ 'o^{(1)},\ 'o^{(2)},\ \ldots,\ 'o^{(p-1)},\ o^{(1)} \tag{18}$$

entsteht, wobei noch o als $'o^{(0)}$ und $o^{(1)}$ als $'o^{(p)}$ aufgefasst werden darf. Für jede abgeschlossene Strecke $['o^{(x-1)}\ 'o^{(x)}]$ möge nun noch eine anordnungstreue Korrespondenz mit der Nachbarstrecke $['o^{(x)}\ 'o^{(x+1)}]$ fixiert sein, wobei $'o^{(x-1)}$ in $'o^{(x)}$,

$'o^{(x)}$ in $'o^{(x+1)}$ überzugehen hat. Diese Korrespondenzen seien symbolisch unter τ_1 zusammengefasst. Durch σ wird der Strecke $o^{(0)}\ 'o^{(1)}$ die Strecke $o^{(1)}\ 'o^{(p+1)}$ zugeordnet; diese letztere möge nun noch durch τ_1 aus $'o^{(p-1)}\ o^{(1)}$ entstehend gedacht sein. Für jeden Punkt der abgeschlossenen Strecke $[oo^{(1)}]$ ist dann τ_1 definiert. Gehört a zur Elementarstrecke $o^{(i)}\ o^{(i+1)}$ der durch σ erzeugten Skala (16), so bestimmen wir den mittels τ aus a entstehenden Punkt $'a$, indem wir zunächst a durch σ^{-i} in einen Punkt a' von $oo^{(1)}$ überführen, hierauf τ_1 ausführen, wodurch a' in a'' übergeht, endlich σ^{-i} durch σ^i rückgängig machen, wobei man von a'' zu $'a$ gelangt. Analog verfahre man, wenn a zur Elementarstrecke $o^{(-i)}\ o^{-(i-1)}$ gehört, oder wenn a ein Punkt der Skala (16) ist. In gruppentheoretischer Symbolik geschrieben, lautet also die Vorschrift:

$$\tau = \sigma^i \tau_1 \sigma^{-i}. \tag{19}$$

Eine direkte Untersuchung zeigt, dass tatsächlich τ eine monotone stetige Deformation darstellt, wobei wirklich τ^p mit σ identisch ist.

Der Verfeinerungskoeffizient p ist eine natürliche Zahl. Im Falle $p = 2$ reden wir von einer Halbierung der Elementarstrecken.

Es soll nun eine abzählbar-unendliche Folge Σ von Deformationen bzw. Skalen fixiert werden, von der Art, dass jede nächstfolgende eine Verfeinerung der nächstvorhergehenden darstellt. Als Ausgangsdeformation diene σ. Jede Skala der Folge Σ ist dann zugleich eine Verfeinerung der Skala für σ, und zwar ist der Verfeinerungskoeffizient um so grösser, je höher der Folgenindex der betreffenden Deformation in Σ ist. Jede Potenz einer Deformation aus Σ von kleinerem Index ist zugleich die Potenz einer Deformation von grösserem Index. Die explizite Bestimmung dieser Potenzen bildet eine spezielle Aufgabe der Bruchrechnung. Wählt man in Σ für jedes Paar aufeinanderfolgender benachbarter Deformationen ständig den Verfeinerungskoeffizienten 2, so gelangt man zu den dyadischen Brüchen.

Bei jeder Verfeinerung erweitert sich dér Bereich messbarer Strecken; trotzdem ist leicht zu erkennen, dass Strecken existieren müssen, die mittels der Deformationen der Folge Σ immer noch nicht messbar sind, — es ist dies bedingt durch den

Umstand, dass die Gesamtheit der durch Σ definierten Skalenpunkte abzählbar ist, die Gesamtheit der Punkte des K_1 dagegen nicht. Existiert eine Deformation aus Σ, in der eine gegebene Strecke A messbar wird, so sagen wir, A sei mittels Σ messbar.

Wir wollen diejenigen Punkte des Kontinuums, die irgendeiner zu Σ gehörigen, aus o entwickelten Skala angehören, zu den rationalen Punkten zählen, und die entsprechenden Längen mittels Σ messbarer Strecken als rationale Längen bezeichnen; jeder andere Punkt des K_1 soll als irrational gelten. Die immerhin noch denkbare Abweichung von den im § 12 gegebenen Bestimmungen besteht darin, dass die rationalen Punkte im Sinne der Skalenpunkte von Σ nicht überall dicht im K_1 zu liegen brauchen. Wie im nächsten Paragraphen dargelegt wird, ist es aber statthaft, Σ auch noch dieser Beschränkung zu unterwerfen.

18. Starre Verschiebungen.

Es ist möglich, Σ so zu bestimmen, dass sich Punkte x angeben lassen, die stets zwischen o und dem aus o deformierten Punkt liegen, gleichviel, welche zu Σ gehörige Skala betrachtet wird. Die Menge dieser Punkte x bildet dann die Vereinigungsmenge einer Strecke mit einem ihrer Randpunkte, — der andere Randpunkt dieser Strecke ist notwendigerweise o. Die Vereinigungsmenge der x mit o bildet also eine abgeschlossene Strecke ε. Der Punkt o ist der einzige rationale Punkt von ε.

