

GEOMEETRIA ALUSED

J. SARV

MIT EINEM REFERAT:

DIE GRUNDLAGEN DER GEOMETRIE

TARTU 1931

K. Mattiesen trükikoda o/ü., Tartus, 1931.

Eessõna.

Pärast juba ilmunud nii põhjalikke töid, nagu
M. Pasch, Vorlesungen über neuere Geometrie (1882),
G. Peano, I Principii di Geometria (1889),
D. Hilbert, Grundlagen der Geometrie (1899),
O. Veblen, A System of Axioms for Geometry (Transact.
of the Amer. Math. Soc. V, 1904) ja
F. Schur, Grundlagen der Geometrie (1909),
on küll geomeetria aluste uurimise ülesandeiks vahest jäänud vaid
1) vähendada põhimõistete ja põhilausete arvu,
2) lähendada põhimõistete ja põhilausete sisu sellele, mida
meie otsekohe oma meeltega märkame, ja
3) lühendada geomeetria lausete tõestamist, s. o. nende
tuletamist põhilausetest ja definitsioonidest.

Neist geomeetria aluste uurimise ülesandeist on käesolevas
töös silmas peetud peaaesjalikult kahte esimest.

Selle töö esimeses osas (§§ 1—17) võetakse vaatlemise proto-
kollidena 11 põhilauset põhimõistete „punkt“ ja „vahel“ kohta.
Neist põhilauseist ja sirge joone, tasapinna ja mitmemõõteliste
ruumide definitsioonest tõestatakse täielikult sirge joone, tasa-
pinna ja mitmemõõteliste ruumide määramise ja lahutamise
laused.

Teises osas (§§ 18—24) on Möbiuse eeskujul tuletatud
projektiivsed koordinaadid ja nende ortogonaalse teisenduse najal
defiinitud kindel keha, Cartesiuse ristkoordinaadistik, abso-
luutne lõpmatuseruum ja ühtivus. Lõpuks on defiinitud pikkus,
nurk, ristjoon ja paralleelne joon.

1. Punkt. Esimeseks geomeetria põhimõisteks on punkt. Seda mõistet nimetatakse vahel veel geomeetriliseks punktiks, sest harilikus kõnekeeles tähendab punkt ka muud, näiteks lause lõppu pandavat kirjavahemärki. Selles töös mõtleme punkti all ikka ainult geomeetrilist punkti.

Kellel selget punkti mõistet veel ei ole, sellel tuleb vaadelda neid asju või sündmusi, kus on punktiga tegemist, ja siis sellest nähtust mõttes kõrvaldada kõik muu. Näiteks on tegemist punktiga siis, kui maamõõtja välja peal pistab oma sihitiku terava otsa maa sisse (ladina *punctum* tähendabki pistet). Punkt, mida maamõõtja selle juures harilikult mõtleb, on seal, kus tiku terav ots puutus maapinda. Kui tiku ots on juba maa sisse läinud, siis saab auguke. See auguke jääb siis, kui tikk on välja tõmmatud, punkti täheks. Kuni tikk seisab, seni on ta ise selle punkti täheks, mille kohale ta maa sisse pisteti.

Tähtsama punkti kohale laseb maamõõtja panna kivi ja selle kivi peale raiub kaks kriipsu, teise teisest risti üle. Nende kriipsude ülemineku kohal peab see tähtsam punkt olema. Kuid selles kahe kriipsu ülemineku kohas on veel lõpmata palju kohti: ühed on rohkem ääre pool, teised rohkem keskel. Kui mõtleme seal kohta, mis oleks selle kahe kriipsu ülemineku koha „päris keskkohat“, siis on nimelt seal see punkt, mida maamõõtja tahtis nende kahe kriipsuga tähtida.

On öeldud: punkt on koht, milles ei ole enam teisi kohti.¹⁾ Sellest, kuidas me punkti mõiste saime, paistab silma, et üksikut punkti ei saa näha, vaid ainult mõelda: kui tahame ühte punkti vaadata, siis näeme ikka punktide kogu.

1) Euclidis Elementa I, def. I. — G. K. Chr. v. Staudt, Geometrie der Lage (1847), lk. 1. — M. Pasch, Vorlesungen über neuere Geometrie (2. Aufl. 1926), lk. 3.

Selle asjaolu paneme kirja esimeseks geomeetria põhilauseks:

I. Kui on punkt, siis on ka teine punkt.

2. Vahel. Teiseks geomeetria põhimõisteks võtame vahel. Harilikus kõnekeeles ei tähenda „vahel“ alati seda, mida meie siin selle sõnaga tahame ütelda. Küll tähendab seda õige hästi kõnekeeles ütlus „otse vahel“. Selles töös ütleme siis kõnekeele „otse vahel“ asemel lihtsalt „vahel“.

Selle teise põhimõiste saab laps selgeks näiteks sel teel, et ta mitmel pudelil igaühel pistab korgist püsti läbi suka- varda, vaatleb siis nende varraste ülemisi otsi ja mõtleb seal punkte („nende otste keskpunkte“). Kui ta on kaks vardaga pudelit pörandale või lauale seisma pannud, siis on tal kaks punkti — nende varraste ülemised otsad. Siis saab ta ka kolmandat vardaga pudelit seades ja selle korgi sees varrast üles või alla nihutades kolmanda punkti — selle kolmanda varda ülemise otsa — nii paigutada, et teine punkt oleks selle kolmanda ja esimese vahel: kolmanda juurest vaatajale jääb siis esimene punkt teise varju ja esimene ja teine koos kolmanda varju. See ongi see asjaolu, mille kirjutame teiseks geomeetria põhilauseks:

II. Kui on kaks punkti, siis on kolmas punkt nii, et teine on kolmanda ja esimese vahel.

Kui laps ei ole selle vahelolemise mõistega veel harjunud, siis ei ole tal veel selge, kuidas näivad tema sel viisil paigale seatud kolm punkti siis, kui ta neid vaatab mitte kolmanda juurest, vaid esimese juurest. Kui ta läheb esimese juurde ning vaatab sealt, siis leiab ta, et kolmas jääb teise varju ja kolmas ja teine koos esimese varju, s. o.

III. Kui on kolm punkti nii, et teine on kolmanda ja esimese vahel, siis on ka teine esimese ja kolmanda vahel.

See ongi meie kolmas geomeetria põhilause. Neid nii seatud kolme punkti vaadeldes märkame, et

IV. Kui on kolm punkti nii, et teine on esimese ja kolmanda vahel, siis kolmas ei ole esimese ja teise vahel.

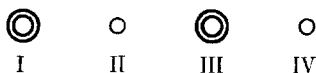
See on meie neljas põhilause.

3. Neli punkti. Kui on kolm punkti nii, et teine on esimese ja kolmanda vahel, siis on ka [II]^{*)} punkt nii, et kolmas on tema ja teise vahel, ja see on tõesti uus — neljas punkt sellepärast, et ta ei saa [IV] olla samane esimesega. Nelja punkti hulgas on neli isesugust kolmikut, näiteks $ABCD$ hulgas ABC , ABD , ACD ja BCD . Kui nelja punkti hulgas on kahes kolmikus üks punkt kahe teise vahel, siis märkame, et ka teistes on lugu niisama. Seda asjaolu väljendavad nelja punkti põhilaused. Neid on neli. Sest nelja punkti hulgast saadud kahel kolmikul on kaks ühist punkti (nagu kolmikutel ABC ja ACD punktid A ja C) ja kui silmapilguks nimetame kolmest punktist, kus üks on kahe teise vahel, seda vahelolevat keskmiseks ja teisi äärmisteks, siis on ju ainult järgmised võimalused:

- 1) ühel kolmikul on need kaks ühist punkti äärmisteks, teisel üks neist keskmiseks;
- 2) kummalgi kolmikul on keskmiseks teine neist kahest ühisest punktist, kuid mitte seesama;
- 3) kummalgi kolmikul on keskmiseks sama ühine punkt, ja
- 4) kummalgi kolmikul on ühised punktid äärmisteks.

Need nelja punkti põhilaused on nimelt järgmised:²⁾

V. Kui on neli punkti nii, et teine on esimese ja kolmanda vahel ja kolmas esimese ja neljanda vahel, siis on kolmas ka teise ja neljanda vahel.



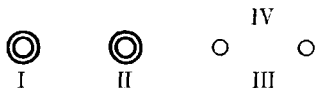
VI. Kui on neli punkti nii, et teine on esimese ja kolmanda vahel ja kolmas teise ja neljanda vahel, siis on kolmas ka esimese ja neljanda vahel.



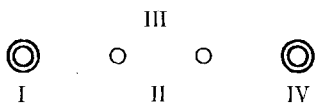
*) Märk „[II]“ tuleb lugeda: „lause II järgi“, märk „[IV]“ — „lause IV järgi“ ja üldse märk „[x]“ — „lause x järgi“.

2) E. H. Moore, On the projective axioms of geometry, Transact. of the Amer. Math. Soc., vol. 3 (1902), lk. 150.

VII. Kui on neli punkti nii, et teine on esimese ja kolmanda vahel ja ka esimese ja neljanda vahel, siis on kas kolmas teise ja neljanda vahel või neljas teise ja kolmanda vahel.



VIII. Kui on neli punkti nii, et teine on esimese ja neljanda vahel ja ka kolmas esimese ja neljanda vahel, siis on kas teine esimese ja kolmanda vahel või kolmas esimese ja teise vahel.



Selle nelja lause juures on kõnesolevaist punkttest joonistatud kahekordsete ringikestega need, mis esinevad lause oletuses kaks korda, s. o. mis kuuluvad kummassegi sellest kahest kolmikust, mille järgi saab otsustada kolmanda üle.

4. Sirge joon. Kahte punkti koos kõigi nende punktiga, mis on kas selle kahe punkti vahel või nii, et teine neist kahest on teise ja nende vahel, nimetatakse üheks sirgeks jooneks.

Õeldakse, et need kaks punkti määravad selle sirge joone ja selle kahe punkti nimedega, näiteks *A* ja *B*, tähitakse ka see joon *AB*. Õeldakse ka, et sirge joon läheb kõigist oma punktist läbi ja et kõik tema punktid on tema peal.

Kaks punkti, mis sirge joone määravad, ei ole mitte eriliselt niisugused selle joone punktide hulgas, vaid

- (2) sirge joone iga kaks punkti määravad selle joone.

See sirge joone määramise lause järgneb abilausest:

Kui selles punktide paaris, mis määrab sirge joone, võtame ühe punkti asemele mingi muu punkti selle joone peal, siis määrab see uus punktide paar (üks endine punkt koos selle uuega) sellesama joone.

Olgu sirge joon määratud punktiga A ja B ja olgu M mingi punkt selle joone peal (s. o. salgas ABM olgu üks punkt kahe teise vahel). Siis on joone AB iga punkt P (s. o. niisugune punkt, et salgas ABP on üks kahe teise vahel) ka joone AM punkt (s. o. niisugune, et salgas AMP on üks kahe teise vahel) ja niisama ka joone AM iga punkt P joone AB oma. Sest kui nelja punkti $ABMP$ hulgas on kahes kolmikus ABM ja ABP üks punkt kahe teise vahel, siis on [V—VIII] niisama ka kolmandas salgas AMP , või jälle salkade AMB ja AMP järgi salgas ABP . Seega koosneb joon AM tõesti neistsamust punkttest, millest joon AB -gi.

Olgu nüüd M ja N mingid kaks punkti joone AB peal. Siis on siinsamas tõestatud abilause järgi joon AM samane joonega AB , samuti joon MN samane joonega AM ja seega tõesti joon MN samane joonega AB .

Punktide paar AB lahutab joone AB muud punktid kolme ossa:

- 1) nendeks, mis on A ja B vahel,
- 2) nendeks, mille ja A vahel on B , ja
- 3) nendeks, mille ja B vahel on A .

Õeldakse, et kahe esimese osa punktid on punktist A punkti B pool ja et kolmanda osa punktid on (punktist A punkti B kohta) teisel pool.

Need kaks sirge joone poolt, milleks selle joone mingi punkt (A) ta lahutab, on määratud selle teise punktiga (B), mille pool või mille kohta teisel pool teine neist on, kuid ei olene sellest, missugune teine punkt (B) selle joone peal on nende poolte määramiseks võetud, vaid

- iga punkt sirge joone peal lahutab selle joone kaheks pooleks nii, et see lahutaja punkt on iga niisuguse kahe punkti vahel, millest üks on lahutajast punktist ühel pool ja teine teisel pool, ja ei ole ühegi niisuguse kahe punkti vahel, mis on mõlemad lahutajast punktist ühel pool.
- (3)

Olgu sirge joone peal mingi punkt A , teine punkt B ja veel kaks punkti M ja N nii, et punkt M on punktist A punkti B pool, N aga teisel pool. Siis on kaks võimalust:

- 1) M on A ja B vahel või
- 2) B on A ja M vahel.

Esimesel korral on M [III] punktide B ja A vahel ja A punktide B ja N vahel ja siis A [V] tõesti M ja N vahel. Teisel korral on B [III] punktide M ja A vahel ja A ikka B ja N vahel ja siis A [VI] jällegi M ja N vahel. Seega on selle sirge joone lahutamise lause esimene pool tõestatud: sirge joone iga punkt A lahutab selle joone kaheks pooleks nii, et A on iga niisuguse kahe punkti M ja N vahel, millest M on A -st mingi B pool ja N teisel pool.

Olgu joone AB peal punktid M ja N punktist A (punkti B kohta) ühel pool. Siis on neli võimalust:

- 1) A on B ja M vahel ja ka B ja N vahel või
- 2) M ja N on A ja B vahel või
- 3) B on A ja M vahel ja ka A ja N vahel või viimaks
- 4) üks punktist M ja N on A ja B vahel ja teine nii, et B on tema ja A vahel.

Esimesel korral on [VII] kas M A ja N vahel või N A ja M vahel, nii et [IV] ei saa olla A M ja N vahel. Teisel korral on [VIII] lugu samuti ja [VII] ja [VI] ka kolmandal korral. Neljandal korral tähine punktist M ja N tähega M nimelt selle, mis on A ja B vahel. Siis on [V] B M ja N (ehk [III] N ja M) vahel ja [III] M B ja A vahel ja seega [VI] M N ja A vahel, nii et ka sel korral ei saa [IV] A olla M ja N vahel. Seega lahutab sirge joone iga punkt A selle joone tõesti kaheks pooleks ka nii, et A ei saa olla selle kahe punkti M ja N vahel, mis on mõlemad sellest lahutajast punktist ühel pool.

- Sirge joone osa tema mingi kahe punkti A ja B vahel nimetame (sirgeks) joonetükiks ehk lõiguks AB , neid kahte punkti selle tüki otsteks ja siis selle tüki kõiki muid punkte (s. o. kõiki punkte A ja B vahel) ka tema sisemisteks. Öeldakse, et joonetükk ühendab oma otsi. Joone AB seda osa, mis on punktist A mitte B pool, vaid teisel pool, nimetame joonetüki AB pikendiks otstast A ja punkti A selle pikendi alguseks.

5. Kolmnurk. Kui on kaks punkti, siis teeb [1] neist läbimineva sirge joone iga kolmas punkt nendega koos salga,

kus üks punkt on kahe teise vahel. Sirget joont vaadeldes märkame, et on punkte, mis ei ole selle sirge joone peal. Selle asjaolu paneme kirja üheksandaks põhilauseks:

IX. Kui on kaks punkti, siis on veel kolmas punkt nii, et selles kolme punkti salgas ei ole ükski punkt kahe teise vahel.

Seda põhilauset nii sõnastades oleme tarvitanud vaid põhimõisteid punkt ja vahel. Sirge joone mõistet tarvitades saame selle lause sõnastada vahest soravamalt: kui on sirge joon, siis on ka punkt, mis ei ole selle joone peal.

Õeldakse, et kolm punkti, millest ükski ei ole kahe teise vahel (mis ei ole kõik ühe sirge joone peal), teevad kolmnurga. Neid punkte nimetame selle kolmnurga nukkideks ja iga kahe nuki vahelist joonetükki selle kolmnurga nende nukkide juuresolevaks küljeks ja kolmanda nuki vastasseisvaks või ka lühemalt vastasküljeks. Kolmnurga kõiki nukke ja külgi koos nimetame tema äärjooneks või piirdeks.

Vaadeldes kolmnurka ja tema külgede pikendeid, näeme kolme sirget joont: iga külg koos oma pikenditega on ju üks sirge joon. Kolmnurga iga nukk on kahe joone ühine punkt.

Kui joontel on ühine punkt, siis öeldakse ka, et need jooned selles punktis lõikuvad, ja et see punkt on nende joonte lõikepunkt.

Et punkt A on joonte AB ja CA lõikepunkt, seda kirjutame lüheduseks märkidega:

$$A = AB \times CA$$

- (5) Kahel sirgel joonel ei saa [1] olla kahte ühist punkti.

Kolmnurka ja tema ühe külje ühte pikendit vaadeldes märkame, et sellele, kes selle pikendi ühest punktist vaatab selle pikendi alguse juuresolevat teist külge, jääb kolmas külg selle teise varju. Seda tähtsat asjaolu märkab laps näiteks siis, kui ta plastiliini abil kolmest sukavardast kolmnurga mudeli nii valmistab, et selle kolmnurga kaks nukki oleksid küll varraste otstes, aga kolmandas nukis tuleks ühe varda ots teise varda keskkoha vastu. Siis on pool sellest viimasest vardast kolmnurga ühe külje pikendiks. Kui laps selle mudeli asetab näiteks

kolme pudeli korkidesse pistetud varraste otsa, siis saabki ta vaadeldes märgata, et sellele, kes kolmnurga ühe külje pikendi mingist punktist vaatab selle pikendi alguse juuresolevat teist külge, jääb kolmas külge selle teise varju. Selle uue asjaolu väljendame kümnenda põhilausena järgmiselt:³⁾

X. Kui sirge joon lõikab kolmnurga ühe külje pikendit ja selle pikendi alguse juuresolevat teist külge, siis lõikab ta ka kolmat külge.

Kui tarvitame ainult põhimõisteid punkt ja vahel, siis saab see lause kaunis kohmaka kuju: Kui on kolm punkti ABC nii, et ükski nendest ei ole kahe teise vahel, ja neljas punkt D nii, et B on tema ja A vahel, ja veel viies punkt E B ja C vahel, siis on üks punkt F A ja C vahel nii, et kolmest punktist D , E , F on üks kahe teise vahel. Kuid sellest kujust paistab silma, et see põhilause väljendab veelgi ühe asjaolu, mis ei ole endistes põhilausetes veel väljendust leidnud, nimelt uue punkti F olemise kahe endise A ja C vahel. Seda asjaolu, et

(6) iga kahe punkti vahel on veel punkt, ei tarvitse nüüd enam uue põhilausena väljendada, sest see järgneb juba meie endisist põhilauseist ja praegu võetud kümnendast:

Olgu mingid kaks punkti A ja C . Siis on

- 1) [IX] punkt E nii, et ta ei ole joone AC peal,
- 2) [II] punkt B nii, et E on tema ja C vahel,
- 3) [II] punkt D nii, et B on tema ja A vahel, ja siis
- 4) [X] tõesti punkt F A ja C vahel.

Vaadeldes kolmnurka ABC ja seda sirget joont EF , mis lõikab tema kahte külge, märkame, et

- (7) üks sirge joon ei saa lõigata kolmnurga kõiki külgi.

Ka see asjaolu järgneb juba meie põhilauseist. Sest kui on F A ja C vahel ja E C ja B vahel ja joon FE lõikaks ka külge AB mingis punktis D , nii et D oleks A ja B vahel, siis oleks sirge joone FE punktist D , E , F [1] üks kahe teise vahel, ja

3) O. Veblen, A System of Axioms for Geometry, Transact. of the Amer. Math. Soc., vol. 5 (1904), lk. 345.

pidades, et D , E , F on ühe sirge joone peal ja sellepärast [1] üks neist peab olema kahe teise vahel, on küllalt, kui tõestame, et ei saa D olla F ja E vahel ega F olla E ja D vahel.

Kui D oleks F ja E vahel, siis lõikaks kolmnurgal FDA joon EB külje FD pikendit punktis E , selle pikendi alguse D juuresolevat külge DA punktis B ja siis $[X]$ ka kolmat külge AF nii, et joonte EB ja AF [5] ainus ühine punkt C oleks A ja F vahel, mis on [IV] võimata sellepärast, et andmete järgi on F A ja C vahel. Kui F oleks E ja D vahel, siis oleks $[X]$ kolmnurgas BED joonte CF ja BD [5] ainus ühine punkt A B ja D vahel, mis on [IV] võimata sellepärast, et andmete järgi B on A ja D vahel. Nii ei saa ei D olla F ja E vahel ega F olla E ja D vahel, ja seega on tõesti nimelt E D ja F vahel.

Nüüd saame tõestada lause: ⁵⁾

X'. Kui sirge joon lõikab kolmnurga ühe külje pikendit ja teist külge, siis lõikab ta ka kolmat külge.

See lause ütleb seda, mida kümnes põhilausegi. Aga ta on lühem ja sellepärast mõnus kümnenda põhilause asemel tarvitada. Kuid ta ütleb ka veel seda, et sirge joon, mis lõikab kolmnurga ühe külje pikendit ja selle pikendi alguse vastasseisvat teist külge, lõikab ka kolmandat. See tuleb tõestada.

Olgu kolmnurk ABC ja tema juures punkt D nii, et B on tema ja A vahel, ja olgu veel punkt F A ja C vahel. Siis on

- 1) [II] mingi punkt K nii, et A on tema ja C vahel,
- 2) kolmnurgas FAD joonel KB $[X]$ küljega FD lõikepunkt L nii, et [8] B on K ja L vahel, siis
- 3) kolmnurgas CFD joonel KL $[X]$ küljega CD lõikepunkt M nii, et [8] L on K ja M vahel ja siis $[V]$ L B ja M vahel ja seega
- 4) kolmnurgas CBM joonel LD ehk DF $[X]$ tõesti lõikepunkt küljega BC . ⁶⁾

6. Tasapind. Kolmnurga ühest nukist vastaskülje punktesse minevate joonetükkide sisemisi punkte
- (9) nimetatakse selle kolmnurga sisemiseks punktiks.

⁵⁾ E. H. Moore, l. c., lk. 147.

⁶⁾ O. Veblen, l. c., lk. 358.

- Kolmnurga ühest nukist vastaskülje punkttesse minevate joonetükkide kõik
- (10) punktid on ka selle kolmnurga teisest nukist vastaskülje punkttesse minevate joonetükkide omad,

sest kõik esimesest nukist minevad joonetükid lõikuvad $[X']$ kõigi teisest nukist minevatega. Sellepärast ei saa kahe niisuguse joonetüki pikendid omavahel enam lõikuda, sest muidu saaks kahel sirgel joonel kaks ühist punkti, mis on [5] võimata. Nimetame kolmnurga ühest nukist vastaskülje punkttesse tulevail kõigil joonetükel sellest küljest algavate pikendite kõigi punktide kogu kolmnurga laiendiks sellest küljest ja kõigil neil joonetükel lähtenukist algavate pikendite kõigi punktide kogu kolmnurga laiendiks sellest nukist. Siis on kolmnurga laiendeid üldse kuus: igast küljest ja igast nukist üks.

Kolmnurga kõiki sisemisi punkte koos selle kolmnurga laienditega ja koos selle kolmnurga nukkidega, külgedega ja nende pikenditega nimetatakse selle kolmnurga tasapinnaks või lihtsalt tasapinnaks. Lühemalt võib ütelda:

- tasapinnaks nimetatakse kõigi nende sirgete
- (11) joonte kõigi punktide kogu, mis lähevad ühe kolmnurga igast nukist vastaskülje punkttesse ja otsisse.

Õeldakse, et selle kolmnurga nukid määravad selle tasapinna ja nende nukkide nimedega, näiteks A , B ja C , tähitakse ka see tasapind ABC . Õeldakse ka, et tasapind läheb kõigist oma punktist läbi ja et kõik tema punktid on tema peal.

7. Tasapinna määramise lause. Kolm punkti, mis määravad tasapinna, ei ole mitte eriliselt seesugused selle tasapinna punktide hulgas, vaid

- tasapinna iga kolm punkti, mis ei ole
- (12) ühe sirge joone peal, määravad selle tasapinna.

See tasapinna määramise lause järgneb abilausest:

Kui selles kolmnurgas, mis määrab tasapinna, võtame ühe nuki asemele mingi punkti ühe sellest nukist mineva külje või selle külje pikendi peal, siis määrab see uus kolmnurk (teised kaks

endist nukki koos selle uuega) sellesama tasapinna.

Olgu tasapind määratud punktiga A , B ja C ja olgu nuki C asemele võetud külje CB mingi punkt D , nii et on saanud uus kolmnurk ABD . Siis on tegemist järgmiste asjaoludega:

1) Nukist B vastaskülje punktidesse minevad sirged jooned on kolmnurgil ABC ja ABD $[X']$ samased ja seega kolmnurga ABC sisemised punktid ja tema laiendid küljest AC ja nukist B tasapinna ABD peal, nagu ka kolmnurga ABD sisemised punktid ja laiendid küljest AD ja nukist B tasapinna ABC peal.

2) Kolmnurgil ABC ja ABD on oletuse järgi samased ka need sirged jooned, mis lähevad nukist A joonetüki BD punktidesse.

3) Igal joonel, mis läheb nukist A joonetüki DC mingisse punktisse E , on iga punkt F , mis on kas nii, et E on tema ja A vahel, või nii, et A on tema ja E vahel, ka tasapinna ABD oma sellepärast, et joon FD $[X']$ tõesti lõikab kolmnurgas AEB külge AB .