Jede Deformation aus Σ führt ε in eine abgeschlossene Strecke ε' über, wo wiederum nur e i n Randpunkt rational ist; ε und ε' sind notwendig punktfremd. Durch v. I. erkennt man die Existenz einer abzählbar-unendlichen Menge solcher mittels Σ aus ε gebildeten abgeschlossenen Strecken $\varepsilon^{(i)}$, die dabei in jeder Paarung punktfremd sein müssen. Die Menge dieser $\varepsilon^{(i)}$ kann durch eine naheliegende Definition der Zwischenlage in einen abzählbaren linearen Raum verwandelt werden (dessen „Punkte" also eben diese $\varepsilon^{(i)}$ sind). Jeder rationale Punkt des K_1 erscheint als Randpunkt einer und nur einer Strecke $\varepsilon^{(i)}$. Die dadurch vermittelte anordnungstreue Korrespondenz lässt auch in der Menge der rationalen Punkte bei ungeänderter Definition der Zwischenlage einen abzählbaren linearen Raum erkennen.

Die irrationalen Punkte der $\varepsilon^{(i)}$ sollen jetzt als überschüssig aus dem K_1 entfernt gedacht werden; es verbleibt dann eine Punktmenge, die ausser den rationalen Punkten nur noch diejenigen irrationalen enthält, welche keiner $\varepsilon^{(i)}$ angehören. Diese Punktmenge genügt ohne Änderung der Definition der Zwischenlage den Axiomen II_{1-3}, II_4', sie bildet also einen „reduzierten" linearen Raum K_1'. Dieser reduzierte Raum K_1' erweist sich als ein Kontinuum, d. h. jede Strecke in ihm muss abschliessbar sein. Denn eine Strecke A' aus K_1' verwandelt sich in eine Strecke A aus K_1, sobald die entfernten irrationalen Punkte zurückgegeben werden; gehören die Randpunkte von A zu K_1', so sind dieselben Punkte auch Randpunkte von A', — gehören die Randpunkte von A aber zu den irrationalen Punkten der $\varepsilon^{(i)}$, so erweisen sich die rationalen Punkte eben dieser $\varepsilon^{(i)}$ als Randpunkte von A' in K_1'; in allen Fällen ist also A' im K_1' abschliessbar.

Die Deformationen und Skalen aus Σ behalten im reduzierten Kontinuum K_1' ihren früheren Sinn, da die entfernten irrationalen Punkte ineinander übergehen müssen.

Sollten die rationalen Punkte im reduzierten Kontinuum K_1' nun immer noch nicht überall dicht liegen, so lässt sich in $oo^{(1)}$ eine von rationalen Punkten freie Strecke angeben. Ist y ein beliebiger Punkt einer solchen Strecke, so fixiere man die Menge derjenigen Punkte u, für die zwischen u und y kein rationaler Punkt gelegen ist, und bilde die Vereinigungsmenge η der u mit y. Es zeigt sich auf Grund der Anordnungsaxiome, dass η eine abgeschlossene Strecke ist. Jede Strecke, von der η einen echten Teil bildet, enthält sicher rationale Punkte. Zwei verschiedene η sind stets punktfremd; die Menge der zu $oo^{(1)}$ gehörigen η ist abzählbar-unendlich, sofern ein η wirklich existiert.

Es können nicht beide Randpunkte von η rational sein, da sonst eine nicht-verfeinerbare Skala in Σ vorhanden wäre, was ausgeschlossen ist. Es kann auch nicht der negativ bezüglich des anderen gelegene Randpunkt von η rational sein, weil sonst η ein $\varepsilon^{(i)}$ wäre, — diese $\varepsilon^{(i)}$ sind aber im K_1' nicht mehr vorhanden.

Die Deformationen der Folge Σ definieren analoge Strecken η in jeder Elementarstrecke von (16). Die Gesamtheit der so überhaupt denkbaren η ist abzählbar; wir reden demnach von Strecken $\eta^{(i)}$.

Wir lassen nun $\eta^{(i)}$ allemal auf den positiv bezüglich des anderen liegenden Randpunkt zusammenschrumpfen, m. a. W., wir denken uns aus dem K_1' jeden Punkt eines jeden $\eta^{(i)}$, mit Ausnahme der positiv gelegenen Randpunkte, entfernt. In dem solcherweise erneut reduzierten Raume K_1'' liegen die rationalen Punkte dann sicher überall dicht. Mit Hilfe der Anordnungsaxiome lässt sich nachweisen, dass K_1'' tatsächlich, bei ungeänderter Definition der Zwischenlage, ein linearer Raum, und zwar wieder ein Kontinuum ist; wegen der überall dichten Lage der abzählbaren rationalen Punkte ist K_1'' dann ein Dedekind'sches Kontinuum.