4) Samuti on igal joonel, mis läheb nukist C külje AB mingisse punktisse G , iga punkt H , mis on kas nii, et punkt G on tema ja C vahel, või nii, et C on tema ja G vahel, ka tasapinna ABD oma sellepärast, et joon HD $[X']$ tõesti lõikab kolmnurgas GCB külge GB , mis on AB osa.

5) Igal joonel, mis läheb kolmnurga ABD nukist D külje AB mingisse punkti G , on iga punkt J , mis on kas nii, et G on tema ja D vahel, või nii, et D on tema ja G vahel, ka tasapinna ABC oma järgmisel põhjusel.

Esimesel juhul (kui G on J ja D vahel) on kolmnurgas CDJ joonel BG ehk BA $[X]$ ühine punkt K joonega JC , ja kui see punkt on nii, et A on tema ja B vahel, siis on kolmnurgas KBC joonel JA $[X]$ ühine punkt küljega BC . Teisel juhul (kui D on G ja J vahel) on kolmnurgas AGJ joonel BD ehk BC $[X]$ ühine punkt L joonega JA , ja kui see punkt on nii, et C on tema ja B vahel, siis on kolmnurgas LBA joonel JC $[X]$ ühine punkt küljega AB .

Seega on tõesti tasapind ABC samane tasapinnaga ABD , kui kolmnurgal ABC on võetud nuki C asemele külje BC punkt D või kolmnurgal ABD nuki D asemel külje BD pikendi punkt C .

Sellest abilausest järgneb kõige pealt teine abilause:

Kui tasapinda määravas kolmnurgas võtame ühe nuki asemele selle tasapinna mingi uue punkti, mis ei ole kahe teise nuki läbi mineva sirge joone peal, siis määrab see uus kolmnurk sellesama tasapinna.

Olgu mingi punkt P tasapinnal ABC , s. o. nii, et sirge joon, mis läheb punktist P kolmnurga ühte nukki, millele panemegi nimeks A , lõikab selle nuki vastaskülge mingis punktis D . Siis on esimese abilause järgi tasapind ABC samane tasapinnaga ABD ja siis see ühes tasapinnaga ABC tõesti samane tasapinnaga ABP .

Olgu nüüd tasapinna ABC peal mingid kolm punkti PQR , mis ei ole ühe sirge joone peal. Siis on teise abilause järgi tasapind ABC samane tasapinnaga ABP , see samane tasapinnaga APQ ja see siis ühes tasapinnaga ABC tõesti samane tasapinnaga PQR .

Sellest tasapinna määramise lausest järgneb:

(13) kui sirgel joonel on kaks punkti tasapinna peal, siis on tal kõik punktid seal; sest me võime need kaks punkti võtta selle tasapinna määrava kolmnurga nukeks ja siis läheb see sirge joon tõesti selle kolmnurga ühest nukist vastaskülje ühte (otsa-) punkti.

8. Tasapinna lahutamise lause. Nagu sirge joone lahutab kaheks pooleks iga tema punkt, nii lahutab tasapinna kaheks pooleks iga tema sirge joon. See tasapinna lahutamise lause, mille täieliku sõnastamise edaspidiseks jätame, järgneb niinimetatud Pasch'i lausest:⁷⁾

Kui sirge joon on ühe kolmnurga
(14) tasapinna peal ja ei lähe selle kolmnurga ühestki nukist läbi, aga lõikab ühte külge, siis lõikab ta ka teist külge.

Olgu tasapinnal ABC sirge joon DE nii, et ta ei lähe punkttest A , B , C ühestki läbi ja et E on A ja B vahel. Siis on [11] kas joonel DC ühine punkt küljega AB — olgu ta nimi F — või joonel DA , kui tarvilikul korral punktide A ja B nimed va-

7) Pasch, l. c., lk. 20.

hetame, ühine punkt küljega BC — olgu ta nimeks G . Esimesel juhul lõikab joon DE kolmnurgas BFC [X'] tõesiti ka külge BC siis, kui punkt D on kolmnurga ABC sees ja punktide A ja B nimed on võetud nii, et F on E ja B vahel, samuti ka siis, kui punkt D ei ole kolmnurga sees, aga punktide A ja B nimed on võetud nii, et E on F ja B vahel. Teisel juhul lõikab joon DE kolmnurgas GAB [X'] ka külge GB , mis on külje BC osa, ja seega tõesiti ka külge BC .

Nüüd saame lühidalt tõestada tasapinna lahutamise lause, mille nüüd ka täielikult sõnastame.

Olgu ühel tasapinnal sirge joon a ja punkt B mitte selle joone peal. Siis öeldakse, et iga punkt C on siis, kui joon a ei lõika joonetükki BC , sellest joonest punkti B pool, ja et iga punkt D on siis, kui joon a lõikab joonetükki BD , joonest a punkti B kohta teisel pool. Need kaks tasapinna poolt, milleks selle tasapinna mingi sirge joon (a) tema lahutab, ei olene sellest, missugune punkt (B) selle tasapinna peal on võetud nende poolte määramiseks, vaid

- iga sirge joon tasapinna peal lahutab selle tasapinna kaheks pooleks nii, et ükski
(15) sirge joonetükk, mis ühendab ühe poole kahte punkti, ei lõiku selle lahutaja joonega, kuna iga joonetükk, mis ühendab ühe poole punkti teise omaga, lõikub.

Olgu selle tasapinna peal, kus on joon a ja punkt B mitte selle joone peal, mingid kaks punkti C ja E joonest a punkti B pool, s. o. nii, et joon a ei lõika ei joone tükki BC ega tükki BE . Siis ei saa joon a [14] kolmnurgas BCE tõesiti lõigata ühte ainust külge CE . Kui mingid punktid D ja F on joonest a punkti B kohta teisel pool, s. o. nii, et joon a lõikab nii tükki BD kui ka tükki BF , siis ei saa joon a [7] kolmnurgas BDF lõigata ka kolmat külge EF . Kui viimaks mingi punkt E on joonest a punkti B pool, aga mingi muu punkt F teisel pool, s. o. nii, et joon a lõikab joonetükki BF , aga ei lõika tükki BE , siis peab ta [14] kolmnurgas BEF lõikama ka teist külge EF . Seega on tasapinna lahutamise lause tõestatud.

9. Ruum. Tasapinda vaadeldes märkame, et on punkte, mis ei ole selle tasapinna peal. Selle asjaolu väljendame ühe-teistkümnenda põhilause:

XI. Kui on tasapind, siis on ka punkt, mis ei ole selle tasapinna peal.

Tasapinna määravad kolm punkti, mis ei ole ühe sirge joone peal. Kui on veel punkt, mis ei ole selle tasapinna peal, siis on neli punkti, mis ei ole kõik ühe tasapinna peal. Öeldakse, et neli punkti, mis ei ole ühe tasapinna peal, teevad tetraeedri. Neid punkte nimetame selle tetraeedri nukeks, iga kahe nuki vahelist joonetükki tetraeedri servaks ja igast kolmest nukist koosnevat kolmnurka tema tahuks. Seega on tetraeedril nukke ja tahke neli, servi kuus. Iga üksiku tahu kohta on tetraeedril üksik nukk, mis ei ole selle tahu nukiks ja mida nimetame selle tahu vastasseisvaks või lühemalt vastasnukiks, nagu seda tahku selle nuki vastastahuks. Tetraeedri kahte serva, millel ei ole ühiseid otsi, nimetame vastasservadeks ja tema kõiki nukke, servi ja tahke koos tetraeedri pinnaks.

Vaadeldes tetraeedrit ja tema tahkude laiendeid, näeme nelja tasapinda: iga tahk koos oma laienditega on üks tasapind. Tetraeedri iga serv koos oma pikenditega on kahe tasapinna ühine joon. Kui tasapinnul on ühine joon, siis öeldakse ka, et need tasapinnad lõikuvad seda joont mööda ja et see joon on nende pindade lõikejoon.

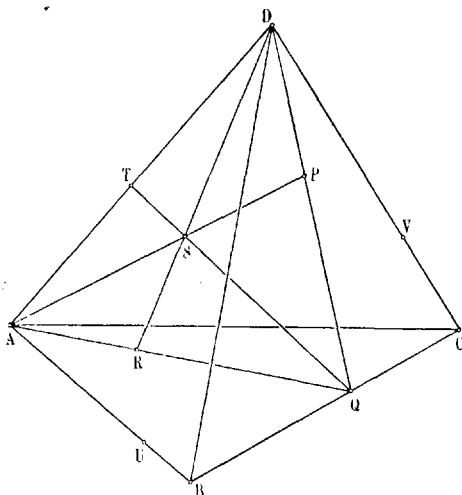
- (16) Kahel tasapinnal ei saa [11] olla kahte ühist sirget joont.

- (17) Tetraeedri ühest nukist vastastahu punktisse minevate joonetükkide sisemisi punkte nimetame selle tetraeedri sisemisiks punktteks.

- (18) Tetraeedri ühest nukist vastastahu punktisse minevate joonetükkide kõik punktid on ka selle tetraeedri igast teisest nukist vastastahu punktisse minevate kui ka iga serva punkttest vastasserva punktisse minevate joonetükkide omad.

Mingu tetraeedris $ABCD$ nukist A joonetükk AP vastastahu BCD mingisse punkti P , s. o. nii, et näiteks DP pikend lõikab kolmnurgas BDC nuki D vastaskülge BC mingis punktis Q . Siis on AP iga sisemine punkt S kolmnurga ADQ sisemine

punkt, nii et DS pikend lõikab külge AQ ja seega tõesti tahku ABC mingis punktis R . Selsamal põhjusel lõikab ka QS pikend külge AD , s. o. tetraeedri servale BC vastasserva mingis punktis T .



Nende joonetükkide hulgas, mis lähevad tetraeedri nukest vastastahkude (19) punktesse või servapunktest vastasserva punktesse, ei saa olla ühegi kahe pikendil ühist punkti.

Kui kaks seesugust joonetükki lähevad ühisest punktist, siis ei saa nende pikenditel [5] muidugi olla teist ühist punkti. Kui nad lähevad teine teisest nukist, mis tähime A - ja D -ga, vastastahkude punktesse P ja R , siis ei saa nende pikendid lõikuda järgmisel põhjusel. Nende lõikumise korral mingis punktis K oleksid punktid P ja R tasapinnal AKD , mis lõikaks serva BC mingis punktis $Q = DP \times BC$, ja see oleks samane punktiga $AR \times BC$. Sest vastasel korral oleks joonel BC kaks punkti tasapinna AKD peal ja siis [13] ka punkt D oletuse vastu tasapinnal ABC . Nüüd järgneks, näiteks kolmnurgast AQP [X'] joontele AK ja DK teiseks ühiseks punktiks tükkide AP ja DR lõikepunkt, mis on [5] võimata.

Kui üks joonetükk läheb ühest nukist A vastastahu BCD punktisse P ja teine ühe serva AD mingist punktist T vastasserva BC mingisse punktisse Q , siis ei saa nende pikendeil olla ühist punkti järgmisel põhjusel. Nende lõikumise korral mingis

punktis L oleksid tasapinna ALT peal peale punktide P ja Q veel punkt D kui joone AT oma. P oleks siis tahu BCD peal olles nimelt D ja Q vahel. Sest muidu oleks [11] tasapind DPQ , mis oleks [12] samane nii tasapinnaga BCD kui ka tasapinnaga ALT ehk ALD , nii et A , B , C ja D oleksid oletuse vastu ühel tasapinnal. Nüüd järgneks näiteks kolmnurgast ADP [X'] joonetele AL ja TL teiseks ühiseks punktiks tükide AP ja TQ lõikepunkt, mis on [5] võimata.

Kui viimaks üks joonetükk läheb serva AD punktist T vastasserva BC punktisse Q ja teine serva AB punktist U vastasserva CD punktisse V , siis ei saa nende pikendid lõikuda järgmisel põhjusel. Nende lõikumise korral mingis punktis M oleks ka:

- 1) T M ja Q vahel ja selle juures U M ja V vahel, või
- 2) T M ja Q vahel ja selle juures V M ja U vahel, või
- 3) Q M ja T vahel ja selle juures U M ja V vahel, või viimaks
- 4) Q M ja T vahel ja selle juures V M ja U vahel.

Esimesel ja viimasel juhul oleks joonetükel TV ja UQ [X'] ühine punkt. Need tükid on üks tasapinnal ACD , teine tasapinnal ACB . Nende ühisest punktist peaks siis läbi minema ka nende tasapindade [16] ainus ühine joon AC . See joon lõikaks siis näiteks kolmnurgal UQB ühte külge UQ ja peaks siis [14] lõikama ka kas joont AB peale A veel teist korda U ja B vahel või joont CB peale C veel teist korda Q ja B vahel, mis on [5] võimata. Teisel ja kolmandal juhul oleks joonetükel TU ja VQ [X'] ühine punkt, millest läheks läbi ka joon DB , nii et ta näiteks kolmnurgas ATU külge TU lõigates peaks [14] lõikama ka kas joont AB peale B veel teist korda U ja A vahel või joont AD peale D veel teist korda T ja A vahel, mis on [5] võimata.

Seega ei saa tõesti nende joonetükkide hulgas, mis lähevad tetraeedri nukest vastastahkude punktisse või servapunktest vastasserva punktisse, ühegi kahe pikenditel olla ühist punkti.

Nimetame tetraeedri ühest nukist vastastahu punktisse tulevail kõigil joonetükel sellest tahust algavate pikendite kõigi punktide kogu tetraeedri laiendiks sellest tahust ja kõigil neil samul joonetükel lähtenukist algavate pikendite kõigi punktide kogu tetraeedri laiendiks sellest nukist. Niisama nimetame tetraeedri ühe serva punkttest vastasserva punktisse min-

vail kõigil joonetükel sellest servast algavate pikendite kõigi punktide kogu tetraeedri laiendiks sellest servast. Siis on tetraeedril laiendeid üldse 14: neljast nukist, neljast tahust ja kuuest servast.

Tetraeedrit koos tema pinna ja laienditega nimetatakse selle tetraeedri ruumiks või lihtsalt ruumiks. Võib ütelda:

- ruumiks nimetatakse kõigi nende sirgete joonte
(20) kõigi punktide kogu, mis lähevad ühe tetraeedri igast nukist vastastahu ja selle äärjoone punktisse või mingi serva punktist ja otsist vastasserva punktisse ja otsisse.

Öeldakse, et selle tetraeedri nukid määravad selle ruumi ja nende nukide nimedega, näiteks A , B , C ja D , tähitakse ka see ruum $ABCD$. Öeldakse ka, et ruum läheb kõigist omist punktist läbi ja et kõik tema punktid on tema sees.

10. Ruumi määramise lause. Neli punkti, mis määravad ruumi, ei ole mitte eriliselt niisugused selle ruumi punktide hulgas, vaid

- (21) ruumi iga neli punkti, mis ei ole ühe tasapinna peal, määravad sellesama ruumi.

See ruumi määramise lause järgneb abilausest: kui sellel tetraeedril, mis määrab ruumi, võtame ühe nuki asemele mingi punkti ühe sellest nukist mineva serva või selle serva pikendi peal, siis määrab see uus tetraeedri (teised kolm endist nukki koos selle uuega) sellesama ruumi.

Selle abilause pikka tõestust lühendab lause:

- kui sirgel joonel on tetraeedri pinnaga
(22) kaks ühist punkti, siis on selle sirge joone kõik punktid selle tetraeedriga määratud ruumis.

Kui need ühised punktid on ühe tahu omad või üks on nukk ja teine selle nuki vastastahu punkt või mõlemad vastasservade punktid, siis on asi [20] tõesti nii. Jääb järgi vaadata veel kaks juhtu:

- 1) kui üks punkt on ühe serva, teine ühe tahu sisemine, ja
- 2) kui mõlemad punktid on tahkude sisemised.

Kui tetraeedril $ABCD$ on mingi punkt T serval AD ja mingi punkt P tahul BDC , nii et joon DP lõikab serva BC mingis punktis Q , siis on joone TP iga punkt K [13] tasapinna ADQ peal ja sellepärast lõikab tõesti [11] kas joon KD joonetükki AQ ja seega nuki D vastastahku ABC , või joon KA tükki DQ ja seega nuki A vastastahku BCD , või viimaks joon KQ serva AD ja seega kahte vastasserva. — Kui tetraeedril $ABCD$ on mingi punkt R tahul ABC ja mingi punkt P tahul BDC , nii et joon DP lõikab serva BC mingis punktis Q , siis lõikab joon QR [14] kas serva AB või serva AC mingis punktis W ja siis on joone PR iga punkt L [13] tasapinna DQW peal ja sellepärast lõikab tõesti kas joon LD joonetükki QW ja seega nuki D vastastahku ABC , või joon LQ tükki WD ja seega serva BC ja tahku ADC või ADB , või viimaks joon LW tükki DQ ja seega serva AC või AB ja tahku BCD , nii et see juht taandub ikka eelmiseks. Nii on tõesti sellel sirgel joonel, mis lõikab tetraeedri pinda kahes punktis, kõik punktid selle tetraeedriga määratud ruumis.

Olgu nüüd tetraeedril $ABCD$ võetud nuki C asemele serva BC mingi punkt Q , siis on tetraeedri $ABDQ$ ruumi kõik punktid [22] ka ruumi $ABDC$ omad, sest kõigil sirgetel joontel, mis lähevad kas tetraeedri $ABDQ$ nukkidest vastastahkude punktidesse või servapunktest vastasservade punktidesse, on kaks ühist punkti tetraeedri $ABDC$ pinnaga. On ju esimese tetraeedri kõik nukid ja servad ja ka kolm tahku teise tetraeedri pinnal ja et neljanda ADQ kõik punktid on tetraeedri $ABCD$ sees, siis ka iga sirge joon BS , mis tuleb vastasnukist B selle neljanda tahu mingisse punkti S , lõikab tõesti [18] tetraeedris $ABCD$ nuki B vastastahku ADC .

Jääb veel tõestada, et ka ruumi $ABCD$ iga punkt on ruumi $ABQD$ oma. Tetraeedri $ABCD$ nukest B ja C nende vastastahkude punktidesse minevatel joontel on kõik punktid ka ruumis $ABQD$ sellepärast, et sirgel joonel, mis läheb nukist B vastastahu ACD mingisse punkti X , nii et joon CX lõikab serva AD mingis punktis T , on kolmnurgas QTC [X'] ühine punkt joonetükiga TQ ja seega tõesti ka tahuga AQD . Samuti on ka sirgel joonel, mis läheb nukist C vastastahu ABD mingisse punkti, ühine punkt tahuga AQD . — Nukest A ja D nende vastastahkude punktidesse minevatest sirgetest joontest on küsitavad vaid need, mis lähevad nende tahkude osadesse DQC või AQC . Olgu Y mingi punkt tahu BCD osas DQC , nii et joon CY lõi-

kab külge DQ mingis punktis Z ja siis $[X]$ kolmnurgas BQD ka külge BD mingis punktis O . Siis on sirgel joonel AY [13] iga punkt N tasapinna AOZ peal ja sellepärast lõikab [11] kas joon NA tükki OZ või joon NO tükki AZ või viimaks joon NZ tükki AO ja seega igatahes üks neist joonist tetraeedri $ABQD$ pinda kahes punktis, nii et [22] kõik tema punktid, nende hulgas ka N , on tõesti ruumis $ABQD$. Nukel A ja D võime siin vahetada nimed. — Serva AD punkttest vastasserva BC punkttesse minevatest sirgetest joontest on küsitavad vaid need, mis lähevad serva BC osasse QC . Tulgu siisugune joon serva AD mingist punktist T . Siis on tema iga punkt J [13] tasapinna BQT peal ja siis ka [11] ühe sirge joone peal, mis lõikab kolmnurga BQT äärjoont tetraeedri $ABQD$ pinnal kahes punktis ja mille kõik punktid, nende hulgas ka J , on siis [22] tõesti ruumis $ABQD$. — Serva AB mingist punktist U vastasserva DC mingisse punkti V mineval sirgel joonel on kõik punktid ruumis $ABQD$ sellepärast, et joonetükk VB lõikab serva DQ $[X']$ mingis punktis G ja siis joonetükk UV $[X]$ tükki AG tahu AQD peal, nii et joonel UV on tõesti tetraeedri $ABQD$ pinnaga peale U veel teine ühine punkt. Nukel A ja D võime siin jälle vahetada nimed.

Nii on tõesti ruum $ABCD$ samane ruumiga $ABQD$, kui tetraeedril $ABCD$ on võetud nuki C asemele serva BC punkt Q või tetraeedril $ABQD$ nuki Q asemele serva BQ pikendi punkt C .

Sellest abilausest järgneb kõige pealt teine abilause: kui ruumi määraval tetraeedril võtame ühe nuki asemele ruumi mingi muu punkti, mis ei ole kolme teise nuki läbi mineva tasapinna peal, siis määrab see uus tetraeeder sellesama ruumi. On ju tetraeedri $ABCD$ ruumis iga muu punkt E [20] kas ühest nukist, mille tähime A -ga, vastastahu mingisse punkti, mille tähime P -ga, mineva sirge joone peal või jälle ühe serva, mille tähime AD -ga, mingist punktist T vastasserva mingisse punkti Q mineva sirge joone peal. Esimesel juhul lõikaks joon DP serva BC mingis punktis Q ja siis oleks esimese abilause järgi ruum $ABCD$ samane ruumiga $ABQD$, see samane ruumiga $ABDP$ ja see siis ühes ruumiga $ABCD$ tõesti samane ruumiga $ABDE$. Teisel juhul oleks jälle samuti ruum $ABCD$ samane ruumiga $ABDQ$, see samane ruumiga $ABTQ$, see samane ruumiga $ABTE$ ja see siis ühes ruumiga $ABCD$ tõesti samane ruumiga $ABDE$.

Olgu nüüd ruumis $ABCD$ mingid neli punkti K , L , M ja N mitte ühel tasapinnal. Siis on selle teise abilause järgi ruum $ABCD$ samane ruumiga $ABCK$, see samane ruumiga $ABKL$, see jälle ruumiga $AKLM$ ja see siis ühes ruumiga $ABCD$ tõesti samane ruumiga $KLMN$.

Sellest ruumi määramise lausest järgneb, et

kui sirgel joonel on kaks punkti
(23) või tasapinnal kolm mitte ühe sirge
joone peal olevat punkti ühes ruumis,
siis on neil kõik punktid seal,

sest me võime need kaks või kolm punkti võtta selle ruumi määrava tetraeedri nukeks.

11. Ruumi lahutamise lause. Nagu sirge joone lahutab kaheks pooleks iga tema punkt ja tasapinna iga tema sirge joon, nii lahutab ruumi kaheks pooleks iga tema tasapind. See „ruumi lahutamise lause“, mille täieliku sõnastamise jätame edaspidiseks, järgneb lausest:

Kui ühe ruumi kahel tasapinnal on
(24) üks ühine punkt, siis on neil ka teine
ühine punkt ja seega [13] ühine sirge joon.

Olgu ühes ruumis kaks tasapinda α ja β ja olgu neil tasapinnul ühine punkt P . Võtame P tasapinna α üheks määravaks punktiks ja nimetame tema teised kaks määravat punkti B -ks ja D -ks. Siis on [II] Q nii, et P on tema ja D vahel, ja siis C nii, et Q on tema ja B vahel. Võtame P ka tasapinna β üheks määravaks punktiks ja nimetame tema teised kaks määravat punkti A -ks ja E -ks. Siis on $\alpha \equiv BCD$, $\beta \equiv PAE$ ja nad mõlemad on ruumis $ABCD$. On tarvis tõestada, et neil on peale P veel teine ühine punkt.

Tasapinna β punkt E , kui ruumi $ABCD$ punkt, on [20] kas sirge joone peal, mis ühendab tetraeedri $ABCD$ ühte nukki vastastahu mingi punktiga, või jälle sirge joone peal, mis ühendab selle tetraeedri ühe serva mingit punkti vastasserva mingi punktiga. Kui esimesel juhul selleks nukiks oleks A , siis oleks joon EA [13] tasapinna β peal ja tema lõikepunkt vastastahuga BCD , mis on α osa, olekski α ja β teiseks ühiseks punktiks. Selleks lõikepunktiks ei saa olla esimene ühine punkt P sellepärast, et siis

oleksid punktid P , A ja E ühe sirge joone peal, aga oletuse järg määravad nad tasapinna β ja ei saa siis olla ühe joone peal. — Kui sirge joon punktist E ei lähe mitte nukist A vastastahu punktisse, vaid muust nukist, siis tähime nimelt selle nuki D -ga. Lõigaku joon ED vastastahku ABC mingis punktis R , nii et joonetüki AR pikend lõikab serva BC mingis punktis F . Siis on $[X]$ joonel EP kolmnurgas RDQ mingi ühine punkt G küljega RQ ja siis joonel AG $[X]$ kolmnurgas FRQ ühine punkt küljega FQ , s. o. joonega BC , mis ongi tasapindade α ja β teine ühine punkt. — Kui nüüd viimaks sirge joon punktist E läheb tetraeedri $ABCD$ nuki A juuresoleval serval, mille teise otsa tähime B -ga, mingist punktist U vastasserva CD mingisse punktisse V , siis lõikab joon VP [14] kolmnurgal BCD veel teist külge DB või BC mingis punktis H nii, et P on H ja V vahel. Siis lõikab ka joon EP $[X]$ kolmnurgas UHV külge UH mingis punktis I ja siis on $[X]$ kolmnurgas BUH joonel AI ühine punkt küljega BH , mis ongi tasapindade α ja β teine ühine punkt. — Seega on kahel tasapinnal ühes ruumis siis, kui neil on üks ühine punkt, tõesti ka teine ühine punkt.

Nüüd saame lühidalt tõestada ruumi lahutamise lause, mille nüüd ka täielikult sõnastame.

Olgu ühes ruumis tasapind α ja punkt B mitte selle tasapinna peal. Siis öeldakse, et iga punkt C on siis, kui tasapind α ei lõika joonetükki BC , sellest tasapinnast punkti B pool, ja et iga punkt D siis, kui tasapind α lõikab joonetükki BD , on tasapinnast α punkti B kohta teisel pool. Need kaks ruumi poolt, milleks selle ruumi lahutab tema mingi tasapind (α), ei olene sellest, missugune punkt (B) selles ruumis on nende poolte määramiseks võetud, vaid

- iga tasapind ruumis lahutab selle ruumi
 (25) kaheks pooleks nii, et ükski sirge joonetükk, mis ühendab ühe poole kahte punkti, ei lõiku selle lahutaja tasapinnaga, kuna iga joonetükk, mis ühendab ühe poole punkti teise omaga, lõikub.

Olgu selles ruumis, kus on tasapind α ja punkt B mitte selle tasapinna peal, mingid kaks punkti C ja E tasapinnast α punkti B pool, s. o. nii, et tasapind α ei lõika ei joonetükki BC ega tükki BE . Siis ei saa tasapind α lõigata joonetükki CE

sellepärast, et selle lõikamise korral oleks tal tasapinnaga BCE [24] ühine sirge joon, mis tasapinna BCE peal kolmnurga BCE külge CE lõigates ei saaks [14] lõikamata jätta kas külge BC või külge BE . Kui mingid punktid D ja F on tasapinnast a punkti B kohta teisel pool, s. o. nii, et tasapind a lõikab nii joonetükki BD kui ka BF , siis ei saa tasapindade a ja BDF [16] ainus ühine joon kolmnurgas BDF külgi BD ja BF lõigates [7] lõigata ka kolmat külge DF . Kui viimaks mingi punkt E on tasapinnast a punkti B pool, aga mingi muu punkt F teisel pool, s. o. nii, et tasapind a lõikab joonetükki BF , aga ei lõika tükki BE , siis peab ta lõikama joonetükki EF sellepärast, et tasapindade a ja BEF [16] ainus ühine joon ei saa [14] kolmnurgas BEF lõigata ühte ainust külge. Sellega on ruumi lahutamise lause tõestatud.

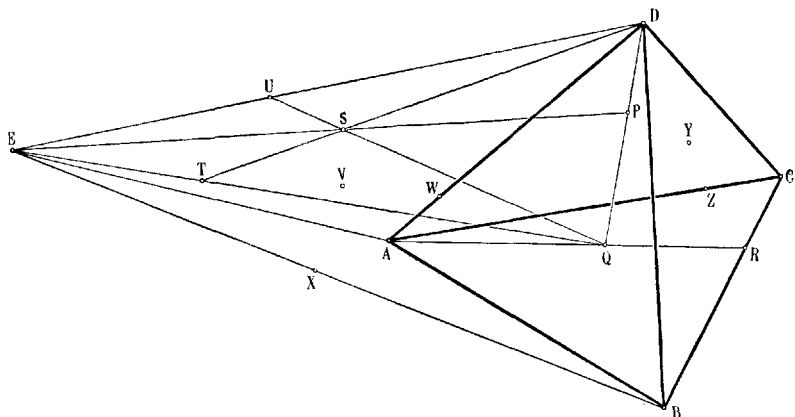
12. Neljamõtteline ruum. Ruumi vaadeldes ei märka meie, et oleks veel punkte, mis ei oleks selles ruumis. Kuid seda asjaolu ei saa meie võtta uue põhilause sisuks sellepärast, et nii mõnigi asi võib olemas olla, ilma et meie teda märkaksime. Meil ei ole ka mingit alust öelda, et on veel punkte, mis ei ole meie märgatavas ruumis. Meie võime aga väga hästi mõttes vaadelda seda, kuidas oleks lugu siis, kui oleks niisuguseid punkte.

Ruumi määravad neli punkti, mis ei ole kõik ühel tasapinnal. Kui on veel punkt, mis ei ole selles ruumis, siis on viis punkti, mis ei ole kõik ühes ruumis. Ütleme, et viis punkti, mis ei ole kõik ühes ruumis, teevad pentatopi. Neid punkte nimetame selle pentatopi nukeks, iga kahe nuki vahelist joonetükki pentatopi servaks, igast kolmest nukist koosnevat kolmnurka tema tahuks ja igast neljast nukist koosnevat tetraeedrit tema seinaks. Sellega on pentatopi nukke ja seinu kumbigi viis, servi ja tahke kumbigi kümme. Iga üksiku seina kohta on pentatopil üksik nukk, mis ei ole selle seina nukiks; seda nimetame selle seina vastasseisvaks või vastasnukiks, nagu seda seina selle nuki vastasseinaks. Nii-sama on pentatopil iga üksiku tahu kohta üksik serv, mille kumbki ots ei ole selle tahu nukiks ja mida nimetame selle tahu vastasservaks, nagu seda tahku selle serva vastastahuks.

Mõteldes pentatoppi ja tema seinte laiendeid, märkame viit ruumi: iga sein koos oma laienditega on üks ruum. Pentatopi

iga tahk koos oma laienditega on kahe ruumi ühine tasapind — selle kahe ruumi lõikepind.

- (26) Kahel ruumil ei saa [21] olla kahte ühist tasapinda.



- Pentatopi ühest nukist vastasseina sisemistesse
(27) punktidesse minevate joonetükkide sisemisi punkte nimetame selle pentatopi sisemisiks punktiks.

Joonisel saame näidata pentatopi sisemisi punkte selsamal viisil, nagu tetraeedri omigi: Olgu punkt P pentatopi $ABCDE$ seinal $ABCD$, s. o. nii, et P on D ja Q vahel, kus Q on A ja R vahel ja R B ja C vahel; siis ongi joonetüki EP iga sisemine punkt S selle pentatopi sisemine punkt. Punkt S ei saa nimelt olla seina $ABCD$ punkt sellepärast, et vastasel korral oleksid joonel PS [23] kõik punktid ja nende hulgas ka punkt E oletuse vastu ruumis $ABCD$. Punkt S ei saa olla ka selle pentatopi ühegi teise seina sees; sest kõigile neile seinule on E ühiseks nukiks ja seina $ABCD$ tahud selle nuki vastastahkudeks, nii et siis, kui S oleks üheski neist seinust, peaks joon ES lõikama tetraeedri $ABCD$ ühte tahku ja siis selle lõikepunkti ja punkti P pärast jälle [23] täiesti olema ruumis $ABCD$.

- Pentatopi ühest nukist vastasseina sisemistesse punktidesse või ühe serva punktist vastastahu sisemistesse punktidesse minevate joonetükkide sisemised
(28) punktid on ka selle pentatopi igast nukist vastasseina punktidesse minevate kui

ka iga serva punkttest vastastahu punkt-
tesse minevate joonetükkide omad.

Mingu pentatopis $ABCDE$ nukist E joonetükk EP vastas-
seina $ABCD$ mingisse punkti P , s. o. nii, et P on näiteks D ja
 Q vahel, kus Q on A ja R vahel ja R B ja C vahel. Siis on EP
iga sisemine punkt S kolmnurga EDQ sisemine punkt, nii et
 DS pikend lõikab külge EQ mingis punktis T ja seega tõesti
seina $ABCE$, mille sees (E ja Q pärast) see punkt on. Selsamal
põhjusel lõikab ka QS pikend külge ED mingis punktis U , nii
et S on tõesti ka selle joonetüki UQ peal, mis läheb serva ED
punktist U vastastahu ABC punktisse Q . Nukkide nimesid vahe-
tades saame muidugi igale üksikule nukile nimeks D ja igale
üksikule servale nimeks ED .

Nende joonetükkide hulgas, mis lähe-
vad pentatopi nukest vastasseinte punk-
(29) tesse või servapunkttest vastastahu punk-
tesse, ei saa olla ühegi kahe pikenditel
ühist punkti.

Kui kaks niisugust joonetükki lähevad ühisest nukist, siis
ei saa nende pikenditel [5] muidugi olla teist ühist punkti. Kui
nad lähevad teine teisest nukist, mis tähime E - ja D -ga, vastas-
seinte punkttesse P ja T , siis ei saa nende pikendid lõikuda järg-
misel põhjusel. Nende lõikumise korral mingis punktis K olek-
sid punktid P ja T tasapinnal EKD , mis lõikaks tahku ABC
punktis $Q = DP \times ABC$, mis oleks samane punktiga $ET \times ABC$.
Sest vastasel korral oleks tasapinnal EKD ruumis $ABCD$ peale
punktide D ja P veel kolmas $ET \times ABC$ mitte joone DP peal ja
sellega oleksid [23] selle tasapinna kõik punktid ja nende hulgas
oletuse vastu ka E ruumis $ABCD$. Nüüd järgneks näiteks kolm-
nurgast EQP [X'] joontele EK ja DK teiseks ühiseks punktiks
tükkide EP ja DT eneste lõikepunkt, mis on [5] võimata.

Samuti ei saa joonetüki EP pikend lõikuda serva ED min-
gist punktist U vastastahu ABC punktisse mineva joonetüki
pikendiga sellepärast, et nende lõikumise korral mingis punktis
 L peaks punkt $LU \times ABC$ endisel põhjusel olema Q ja siis
näiteks kolmnurgas DPE joonetükkidel EP ja UQ ühine punkt
võimatuks teiseks ühiseks punktiks joontele LE ja LU . Joone-
tüki EP pikend ei saa lõikuda ka serva BC mingist punktist R

vastastahu EAD mingisse punkti V tuleva joonetüki pikendiga. Sest kui need pikendid lõikuksid mingis punktis M , siis oleksid tasapinnal EMR ruumiga $ABCD$ ühised punktid P , R ja mingi $W = EV \times AD$, ja kui need ei oleks ühe sirge joone peal, siis peaksid selle tasapinna kõik punktid ja sellega ka punkt E [23] olema oletuse vastu ruumis $ABCD$; kui aga punktid P , R ja W on ühe sirge joone peal, siis oleks tetraeedri $ABCD$ sisemine punkt P servapunktide R ja W vahel nagu ka kolmnurga EAD sisemine punkt V nuki E ja vastaskülje punkti W vahel ja sellega oleks kolmnurgas EPW $[X']$ joonetükel EP ja RV ühine punkt võimatuks teiseks ühiseks punktiks joontele ME ja MR . Et nüüd pentatopi $ABCDE$ igale üksikule nukile võime nimeks panna E ja siis igale üksikule sellest nukist minevale servale ED ja igale üksikule mitte sellest nukist minevale servale BC , siis ei saa tõesti lõikuda nende joonetükkide pikendid, mis lähevad üks pentatopi mingist nukist vastasseina punktisse ja teine mingi serva punktist vastastahu punktisse.

Viimaks ei saa lõikuda ka nende joonetükkide pikendid, mis lähevad teine pentatopi teise serva punktist vastastahkude punktisse. Kui neil kahel serval ei ole ühist otsa, siis tähime nad ED - ja BC -ga. Kui nüüd serva ED mingist punktist U vastastahu ABC mingisse punkti Q mineva joonetüki UQ pikendil oleks serva BC mingist punktist R vastastahu EAD mingisse punkti V mineva joonetüki RV pikendiga mingi ühine punkt N , siis oleksid jooned UV ja RQ [13] tasapinnal UNR . Need jooned peaksid mõlemad minema punktisse A ; sest vastasel korral peaks UV [14] lõikama kas serva EA või serva AD ja niisama RQ kas serva AB või serva AC , nii et tasapind UNR oleks [23] ühes oma punktiga R oletuse vastu kas ruumis $ABDE$ või ruumis $ACDE$. Kui aga nii UV kui ka RQ lähevad punktisse A , siis oleks näiteks kolmnurgast AUQ $[X']$ joonetükkidel UQ ja RV ühine punkt võimatuks teiseks ühiseks punktiks joontele NU ja NR . — Joonetüki UQ pikend ei saa lõikuda ka serva EB mingist punktist X vastastahu ACD mingisse punkti Y mineva joonetüki pikendiga. Nende lõikumise korral mingis punktis O oleks kas 1) UO ja Q vahel ja XO ja Y vahel, või 2) UO ja Q vahel ja YO ja X vahel, või 3) QO ja U vahel ja XO ja Y vahel, või viimaks 4) QO ja U vahel ja YO ja X vahel. Esiimesel ja viimasel korral oleks joonetükel UY ja QX $[X']$ ühine punkt. Need tükid on üks ruumis $ACDE$, teine ruumis $ABCE$.

Nende ühine punkt peaks siis olema nende ruumide [26] ainsa ühise tasapinna ACE peal. Olgu $AC \times DY = Z$. Siis saaks joonel UY , mis on tasapinnal EDZ , olla tasapinnaga EAC ühine punkt ainult selle kahe tasapinna ühise joone EZ peal. Kuid kolmnurgas EDZ ei saa joonetükil UY , mis ühendab külgede ED ja DZ punkte, [7] enam olla ühist punkti kolmanda küljega EZ ega [8] selle külje pikendiga. — Teisel ja kolmandal juhul oleks joonetükel UX ja QY [X'] ühine punkt. Need tükid on üks tasapinnal EBD , teine ruumis $ABCD$. Nende ühine punkt peaks siis olema selle tasapinna ja selle ruumi ainsa ühise joone BD peal, sest muidu oleks tasapind EBD [23] ühes punktiga E oletuse vastu ruumis $ABCD$. Kuid kolmnurgas EBD ei saa joonetükil UX , mis ühendab külgede ED ja EB punkte, [7] enam olla ühist punkti kolmanda küljega BD ega [8] selle külje pikendiga. — Et pentatopi iga nuki võime tähtida E -ga ja iga kaks sellest nukist minevat serva EB -ga ja ED -ga, siis ei saa tõesti lõikuda ka nende joonetükkide pikendid, mis ühendavad mingist ühest nukist minevate servade punkte vastastahkude punktiga.

Seega ei saa tõesti nende joonetükkide hulgas, mis lähevad pentatopi nukest, vastasseina punktisse või servapunktest vastastahu punktisse, olla ühegi kahe pikenditel ühist punkti.

Nimetame pentatopi ühest nukist vastasseina punktisse tulevail kõigil joonetükel sellest seinast algavate pikendite kõigi punktide kogu pentatopi laiendiks sellest seinast ja kõigil neilsamul joonetükel lähtenukist algavate pikendite kõigi punktide kogu pentatopi laiendiks sellest nukist. Niisama nimetame pentatopi ühe serva punktist vastastahu punktisse minevail kõigil joonetükel sellest servast või tahust algavate pikendite kõigi punktide kogu pentatopi laiendiks sellest servast või tahust. Siis on pentatopil laiendeid üldse 30: viiest nukist, viiest seinast, kümnest servast ja kümnest tahust.

Pentatoppi koos tema laienditega nimetatakse selle pentatopi ruumiks või neljamõõteliseks ruumiks. Võib ütelda:

- neljamõõteliseks ruumiks nimetatakse kõigi nende sirgete joonte kõigi punktide kogu, mis lähevad
 (30) ühe pentatopi mingist nukist vastasseina ja selle pinna punktisse või mingi serva punktist ja otsist vastastahu ja selle äärjoone punktisse.

Õeldakse, et selle pentatopi nukid määravad selle neljamõõtelise ruumi ja nende nukide nimedega, näiteks A , B , C , D ja E , tähitakse ka see neljamõõteline ruum $ABCDE$.

Nimi „neljamõõteline ruum“ tuleb järgmisest asjaolust. Sirget joont nimetatakse ka ühemõõteliseks ruumiks ja siis tasapinda kahemõõteliseks sellepärast, et kui loeme sirgel joonel olevat punkte n , siis on neid tasapinnal, nagu edaspidi näeme, n^2 . Lihtsalt ruumiks nimetatud punktide kogu nimetatakse ise ka kolmemõõteliseks ruumiks sellepärast, et seal on punkte n^3 . Pentatopi ruumis on aga punkte n^4 .

13. Neljamõõtelise ruumi määramise lause. Viis punkti, mis määravad neljamõõtelise ruumi, ei ole mitte eriliselt niisugused selle neljamõõtelise ruumi punktide hulgas, vaid

- neljamõõtelise ruumi iga viis punkti,
(31) mis ei ole ühes kolmemõõtelises ruumis,
määravad sellesama neljamõõtelise ruumi.

See neljamõõtelise ruumi määramise lause järgneb abilausest:

Kui sellel pentatopil, mis neljamõõtelise ruumi määrab, võtame ühe nuki asemele mingi punkti ühe sellest nukist mineva serva või selle serva pikendi peal, siis määrab see uus pentatopp (teised neli endist nukki koos selle uuega) sellesama neljamõõtelise ruumi.

Selle abilause tõestust lühendab lause:

- Kui sirgel joonel on pentatopi sein-
(32) tega kaks ühist punkti, siis on selle
sirge joone kõik punktid selle pentatopiga määratud ruumis.

Kui need ühised punktid on ühe tahu või ühe seina omad või üks on nukk ja teine selle nuki vastasseina punkt või viimaks üks ühe serva ja teine selle serva vastastahu punkt, siis on asi [30] tõesti nii. Jääb järgi vaadata veel neli juhtu: 1) kui üks punkt on ühe serva, teine (mitte selle serva juures oleva) seina sisemine, 2) kui mõlemad punktid on (mitte ühise servaga) tahkude sisemised, 3) kui üks punkt on ühe tahu ja teine (mitte selle tahu juures oleva) seina sisemine ja 4) kui mõlemad on seinte sisemised.

Kui pentatopil $ABCDE$ on mingi punkt U serval ED ja mingi punkt P seinas $ABCD$, nii et joon DP lõikab tahku ABC mingis punktis Q , siis on joone UP iga punkt F [13] tasapinna EDQ peal ja sellepärast lõikab tõesti [11] kas joon DF joonetükki EQ ja sellega nuki D vastasseina $ABCE$, või joon EF tükki DQ ja sellega nuki E vastasseina $ABCD$, või viimaks joon QF serva ED , mis on vastasservaks tahule ABC , mille peal on Q . — Olgu pentatopil $ABCDE$ mingi punkt Q tahul ABC , nii et [9] joon AQ lõikab serva BC mingis punktis R , ja mingi teine punkt V tahul EAD , nii et [9] joon AV lõikab serva ED mingis punktis U . Siis on joone QV iga punkt G [13] tasapinna ARU peal ja sellepärast lõikab tõesti [11] kas joon AG joonetükki RU ja sellega A vastasseina $BDCE$, või joon UG tükki AR ja sellega tahku ABC , mis on vastastahuks servale ED , mille punkt on U , või viimaks joon RG tükki AU ja sellega tahku ADE , mis on vastastahuks servale BC , mille punkt on R . — Olgu pentatopil $ABCDE$ mingi punkt V tahul ADE , nii et joon EV lõikab serva AD mingis punktis W , ja olgu seinal $ABCD$ mingi punkt P , nii et joon DP lõikab tahku ABC mingis punktis Q ja siis joon AQ serva BC mingis punktis R . Siis on joonel WP [14] kas joonetükiga DR või tükiga AR mingi ühine punkt P' . Seega on joone VP iga punkt H [13] tasapinna $EW P'$ peal. Sellepärast lõikab [11] kas joon EH joonetükki WP' ja seega tõesti nuki E vastasseina $ABCD$, või joon WH joonetükki EP' ja seega tõesti peale serva AD veel kas seina $EB CD$ või seina $EABC$, või viimaks lõikab joon PH joonetükki EW ja seega peale tahu BCD või ABC veel tahku ADE , nii et see juhtum taandub ühele eelmisist. — Olgu viimaks pentatopil $ABCDE$ endiselt punkt P seinas $ABCD$ ja punkt T seinas $ABCE$, nii et joon ET [11] lõikab tahku ABC mingis punktis Q' . Kui punkt Q' on samane punktiga Q , siis on joone PT iga punkt I [13] tasapinnal EQD ja sellepärast lõikab tõesti [11] kas joon EI joonetükki QD ja sellega nuki E vastasseina $ABCD$, või joon DI tükki EQ ja sellega nuki D vastasseina $ABCE$, või viimaks joon QI joonetükki ED , mis on vastasservaks tahule ABC , mille peal on punkt Q . Kui punkt Q' ei ole samane punktiga Q , siis lõikab joon QQ' [14] kolmnurkadest ARC ja ARB koosseisva kolmnurga ABC äärjoont mingis kahes punktis R' ja Z' ja siis on joon QP [13] tasapinnal $R'ZD$ ja lõikab seal [14] mingis punktis

K kas joonetükki DR' või tükki DZ' ja sellega kas tahku ABD või BCD või CAD . Siis on joone PT iga punkt I [13] tasapinnal $EQ'K$ ja sellepärast lõikab [11] kas joon EI joonetükki KQ' ja sellega nuki E vastasseina $ABCD$, või joon $Q'I$ joonetükki EK ja sellega peale tahu ABC , mille peal on Q' , veel kas seina $EABD$ või $EBCD$ või $ECAD$, või lõppude lõpuks lõikab joon KI tükki EQ' ja sellega peale tahu ABD või BCD või CAD , mille peal on punkt K , veel seina $EABC$, mille sees on EQ' .

Nii on ka see viimane juhtum kas otse või eelmiste kaudu tõestatud ja seega on tõesti sirgel joonel siis kõik punktid mingi pentatopiga määratud ruumis, kui tal on kaks ühist punkti selle pentatopi seintega.

Olgu nüüd pentatopil $ABCDE$ võetud nuki E asemele serva ED mingi punkt U . Siis on pentatopi $ABCDU$ ruumi kõik punktid [32] ka neljamõõtelise ruumi $ABCDE$ omad sellepärast, et kõigil sirgeil joonil, mis lähevad kas pentatopi $ABCDU$ nukest vastasseinte punktidesse või servapunktest vastastahkude punktidesse, on kaks ühist punkti pentatopi $ABCDE$ seintega. On ju esimese pentatopi kõik nukid, servad ja tahud ja ka neli seina teise pentatopi seintes ja et viienda seina $ABCU$ kõik punktid on pentatopi $ABCDE$ serva ED punkti U ja selle serva vastastahu ABC vahel ja sellega pentatopi $ABCDE$ sees, siis ka iga sirge joon DL , mis tuleb vastasnukist D selle viienda seina mingisse punkti L , lõikab tõesti [27] pentatopis $ABCDE$ nuki D vastasseina $ABCE$.

Jääb veel tõestada, et ka neljamõõtelise ruumi $ABCDE$ iga punkt on neljamõõtelise ruumi $ABCDU$ oma. Selle juures on küsitavad vaid nende sirgete joonte punktid, mis lähevad kas 1) nukist E vastasseina $ABCD$ punktidesse või 2) nukist C tetraeedri $EABU$ punktidesse või 3) serva DA punktist vastastahu EBC punktidesse või 4) serva EB punktist vastastahu ACD punktidesse või 5) serva BC punktist kolmnurga EAU punktidesse või viimaks 6) joonetüki EU punktist tahu ABC punktidesse. Sest kõik sirged jooned, mille peal on neljamõõtelise ruumi $ABCDE$ muud punktid, on kas ühised neljamõõtelise ruumi $ABCDU$ omadega või esinevad siis, kui siin esimesel juhul vahetame punktid E ja D või teisel, kolmandal, neljandal ja viiendal juhul punktid A , B ja C .

Mingu sirge joon nukist E vastasseina $ABCD$ mingisse punkti P , nii et joonetüki DP pikend lõikab tahku ABC mingis

punktis Q . Siis lõikab joon EP kolmnurgas DUQ $[X']$ külge UQ , sellega pentatopi $ABCDU$ sein $ABCU$ ja on siis tõesti [32] täiesti neljamõõtelises ruumis $ABCDU$, kuna ta ju ka sein $ABCD$ lõikab (punktis P). — Mingu sirge joon nukist C tetraeedri $EABU$ mingisse punkti S' , nii et joon ES' lõikab tahku ABU mingis punktis T' ja siis tetraeedris $EABD$ [18] ka tahku ABD mingis punktis U' . Siis on joone CS' iga punkt L [13] tasapinna $CT'U'$ peal ja sellepärast lõikab [11] kas joon CL joonetükki $T'U'$ või joon TL tükki CU' või viimaks joon $U'L$ tükki CT' ja sellega igatahes üks neist joonist pentatopi $ABCDU$ seinu kahes punktis, nii et [32] kõik tema punktid, nende hulgas ka L , on tõesti neljamõõtelises ruumis $ABCDU$. — Mingu serva AD mingist punktist W sirge joon vastastahu EBC mingisse punkti. Siis on selle joone iga punkt M neljamõõtelises ruumis $ABCDU$ sellepärast, et nukist D punktisse $WM \times EBC$ tulev joonetükk lõikab $[X']$ tahku UBC mingis punktis V' ja siis [11] tasapinnal $V'AD$ kas joon MV' joonetükki DA või joon MD tükki AV' või viimaks joon MA tükki $V'D$ ja sellega igatahes üks neist joonist pentatopi $ABCDU$ seinu kahes punktis. — Mingu serva EB mingist punktist X sirge joon vastastahu ADC mingisse punkti Y . Siis on selle joone XY iga punkt N neljamõõtelises ruumis $ABCDU$ sellepärast, et joonetükk XD lõikab $[X']$ tükki UB mingis punktis W' ja siis [11] tasapinnal $W'YD$ kas joon NW' joonetükki YD või joon ND tükki $W'Y$ ja sellega igatahes üks neist joonist pentatopi $ABCDU$ seinu kahes punktis. — Mingu sirge joon serva BC mingist punktist R kolmnurga EAU mingisse punkti X' , nii et joonetüki EX' pikend lõikab külge AU mingis punktis V ja siis $[X]$ ka serva AD mingis punktis W . Siis on joone RX' iga punkt O neljamõõtelises ruumis $ABCDU$ sellepärast, et tasapinnal RVW lõikab [11] kas joon OV joonetükki WR või joon OW tükki RV ja sellega igatahes üks neist joonist pentatopi $ABCDU$ seinu kahes punktis. — Mingu viimaks sirge joon tahu ABC mingist punktist Q joonetüki EU mingisse punkti Y' . Siis on joone QY' iga punkt Z' neljamõõtelises ruumis $ABCDU$ sellepärast, et tasapinnal UDQ lõikab [11] kas joon $Z'U$ joonetükki QD või joon $Z'D$ tükki UQ ja sellega igatahes üks neist joonist pentatopi $ABCDU$ seinu kahes punktis.