Infolge der wechselseitigen Ähnlichkeit Dedekind'scher Kontinua lässt sich alles, was im K_1'' erreicht ist, auch auf K_1 übertragen. Es ist also wirklich statthaft, von Beginn an mit einer solchen Folge Σ zu operieren, wo die rationalen Punkte im Kontinuum überall dicht zu liegen kommen. Σ soll dann ein starrer Massstab des vorliegenden Kontinuums heissen. Das Kontinuum selbst ist in diesem Falle mit dem den rationalen Punkten nächstliegenden Büschelkontinuum identisch.

Es sei J eine Strecke, die mittels dieses starren Massstabes Σ nicht messbar ist. In jeder Skala von Σ existieren dann jedesmal zwei Schranken der Länge von J. Zu den unteren Schranken zählt allemal der Ursprung des Fundamentalbüschels o.

Die Vereinigungsmenge der Menge der unteren Schranken von J mit der Menge der zwischen zwei unteren Schranken gelegenen Punkte des K_1 erweist sich als Vereinigung einer positiven Strecke des Büschels o mit dem Ursprung dieses Büschels. Der andere Randpunkt dieser Strecke, der dann sicher irrational ist, soll nun als Länge von J angesehen werden. In dem speziellen Falle, wo die Menge der unteren Schranken endlich ist, gelangt man zu der früher bestimmten rationalen Länge. Die bisherigen Längendefinitionen ordnen sich also folgerichtig in die zuletzt gegebene Definition ein.

Bei dieser erweiterten Längendefinition erweist sich also mittels des starren Massstabes jede Strecke im Dedekind'schen Kontinuum als messbar.

In jedem Streckenbüschel des K_1 existieren zwei und nur zwei Strecken, deren Länge den beliebig vorgeschriebenen Wert x hat; eine und nur eine dieser Strecken ist in diesem Büschel positiv. Dieser leicht zu beweisende Satz ist mit dem Hilbert'schen ersten Axiom der Kongruenz[20]), III_1, gleichwertig.

Die Reduktion auf den Begriff der Länge bringt es mit sich, dass auch das zweite Axiom der Kongruenz, III_2 (die Transitivität des Begriffs der Kongruenz), bei den geltenden Festsetzungen erfüllt wird.

Fixiert man eine Strecke ox, wo x positiv bezüglich o gelegen ist, so erhält man eine knotenfreie monotone stetige Deformation μ des K_1, sobald man jedem Punkt a denjenigen positiv bezüglich a liegenden Punkt a' zuordnet, für den aa' mit ox kongruent ist. Ähnliches gilt, wenn x negativ bezüglich o genommen ist, nur hat man dann auch a' negativ bezüglich a zu nehmen. Diese Deformation μ ist definiert, sobald bekannt ist, wie sie einen Punkt deformiert. Die Deformationen aus Σ sind Spezialfälle der μ. Man kann μ eine starre Verschiebung des Kontinuums nennen.

Ist i ein beliebiger fixierter Punkt der Strecke ox, ferner y die Länge von ix, so erweisen sich auf Grund unserer Festsetzungen die Strecken oi und yx als kongruent. In dieser Aussage dürfen die Rollen von i und y vertauscht werden. Hieraus folgert man dann allgemeiner, dass ai und by kongruent sein müssen, sofern $i \bigvee ab$ und ay mit ib kongruent ist. Sollte also in ab der Punkt d fixiert sein, für den db mit oy kongruent, ad mit yx kongruent ist, so lässt sich c in ab so bestimmen, dass db mit ac kongruent, ad mit cb kongruent wird; es ist dann sicher auch ab mit ox kongruent. Es gilt also der Satz:

> Die Unterschiedsstrecken zweier Paare entsprechend punktfremd zusammenstossender Strecken sind kongruent, sobald die Komponenten dieser Unterschiedsstrecken paarweise kongruent sind.

Hierin ist das dritte Hilbert'sche Kongruenzaxiom III_3 enthalten.

Die Verknüpfung zweier starrer Verschiebungen erweist sich daher wieder als eine starre Verschiebung; diese starren Verschiebungen bilden demnach eine Gruppe M. Diese Gruppe

20) D. Hilbert, „Grundl. d. Geometrie".

ist kommutativ. Eine Untergruppe von M bilden die Deformationen von Σ und ihre Potenzen. Eine naheliegende Definition der Zwischenlage zeigt M als ein Dedekind'sches Kontinuum, dessen „Punkte" die einzelnen Verschiebungen μ sind. Die durch Σ definierte Untergruppe P ist gleichfalls ein linearer Raum, und zwar ist M das Büschelkontinuum über P. Jedes Dedekind'sche Kontinuum liefert eine spezielle Verkörperung der Gruppe M. Beim metrischen Aufbau des Zahlbegriffs dient die Gruppe P als Ausgangspunkt der Betrachtungen.