Nii on tõesti neljamõõteline ruum $ABCDE$ samane ruumiga $ABCDU$, kui pentatopil $ABCDE$ on võetud nuki E asemele serva ED punkt U või pentatopil $ABCDU$ nuki U asemele serva DU pikendi punkt E .

Sellest abilausest järgneb kõige pealt teine abilause: kui neljamõõtelist ruumi määraval pentatopil võtame ühe nuki asemele selle neljamõõtelise ruumi mingi muu punkti, mis ei ole nelja teise nuki läbi minevas ruumis, siis määrab see uus pentatopp sellesama neljamõõtelise ruumi.

On ju pentatopi $ABCDE$ ruumis iga muu punkt F [30] kas ühest nukist (mille tähime E -ga) vastasseina mingisse punkti (mille tähime P -ga) mineva sirge joone peal või jälle ühe serva (mille tähime ED -ga) mingist punktist U vastastahu mingisse punkti Q mineva sirge joone peal. Esimesel juhul lõikaks joon DP tahku ABC mingis punktis Q , nii et joon AQ lõikaks serva BC mingis punktis R , ja siis oleks esimese abilause järgi samased neljamõõtelised ruumid $ABCDE$, $ABRDE$, $ABQDE$, $ABPDE$, $ABPDF$, $ABQDF$, $ABRDF$, $ABCDF$. Teisel juhul oleks samuti samased neljamõõtelised ruumid $ABCDE$, $ABRDE$, $ABQDE$, $ABQDU$, $ABQDF$, $ABRDF$, $ABCDF$.

Olgu nüüd neljamõõtelises ruumis $ABCDE$ mingi viis punkti K , L , M , N ja P mitte ühes ruumis. Siis on selle teise abilause järgi tõesti samased neljamõõtelised ruumid $ABCDE$, $ABCDK$, $ABCKL$, $ABKLM$, $AKLMN$, $KLMNP$, kui punktel K , L , M , N , P oleme tarvilikul korral vahetanud nimed nii, et K ei ole ruumis $ABCD$ ega L ruumis $ABCK$, ega M ruumis $ABKL$, ega N ruumis $AKLM$.

Sellest neljamõõtelise ruumi määramise lausest järgneb, et kui sirgel joonel on kaks punkti või tasapinnal kolm mitte ühe sirge joone
(33) peal olevat punkti või ruumil neli mitte ühel tasapinnal olevat punkti ühes neljamõõtelises ruumis, siis on neil kõik punktid seal,

sest võime ju need kaks, kolm või neli punkti võtta selle neljamõõtelise ruumi määrava pentatopi nukeks.

14. Neljamõõtelise ruumi lahutamise lause. Nagu ruumi lahutab kaheks pooleks iga tema tasapind, nii lahutab neljamõõtelise ruumi kaheks pooleks iga tema (kolmemõõteline) ruum. See neljamõõtelise ruumi lahutamise lause, mille täieliku sõnastamise jätame edaspidiseks, järgneb lausest:

Kui ühe neljamõõtelise ruumi tasa-
(34) pinnal ja ruumil on üks ühine punkt,
siis on neil ka teine ühine punkt ja sel-
lega [13 ja 23] ühine sirge joon.

Olgu ühes neljamõõtelises ruumis tasapind a ja ruum B , millel on ühine punkt P . Võtame P ruumi B üheks määravaks punktiks ja olgu tema teised kolm määravat punkti A , B ja D . Siis on [II] Q nii, et P on tema ja D vahel, R nii, et Q on tema ja A vahel, ja C nii, et R on tema ja B vahel. Võtame P ka tasapinna a üheks määravaks punktiks ja olgu tema teised kaks määravat punkti E ja F . Siis on $a \equiv PEF$, $B \equiv ABCD$ ja nad mõlemad on neljamõõtelises ruumis $ABCDE$. On tarvis tõestada, et neil on peale P veel teine ühine punkt.

Tasapinna a punkt F kui neljamõõtelise ruumi $ABCDE$ punkt on [30] kas sirge joone peal, mis ühendab pentatopi $ABCDE$ ühte nukki vastasseina mingi punktiga, või jälle sirge joone peal, mis ühendab selle pentatopi ühe serva mingit punkti vastastahu mingi punktiga. Kui esimesel juhul selleks nukiks oleks E , siis oleks joon EF [13] tasapinna a peal ja tema lõikepunkt vastasseinaga $ABCD$, mis on B osa, olekski a ja B teiseks ühiseks punktiks. Selleks lõikepunktiks ei saa olla esimene ühine punkt P sellepärast, et siis oleksid punktid P , E ja F ühe sirge joone peal, aga oletuse järgi määravad nad tasapinna a ja ei saa siis olla ühe sirge joone peal. — Kui sirge joon punktist F ei lähe mitte nukist E vastasseina punktisse, vaid muust nukist, siis tähime nimelt selle nuki D -ga. Lõigaku joon FD vastasseina $ABCE$ mingis punktis T , nii et joonetüki ET pikend lõikab tahku ABC mingis punktis Q' . Siis on [X] joonel FP kolmnurgas DTQ mingi ühine punkt P'' küljega TQ ja siis joonel EP'' [X] kolmnurgas TQQ'' ühine punkt küljega QQ'' , s. o. tahuga ABC , mis ongi tasapinna a ja ruumi B teiseks ühiseks punktiks. — Mingu sirge joon punktist F pentatopi $ABCDE$ nuki E juures oleval serval, mille teise otsa tähime D -ga, mingist punktist U vastastahu ABC mingisse punkti Q' . Kui punktid Q , P ja D on ühe sirge joone peal, siis on tasapind FUD ehk $FQ'D$ samane tasapinnaga a ja sellega juba punkt D a ja B teiseks ühiseks punktiks. Kui Q , P ja D ei ole ühe sirge joone peal, siis määravad nad tasapinna PDQ , mis ühes tasapinnaga a on [23] ruumis $EFUP$. Neil tasapinnul on seal ühine punkt P ja

seega [24] veel teine ühine punkt, mis ongi ka teiseks ühiseks punktiks tasapinnale α ja ruumile B ($\equiv ABCD$) sellepärast, et tasapinna PDQ kõik punktid on [23] selles ruumis. — Mingu viimaks sirge joon punktist F pentatopil $ABCDE$ nuki E vastasseina mingil serval, mille tähime BC -ga, mingist punktist R' vastastahu ADE mingisse punkti V , nii et joonetüki EV pikend lõikab serva AD mingis punktis W . Kui punktid R' , P ja W on ühe sirge joone peal, siis on tasapind EFR' ehk EFW samane tasapinnaga α ja sellega juba punkt R' ja B ($\equiv ABCD$) teiseks ühiseks punktiks. Kui punktid R' , P ja W ei ole ühe sirge joone peal, siis määravad nad tasapinna PWR' , mis ühes tasapinnaga α on [23] ruumis $EFWP$. Neil on seal ühine punkt P ja sellega [24] veel teine ühine punkt, mis ongi ka teiseks ühiseks punktiks tasapinnale α ja ruumile B ($\equiv ABCD$) sellepärast, et tasapinna PWR' kõik punktid on [23] selles ruumis. — Seega on ühes neljamõõtelises ruumis tasapinnal ja ruumil siis, kui neil on üks ühine punkt, tõesti ka teine ühine punkt.

Sellest järeneb, et

- ühe neljamõõtelise ruumi kahel ühise
(35) punktiga ruumil on kolm mitte ühelsirgel joonel olevat ühist punkti ja seega üks ja [26] ainus ühine tasapind.

Sest ühe ruumi mingil tasapinnal selle ühise punkti läbi on teise ruumiga veel teine ühine punkt teiseks ühiseks punktiks neile ruumele ja teise ruumi niisugusel tasapinnal, mis läheb küll nende ruumide esimese ühise punkti läbi, aga mitte teise läbi, on jälle esimese ruumiga uus ühine punkt kolmandaks (esimese kahega mitte ühel sirgel joonel olevaks) ühiseks punktiks sellele kahele ruumile.

Nüüd saame lühidalt tõestada neljamõõtelise ruumi lahutamise lause, mille nüüd ka sõnastame täielikult.

Olgu ühes neljamõõtelises ruumis ruum A ja punkt B mitte selles ruumis. Siis öeldakse, et iga punkt C siis, kui ruumil A ei ole ühist punkti joonetükiga BC , on sellest ruumist punkti B pool, ja et iga punkt D siis, kui ruumil A on ühine punkt joonetükiga BD , on ruumist A punkti B kohta teisel pool. Need kaks neljamõõtelise ruumi poolt, milleks selle neljamõõtelise ruumi lahutab tema mingi ruum (A), ei olene

sellest, missugune punkt (B) selles neljamõõtelises ruumis on nende poolte määramiseks võetud, vaid

- neljamõõtelise ruumi iga ruum lahutab selle neljamõõtelise ruumi kaheks pooleks nii, et ühelgi sirgel joonetükil, mis (36) ühendab ühe poole kahte punkti, ei ole ühist punkti selle lahutaja ruumiga, kuna igal sirgel joonetükil, mis ühendab ühe poole punkti teise omaga, on ühine punkt.

Olgu selles neljamõõtelises ruumis, kus on ruum A ja punkt B mitte selles ruumis, mingid kaks punkti C ja E ruumist A punkti B pool, s. o. nii, et ruumil A ei ole ühist punkti ei joonetükiga BC ega tükiga BE . Siis ei saa ruumil A olla ühist punkti joonetükiga CE sellepärast, et selle ühise punkti korral oleks tal tasapinnaga BCE [34] ühine sirge joon, mis tasapinna BCE peal kolmnurga BCE külge CE lõigates ei saaks [14] lõikamata jätta kas külge BC või külge BE . — Kui mingid punktid D ja F on mõlemad ruumist A punkti B kohta teisel pool, s. o. nii, et ruumil A on ühine punkt nii joonetükiga BD kui ka tükiga BF , siis ei saa ruumi A ja tasapinna BDF [23] ainus ühine joon kolmnurgas BDF külgi BD ja BF lõigates [7] lõigata ka kolmat külge DF . — Kui viimaks mingi punkt E on ruumist A punkti B pool, aga mingi muu punkt F teisel pool, s. o. nii, et ruumil A on ühine punkt joonetükiga BF , aga ei ole ühist punkti tükiga BE , siis peab ruumil A olema ühine punkt joonetükiga EF sellepärast, et selle ruumi ja tasapinna BEF [23] ainus ühine joon ei saa [14] kolmnurgas BEF lõigata ühte ainust külge. — Sellega on neljamõõtelise ruumi lahutamise lause tõestatud.

15. n-mõõteline ruum. Neljamõõtelise ruumi mõistest saame viiemõõtelise ruumi mõiste, sellest kuuemõõtelise ruumi mõiste ja nii edasi üldse $(n-1)$ -mõõtelise ruumi mõistest n -mõõtelise ruumi mõiste näiteks sel teel, et järgnevides ridades kuni paragrahvi lõpuni loeme esiti igalpool n viieks, siis igalpool kuueks jne.

$(n-1)$ -mõõtelise ruumi määravad [31] n punkti, mis ei ole kõik ühes $(n-2)$ -mõõtelises ruumis. Kui on veel punkt, mis e

ole selles $(n-1)$ -mõõtelises ruumis, siis on $n+1$ punkti, mis ei ole kõik ühes $(n-1)$ -mõõtelises ruumis. Ütleme, et $n+1$ punkti, mis ei ole kõik ühes $(n-1)$ -mõõtelises ruumis, teevad $(n+1)$ -simpleksi (nii et kolmnurk on kolm-simpleks, tetraeder neli-simpleks ja pentatopp viis-simpleks). Neid punkte nimetame selle simpleksi nukeks, iga kahe nuki vahelist joonetükki tema servaks, igast kolmest nukist koosnevat kolmnurka tema tahuks ja üldse igast $(m+1)$ -st nukist koosnevat $(m+1)$ -simpleksi selle $(n+1)$ -simpleksi m -mõõteliseks seinaks (nii et nukid on nullimõõtelised seinad, servad ühemõõtelised ja tahud kahemõõtelised). Sellega on $(n+1)$ -simpleksil m -mõõtelisi seinu nii mitu, kui mitu $(m+1)$ -ikut on $(n+1)$ -es, s. o.

$$\frac{(n+1) \cdot n \cdot \dots \cdot (n-m+1)}{1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot (m+1)}.$$

Iga üksiku m -mõõtelise seina kohta on $(n+1)$ -simpleksil üksik $(n-m-1)$ -mõõteline sein, mille ükski nukk ei ole esimese seina nukiks. Neid seinu nimetame teist teisele vastasseinaks.

(37) $(n+1)$ -simpleksi ühest nukist vastasseina sisetesse punktidesse minevate joonetükkide sisemisi punkte nimetame selle simpleksi sisemisiks punktiks.

(38) $(n+1)$ -simpleksi sisemine punkt ei saa olla selle simpleksi ühegi seina ruumis.

Olgu $(n+1)$ -simpleksi nukid $P_0, P_1, \dots, P_n$ (mille järgi teda nimetame simpleksiks $P_0 P_1 \dots P_n$) ja mingu nukist P_0 tema vastasseina $P_1 P_2 \dots P_n$ mingisse sisemisse punkti Q_0 joonetükk $P_0 Q_0$. Siis ei saa selle joonetüki mingi sisemine punkt S olla ruumis $P_1 P_2 \dots P_n$ sellepärast, et vastasel korral oleksid [33] joonel $P_0 Q_0$ kõik punktid ja seega ka P_0 oletuse vastu ruumis $P_1 P_2 \dots P_n$. Punkt S ei saa olla ka selle simpleksi ühegi teise $(n-1)$ -mõõtelise seina ruumis. Sest ta on [39] iga niisuguse seina mingi sisemise punkti ja selle seina vastasnuki vahel ja igale niisugusele seinalle võime nimeks panna $P_1 P_2 \dots P_n$, tema sellele sisemisele punktile Q_0 ja vastasnukile P_0 . $(n+1)$ -simpleksi kõigi muude — alamamõõteliste — seinte punktid aga on $(n-1)$ -mõõteliste omad.

- (39) $(n+1)$ -simpleksi ühest nukist või ühe seina punkttest vastasseina sisemistesse punktesse minevate joonetükkide sisemised punktid on ka selle simpleksi igast nukist ja iga seina punkttest vastasseina punktesse minevate joonetükkide omad.

Mingu simpleksis $P_0P_1 \dots P_n$ nukist P_0 joonetükk P_0Q_0 vastasseina $P_1P_2 \dots P_n$ mingisse sisemisse punkti Q_0 , s. o. nii, et Q_0 on näiteks P_1 -e ja $(n-2)$ -mõõtelise seina $P_2P_3 \dots P_n$ mingi sisemise punkti Q_1 vahel, nii et Q_1 on näiteks P_2 -e ja $(n-3)$ -mõõtelise seina $P_3P_4 \dots P_n$ mingi sisemise punkti Q_2 -e vahel ja nii edasi üldse nii, et Q_m on näiteks P_m -i ja $(n-m-1)$ -mõõtelise seina $P_{m+1}P_{m+2} \dots P_n$ mingi sisemise punkti Q_m vahel. Siis on joonetüki P_0Q_0 iga sisemine punkt S kolmnurga $P_0P_1Q_1$ sisemine punkt, nagu ka tetraeedri $P_0P_1P_2Q_2$ ja üldse $(m+2)$ -simpleksi $P_0P_1 \dots P_mQ_m$ sisemine punkt. Sest S on kolmnurga $P_0P_1Q_1$ sisemine punkt punkti Q_1 konstruktsiooni järgi, ja kui ta on simpleksi $P_0P_1 \dots P_lQ_l$ sisemine punkt, nii et joonetüki Q_lS pikend otsast S läheb simpleksi $P_0P_1 \dots P_l$ mingisse sisemisse punkti, siis on S ka simpleksi $P_0P_1 \dots P_{l+1}Q_{l+1}$ sisemine punkt sellepärast, et joonetüki Q_lS ots Q_l on selle simpleksi serva $P_{l+1}Q_{l+1}$ peal (konstruktsiooni järgi) ja selle joonetüki pikend otsast S läheb selle serva vastasseina $P_0P_1 \dots P_l$ sisemisse punkti (oletuse järgi). Nüüd on aga Q_n simpleksis $P_0P_1 \dots P_n$ (konstruktsiooni järgi) nimelt seina $P_0P_1 \dots P_m$ vastasseina $P_{m+1}P_{m+2} \dots P_n$ sisemine punkt ja seega on S tõesti nende seinte sisemiste punktide vahel. Ümberpöörduvalt on punkt S , mis on seina $P_0P_1 \dots P_m$ sisemise punkti mingi R ja vastasseina $P_{m+1}P_{m+2} \dots P_n$ sisemise punkti mingi Q_m vahel, ka P_0 -i ja tema vastasseina $P_1P_2 \dots P_n$ mingi sisemise punkti Q_0 vahel sellepärast, et P_0R pikend otsast R lõikab [37] seina $P_1P_2 \dots P_m$ mingis sisemises punktis T ja siis joonetüki P_0S pikend [X] tükki TQ_m mingis punktis Q_0 , mis on [28] n -simpleksi $P_1P_2 \dots P_n$ sees, kui n on 5.

- Nende joonetükkide hulgas, mis
(40) lähevad $(n+1)$ -simpleksi mingite seinte punkttest vastasseinte punktesse, ei saa olla ühegi kahe pikenditel ühist punkti.

Kui kaks niisugust joonetükki lähevad ühisest punktist, siis ei saa nende pikenditel [5] muidugi olla teist ühist punkti. Kui nad lähevad üks ühe seina Σ_1 sisemisest punktist R vastasseina Σ_2 sisemisse punkti T ja teine teise seina Σ_3 sisemisest punktist U vastasseina Σ_4 sisemisse punkti V , siis ei saa nende pikenditel olla ühist punkti järgmisel põhjusel. Kui nende pikenditel oleks ühiseks punktiks mingi K , siis oleks kas 1) R K ja T vahel ja U K ja V vahel, või 2) R K ja T vahel ja V K ja U vahel, või 3) T K ja R -i vahel ja U K ja V vahel, või viimaks 4) T K ja R -i vahel ja V K ja U vahel. Esimesel ja viimasel korral oleks joonetükel RV ja UT [X] ühine sisemine punkt, teisel ja kolmandal korral joonetükel VT ja RU . Joonetüki RV sisemised punktid on [41] kõik selle simpleksi $\Sigma_1\Sigma_4$ sees, mille nukeks on simpleksite Σ_1 ja Σ_4 kõik nukid ja ainult need, nagu ka joonetüki UT sisemised punktid kõik simpleksi $\Sigma_2\Sigma_3$ sees, ja kui $\Sigma_1\Sigma_4$ ei ole samane $\Sigma_2\Sigma_3$ -ga, siis on need simpleksid meie $(n+1)$ -simpleksi kaks seina, millel [42] ei saa olla ühist sisemist punkti. Samuti ei saa joonetükel VT ja RU olla ühist sisemist punkti siis, kui ei ole $\Sigma_2\Sigma_4$ samane $\Sigma_1\Sigma_3$ -ga.

$\Sigma_2\Sigma_4$ saab olla samane $\Sigma_1\Sigma_3$ -ga (nagu ka $\Sigma_2\Sigma_3$ $\Sigma_1\Sigma_4$ -ga) ainult siis, kui nad on samased meie $(n+1)$ -simpleksiga. Sest Σ_2 -l, mis on Σ_1 -le vastasseinaks, on nukeks kõik need ja ainult need $(n+1)$ -simpleksi nukid, mis ei esine Σ_1 -s, nagu ka Σ_4 -l need, mis ei esine Σ_3 -s, nii et $\Sigma_2\Sigma_4$ ja $\Sigma_1\Sigma_3$ saavad olla samased ainult siis, kui on Σ_4 samane Σ_1 -ga. Seega lähevad sel korral VT ja RU $(n+1)$ -simpleksi ühe ja sellesama seina Σ_1 punktist vastasseina Σ_2 punktisse. Niisugustel joonetükel ei saa olla ühist sisemist punkti sellepärast, et joon UT lõikab [43] simpleksi Σ_2 kahte seina mingeid Σ' ja Σ'' mingeis punktis A ja B , mis oleksid joonetükkide VT ja RU lõikumise korral nendega ühisel tasapinnal, nii et sel tasapinnal oleks kolm mitte ühe sirge joone peal olevat punkti (kas RVA või RVB) $(n+1)$ -simpleksi Σ_1 Σ' Σ'' ühe seina (kas Σ_1 Σ' või Σ_1 Σ'') ruumis ja seega [33] kõik punktid, nende hulgas ka joonetükkide VT ja RU ühine (simpleksi Σ_1 Σ' Σ'' [40] sisemine) punkt seal, mis on [38] võimata.

Selles tõestuses oletasime, et

joonetükil, mis ühendab kahe simpleksi sisemisi punkte, on sisemised punktid

- (41) kõik selle simpleksi sees, mille nukeks on selle kahe simpleksi kõik nukid ja ainult need.

Olgu kaks simpleksit Σ_1 ja Σ_2 nii, et nende kõik nukid ja ainult need on ühe simpleksi Σ nukeks ja olgu simpleksite Σ_1 ja Σ_2 sees punktid A ja B ja olgu veel punktide A ja B vahel punkt S . Kui simpleksitel Σ_1 ja Σ_2 ei ole ühiseid nukke, siis on nad simpleksis Σ vastasseinad ja nende sisemiste punktide A ja B vaheline punkt S [37 ja 39] tõesti simpleksi Σ sees. Kui simpleksitel Σ_1 ja Σ_2 on ühiseid nukke, siis olgu üks neist P ja tema vastasseinaks Σ_1 -es S' ja Σ_2 -es S'' . Siis on [37] punkt A nuki P ja vastasseina S' mingi punkti Q vahel, nagu ka B nuki P ja vastasseina S'' mingi punkti R vahel, ja siis lõikab [X] näiteks joonetüki RS pikend punktist S kolmnurga PBA külge AP ja seega kolmnurga PQR külge PQ . Seega on punkt S tõesti kolmnurga PQR sisemine punkt, nii et ka joonetüki PS pikend punktist S läheb joonetüki QR mingisse sisemisse punkti. Kui joonetüki QR kõik sisemised punktid on simpleksi Σ' sees, siis on lause tõestatud, sest Σ' on simpleksis Σ nuki P vastassein. Kui Σ on $(n+1)$ -simpleks, siis on Σ' n -simpleks. Seega oleks meie lause tõestatud $(n+1)$ -simpleksi kohta siis, kui ta oleks õige n -simpleksi kohta. Ta on meie tõestuse järgi õige kolmsimpleksi nimelt kolmnurga PQR kohta, kus on $\Sigma_1 \equiv PQ$, $\Sigma_2 \equiv PR$, $S' \equiv Q$ ja $S'' \equiv R$. Seega on ta õige ka neli-simpleksi, viissimpleksi jne. üldse tõesti ka $(n+1)$ -simpleksi kohta.

Kui Σ_2 on Σ_1 -le seinaks ja siis $\Sigma_1 \equiv \Sigma$, siis on sellega tõestatud, et joonetükil, mis ühendab ühe simpleksi seinapunkti sisemise punktiga, on sisemised punktid kõik selle simpleksi sees.

Kui on $\Sigma_1 \equiv \Sigma_2$ ja siis ka $\Sigma_1 \equiv \Sigma$, siis on sellega ka tõestatud, et joonetükil, mis ühendab ühe simpleksi sisemisi punkte, on kõik punktid selle simpleksi sees.

Tõestades lauset (40) oletasime veel, et

- (42) ühe simpleksi kahel seinal ei saa olla ühist sisemist punkti.

See on tõesti nii. Ei saa ju kolmnurgas olla ükski nukk ühegi külje sees ega kahel küljel olla ühist sisemist punkti näi-

teks sellepärast, et vastasel korral oleksid kolmnurga kõik kolm nukki oletuse vastu ühe sirge joone peal. Ja kui m -simpleksi seintega lugu nii on, siis on lugu niisama ka $(m+1)$ -simpleksi seintega järgmisil põhjusil. $(m+1)$ -simpleks saab siis, kui on m -simpleks ja veel uus punkt, mis ei ole selle m -simpleksi ruumis. Saadud $(m+1)$ -simpleksi kõigil muil seinul (peale selle ühe m -simpleksi ja tema seinte) on sisemised punktid [36] selle uue punkti ja selle m -simpleksi seinte punktide vahel. Kui nüüd ühelgi muul seinal oleks selle m -simpleksiga või tema mõne seinaga ühine sisemine punkt, siis oleks sellel sirgel joonel, mis tuleks $(m+1)$ -simpleksi uuest punktist sellesse ühisesse punkti (m -simpleksi või tema mõne seina sisse), veel [37] selle m -simpleksi mingi seinaga ühine punkt ja seega peaksid olema [33] selle sirge joone kõik punktid, nende hulgas ka $(m+1)$ -simpleksi uus punkt, oletuse vastu selle m -simpleksi ruumis. Seega ei saa tõesti ühe simpleksi kahel seinal olla ühist sisemist punkti.

Viimaks oletasime lauset (40) tõestades veel, et

sirge joon, millel on kaks punkti ühe
(43) simpleksi sees, lõikab selle simpleksi
kahte seina.

See on ka tõesti nii. Olgu simpleksi Σ sees kaks punkti A ja B , nii et selle simpleksi mingist nukist P punktisse A tuleval joonetükil PA pikend punktist A lõikab nuki P vastasseina Σ_1 mingis punktis C , nagu ka joonetüki PB pikend punktist B mingis punktis D .

Kui joon AB läheb simpleksi Σ ühe nuki läbi, siis lõikab ta (A või B pärast) muidugi veel selle nuki vastasseina. Kui joon AB ei lähe simpleksi Σ ühegi nuki läbi, aga joon CD lõikab simpleksis Σ_1 , kus on punktid C ja D , kahte seina Σ' ja Σ'' min-geis punktis Q ja R , mis [41] peavad olema nii, et C ja D on nende vahel, ja mille nimed määrame nimelt nii, et C on Q ja D vahel ja siis [V] D C ja R vahel, siis lõikab joon AB kolmnurgas PCQ [14] kas külge PQ või külge CQ nagu ka kolmnurgas PDR kas külge PR või külge DR ja seega kolmnurgal PQR tõesti kahte külge. Selle kolmnurga külgede sisemised punktid on [41] simpleksi Σ seinte sees: PQ omad seinas $P\Sigma'$, QR omad seinas Σ_1 ja RP omad seinas $P\Sigma''$. Seega lõikab joon AB simpleksil Σ siis tõesti kahte seina, kui joon CD lõikab simpleksil Σ_1 . Kui Σ on $(n+1)$ -simpleks, siis on Σ_1 n -simpleks.

Seega oleks meie lause tõestatud $(n+1)$ -simpleksi kohta siis, kui ta oleks õige n -simpleksi kohta. Ta on meie tõestuse järgi õige kolmsimpleksi nimelt kolmnurga PQR kohta, kus on $\Sigma_1 \equiv QR$, $\Sigma' \equiv Q$ ja $\Sigma'' \equiv R$. Seega on ta õige ka nelisimpleksi, viissimpleksi jne. üldse tõesti ka $(n+1)$ -simpleksi kohta.

Nii ei saa tõesti nende joonetükkide hulgas, mis lähevad $(n+1)$ -simpleksi mingite seinte punkttest vastasseinte punktesse, ühegi kahe pikenditel olla ühist punkti.

Nimetame $(n+1)$ -simpleksi mingi seina punkttest vastasseina punktesse tulevail kõigil joonetükel sellest seinast algavate pikendite kõigi punktide kogu $(n+1)$ -simpleksi laiendiks sellest seinast. Seega on $(n+1)$ -simpleksil laiendite arvuks

$$(n+1) + \frac{(n+1)n}{1 \cdot 2} + \dots + \frac{(n+1)n \dots (n-m+1)}{1 \cdot 2 \dots (m+1)} + \dots + (n+1) = 2^{n+1} - 2.$$

$(n+1)$ -simpleksi sisemisi punkte koos tema seinte ruumidega ja tema laienditega nimetatakse n -mõõteliseks ruumiks. Võib ütelda:

n -mõõteliseks ruumiks nimetatakse kõigi nende

(44) sirgete joonte kõigi punktide kogu, mis lähevad ühe $(n+1)$ -simpleksi mingi seina punkttest vastasseina punktesse.

Õeldakse, et selle $(n+1)$ -simpleksi nukid määravad selle n -mõõtelise ruumi ja nende nukide nimedega, näiteks $P_0, P_1, \dots, P_n$ tähitakse ka see n -mõõteline ruum $P_0 P_1 \dots P_n$. $(n+1)$ -simpleksiga määratud ruumi nimetame ka lihtsalt selle $(n+1)$ -simpleksi ruumiks.

16. n -mõõtelise ruumi määramise lause. $n+1$ punkti, mis n -mõõtelise ruumi määravad, ei ole mitte erilisel niisugused selle n -mõõtelise ruumi punktide hulgas, vaid

n -mõõtelise ruumi iga $n+1$ punkti, mis
(45) ei ole ühes $(n-1)$ -mõõtelises ruumis, määravad sellesama n -mõõtelise ruumi.

See n -mõõtelise ruumi määramise lause järgneb abilausest:

Kui sellel $(n+1)$ -simpleksil, mis n -mõõtelise ruumi määrab, võtame ühe nuki asemele mingi

punkti ühe sellest nukist mineva serva või selle serva pikendi peal, siis määrab see uus $(n+1)$ -simpleks (teised n endist nukki koos selle uuega) sellesama n -mõõtelise ruumi.

Selle abilause tõestust lühendab lause:

Kui sirge joon lõikab $(n+1)$ -simpleksi leksi kahte seina, siis on selle sirge joone kõik punktid selle simpleksi ruumis.

Lõigaku sirge joon $(n+1)$ -simpleksi kahte seina punktides A ja B . Kui selle kahe seina nukeks ei ole kõik $(n+1)$ -simpleksi nukid, siis on need seinad selle simpleksi selle seina seinad, mille nukid kõik ongi nende nukeks, ja siis on [32] joonel AB kõik punktid selle seina ruumis ja seega [44] tõesti ka selle $(n+1)$ -simpleksi ruumis. — Kui neil kahel seinal on küll kõik selle $(n+1)$ -simpleksi nukid, aga ei ole ühtegi ühist nukki, siis on need seinad selle simpleksi vastasseinad ja joone AB kõik punktid on [44] muidugi selle simpleksi ruumis. — Kui nende kahe seina nukeks on kõik selle $(n+1)$ -simpleksi nukid ja kui neil kahel seinal on ühiseid nukke, siis olgu neist ühistest nukest koosnev simpleks Σ ja Σ vastassein esimeses seinas Σ_0 ja teises Σ_1 (nii et $(n+1)$ -simpleks on $\Sigma\Sigma_0\Sigma_1$, tema esimene sein $\Sigma\Sigma_0$ ja teine $\Sigma\Sigma_1$). Siis on punkt A [37 ja 39] Σ_0 -i mingi punkti Q_0 ja Σ mingi punkti R_0 vahel ning B Σ_1 -e mingi punkti Q_1 ja Σ mingi punkti R_1 vahel. Kui nüüd R_1 on samane R_0 -ga, siis on joonel AB kõik punktid [13] kolmnurga $R_0Q_0Q_1$ tasapinnal, nii et selle joone igast punktist peale A ja B läheb [11] sirge joon selle kolmnurga mingi nuki läbi vastaskülje sisemisse punkti. Seega on siis selle joone kõik punktid [44] tõesti ka $(n+1)$ simpleksi $\Sigma\Sigma_0\Sigma_1$ ruumis sellepärast, et selle kolmnurga nukid R_0 , Q_0 ja Q_1 on selle simpleksi seintes Σ , Σ_0 ja Σ_1 ja nende nukkide vastaskülgede sisemised punktid [41] nende seinte vastasseintes $\Sigma_0\Sigma_1$, $\Sigma_1\Sigma$ ja $\Sigma\Sigma_0$. — Kui punktid R_0 ja R_1 ei ole samased, siis lõikab sirge joon R_0R_1 [42] simpleksil Σ kahte seina, mingeid Σ_2 ja Σ_3 mingeis punktides A' ja B' . Kui neil seinul ei ole ühiseid nukke, siis on joonel AB kõik punktid [23] tetraeedri $Q_0Q_1A'B'$ ruumis (mis on [21] samane ruumiga $Q_0Q_1R_0R_1$), nii et selle joone igast punktist läheb [20] sirge joon tetraeedri $Q_0Q_1A'B'$ mingi seina mingi punkti läbi vastasseina punktisse. Seega on siis selle joone kõik punktid

[44] tõesti ka $(n+1)$ -simpleksi $\Sigma\Sigma_0\Sigma_1$ ehk $\Sigma_0\Sigma_1\Sigma_2\Sigma_3$ ruumis sellepärast, et selle tetraedri nukid Q_0, Q_1, A' ja B' on selle simpleksi seintes $\Sigma_0, \Sigma_1, \Sigma_2$ ja Σ_3 (millel ei ole ühiseid nukke) ja seega selle tetraedri iga sein oma vastasseinaga nimelt simpleksi $\Sigma_0\Sigma_1\Sigma_2\Sigma_3$ vastasseintes. — Kui simpleksi Σ neil seinul, mida lõikab joon R_0R_1 , on ühiseid nukke, siis tähime neist ühistest nukest koosneva simpleksi Σ' -ga ja alles kummagi seina järelejäänud nukest koosnevad simpleksid Σ_2 -e ja Σ_3 -ga (nii et üks neist Σ seinust on $\Sigma'\Sigma_2$, teine $\Sigma'\Sigma_3$ ja simpleks Σ ise $\Sigma'\Sigma_2\Sigma_3$). Siis on punkt A' [37 ja 39] Σ_2 -e mingi punkti Q_2 ja Σ' -i mingi punkti R_2 vahel, ning B' Σ_3 -e mingi punkti Q_3 ja Σ' -i mingi punkti R_3 vahel. Kui nüüd R_3 on samane R_2 -ga, siis on joonel AB kõik punktid [33] pentatopi $Q_0Q_1Q_2Q_3R_2$ ruumis, nii et selle joone igast punktist läheb [30] sirge joon selle pentatopi mingi seina mingi punkti läbi vastasseina punktisse. Siis on selle joone kõik punktid [44] tõesti ka $(n+1)$ -simpleksi $\Sigma_0\Sigma_1\Sigma$ ehk $\Sigma_0\Sigma_1\Sigma_2\Sigma_3\Sigma'$ ruumis sellepärast, et selle pentatopi nukid Q_0, Q_1, Q_2, Q_3 ja R_2 on selle simpleksi seintes $\Sigma_0, \Sigma_1, \Sigma_2, \Sigma_3$ ja Σ' (millel ei ole ühiseid nukke) ja seega selle pentatopi iga sein oma vastasseinaga nimelt simpleksi $\Sigma_0\Sigma_1\Sigma_2\Sigma_3\Sigma'$ vastasseintes. — Kui punktid R_2 ja R_3 ei ole samased, siis järgnevad selsamal viisil (nagu ennist $\Sigma_2, \Sigma_3, A', B', \Sigma', Q_2, R_2, Q_3$ ja R_3 nüüd) $\Sigma_4, \Sigma_5, A'', B'', \Sigma'', Q_4, R_4, Q_5$ ja R_5 ja nii edasi üldse $\Sigma_{2m}, \Sigma_{2m+1}, A^{(m)}, B^{(m)}, \Sigma^{(m)}, Q_{2m}, R_{2m}, Q_{2m+1}$ ja R_{2m+1} , kuni kas R_{2m} saab samane R_{2m+1} -ga või jälle $\Sigma^{(m)}$ -i neil seinul Σ_{2m+2} ja Σ_{2m+3} , mida lõikab sirge joon $R_{2m}R_{2m+1}$ punktis $A^{(m+1)}$ ja $B^{(m+1)}$, ei ole enam ühiseid nukke. Esimesel juhul on punktid A ja B [37 ja 39] simpleksi $Q_0Q_1\dots Q_{2m+1}R_{2m}$ seintes $Q_0Q_2Q_3\dots Q_{2m+1}R_{2m}$ ja $Q_1Q_2\dots Q_{2m+1}R_{2m}$, teisel juhul samuti simpleksi $Q_0Q_1\dots Q_{2m+1}A^{(m+1)}B^{(m+1)}$ seintes $Q_0Q_2Q_3\dots Q_{2m+1}A^{(m+1)}B^{(m+1)}$ ja $Q_1Q_2\dots Q_{2m+1}A^{(m+1)}B^{(m+1)}$. Kui nende simpleksite nukke arv (mis on esimesel simpleksil $2m+3$, teisel $2m+4$) on vähem kui $n+1$, siis on joone AB kõik punktid [33] selle $(2m+3)$ - või $(2m+4)$ -simpleksi ruumis, nii et selle joone igast punktist läheb [30] sirge joon selle simpleksi mingi seina, mingi punkti läbi vastasseina punktisse. Siis on selle joone kõik punktid [43] tõesti ka meie $(n+1)$ -simpleksi $\Sigma_0\Sigma_1\dots\Sigma_{2m+1}\Sigma^{(m)}$ või $\Sigma_0\Sigma_1\dots\Sigma_{2m+1}\Sigma_{2m+2}\Sigma_{2m+3}$ ruumis sellepärast, et selle $(2m+3)$ -simpleksi nukid $Q_0, Q_1, \dots, Q_{2m+1}, R_{2m}$ on selle $(n+1)$ -simpleksi seintes $\Sigma_0, \Sigma_1, \dots, \Sigma_{2m+1}, \Sigma^{(m)}$ või $(2m+4)$ -simpleksi nukid $Q_0, Q_1, \dots, Q_{2m+3}, A^{(m+1)}$,

$B^{(m+1)}$ $(n+1)$ -simpleksi seintes $\Sigma_0, \Sigma_1, \dots, \Sigma_{2m+3}$, millel ei ole ühiseid nukke, ja seega selle $(2m+3)$ - või $(2m+4)$ -simpleksi iga sein oma vastasseinaga meie $(n+1)$ -simpleksi vastasseintes. — Kui $2m+3$ või $2m+4$ ei ole vähem kui $n+1$, siis on seinad $\Sigma_1, \dots, \Sigma_{2m+1}, \Sigma^{(m)}$ või $\Sigma_0, \dots, \Sigma_{2m+3}$ kõik üksikud nukid. Seega on nüüd veel küsitavad ainult selle sirge joone punktid, mis lõikab $(n+1)$ -simpleksi kahte niisugust seinu $\Sigma_0\Sigma$ ja $\Sigma_1\Sigma$, kus kumbki läheb teisest lahku ainult ühe nuki (Σ_0 või Σ_1) poolest, kuna kõik muud $n-1$ (Σ)-nukki on neil ühised. Et ka selle sirge joone kõik punktid on $(n+1)$ -simpleksi $\Sigma_0\Sigma_1\Sigma$ ehk $\Sigma_0\Sigma_1\Sigma_2\Sigma_3\Sigma'$ ruumis, see selgub siis, kui vaatleme endist tetraeedrit $Q_0Q_1A'B'$, mille nukid on järgemööda $(n+1)$ -simpleksi seintes $\Sigma_0, \Sigma_1, (\Sigma_2\Sigma')$ ja $(\Sigma_3\Sigma')$. Sirge joone AB kõik punktid on selle tetraeedri ruumis, nii et selle joone igast punktist läheb sirge joon selle tetraeedri mingi seinu mingi punkti läbi vastasseina punktisse. Selle joone kõik punktid on siis ka simpleksi $\Sigma_0\Sigma_1\Sigma_2\Sigma_3\Sigma'$ ruumis sellepärast, et selle tetraeedri vastasseinad on kas ka selle simpleksi vastasseintes: $Q_0Q_1A'B'$ seintes $\Sigma_0\Sigma_1\Sigma_2\Sigma_3\Sigma'$, $Q_1Q_0A'B'$ seintes $\Sigma_1\Sigma_0\Sigma_2\Sigma_3\Sigma'$ ja $Q_0Q_1A'B'$ seintes $\Sigma_0\Sigma_1\Sigma_2\Sigma_3\Sigma'$, või jälle niisugustes seintes, mis lähevad teineteisest lahku vähemalt kahe nuki poolest: $Q_0A'Q_1B'$ seintes $\Sigma_0\Sigma_1\Sigma_2\Sigma_3\Sigma'$, $Q_0B'Q_1A'$ seintes $\Sigma_0\Sigma_3\Sigma_2\Sigma_1\Sigma'$, $A'B'Q_0Q_1$ seintes $\Sigma_2\Sigma_3\Sigma_0\Sigma_1\Sigma'$ ja $B'A'Q_0Q_1$ seintes $\Sigma_3\Sigma_2\Sigma_0\Sigma_1\Sigma'$.

Seega on tõesti sellel sirgel joonel, mis lõikab $(n+1)$ -simpleksi kahte seinu, kõik punktid selle simpleksi ruumis.

Olgu nüüd simpleksil $P_0P_1\dots P_n$ võetud nuki P_0 asemele serva P_0P_1 mingi punkt Q . Siis on simpleksi $QP_1\dots P_n$ ruumi kõik punktid [46] ka ruumi $P_0P_1\dots P_n$ omad sellepärast, et kõik sirged jooned, mis lähevad simpleksi $QP_1\dots P_n$ mingi seinu punktist vastasseina punktisse, lõikavad simpleksi $P_0P_1\dots P_n$ kahte seinu. Sest

kui simpleksi $P_0P_1\dots P_n$ ühel serval P_0P_1 on võetud mingi sisemine punkt Q selle serva esimese või teise otsa asemele, siis saab simpleksil $P_0P_1\dots P_n$ kaks osa — kaks uut simpleksit $QP_1\dots P_n$ ja $P_0QP_2\dots P_n$ ühise uue seinaga $QP_2\dots P_n$ nii, et esimese uue simpleksis sisemiseks punktiks on [37 ja 39] vana simpleksi need sise-

(47) mised punktid, mis on serva P_0P_1 osa QP_1 sisemiste punktide ja vastasseina $P_2 \dots P_n$ punktide vahel, ja teise uue simpleksi omiks vana simpleksi need, mis on serva P_0P_1 teise osa P_0Q sisemiste punktide ja sellesama vastasseina punktide vahel, kuna vana simpleksi ülejäänud sisemised punktid, s. o. punkti Q ja seina $P_2 \dots P_n$ punktide vahelised, on ühise seina $QP_2 \dots P_n$ omad, ja sirge joon, mis läheb simpleksi $QP_1 \dots P_n$ mingi seina sisemisest punktist vastasseina punktisse, läheb [37 ja 39] selle simpleksi ja siis [47] ka simpleksi $P_0P_1 \dots P_n$ sisemiste punktide läbi ja lõikab siis [43] tõesti selle viimase simpleksi kahte seina, nagu ka sirge joon, millel on seinaga $QP_2 \dots P_n$ kaks ühist punkti, mis ei ole mõlemad seina $P_2 \dots P_n$ omad. Sirgel joonel, millel on kaks ühist punkti simpleksi $QP_1 \dots P_n$ mingi muu seina, on kõik punktid ruumis $P_0P_1 \dots P_n$ sellepärast, et need muud seinad on kas ka selle viimase simpleksi seinad või [47] nende osad.

Seega on neil sirgeil joonil, mis lähevad simpleksi $QP_1 \dots P_n$ seinte punktist vastasseinte punktisse, kaks ühist punkti simpleksi $P_0P_1 \dots P_n$ seintega ja siis [46] tõesti kõik punktid ka ruumis $P_0P_1 \dots P_n$.

Jääb veel tõestada, et ka ruumi $P_0P_1 \dots P_n$ kõik punktid on ruumi $QP_1 \dots P_n$ omad. Selle juures on küsitavad vaid nende sirgete joonte punktid, mis lähevad simpleksi $P_0P_1 \dots P_n$ nende seinte punktist, mis on sellel simpleksil ühised nii simpleksiga $QP_1 \dots P_n$ kui ka simpleksiga $P_0QP_2 \dots P_n$, vastasseinte nende osade punktisse, mis on selle viimase simpleksi seinteks.

On ju kolme simpleksi $P_0P_1 \dots P_n$, $QP_1 \dots P_n$ ja $P_0QP_2 \dots P$ ühiste seinte vastasseintel simpleksis $P_0P_1 \dots P_n$ tõesti üks osa simpleksi $QP_1 \dots P_n$ seinaks ja teine osa simpleksi $P_0QP_2 \dots P_n$ omaks sellepärast, et kõigil neil vastasseinul on nukeks ka P_0 ja P_1 , millest esimene kuulub simpleksile $P_0QP_2 \dots P_n$, teine simpleksile $QP_2 \dots P_n$. Simpleksi $P_0P_1 \dots P_n$ iga muu sein oma vastasseinaga on aga üks täiesti simpleksi $QP_1 \dots P_n$ oma (tal on nukiks P_1) ja siis teine (millel on nukiks P_0) täiesti simpleksi $P_0QP_2 \dots P$ oma, ja

kui ühe simpleksi ühel serval on võetud sisemine punkt selle serva ühe või

- teise otsa asemele, nii et on saanud kaks uut simpleksit ühise uue seinaga, siis
- (48) sellel sirgel joonetükil, mis ühendab vana simpleksi täiesti ühele uuele kuulual seinal mingit punkti (täiesti teisele uuele kuuluva) vastasseina mingi punktiga, on ühine punkt nende uute simpleksite ühise uue seinaga.

Sest selle joonetüki sisemised punktid on kõik [41] vana simpleksi ja siis ka [47] ühe või teise või osalt ühe ja osalt teise uue simpleksi sees, nii et [43] see joonetükk ise või tema pikend lõikab vähemalt ühel uuel simpleksil veel teist seina ja see teine sein peab olema nimelt uute simpleksite ühine uus sein sellepärast, et kõik muud seinad on neil uutel simpleksitel ühised vanaga ja

- sirge joon, mis läheb simpleksi sisemise
- (49) punkti läbi, ei saa lõigata selle simpleksi kolme seina.

Oleks ju (siis, kui sirge joon läheks simpleksi sisemise punkti läbi ja lõikaks selle simpleksi kolme seina) sellest kolmest seinapunktist [3] vähemalt kaks sellest sisemisest punktist ühel pool, nii et simpleksi ühe seina punkt oleks [1] teise seina punkti ja sisemise punkti vahel, seega [41] ühe seina punkt ka sisemine punkt, mis on [38] võimata.

Seega on neil sirgeil joonil, mis lähevad simpleksi $P_0P_1 \dots P_n$ mitte ka mõlemale uuele simpleksile kuuluvate seinte punkttest vastasseinte punkttesse, tõesti kaks ühist punkti simpleksi $QP_1 \dots P_n$ seintega, nii et nende kõik punktid on [46] ka selle viimase simpleksi ruumis ja jäävad küsitavaks vaid nende sirgete joonte punktid, mis simpleksis $P_0P_1 \dots P_n$ lähevad ka mõlemale uuele simpleksile kuuluvate seinte punkttest vastasseinte nende osade punkttesse, mis kuuluvad simpleksile $P_0QP_2 \dots P_n$.

Mingu sirge joon simpleksi $P_0P_1 \dots P_n$ mingil seinal Σ , mis on ühtlasi ka simpleksite $QP_1 \dots P_n$ ja $P_0QP_2 \dots P_n$ seinaks, mingist punktist A vastasseina Σ' selle osa punktisse B , mis on simpleksi $P_0QP_2 \dots P_n$ seinaks (nii et tema üheks servaks on P_0Q). Siis on B kas Σ' -i sisemine või mingi seina punkt. Esimesel juhul lõikab joonetüki P_0B pikend otsast B [37] simpleksis Σ' nuki P_0 vastasseina mingis punktis R ja siis [48] joonetükk

P_0R seinal $QP_2 \dots P_n$ simpleksisse Σ' kuuluvat seina mingis punktis S . Siis on joonel AB iga punkt J ruumis $QP_1 \dots P_n$ sellepärast, et see joon on kolmnurga ARS tasapinnal ja et selle kolmnurga kõik kolm nukki on simpleksi $QP_1 \dots P_n$ seintes ja siis iga külg kas selle simpleksi sees või seinas. Lõikab ju siis [11] igatahes üks neist joonist, mis tulevad punktist J selle kolmnurga nukesse, [41 ja 43] simpleksi $QP_1 \dots P_n$ kahte seina, nii et [46] tema kõik punktid — nende hulgas ka J — on tõesti selle simpleksi ruumis. Samuti on lugu ka teisel juhul, mil B on Σ' -i mingi seina punkt, siis, kui selle seina vastasseinas võtame mingi punkti punktiks R ja joonetüki BR lõikepunkti seina $QP_2 \dots P_n$ simpleksisse Σ' kuuluva seinaga punktiks S .

Seega on tõesti ruum $QP_1 \dots P_n$ samane ruumiga $P_0P_1 \dots P_n$, kui $(n+1)$ -simpleksil $P_0P_1 \dots P_n$ on võetud nuki P_0 asemele serva P_0P_1 punkt Q või $(n+1)$ -simpleksil $QP_1 \dots P_n$ nuki Q asemele serva P_1Q pikendi punkt P_0 .

Sellest n -mõõtelise ruumi määramise esimesest abilausest järeneb kõige pealt teine abilause:

Kui n -mõõtelist ruumi määraval $(n+1)$ -simpleksil võtame ühe nuki asemele selle n -mõõtelise ruumi mingi muu punkti, mis ei ole n ülejäänud nukiga määratavas $(n-1)$ -mõõtelises ruumis, siis määrab see uus simpleks sellesama n -mõõtelise ruumi.

Olgu ruumis $P_0P_1 \dots P_n$ mingi punkt Q_0 , mis ei ole ruumis $P_1 \dots P_n$. Siis on [44] sirge joon läbi punkti Q_0 , mis lõikab simpleksi $P_0P_1 \dots P_n$ kahte vastasseina mingis punktides A ja B . Selle juures tähime A -ga nimelt selle seina punkti, millel üheks nukiks on P_0 ja vahetame tarvilikul korral nukke $P_1, \dots, P_n$ nimed nii, et vastasseina üks nukk saaks P_1 -ks. Nüüd võime esimese abilause järgi simpleksil $P_0P_1 \dots P_n$ nuki P_0 asemele võtta sellest nukist mineva serva P_0P_1 mingi punkti Q , selle asemele uuel serval QP_2 mingi punkti Q' (mis on tahu $P_0P_1P_2$ punkt), selle asemele uuel serval $Q'P_3$ mingi punkti Q'' (mis on kolmemõõtelise seina $P_0P_1P_2P_3$ punkt) jne. mistahes seinal, millel üheks nukiks on P_0 , mistahes punkti, seega ka punkti A . Kui selsamal viisil võtame nuki P_1 asemele B , siis A asemele uue serva AB või tema pikendi punkti Q_0 ja viimaks B asemele tagasi P_1 , siis ongi ruum $Q_0P_1 \dots P_n$ tõesti samane ruumiga $P_0P_1 \dots P_n$.

Olgu nüüd ruumis $P_0P_1 \dots P_n$ $n+1$ punkti $Q_0, Q_1, \dots, Q_n$, mis ei ole kõik ühes $(n-1)$ -mõõtelises ruumis. Vahetame neil punktel tarvilikul korral nimed nii, et Q_0 ei oleks ruumis $P_1 \dots P_n$. Siis on viimase abilause järgi ruum $Q_0P_1 \dots P_n$ samane ruumiga $P_0P_1 \dots P_n$ ja seega punktid $Q_1, Q_2, \dots, Q_n$ ruumis $Q_0P_1 \dots P_n$, aga mitte kõik ruumis $Q_0P_2 \dots P_n$. Vahetame tarvilikul korral neil punktel nimed nii, et Q_1 ei oleks ruumis $Q_0P_2 \dots P_n$. Siis on sellesama abilause järgi ruum $Q_0P_1P_2 \dots P_n$ samane ruumiga $Q_0Q_1P_2 \dots P_n$ ja seega punktid $Q_2, Q_3, \dots, Q_n$ ruumis $Q_0Q_1P_2 \dots P_n$, aga mitte kõik ruumis $Q_0Q_1P_3 \dots P_n$, ja tarvilikul korral nende punktide nimesid vahetades saame järeldada ruumide $Q_0Q_1P_2 \dots P_n$ ja $Q_0Q_1Q_2P_3 \dots P_n$ samasuse ja selsamal viisil edasi minnes viimaks ka $Q_0 \dots Q_{n-1}P_n$ ja $Q_0Q_1 \dots Q_n$ samasuse. Seega on $P_0P_1 \dots P_n \equiv Q_0P_1 \dots P_n \equiv Q_0Q_1P_2 \dots P_n \equiv \dots \equiv Q_0Q_1 \dots Q_n$ ja siis tõesti ruum $Q_0Q_1 \dots Q_n$ samane ruumiga $P_0P_1 \dots P_n$.

Sellest n -mõõtelise ruumi määramise lausest järgneb, et
 kui m -mõõtelisel ruumil $m+1$ punkti, mis
 (50) ei ole kõik ühes $(m-1)$ -mõõtelises ruumis,
 on ühes n -mõõtelises ruumis, siis on tal
 kõik punktid seal,

sest võime ju need $m+1$ punkti võtta selle n -mõõtelise ruumi määrava simpleksi nukeks.

17. n -mõõtelise ruumi lahutamise lause. n -mõõtelise ruumi iga $(n-1)$ -mõõteline ruum, mida nimetatakse ka n -mõõtelise ruumi ülitasapinnaks (saksakeeli *Hyperebene*, ingliskeeli *hyperplane*), lahutab selle n -mõõtelise ruumi kaheks pooleks. See n -mõõtelise ruumi lahutamise lause, mille täieliku sõnastamise jätame edaspidiseks, järgneb lausest:

Kui ühe n -mõõtelise ruumi tasapinnal ja ülitasapinnal on üks ühine punkt, siis on neil ka teine ühine punkt ja sellega [50] ühine sirge joon.

Olgu ühes n -mõõtelises ruumis tasapind α ja ülitasapind B , millel on ühine punkt P . Võtame esiteks P ülitasapinnal B üheks määravaks punktiks ja tähime tema teised $n-1$ määravat punkti tähtedega $P_1, P_2, \dots, P_{n-1}$. Siis võtame ülitasapinnal B määravas simpleksis $P_1P_2 \dots P_{n-1}P$ nuki P asemele [44] uue nuki P_n nii, et P on selle uue nuki P_n ja vastasseina $P_1 \dots P_{n-1}$

mingi punkti vahel ja seega simpleksi $P_1 \dots P_n$ sees. Nüüd võtame P tasapinna α üheks määravaks punktiks ja tähime tema teised kaks määravat punkti tähiga Q ja P_0 . Kui Q või P_0 on ruumis $P_1 \dots P_n$, s. o. ülitasapinnal B , siis ongi tema α -l ja B -l teiseks ühiseks punktiks. Kui aga Q ega P_0 ei ole ruumis $P_1 \dots P_n$, siis võtame [45] punktid $P_0, P_1, \dots, P_n$ meie n -mõõtelise ruumi määravaiks punktiks ja siis

- sirge joon (PQ) , mis on simpleksi $(P_0 \dots P_n)$ ruumis ja läheb läbi selle simpleksi seina
 (52) $(P_1 \dots P_n)$ sisemise punkti (P) , aga ei ole täiesti selle seina ruumis, läheb ka selle simpleksi mingi sisemise punkti (S) läbi,

nii et joon P_0S (tasapinnal α) lõikab nuki P_0 vastasseina $P_1 \dots P_n$ (seega ülitasapinda B) mingis punktis, mis ongi α -le ja B -le teiseks ühiseks punktiks.

Et sirge joon PQ siin tõesti läheb simpleksi $P_0 P_1 \dots P_n$ sisemise punkti läbi, see selgub järgmiselt. Punktist Q , mis on ruumis $P_0 P_1 \dots P_n$, läheb [44] sirge joon simpleksi $P_0 P_1 \dots P_n$ kahe vastasseina Σ_1 ja Σ_2 punktidesse A ja B . Tähime neist vastasseinust Σ_1 -ga nimelt selle, mis on ka simpleksi $P_1 \dots P_n$ sein. Siis lõikab joonetüki AP pikend otsast P [40 ja 42] selles viimases simpleksis mingit seina Σ_3 mingis punktis C ja siis lõikab ka joon PQ [X] joonetükki BC mingis punktis D . Nüüd on D [41] simpleksi $\Sigma_2 \Sigma_3$ sees ja P simpleksi $P_1 \dots P_n$ sees ja siis joonetüki PD sisemised punktid [41] simpleksi $P_0 P_1 \dots P_n$ sees, nii et joon PD ehk PQ läheb tõesti simpleksi $P_0 P_1 \dots P_n$ sisemise punkti läbi.

Nii on ühes n -mõõtelises ruumis tasapinnal ja ülitasapinnal siis, kui neil on üks ühine punkt, tõesti ka teine ühine punkt.

Sellest järgneb, et

- ühe $(n+1)$ -mõõtelise ruumikahe ühise punktiga n -mõõtelisel ruumil on n mitte ühes
 (53) $(n-2)$ -mõõtelises ruumis olevat ühist punkti ja seega üks ja ainus ühine $(n-1)$ -mõõteline ruum.

Sest kui selle ühise punkti võtame ühele sellest kahest ruumist määrava simpleksi üheks nukiks ja vaatleme $n-1$ tasapinda, mis lähevad selle nuki ja ühe teise nuki läbi igasse üksi-

kusse järelejäänust $n-1$ nukist, siis on neil esimese ruumi tasapinnul igaühel veel teine ühine punkt teise ruumiga ja need n -ühist punkti ei saa olla ühes $(n-2)$ -mõõtelises ruumis sellepärast, et vastasel korral oleksid need $n-1$ tasapinda ja seega esimese n -mõõtelise ruumi simpleksi kõik nukid ühes $(n-1)$ -mõõtelises ruumis. Selle n mitte ühes $(n-2)$ -mõõtelises ruumis oleva punktiga on määratud selle kahe n -mõõtelise ruumi ühine $(n-1)$ -mõõteline ruum ja

- (54) kahel n -mõõtelisel ruumil ei saa [45] olla kahte ühist $(n-1)$ -mõõtelist ruumi.

Nüüd saame lühidalt tõestada n -mõõtelise ruumi lahutamise lause, mille nüüd ka sõnastame täielikult.

Olgu ühes n -mõõtelises ruumis ülitasapind A ja punkt B mitte selle ülitasapinna sees. Siis öeldakse, et iga punkt C siis, kui ülitasapinnal A ei ole ühist punkti joonetükiga BC , on sellest ülitasapinnast punkti B pool, ja et iga punkt D siis, kui ülitasapinnal A on ühine punkt joonetükiga BD , on ülitasapinnast A punkti B kohta teisel pool. Need kaks n -mõõtelise ruumi poolt, milleks selle n -mõõtelise ruumi lahutab tema mingi ülitasapind (A), ei olene sellest, missugune punkt (B) selles n -mõõtelises ruumis on nende poolte määramiseks võetud, vaid

n -mõõtelise ruumi iga ülitasapind lahutab selle n -mõõtelise ruumi kaheks pooleks nii, et ühelgi sirgel joonetükil, mis

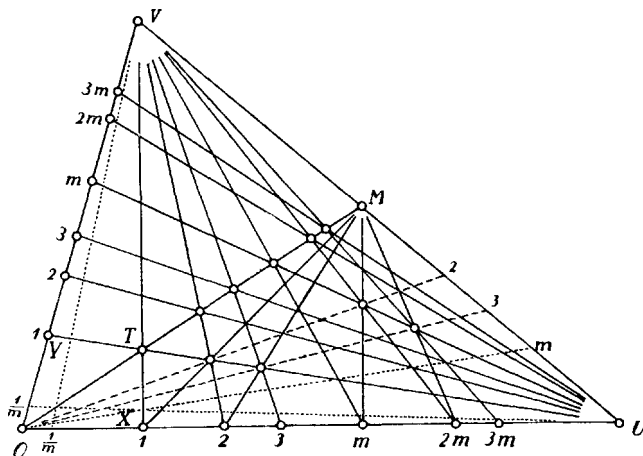
(55) ühendab ühe poole kaht punkti, ei ole ühist punkti selle lahutaja ülitasapinnaga, kuna igal sirgel joonetükil, mis ühendab ühe poole punkti teise omaga, on ühine punkt.

Olgu selles n -mõõtelises ruumis, kus on ülitasapind A ja punkt B mitte selle ülitasapinna sees, mingid kaks punkti C ja E ülitasapinnast A punkti B pool, s. o. nii, et ülitasapinnal A ei ole ühist punkti ei joonetükiga BC ega tükiga BE . Siis ei saa ülitasapinnal A olla ühist punkti joonetükiga CE sellepärast, et selle ühise punkti korral oleks tal tasapinnaga BCE [51] ühine sirge joon, mis tasapinna BCE peal kolmnurga BCE külge CE lõigates ei saaks [14] lõikamata jätta kas külge BC või külge BE . — Kui mingid punktid D ja F on mõlemad ülitasapinnast A

punkti B kohta teisel pool, s. o. nii, et ülitasapinnal A on ühine punkt nii joonetükiga BD kui ka joonetükiga BF , siis ei saa ülitasapinna A ja tasapinna BDF [51] ainus ühine sirge joon kolmnurgas BDF külgi BD ja BF lõigates [7] lõigata ka kolmat külge DF . — Kui viimaks mingi punkt E on ülitasapinnast A punkti B pool, aga mingi muu punkt F teisel pool, s. o. nii, et ülitasapinnal A on ühine punkt joonetükiga BF , aga ei ole ühist punkti tükiga BE , siis peab tal olema ühine punkt joonetükiga EF sellepärast, et ülitasapinna A ja tasapinna BEF [51] ainus ühine sirge joon ei saa [14] kolmnurgas BEF lõigata ühte ainult külge.

Seega on n -mõõtelise ruumi lahutamise lause tõestatud.

18. Harmooniline rida. Sirge joon on [2] määratud oma punktide paariga, tasapind [12] oma kolmnurgaga ja üldse n -mõõteline ruum [45] oma $(n+1)$ -simpleksiga. Öeldakse, et punkt on määratud, kui on määratud kaks sirget joont, mis sellest punktist läbi lähevad. Seega saab kõnelda määratud



punktist alles seal, kus saab olla mitu sirget joont, ja ühe sirge joone punktid saavad olla määratud alles siis, kui seda sirget joont vaadeldakse tasapinnal või kolme- või rohkema-mõõtelises ruumis.

Kui tasapinnal peale selle kolmnurga, misselle tasapinna määrab, on veel määratud üks sirge

joon, mis ei lähe selle kolmnurga ühestki nukist läbi, aga lõikab tema kõigi külgede jooni (s. o. kas külgi või nende pikendeid), siis on selle sirge joone peal määratud lõpmata palju punkte.⁸⁾

Olgu tasapinnal MTV sirge joon OU , mis ei lähe kolmnurga MTV ühegi nuki läbi ja kus O on selle joone lõikepunkt joonega MT ja U joonega MV . Olgu veel $T O$ ja M vahel ja $M U$ ja V vahel ja seega punkt $X = VT \times OU$ $[X]$ O ja U vahel ning $[8]$ $T V$ ja X -i vahel. (Sellest tingimusest vabaneme pärastpoole.) Siis on määratud kolm uut sirget joont OV , XM ja UT ja viimase peal juba neli punkti U , T , $Y = UT \times OV$ ja $UT \times XM$. See viimane punkt on $[X']$ T ja U vahel ja määrab koos V -ga uue sirge joone, mis $[X]$ lõikab joont OU punktide X ja U vahel. Punkt X on joonel OU peale tema määrajate punktide O ja U esimeseks määratud punktiks. Seega on see uus punkt teiseks ja sellepärast tähimegi ta märgiga (2), mida loeme: kahepunkt. Joon (2) M määrab $[X']$ joone UT peal punktide (2) $V \times UT$ ja U vahel uue punkti (2) $M \times UT$ ja see koos V -ga uue sirge joone, mis $[X]$ lõikab joont OU (2)-i ja U vahel kolmandas määratud punktis, mille tähime märgiga (3), mida loeme: kolmepunkt.

Nii määrab üldse joon (n) M joone UT peal punktide (n) $V \times UT$ ja U vahel uue punkti (n) $M \times UT$ ja see koos V -ga uue sirge joone, mis lõikab joont OU (n)-i (n-punkt) ja U vahel uues määratud punktis (n+1)-s ((n+1)-punktis), nii et sellel joone OU määratud punktide kogul ei ole tõesti lõppu.

Punkti, kus joon MY lõikab joont OU (kui see punkt on olemas), tähime märgiga (−1), mida loeme: miinusühepunkt, nagu ka punkti

$$M((-1)V \times UT) \times OU$$

(kui ta on olemas) märgiga (−2) ja üldse punkti

$$M((-n)V \times UT) \times OU$$

(kui ta on olemas) märgiga (−n−1).

Kui sirgel joonel on mingi kolmnurga külgede joontega igaüheda üks ja ainus ühine punkt — ühega (56) mingi nullipunkt (0), teisega mingi ühepunkt (1) ja kolmandaga mingi lõpmatusepunkt (∞) — ja kui iga n-punkti (mille kirjutame: (n)) järgi mõeldakse

⁸⁾ A. F. Möbius, Der barycentrische Calcul (1827), lk. 277, joonis 44.

veel $(n+1)$ -punkt (mille kirjutame: $(n+1)$) või $(n+1)$ -i järgi (n) nii, et $(n+1)$ oleks selle sirge joone peal, mis tuleb sellel kolmnurgal nullipunkti minema külje vastasnukist sinna, kus lõpmatusepunktis minema

(56) külje vastasnukist lõpmatusepunkti minev joon lõikub joonega, mis selle kolmnurga kolmandast nukist läheb (n) -sse, siis nimetatakse punktide kogu

$\dots, (-n), \dots, (-1), (0), (1), (2), \dots, (n), \dots$

harmooniliseks punktide reaks.⁹⁾

Seda punktide kogu nimetatakse reaks või järjeks (*Folge, sequence*) sellepärast, et seal iga üksiku positiivse või negatiivse numbriga n tähitud punkt (n) on üksi selle kogu ühe paari $(n-1)$ -i ja $(n+1)$ -i vahel või on nii, et selle kogu kõik muud punktid peale selle üksiku (n) -i on selle paari vahel, s. o. igatahes nii, et (n) on paariga $(n-1)$ ja $(n+1)$ lahutatud selle kogu kõigist muist punktist. Sest kuni (n) on (∞) -st (0) -i pool, seni on siis, kui (1) on (0) -i ja (∞) -i vahel, $(n+1)$ [56 ja X'] (n) -i ja (∞) -i vahel nagu siis [VI] sealsamas ka $(n+2)$ ja seega üldse iga suurema numbriga punkt, ja kuni (n) on (∞) -st (0) -i kohta teisel pool, seni on jälle $(n-1)$ [X'] (n) -i ja (∞) -i vahel nagu siis ka [VI] $(n-2)$ ja seega üldse iga vähema numbriga punkt. Kui aga (1) ei ole (0) -i ja (∞) -i vahel, siis kuni (n) on (∞) -st (0) -i pool, seni on $(n-1)$ [56 ja X'] (n) -i ja (∞) -i vahel nagu siis [VI] sealsamas ka $(n-2)$ ja seega üldse iga vähema numbriga punkt, ja kuni (n) on (∞) -st (0) -i kohta teisel pool, seni on jälle $(n+1)$ [X'] (n) -i ja (∞) -i vahel nagu siis [VI] ka $(n+2)$ ja seega üldse iga suurema numbriga punkt.

Selles paaris, mis lahutab rea mingit punkti muist, nimetatakse ühte punkti lahutatava eelmiseks ja teist selle lahutatava järgmiseks ehk temale järgnevaks. Lahutatud punkti ennast nimetatakse tema eelmise järgmiseks ja järgmise eelmiseks.

Lausega (56) defiinitud punktide rida nimetatakse harmooniliseks sellepärast, et seal iga punkt koos oma eelmisega, järgmisega ja selle rea lõpmatusepunktiga kujundab harmoonilise salga, s. o. niisuguse salga, nagu on esimesed neli määratud punkti tasapinna ühe sirge joone peal, näiteks joone *UT* peal

⁹⁾ O. Veblen and J. W. Young, Projective Geometry II, lk. 10.

punktid U , T , Y ja $UT \times XM$. Harilikult defiinitakse harmooniline punktide salk täieliku nelikülje abil. Öeldakse, et tasapinnal neli sirget joont (nagu OU , OM , UV ja VT), millest ükski kolm ei lähe ühest punktist läbi, kujundavad koos oma kuue lõikepunktiga täieliku nelikülje, millele nad ise on külks ja nende kuus lõikepunkti (nagu O , X , U , T , M ja V) nukeks. Kolme uut sirget joont, mis on juba määratud täieliku nelikülje nukega (nagu OV , XM ja UT), nimetatakse selle nelikülje diagonaaljoonteks. Harmooniliseks punktide salgaks nimetatakse täielikul neliküljel ühe diagonaaljoone peal olevat kahte nukki koos nende kahe punktiga, kus see diagonaaljoon lõikab teisi. Harmoonilises punktide reas OXU on tõesti iga salk $(n-1)(n+1)U$ harmooniline, sest joon OU on diagonaaljooneks selles täielikus neliküljes, mille külks on UV , UT , $(n)V$ ja $(n)M$.

Harmoonilise punktide rea saab näiteks laps siis, kui ta endale abilise otsib, sellega koos sihitikke kaasa võttes lagedale väljale läheb, seal mingisse kahte punkti O ja X sihitikud püsti paneb; oma abilisel laseb punktist O üle X -i silmapiirile vaadates hästi tähele panna silmapiiri selle koha U , kuhu läheb joon OX ; saadab siis abilise joone OU pealt eemale ja laseb seal ühe sihitiku püsti panna punktiks T ning teise nii, et T oleks selle ja U vahel; ise paneb hästi tähele, kus on silmapiiril punkt M joone OT peal ja punkt V joone XT peal, ja siis ise punktisse X jäädes laseb abilisel joont UT mööda (oma kahte püstipandud tikku vahtides) edasi minna kuni X -i ja M -i vahele, kus laseb ta paigale jääda, kuni ise läheb joont OU mööda (oma kahte püstipandud tikku vahtides) niipalju edasi, et paigalejäänud abilise oleks tema ja V vahel; märgib selle koha uueks punktiks (OU peal) ja ise sinna jäädes laseb abilisel joont UT mööda jälle edasi minna kuni selle uue punkti ja M -i vahele, kus laseb ta jälle paigale jääda, kuni ise läheb joont OU mööda niipalju edasi, et paigalejäänud abilise oleks tema ja V vahel; märgib selle koha järgmiseks uueks punktiks jne. Selle juures märkab laps, et tal iga uue punkti saamiseks tuleb pea sama palju samme edasi minna.

19. Harmoonilise rea konstruktsiooni ühesus nulli-, ühe- ja lõpmatusepunkti järgi.

Ei saa olla kahte harmoonilist rida,
 (57) millel nulli-, ühe- ja lõpmatusepunkt oleksid ühised.

Harmoonilise rea konstruktsiooni järgi on selle lause tõestamiseks ainult vaja tõestada, et ühiste nulli-, ühe- ja lõpmatusepunkti korral ka (2) (kahepunkt) saab ühine.

Olgu tasapinnal MTV harmooniline rida OXU nii, et joon TM läheb läbi O , joon TV läbi X ja joon VM läbi U , ja olgu veel mingid kolm punkti $T' M' V'$ nii, et joon $M'T'$ läheb läbi O , joon $T'V'$ läbi X ja joon $V'M'$ läbi U . Siis läheb joon $V'(UT' \times \times XM')$ tõesti läbi (2) $= OU \times V(UT \times XM)$ järgmistel põhjustel.

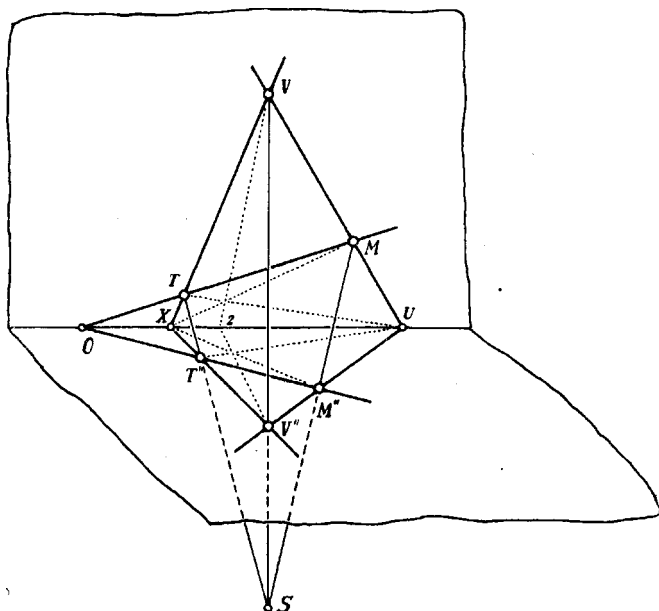
Kui tasapind $T'M'V'$ ei ole samane tasapinnaga TMV (vaid lõikab teda OU -d mööda) ja kui veel jooned VV' ja TT' , mis on tasapinnal VXV' , lõikuvad mingis punktis S , siis läheb sellesse punkti ka joon MM' sellepärast, et see joon on [13] tasapindade OTT' ja UVV' ühine joon ja punkt $S = VV' \times TT'$ nende ühine punkt. Sellesse punkti läheb ka joon $(UT \times XM)(UT' \times XM')$ sellepärast, et ta on tasapindade XMM' ja UTT' ühine joon ja punkt $S = MM' \times TT'$ nende ühine punkt. Seega on jooned VV' ehk SV ja $(UT \times XM)(UT' \times XM')$ ehk $S(UT \times XM)$ ühel tasapinnal $SV(UT \times XM)$ ehk $SV(2)$, ja joon $V'(UT' \times XM')$ tasapinnal $T'M'V'$ läheb tõesti läbi (2) sellepärast, et see joon on tasapindade $SV(2)$ ja $T'M'V'$ ühine joon ja (2) nende tasapindade ühine punkt.

Kui tasapind MTV on samane tasapinnaga $M'T'V'$ või jooned VV' ja TT' ei lõiku, siis järgneb (2)-i konstruktsiooni ühesus selsamal viisil abilausest:

kui on kaks kolmnurka MTV ja $M'T'V'$ nii, et on punktid $MT \times M'T' = O$, $MV \times M'V' = U$ ja $TV \times T'V' = X$ ja kõik 3 ühe sirge joone peal, siis saab alati võtta tasapinna $T''M''V''$, mis (58) ei ole samane tasapinnaga TMV ega tasapinnaga $I'M'V'$ ja mille peal punktid T'' , M'' ja V'' on nii, et joon $M''T''$ läheb läbi O , $T''V''$ läbi X ja $V''M''$ läbi U ja et jooned $V''V''$ ja $T''T''$ lõikuvad mingis punktis S' nagu ka jooned VV' ja TT' mingis punktis S .

Selle abilause tõestamiseks võtame vabalt mingi punkti S' , mis [XI ja 13] ei oleks tasapinna MTV ega tasapinna $M'T'V'$ peal. Kui nüüd joon OU ei lõika kolmnurga MTV külgi, siis võtame punktist O , X , U selle, mis on kahe teise vahel, ja vaatleme neid kolme joont, mis teisi punkte paarikaupa ühendades tulevad sel-

lesse punkti. Vaatleme ka kiiri, mis tulevad punktist S' punktidesse M' , T' ja V' . Olgu näiteks X O ja U vahel. Siis on punktid T ja V punktist X ühel pool. Kui neist nimelt T on V ja X -i vahel, siis võtame kiirel $S'T'$ mingi punkti T'' , mis [13] ei oleks tasapinnal MTV ja mis oleks [15] punkti X kohta teisel pool kiirt $S'V'$. Siis saab [15] $V'' = XT'' \times S'V'$ punktide X ja T'' vahel ja



siis ka [X] $M'' = OT'' \times UV''$ punktide T'' ja O vahel. — Kui aga V on T ja X -i vahel, siis võtame kiirel $S'V'$ samuti mingi punkti V'' X -i kohta teisel pool kiirt $S'T'$. Kummaldi korral lõikuvad jooned TT'' ja VV'' [X'] mingis punktis S . Kui punktist O , X , U ei oleks teiste vahel mitte X , vaid O või U , siis saaksime seltsamal viisil punkti S joonte TT'' ja MM'' või joonte VV'' ja MM'' lõikepunktina.

Kui joon OU lõikab kolmnurgal MTV [14 ja 7] kahte külge, siis võtame neist lõikepunktist selle, mis punktide O , X , U hulgas [IV] ei ole kahe teise vahel. Olgu see jälle näiteks X . Siis on ta ise T ja V vahel, aga O ja U on temast ühel pool. Kui nüüd O on X -i ja U vahel, siis võtame jälle kiirel $S'T'$ mingi punkti T'' , mis [13] ei oleks tasapinnal MTV ja mis oleks [15] punkti X kohta teisel pool kiirt $S'V'$. Siis saab [15] $V'' = XT'' \times$

$\times S'V'$ punktide X ja T'' vahel ja siis ka $[X'] M'' = OT'' \times UV''$ punktide T'' ja O vahel. — Kui aga U on X -i ja O vahel, siis võtame kiirel $S'V'$ samuti mingi punkti V'' X -i kohta teisel pool kiirt $S'T'$. Kummalgi korral lõikuvad jooned TT'' ja VV'' $[X]$ mingis punktis S .

Seega saame tõesti siis, kui punktid $MT \times M'T' = O$, $MV \times \times M'V' = U$ ja $TV \times T'V' = X$ on ühe sirge joone peal, aat võtta uue tasapinna $M''T''V''$, mis ei ole samane tasapinnaga MTV ega tasapinnaga $M'T'V'$ ja mille peal punktid M'' , T'' ja V'' on nii, et joon $M''T''$ läheb läbi O , joon $T''V''$ läbi X -i ja joon $M''V''$ läbi U ja et jooned VV'' ja TT'' lõikuvad mingis punktis S nagu ka jooned $V'V''$ ja $T'T''$ mingis punktis S' .

Seega on harmoonilises reas (2)-i konstruktsiooni ühesus ja siis ka terve harmoonilise rea konstruktsiooni ühesus selle rea nulli-, ühe- ja lõpmatusepunkti järgi igal juhul tõestatud. Sellepärast tähime ka harmoonilise rea selle kolme punkti tähiga.

Selles tõestuses ei olnud kolmnurga MTV seis joone OU kohta mingi tingimusega kitsendatud. Seega oleme tõesti vabamenud eelmises paragrahvis esinenud tingimustest.

20. Ebapunkt ja ebaruum. Kui kahel sirgel joonel ühe tasapinna peal ei ole ühist punkti, siis öeldakse, et neil on ühine ebapunkt. Sest need ühe tasapinna kaks sirget joont määravad igast punktist ühe ja ainsa sirge joone nii, et selle kahe joone ja nendega määratud joonte kogus on iga paari mõlemad jooned ühel tasapinnal, nagu igast punktist ühte ühisesse punkti minevate joonte kogus iga kaks joont on sellel tasapinnal, mille määrab see ühine punkt koos kummagi joone teise määrava punktiga. See lause tõestub siis, kui need kaks joont ei lõiku, järgmiselt kahes osas.

Olgu esiteks ühe tasapinna peal mingid kaks joont TT' ja VV' ja olgu mingid kaks punkti M ja S mitte tasapinna $TT'V$ peal. Siis on punktist M (ruumis $TVV'M$) [24] tõesti üks ja [16] ainus joon $MM' = TT'M \times VV'M$ nagu ka punktist S (ruumis $TVV'S$) joon $SS' = TT'S \times VV'S$ nii, et kumbki neist on ühel tasapinnal nii joonega TT' kui ka joonega VV' . Jooned MM' ja SS' on ka ise ühel tasapinnal. Sest kui võtame nende nelja joone peal punktid M , T , V ja V' vabalt, aga punktid M' , T' ja S' nii, et joon TV lõikub joonega $T'V'$ mingis punktis X nagu ka joon TM joonega $T'M'$ mingis punktis O ja joon VM joonega $V'M'$ joone XO mingis

punktis U ja et punkt S' ei oleks ei tasapinna MTV ega tasapinna $M'T'V'$ peal, siis on [58] joonel SS' punkt S nii, et joontel SM ja $S'M'$ on ühine punkt M'' ja seega jooned SS' ja MM' tõesti ühel tasapinnal $SMM'' = S'M'M''$.

Punktid M' ja T' saame tõesti nii võtta, näiteks järgmisel viisil. Võtame [II] mingi punkti X nii, et T on tema ja V vahel. Siis on joonte TT' ja VV' mittelõikumise pärast [15] joonetükil XV' joonega TT' ühine punkt, mille võtamegi punktiks T' . Punkti M' võtame (joonel MM') nii, et ta oleks tasapinnast MTV punkti V' kohta teisel pool. See on võimalik [25] sellepärast, et joonel MM' ei saa peale M -i ükski muu punkt olla tasapinna MTV peal. (Sest vastasel korral oleks [12] tasapind MTV samane joonte TT' ja MM' ühise tasapinnaga nagu ka joonte VV' ja MM' ühise tasapinnaga ja siis ka joonte VV' ja TT' ühise tasapinnaga, nii et joon MM' oleks oletuse vastu tasapinnal $TT'V$.) Kui punkt M' on võetud tasapinnast MTV punkti V' kohta teisel pool, siis on ta (konstruktsiooni järgi) tasapinnast MTV teisel pool ka punkti T' kohta. Siis on joonetükil $M'T'$ [25] mingi ühine punkt O tasapinnaga MTV ja seega [16] tõesti ka joonega $MT = MTV \times M'TT'$, samuti ka joonetükil $M'V'$ tõesti mingi ühine punkt U joonega MV .

Punkti S' saame ka tõesti võtta nii, et ta ei oleks ei tasapinna MTV ega tasapinna $M'T'V'$ peal. Sest joonel SS' ei saa kummagi tasapinna peal olla enam kui üks ainus punkt ja nimelt samal põhjusel kui joonel MM' -gi.

Olgu teiseks ühe tasapinna peal mingid kaks joont TT' ja VV' ja olgu mingi punkt M sellesama tasapinna peal, aga mingi teine punkt S mitte. Olgu punktist S joon SS' nii, et ta on ühel tasapinnal nii joonega TT' kui ka joonega VV' ja olgu punktist M joon MM' tasapinda TVV' mööda nii, et ta on ühel tasapinnal ka joonega SS' . Siis saab sel viisil joonte TT' ja VV' järgi punktist M ikka seesama joon MM' , olgu punkti S asemele võetud ka mistahes muu punkt S_1 mitte tasapinna TVV' peal. Saab ju punktist S_1 joonte TT' ja VV' järgi endisel viisil seesama joon $S_1S'_1$ mis joonte TT' ja MM' järgigi:

$$S_1S'_1 = TT'S_1 \times VV'S_1 = TT'S_1 \times MM'S_1$$

Sest see joon on selle tõestuse esimese osa järgi kummalgi korral ühel tasapinnal joonega SS' nagu ka joonega TT' ja seega kummalgi korral tõesti tasapindade $SS'S_1$ ja $TT'S_1$ [16] ainus übine joon. Ja kui joon $S_1S'_1$ on samane joonega $TT'S_1 \times MM'S_1$ ja seega

tasapinnal $MM'S_1$, siis on [12] $MM'S_1 \equiv S_1S'_1M$ ja siis tõesti $TVV' \times \times S_1S'_1M \equiv TVV' \times MM'S_1 \equiv MM'$.

Õeldakse, et sirged jooned, mis on määratud ühe tasapinna kahe mitte lõikuva sirge joonega nii, et neil koos selle kahe joonega on igal paaril mõlemad jooned ühel tasapinnal, lähevad läbi oma ühise ebapunkti või oma ühisesse ebapunkti.

Viimase tõestuse käigust järgneb, et ühisesse ebapunkti minevate kiirte kogu ei olene sellest, milline paar sellest kogust on võetud selle kogu määrajaks, nii et ühisesse ebapunkti minevaist kiirist määrab iga paar sellesama ebapunkti.

Kui kahel n -mõõtelisel ruumil ühes $(n+1)$ -mõõtelises ruumis ei ole ühist $(n-1)$ -mõõtelist ruumi (ja seega [53] ka mitte ühist punkti), siis öeldakse, et neil on ühine $(n-1)$ -mõõteline ebaruum.

Sest need

ühe $(n+1)$ -mõõtelise ruumi kaks n -mõõtelist ruumi määravad igast punktist ühe ja ainsa n -mõõtelise ruumi nii, et selle kahe
(60) n -mõõtelise ruumi ja nendega määratud n -mõõteliste ruumide kogus on igal paaril mõlemad ruumid ühes $(n+1)$ -mõõtelises ruumis,

nagu igast punktist ühe ühise $(n-1)$ -mõõtelise ruumi läbi minevate n -mõõteliste ruumide kogus iga kaks n -mõõtelist ruumi on selles $(n+1)$ -mõõtelises ruumis, mille määravad selle ühise $(n-1)$ -mõõtelise ruumi mingi simpleksi nukid koos kummagi n -mõõtelise ruumi $(n+1)$ -nda määrava punktiga. See tõestub siis, kui need kaks ruumi ei lõiku, järgmiselt.

Olgu A ja B ühe $(n+1)$ -mõõtelise ruumi n -mõõtelised ruumid ilma ühise punktita. Võtame ruumil A mingil simpleksil mingi nuki A ja ruumil B mingi punkti B ja vaatleme neid n tasapinda, mille määravad A ja B koos selle simpleksi iga üksiku muu nukiga $A_1, A_2, \dots, A_n$. Need tasapinnad lõikavad [51] ruumi A jooni $a_1 = AA_1, a_2 = AA_2, \dots, a_n = AA_n$ mööda ja ruumi B mingeid jooni $b_1 = BB_1, b_2 = BB_2, \dots, b_n = BB_n$ mööda. Igal üksikul tasapinnal $a_i b_i$ (läbi a_i ja b_i) saame [59] joontega a_i ja b_i määratud ebapunkti, mille tähimegi $(a_i \times b_i)$ -ga. Need ebapunktid määravad [60] igast punktist S n kiirt $S(a_i \times b_i) = SS_i$, nagu ka igast

muust punktist M n kiirt $M(a_i \times b_i) = MM_i$ (kui S_i ja M_i on nende kiirte mingid S -st ja M -st erinevad punktid).

Kui punktid S ja M ei ole ruumis A , siis kiired SS_i määravad ühe n -mõõtelise ruumi mingi $S = SS_1S_2 \dots S_n$ nagu ka kiired MM_i mingi $M = MM_1M_2 \dots M_n$. Sest punktid $S, S_1, S_2, \dots, S_n$ või $M, M_1, M_2, \dots, M_n$ ei saa olla $(n-1)$ -mõõtelises ruumis sellepärast, et siis simpleksi ja n -mõõtelise ruumi definitsioonide järgi oleksid punktid $A, S, S_1, \dots, S_n$ või $A, M, M_1, \dots, M_n$ ühes n -mõõtelises ruumis [50] koos kõigi tasapindadega ASS_i (või AMM_i) ehk [12] SAA_i (või MAA_i) ja see ruum oleks [44] nimelt A , nii et ka punkt S (või M) oleks oletuse vastu ruumis A . (Nii on ka punktid $B, B_1, \dots, B_n$ ühe simpleksi nukid.) Iga kaks niisugust n -mõõtelist ruumi S ja M on ühes $(n+1)$ -mõõtelises ruumis. Sest iga kiirte paar $S(a_i \times b_i) = SS_i$ ja $M(a_i \times b_i) = MM_i$ on [60] ühel tasapinnal ja need tasapinnad $SMM_i \equiv MSS_i$ [50] kõik $(n+1)$ -mõõtelises ruumis $SMM_1 \dots M_n \equiv MSS_1 \dots S_n$.

Kui mingi punkt S ei ole selles $(n+1)$ -mõõtelises ruumis, milles on A ja B ja mille tähimegi AB -ga, siis saab sel viisil seesama S , olgugi ruumis A võetud simpleksi $AA_1 \dots A_n$ asemele mistahes muu simpleksi $A'A'_1 \dots A'_n$ ja ruumis B punkti B asemele mistahes muu punkt B' . Sest ikka saame punktist S n -mõõtelise ruumi, mis on $(n+1)$ -mõõtelises ruumis AS nagu ka ruumis BS ja neil kahel $(n+1)$ -mõõtelisel ruumil on [53] üks ja ainus ühine n -mõõteline ruum sellepärast, et nad mõlemad on ühes $(n+2)$ -mõõtelises ruumis ABS ja et neil seal on ühine punkt S .

Kui mingi punkt M on ruumis AB , siis saab ruum $M = AB \times SM$ (kui $S = AS \times BS$ ja S mitte ruumis AB) seesama, olgugi punkti S asemele võetud mistahes muu punkt S' mitte ruumis AB . On ju ruum $S' = AS' \times BS'$ samane ruumiga $AS' \times MS'$. Sest ruum S on oma ja M -i definitsiooni järgi samane ruumiga $AS \times MS$, ja siis selle tõestuse eelmise osa järgi ühises $(n+1)$ -mõõtelises ruumis SS' nii ruumiga S' kui ka ruumiga $AS' \times MS'$, mis oma definitsiooni järgi on mõlemad ruumis AS' ja seega tõesti kumbki $(n+2)$ -mõõtelise ruumi ASS' $(n+1)$ -mõõteliste ruumide AS' ja SS' [53] ainsaks ühiseks n -mõõteliseks ruumiks. Ja kui, ruum S' on samane ruumiga $AS' \times MS'$ ja seega ruumis MS' siis on [45] $MS' \equiv S'M$ ja siis tõesti

$$AB \times S'M \equiv AB \times MS' \equiv M.$$

Seega on tõestatud, et ühe $(n+1)$ -mõõtelise ruumi kaks n -mõõtelist ruumi ka siis, kui neil ei ole ühist punkti, määravad

igast punktist ühe ja ainsa n -mõõtelise ruumi nii, et selle kahe ruumi ja nendega määratud ruumide kogus on igal paaril mõlemad ruumid ühes $(n+1)$ -mõõtelises ruumis.

n -mõõteliste ruumide kohta, mis on määratud ühe $(n+1)$ -mõõtelise ruumi kahe ilma ühise punktita n -mõõtelise ruumiga nii, et neil koos selle kahe ruumiga on igal paaril mõlemad ruumid ühes $(n+1)$ -mõõtelises ruumis, öeldakse, et need ruumid lähevad läbi oma ühise $(n-1)$ -mõõtelise ebaruumi.

Viimase tõestuse käigust järgneb, et ühise $(n-1)$ -mõõtelise ebaruumi läbi minevate n -mõõteliste ruumide kogu ei olene sellest, milline paar sellest kogust on võetud selle kogu määraks, nii et ühise $(n-1)$ -mõõtelise ebaruumi läbi minevaist n -mõõtelisist ruumest määrab iga paar sellesama ebaruumi.

Punkte ja ruume endises mõttes nimetame ebapunkttest või ebaruumest eraldamise jaoks pärispunktteks ja pärisruumeks.

Kui punktiks ja mingimõõteliseks ruumiks loeme nii päris- kui ka ebapunkti või -ruumi, siis on [53 ja 59] $(n+1)$ -mõõtelise ruumi igal kahel ülitasapinnal ühine üks ja ainus $(n-1)$ -mõõteline ruum ja

iga ruumi igal ülitasapinnal on selle ruumi
(61) iga mitte sellel ülitasapinnal oleva m -mõõtelise ruumiga ühine $(m-1)$ -mõõteline (päris- või eba-) ruum.

Sest kui selle m -mõõtelise ruumi määrava simpleksi nukid on näiteks $A, A_1, A_2, \dots, A_m$ ja selle ülitasapinna mingi pärispunkt B mitte ruumis $A = AA_1 \dots A_m$, siis lõikavad m tasapinda ABA_i ; seda ülitasapinda [51] m joont BB_i mööda (kus B_i on tasapinna ABA_i lõikejoone mingi B -st erinev punkt) ja m -mõõtelisel ruumel A ja $B = BB_1 \dots B_m$ $(m+1)$ -mõõtelises ruumis AB on [59] tõesti ühine üks ja [54] ainus $(m-1)$ -mõõteline ruum. On ju ka ruum B m -mõõteline sellepärast, et vastasel korral oleks ruum BA (milles on tasapinnad ABA_i ja siis ka simpleks $AA_1 \dots A_m$) mitte rohkem kui m -mõõteline ja seega samane A -ga, nii et ka punkt B oleks oletuse vastu ruumis A .

Seega on ka tasapinnal igal sirgel joonel iga teise sirge joonega ühine (päris- või eba-) punkt ja siis ka harmoonilise rea konstruimiseks tarvilikud punktid kõik olemas.

21. Projektsioon. Kui mingi ruumi mingist punktist lähevad kiired selle ruumi mingi kujundi (s. o. punktide kogu) punktidesse ja kui mõeldakse nende kiirte ühiseid punkte selle ruumi mingi ülitasapinnaga, siis öeldakse, et see kujund on projektitud (s. o. edasi heidetud) nende projektivate kiirtega sellest projektimis-keskpunktist selle ülitasapinna peale, mida ise nimetatakse projektsiooniruumiks, sest selle kujundi projektivate kiirte ja selle ruumi (ülitasapinna) ühiste punktide kogu nimetatakse selle kujundi projektsiooniks.

Kui projektimis-keskpunkt ei ole projektsiooniruumis, siis on igal üksikul
(62) projektitaval m -mõõtelisel ruumil, mis ei lähe läbi projektimis-keskpunkti, projektsiooniks ka üks ja ainus m -mõõteline ruum.

Sest projektivad kiired on [50] kõik selles $(m+1)$ -mõõtelises ruumis, mille määrajaks on projektitava ruumi määrav simpleks koos projektimis-keskpunktiga, ja selle $(m+1)$ -mõõtelise ruumi iga punkt on mingi projektiva kiire peal sellepärast, et kiirel, mis ühendab seda punkti projektimis-keskpunktiga, on [61] ühine punkt projektitava ruumiga, nii et see $(m+1)$ -mõõteline projektiv ruum on samane projektitava m -mõõtelise ruumi projektivate kiirte kõigi punktide koguga ja siis temal [61] projektsiooniruumiga ühine m -mõõteline ruum tõesti projektitava ruumi projektsioon.

Kui nüüd [62] punkti projektsioon on üks ja ainus punkt ja sirge joone projektsioon sirge joon, siis

(63) harmoonilise rea projektsioon on ka harmooniline rida.

Sest täielik nelikülg oma nelja sirge joonega ja nende kuue lõikepunktiga projektub [62] täielikuks neliküljeks. —

Kui mingist punktidereast saame uue punktiderea, kus on kõik vana rea punktid ja veel vana rea iga punkti ja tema järgmise vahel $m-1$ uut punkti, siis ütleme, et vana rida on tihendatud m -kordselt ehk et uus rida on vanast m korda tihedam ja vana temast m korda hõredam.

Harmonilisest reast m korda hõredam
(64) rida, s. o. rida:

..., $(-3m)$, $(-2m)$, $(-m)$, (0) , (m) , $(2m)$, $(3m)$, ...,
on ka harmoniline.

Olgu selle tõestuseks mingil harmonilisel real nullipunkt, ühepunkt ja lõpmatusepunkt järgemööda O , X ja U (mille pärast tähimegi selle rea ka OXU -ga) ja olgu veel selle rea konstruimiseks [56] tarvilik kolmnurk mingi MTV nii, et oleks $OM \equiv MT$, $XT \equiv TV$ ja $UV \equiv VM$. Siis ongi harmoniline rida $O(m)U$, mille konstruimiseks tarvilikuks kolmnurgaks on $M(OM \times (m)V)V$, reast OXU m korda hõredam sellepärast, et temal üheks punktiks on rea OXU m -punkt, selle järgmiseks $(m+m)$ - ehk $2m$ -punkt ja üldse rea OXU nm -punktile järgmiseks $(nm+m)$ - ehk $(n+1)m$ -punkt. Saab ju see järgmine [56] siis, kui V -st projektitakse joone $(nm)M$ lõikepunkt joonega $(OM \times (m)V)U$, ja selle punkti projektsioon saab rea OXU nm -punktile nimelt m -ndaks järgmiseks sellepärast, et projektitav punkt ise on oma konstruktsiooni järgi m -punktiks selles harmonilises reas, mille [63] saame rida OXU projektides V -st OM peale ja siis U -st $(nm)M$ peale ja millel nullpunktiks on rea OXU mn -punkt, aga ühepunkt $TU \times (nm)M$ projektub V -st [56] rea OXU järgmiseks punktiks ja lõpmatusepunkt M lõpmatusepunktiks U . See, et sellel harmonilisel real joone $(nm)M$ peal projektub siis ka iga järgmine punkt rea OXU järgmisse, kui tal projektub nullipunkt rea OXU nm -punkti, ühepunkt selle järgmisse ja lõpmatusepunkt lõpmatusepunkti, järgneb [57] näiteks järgmisest asjaolust. Kui rea OXU projekteerime M -st TU peale, sealt V -st tagasi OU peale ja teeme seda nm korda, siis saame [63] harmonilise rea, millel [56] on nullipunktiks rea OXU nm -punkt ja igaks järgmiseks punktiks rea OXU järgmine. Sellest järgneb ka lause:

Kui harmonilisel real võetakse mingi
 m -punkt uue harmonilise rea nullipunktiks, $(m+1)$ -punkt uue rea ühepunktiks ja
(65) lõpmatuse punkt ka uue rea lõpmatusepunktiks, siis saab uus rida samane vana naga ja ainult tema punktide numbrid saavad endistest m võrra vähemad.

Lausest (64) järgneb, et

(66) harmoonilise rea saame tihendada iga arvu m kordselt.

Sest näiteks projektides rea OXU läbi V joone $O(TU \times \times (m)V)$ peale, sealt U -st OM peale ja sealt V -st tagasi OU peale saame rea, mis on [63] harmooniline ja reast OXU [64 ja 57] m korda tihedam sellepärast, et tal nullipunkt ja lõpmatusepunkt on ühised reaga OXU , aga m -punkt rea OXU ühepunktis. Selle m korda tihedama rea punktid saame tähtida aritmeetilise rea arvudega nii, et seal endise hõredama rea punktele jääksid nende endised numbrid. Selleks tuleb vaid võtta selle tihedama rea ühepunktile numbriks $\frac{1}{m}$ kahepunktile $\frac{2}{m}$ jne. üldse n -punktile $\frac{n}{m}$. Nii võime mingit harmoonilist rida tihendada seal saada punkti, millel oleks numbriks mingi ratsionaalne arv $\frac{n}{m}$. Ratsionaalse numbriga punkti nimetatakse ka lihtsalt ratsionaalseks punktiks.

Kui harmooniline rida projektitakse nii, et tema nullipunkt projektub endisse
(67) lõpmatusepunkti, lõpmatusepunkt endisse nullipunkti ja ühepunkt tagasi endisse ühepunkti, siis on iga m -punkt projektunud endisse $\frac{1}{m}$ -punkti.

Sest kui tarvitame endisi tähti, siis saab niisugune projektimine toimuda näiteks sel teel, et rida OXU projektitakse läbi V TU peale, sealt läbi O XV peale, sealt läbi U OM peale ja sealt läbi V OU peale, ja siis on [66] m -punkt tõesti projektunud endisse $\frac{1}{m}$ punkti.

Kui harmooniline rida projektitakse nii, et tema nullipunkt ja lõpmatusepunkt
(68) projektuvad tagasi endistesse, aga ühepunkt endisse (-1) -punkti, siis projektub iga m -punkt endisse $(-m)$ -punkti.

Sest kui endistele tähtedele lisaks tähime veel OV ja UT lõikepunkti X -ga, siis saab niisugune projektimine toimuda näiteks sel teel, et rida OXU projektitakse läbi V OM peale, sealt läbi U OV peale ja sealt läbi M tagasi OU peale, ja siis on küll uuele reale saanud kolmnurk VYM vana rea kolmnurga MTV

asemele, aga et punkti Y konstruktsiooni järgi on joon YU samane joonega TU , siis on [56] uue rea ühepunkti järgmine ja selle järgmised tõesti samased rea OXU (-1)-punkti eelmisega ja selle eelmistega.

Viimastes tõestustes toetusime ikka sellele asjaolule, et harmoonilise rea projektsioon on ka harmooniline rida. Sellest asjaolust järgneb ka, et ühe harmoonilise rea nelja punkti projektsioonis sellel punktide paaril, millel üks ainus punkt on teise paari vahel (nii et teine paar lahutab seda paari ja on siis ise lahutatud sellega), on ka projektsioonis üks ainus punkt teise paari punktide projektsioonide vahel. Saab tõestada, et

sirge joone iga nelja punkti projektsioonis
(69) on lahutajate paaride projektsioonid
ka lahutajad paarid.

Olgu projektitavad punktid järgemööda $ABCD$, nii et B on A ja C vahel ja C B ja D vahel, ja olgu projektimis-keskpunkt S . Siis lahutavad punktide A ja C projektivad kiired SA ja SC tasapinna SAB [15] neljaks osaks: 1) osaks, mis on joonist SA ja SC kummastki punkti B pool, 2) osaks, mis on joonest SA punkti B pool, aga joonest SC teisel pool, 3) osaks, mis on joonest SC punkti B pool, aga joonest SA teisel pool, ja 4) osaks, mis on kummastki joonest punkti B kohta teisel pool. Punkti B projektival kiirel SB on siis need punktid, mis on punktist S B pool, kõik selle tasapinna esimeses osas ja need, mis on S -st B kohta teisel pool, kõik neljandas osas, sest punkt S on nii joone SA kui ka SC oma. Samuti on punkti D projektival kiirel SD [V] need punktid, mis on S -st D pool, kõik selle tasapinna teises osas ja need, mis on S -st D kohta teisel pool, kolmandas osas. Nüüd on selle tasapinna nende nelja osa definitsiooni järgi esimene osa lahutatud teisest ning neljas kolmandast joonega SC ja ainult sellega, ja joonega SA üksi on lahutatud neljas teisest ning esimene kolmandast. Sellepärast on siis, kui tähime punktide A , B , C ja D projektsioonid järgemööda A' -, B' -, C' - ja D' -ga, joonetükil $B'D'$ [15] ühine punkt kas joonega SA üksi või joonega SC üksi. See ühine punkt on siis muidugi kas A' või C' ja seega on sirge joone iga nelja pärispunkti $ABCD$ pärispunktilises projektsioonis $A'B'C'D'$ lahutajate paaride AC ja BD projektsioonid $A'C'$ ja $B'D'$ tõesti ka lahutajad paarid.

Kui pärispunktid $ABCD$ on projektitud mingi punkti S läbi punkteks $A'B'C'D'$, mis on osalt või kõik ebapunktid, ja sealt mingi teise punkti S_1 läbi pärispunktteks $A_1B_1C_1D_1$, siis saame nad sinnasamasse projektida ka vaid pärispunktide kaudu. Selleks võtame siis, kui S_1 ei ole tasapinnal SAB ja kui A, B, C ja D on kõik tasapinnast $S_1A_1B_1$ S -i kohta mitte teisel pool, joone SS_1 peal S_1 -st S -i kohta teisel pool mingi punkti S_2 ja selle läbi projekteime punktid $ABCD$ tasapinnal $S_1A_1B_1$ peale [25] mingeiks punkteks $A_2B_2C_2D_2$. Siis projektuvadki need viimased punktid S_1 -st punkteks $A_1B_1C_1D_1$. Sest näiteks joon S_1A_1 on joonega SA , millega tal on ühine päris- või ebapunkt A' , [13] ühel tasapinnal $SAS_1 \equiv SAS_2$, kus on ka joon S_2A , ja joone S_2A lõikepunkt tasapinnaga $S_1A_1B_1$ (s. o. A_2) on siis tõesti joone S_1A_1 peal. -- Kui punkt S_1 on tasapinnal SAB peal, siis tuleb vaid abiks võtta mingi punkt S_3 , mis ei oleks selle tasapinnal peal. Sest sealt punkte $A'B'C'D'$ mingeiks uuteks pärispunktteks $A_3B_3C_3D_3$ projektides saame siis, kui punktid $ABCD$ ning $A_1B_1C_1D_1$ on kõik tasapinnast $S_3A_3B_3$ punkti S pool, eelmise juhu nii punktide $ABCD$ kui ka $A_1B_1C_1D_1$ kohta. — Olgu nüüd punkt S_1 küll mitte tasapinnal SAB peal, aga punktist $ABCD$ mõned tasapinnast $S_1A_1B_1$ punkti S kohta teisel pool. Olgu selle juures need neli punkti tähitud ikka nende järjekorras (s. o. nii, et B on A ja C vahel ning C B ja D vahel) ja veel nii, et [25] D on tasapinnast $S_1A_1B_1$ punkti S kohta teisel pool. Siis on D' oletuse järgi S -i ja D vahel. Projekteime nüüd tasapinnal $S_1A_1B_1$ peale endisel viisil punkteks $A_2B_2C_2D_2$ punktide $ABCD$ asemel joone $D'A$ [X] lõikepunktid kiirtega SA, SB, SC ja SD . Siis saame küll alles kolme projektimisega (läbi S joone $D'A$ peale, läbi S_2 tasapinnal $S_1A_1B_1$ peale ja läbi S_1 joone A_1B_1 peale) punktid $ABCD$ punkteks $A_1B_1C_1D_1$, kuid ikkagi pärispunktide kaudu.

Seega on sirge joone iga nelja pärispunkti pärispunktilises projektsioonis lahutajate paaride projektsioonid lahutajad paarid ka siis, kui see projektsioon on saadud ebapunktide kaudu. Kui nimetame ühe (eba- või päris) kiire nelja ebapunkti hulgas lahutajateks paarideks neid ja ainult neid paare, mille projektsioonid on lahutajad paarid nende nelja ebapunkti mingis pärispunktilises projektsioonis, siis on nüüd tõesti sirge joone iga nelja punkti projektsioonis lahutajate paaride projektsioonid ka lahutajad paarid, olgu need punktid päris- või ebapunktid.

22. Projektiivsed koordinaadid tasapinnal. Kui sirge joone peal on konstrueeritud harmooniline rida ja see rida mõeldud [66] tihendatult iga arvu m kordselt nii, et m korda tihedama rea iga n -punkt on tähitud arvuga $\frac{n}{m}$, ja kui sellel sirgel joonel mõeldakse peale iga ratsionaalse arvuga $\frac{n}{m}$ tähitud punktide ($\frac{n}{m}$) veel ka iga irratsionaalse arvuga a tähitud punkte (a) nii, et siis ikka, kui on

$$\frac{n}{m} < a < \frac{n+1}{m},$$

on paar (0) (a) lahutatud paariga ($\frac{n}{m}$) ($\frac{n+1}{m}$), siis nimetatakse neid arve, millega selle sirge joone punktid on tähitud, üksikult nende punktide projektiivseiks koordinaadeks ja koos projektiivseks koordinaadistikuks selle joone peal ja selle harmoonilise rea nulli-, ühe- ja lõpmatusepunkte selle koordinaadistiku nulli-, ühe- ja lõpmatusepunktteks. Seda koordinaadistikku nimetatakse projektiivseks sellepärast, et selle koordinaadistiku projektsioon on ka niisugune, s.o.

kui sirge joone projektsioonis tähitakse selle joone iga punkti projektsioon selle (70) punkti koordinaadiga, siis on need punktide koordinaadid ka nende punktide projektsioonide projektiivseiks koordinaadeks — ratsionaalsed sellepärast, et harmoonilise rea projektsioon on [63] ka harmooniline rida ja irratsionaalsed sellepärast, et lahutajate paaride projektsioonid on [69] ka lahutajad paarid.

Kui tasapinnal võtame ühest punktist (O) kaks sirget joont (OU ja OV) mingis järjekorras, s.o. nimetades neist mingit ühte (OU) esimeseks ja teist (OV) teiseks, ja kummagi joone peal korraldame ühise nullipunktiga (O) projektiivse koordinaadistiku (OXU ja OYV), nimetades selle juures esimest joont (OU) esimeseks ja teist (OV) teiseks koordinaatideteljeks, siis on sellel kiirel, mis läheb teise telje lõpmatuse punktist (V) selle tasapinna mingisse punkti (P), [61] ühine punkt esimese teljega (mingi (x) = $VP \times OU$), nagu ka sellel kiirel, mis sellesamas tasapinna punkti tuleb esimese telje lõpmatusepunktist (U), ühine punkt teise teljega (mingi (y) = $UP \times OV$), ja nende kahe punkti koordinaate (x ja y) nende järjekorras, s.o. esimese telje punkti koordinaati esimeseks ja teise oma teiseks lugedes, nimetatakse selle tasapinna peal selle mingi punkti (P) projektiiv-

seiks koordinaadeks ja selle tasapinna kõigi punktide nii-suguseid koordinaate koos selle tasapinna projektiivseks koordinaadistikuks.

Punkti, mille koordinaadid nende järjekorras on x ja y , kirjutame: $(x; y)$. Punkti $(1; 1)$ nimetame tasapinna koordinaadistiku ühepunktiks (T), punkti $(0; 0)$ selle koordinaadistiku nullipunktiks (O) ja telgede lõpmatusepunkte (U ja V), mida kirjutame ka $(\infty; 0)$ ja $(0; \infty)$, tema lõpmatusepunktiks ja nende läbi minevat joont (UV) tema lõpmatusejooneks.

Tasapinnal ei saa olla kahte projektiivset koordinaadistikku, millel nulli-, ühe- ja lõpmatusepunktid oleksid ühised. Sest kummagi telje lõpmatusepunktist ühepunktis tuletav kiir määrab teise telje peal [61] ühe ja [5] ainsa punkti selle telje koordinaadistiku ühepunktiks ja sirge joone peal ei saa [57] olla kahte projektiivset koordinaadistikku, millel nulli-, ühe- ja lõpmatusepunkt oleksid ühised.

Projektiivse koordinaadistikuga tasapinnal on iga reaalse arvupaari jaoks punkt, millele see arvupaar on koordinaatide paariks, sest kummalgi teljel on tema projektiivse koordinaadistiku definitsiooni järgi iga arvu jaoks punkt, millele see arv on koordinaadiks.

Kui tasapinna projektiivses koordinaadistikus vahetatakse ühe telje nullipunkt lõpmatusepunktiga, siis saab selle tasapinna igale punktile uueks koordinaadiks selle telje pealt endise ümberpööratud väärtus ja teiseks uueks teise endise jagatis selle telje pealt saadud endisega.

Olgu tasapinnal projektiivne koordinaadistik nullipunktiga O , ühepunktiga T ja lõpmatusepunktiga U ja V (joonis lk. 51), mille tähime ka $OTUV$ -ga. Tähime selles koordinaadistikus iga punkti esimese koordinaadi, s. o. telje OU pealt saadud koordinaadi, x -ga ja teise y -ga ja nimetame sellepärast seda koordinaadistikku xy -koordinaadistikuks, tema esimest telge x -teljeks ja teist y -teljeks. Kui seal vahetame nullipunkti O näiteks y -telje lõpmatusepunktiga V , nii et saame uue $x'y'$ -koordinaadistiku $VTUO$, siis on

$$y' = \frac{1}{y} \quad [67]$$

ja

$$x' = \frac{x}{y}$$

sellepärast, et 1) uue esimese telje VU (x' -telje) koordinaadistiku saame [70 ja 57] projektides x -telje koordinaadistiku läbi V joone TU peale ja sealt läbi O x' -telje (VU) peale ja et 2) siis, kui projektide x -telje koordinaadistiku läbi V joone $(x; y)U$ peale (kus $(x; y)$ on xy -koordinaadistiku konstruksiooni järgi x -punkt ja $(x; y)U \times OT$ y -punkt) ja sealt läbi O x' -telje peale, läheb y' -telje lõpmatusepunktist (O) punktisse $(x; y)$ minev kiir $O(x; y)$ [66] tõesti x' -telje $\frac{x}{y}$ -punkti.

Kui selle tasapinna peal, kus juba on projektiivne koordinaadistik, korraldatakse uus projektiivne koordinaadistik, siis on iga punkti uued koordinaadid ühed ja needsamad ühise nimetajaga murdlineaarsed avaldised selle punkti vanus koordinaades. Sest kui peale vana xy -koordinaadistiku ja peale mingi uue $x'y'$ -koordinaadistiku

1) mõtleme seda $\xi_1\eta_1$ -koordinaadistikku, mille saame vanast, võttes seal nullipunktiks $x'y'$ -koordinaadistiku esimese lõpmatusepunkti mingi ($a; b$) ja ühepunktiks punkti ($a+1; b+1$), nii et [65]

$$\xi_1 = x - a \quad \text{ja} \quad \eta_1 = y - b,$$

2) mõtleme seda $\xi_2\eta_2$ -koordinaadistikku, mille saame eelmisest, vahetades seal nullipunkti esimese lõpmatusepunktiga, nii et tal esimeseks lõpmatusepunktiks on juba uue koordinaadistiku oma ja [71]

$$\xi_2 = \frac{1}{\xi_1} \quad \text{ja} \quad \eta_2 = \frac{\eta_1}{\xi_1},$$

3) mõtleme seda $\xi_3\eta_3$ -koordinaadistikku, mille saame eelmisest, võttes seal nullipunktiks $x'y'$ -koordinaadistiku teise lõpmatusepunkti mingi ($c; d$) ja ühepunktiks punkti ($c+1; d+1$), nii et [65]

$$\xi_3 = \xi_2 - c \quad \text{ja} \quad \eta_3 = \eta_2 - d,$$

4) mõtleme seda $\xi_4\eta_4$ -koordinaadistikku, mille saame eelmisest, vahetades seal nullipunkti teise lõpmatusepunktiga, nii et tal lõpmatusepunktiks on juba uue koordinaadistiku omad ja [71]

$$\xi_4 = \frac{\xi_3}{\eta_3} \quad \text{ja} \quad \eta_4 = \frac{1}{\eta_3},$$

5) mõtleme seda $\xi_5\eta_5$ -koordinaadistikku, mille saame eelmisest, võttes seal nullipunktiks $x'y'$ -koordinaadistiku nullipunkti mingi (e ; f) ja ühepunktiks punkti ($e+1$; $f+1$), nii et [65]

$$\xi_5 = \xi_4 - e \quad \text{ja} \quad \eta_5 = \eta_4 - f;$$

siis jääb vaid võtta viimases koordinaadistikus ühepunktiks $x'y'$ -koordinaadistiku oma mingi (g ; h) ja $x'y'$ -koordinaadistik ongi [72] käes ja seal [64]

$$\begin{aligned} x' &= \frac{\xi_4 - e}{g} = \frac{\xi_3 - e\eta_3}{g\eta_3} = \frac{\xi_2 - e\eta_2 - c + ed}{g(\eta_2 - d)} = \frac{1 - e\eta_1 + (ed - c)\xi_1}{g(\eta_1 - d\xi_1)} = \\ &= \frac{1 + eb - (ed - c)a + (ed - c)x - ey}{g(da - b - dx + y)} \end{aligned}$$

ja

$$\begin{aligned} y' &= \frac{\eta_4 - f}{h} = \frac{1 - f\eta_3}{h\eta_3} = \frac{1 - f\eta_2 + fd}{h(\eta_2 - d)} = \frac{\xi_1 - f\eta_1 + fd\xi_1}{h(\eta_1 - d\xi_1)} = \\ &= \frac{fb - (1 + fd)a + (1 + fd)x - fy}{h(da - b - dx + y)} \end{aligned}$$

ehk siis, kui x' -i avaldises viime jagaja g lugejasse ning y' -i omas jagaja h ja kirjutame esimeses lugejas vabaliikme, esimese koordinaadi kordaja ja teise koordinaadi kordaja järgemööda a_{10} , a_{11} ja a_{12} ning teises lugejas a_{20} , a_{21} ja a_{22} ja nimetajas a_{00} , a_{01} ja a_{02} ,

$$x' = \frac{a_{10} + a_{11}x + a_{12}y}{a_{00} + a_{01}x + a_{02}y}$$

ja

$$y' = \frac{a_{20} + a_{21}x + a_{22}y}{a_{00} + a_{01}x + a_{02}y},$$

mis on tõesti ühise nimetajaga murdlineaarsed avaldised vanus koordinaades x ja y .

Koordinaadest uute koordinaatide tuletamist nimetatakse koordinaatide teisenduseks ja uute koordinaatide avaldisi vanus või vanade avaldisi uutes teisendusvalemiteks. Projektiivsete koordinaatide teisendus tasapinnal võib toimuda, nagu nägime, kolme algteisenduse kaudu, s. o. 1) mingi punkti (a ; b) uueks nullipunktiks ja punkti ($a+1$; $b+1$) uueks ühepunktiks võtmise, 2) nullipunkti lõpmatusepunktiga vahetamise ja 3) uue ühepunkti võtmise kaudu. Meil tuli neid algteisendusi teha 6. Neid oleks tulnud teha siis vahest vähem, kui vanal koordinaadistikul oleks olnud ühiseid lõpmatusepunkte uuega, ja siis rohkem, kui need lõpmatusepunktid erineksid küll vanust,

aga oleksid vana lõpmatusejoone peal, kus neil ei oleks xy -koordinaate sellepärast, et x -telje lõpmatusepunktis ei ole harmoonilise rea konstruksiooni järgi x -koordinaati ning y -telje lõpmatusepunktis y -koordinaati. Siis oleks tulnud kõige pealt ühe telje nullipunkt vahetada lõpmatusepunktiga.

23. Projektiivsed koordinaadid n -mõõtelises ruumis. Kui n -mõõtelises ruumis võtame ühest punktist n sirget joont mitte ühel ülitasapinnal ja mingis järjekorras ja iga joone peal korraldame ühise nullipunktiga projektiivse koordinaadistiku, nimetades selle juures neid jooni nende järjekorras esimeseks, teiseks, ..., n -ndaks koordinaatideteljeks, siis on sellel ülitasapinnal, mille määrab selle ruumi mingi punkt koos kõigi telgede lõpmatusepunktiga peale ühe mingi i -nda telje oma, [61] ühine punkt i -nda teljega mingi (x_i) ja kõigi telgede peal sel viisil selle ruumi mingi punktiga määratud punktide koordinaate $x_1, x_2, \dots, x_n$ nende järjekorras nimetatakse selles n -mõõtelises ruumis selle mingi punkti projektiivseiks koordinaadeks ja selle ruumi kõigi punktide niisuguseid koordinaate koos selle n -mõõtelise ruumi projektiivseks koordinaadistikuks.

Punkti, mille koordinaadid nende järjekorras on $x_1, x_2, \dots, x_n$, kirjutame $(x_1; x_2; \dots; x_n)$ või ka lühidalt (x_i) . Punkte $(0; 0; \dots; 0)$ ja $(1; 1; \dots; 1)$ nimetame koordinaadistiku nullipunktiks ja ühepunktiks ja telgede lõpmatusepunkte koordinaadistiku lõpmatusepunktiks ja nendega määratud ruumi koordinaadistiku lõpmatuseruumiks.

n -mõõtelises ruumis ei saa olla kahte projektiivset koordinaadistikku, millel
(72) nulli-, ühe- ja lõpmatusepunktid oleksid ühised,

sest iga telje peal määrab teiste telgede lõpmatusepunktist koordinaadistiku ühepunkti tulev ülitasapind [61] ühe ja [50] ainsa punkti selle telje koordinaadistiku ühepunktiks ja sirge joone peal ei saa [57] olla kahte projektiivset koordinaadistikku, millel nulli-, ühe- ja lõpmatusepunktid oleksid ühised.

Projektiivse koordinaadistikuga n -
(73) mõõtelises ruumis on iga n reaalse arvu jaoks punkt, millele need arvud on koordinaadeks,

sest igal teljel on tema projektiivse koordinaadistiku definitsiooni järgi iga reaalse arvu jaoks punkt, millele see arv on koordinaadiks. Sellest järgnebki (lk.28), et siis, kui sirge joone punktide arv oleks mingi m , oleks n -mõõtelise ruumi oma m^n .

Kui selles n -mõõtelises ruumis, kus juba on projektiivne koordinaadistik, korraldatakse uus projektiivne koordinaadistik, siis on iga punkti uued koordinaadid ühed ja needsamad ühise nimetajaga murdlineaarsed avaldised selle punkti vanus koordinaades. Sest kui peale vana x_i -koordinaadistiku ja peale mingi uue x'_i -koordinaadistiku mõtleme neid $\xi_i^{(k)}$ -koordinaadistikke, kus

1)

$$\xi_i^{(0)} = x_i,$$

2) $\xi_i^{(l)}$ -koordinaadistiku saame $\xi_i^{(l-1)}$ -koordinaadistikust, võttes seal siis, kui x'_i -koordinaadistiku lõpmatusepunktid ei ole kõik $\xi_i^{(l-1)}$ -koordinaadistiku lõpmatusruumis, nullpunktiks ühe neist lõpmatusepunkttest mingi (a_i) ja ühepunktiks $(a_i + 1)$, nii et [65]

$$\xi_i^{(l)} = \xi_i^{(l-1)} - a_i,$$

3) $\xi_i^{(l+1)}$ -koordinaadistiku saame $\xi_i^{(l)}$ -koordinaadistikust, vahetades seal nullpunkti mingi j -nda lõpmatusepunktiga, mis ei ole veel x'_i -koordinaadistiku oma, nii et siis, kui nullpunktiks oli x'_i -koordinaadistiku lõpmatusepunkt, x'_i -koordinaadistikule mittekuuluvate lõpmatusepunktide hulk väheneb ja [71] igatahes

$$\xi_j^{(l+1)} = \frac{1}{\xi_j^{(l)}}$$

ja siis, kui $i \neq j$,

$$\xi_i^{(l+1)} = \frac{\xi_i^{(l)}}{\xi_j^{(l)}},$$

4) sel viisil viimaks mingist $\xi_i^{(m)}$ -koordinaadistikust, millel juba kõik lõpmatusepunktid on ühised x'_i -koordinaadistikuga, saame $\xi_i^{(m+1)}$ -koordinaadistiku, võttes nullpunktiks x'_i -koordinaadistiku oma mingi (b_i) , nii et [65]

$$\xi_i^{(m+1)} = \xi_i^{(m)} - b_i;$$

sest samuti kui x'_i oleme avaldanud x_i najal, saame x_i avaldada x'_i najal, ja täislineaarse nimetajaga mure saab null olla vaid siis, kui tema lugeja on null.

Nii on projektiivsete koordinaatide teisendusvalemis siis, kui seal uued koordinaadid on avaldatud vanade najal, (75) lugejad uute koordinaatide ülitaspindade võrrandite pahemaiks pooliks (kui paremal on null). Ühine nimetaja neis valemis on uue lõpmatusruumi võrrandi pahemaks pooleks.

See selgub siis, kui mingil x'_m -teljel vahetame nullipunkti lõpmatuspunktiga. Sest siis saab endine lõpmatusruum selle telje uue lõpmatuspunkti vastasseisvaks koordinaatide ülitaspinnaks, mille kõigil punktel on selle telje uus koordinaat null, s. o. [67] endise koordinaadi ümberpööratud väärtus ja seega tõesti endise koordinaadi nimetaja null.

Kui n -mõõtelises ruumis on mingi projektiivne koordinaadistik, siis on iga lineaarne võrrand, milles tundmatuiks (76) on selle ruumi punktide koordinaadid, s. o. iga võrrand

$$a_0 + a_1x_1 + a_2x_2 + \dots + a_nx_n = 0,$$

selle ruumi ühe ja ainsa ülitaspinna võrrandiks.

Sest

1) seda võrrandit rahuldavad iga m -nda telje $\left(-\frac{a_0}{a_m}\right)$ -punkti koordinaadid (mille hulgas on $x_m = -\frac{a_0}{a_m}$ ja teised kõik nullid),

2) need n teljepunkti (mis ei saa olla ühes $(n-2)$ -mõõtelises ruumis sellepärast, et vastasel korral oleksid kõik n telje oletuse vastu ühes $(n-1)$ -mõõtelises ruumis) määravad [45] ühe ja ainsa neist läbi mineva ülitaspinna (mille võrrandi saame näiteks neid punkte uue koordinaatide simpleksi nukeks võttes) ja

3) kaks lineaarset võrrandit n tundmatuga on samased, kui kumbagi rahuldavad n niisugust arvude n -ikut, mille determinant ei ole null, nagu siin

Iga n ülitasapinda, mille võrrandite pahemad pooled on avaldised (77) peale esimese ja millel on üks ja ainus ühine punkt ja nimelt koordinaatidega (nii et ta ei ole lõpmatusruumis), s. o. kui selle n võrrandi lahendustes saab ühiseks nimetajaks mitte null:

$$(80) \quad \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \neq 0$$

määravad [61] koos lõpmatusruumiga simpleksi. Kui selle simpleksi võtame koordinaatidesimpleksiks, siis on nende ülitasapindade võrrandite pahemad pooled [75] teisendusvalemite (79) paremaiks pooliks.

Teisendusvalemid (79) on valemeist (74) see erijuhtum, kus on $a_{00} = 1$ ja $a_{01} = a_{02} = \cdots = a_{0n} = 0$. Sellel erijuhtumil taandub ka tingimus (78) tingimuseks (80). Sellest järeneb, et

n -mõõtelise ruumi projektiivse koordinaadistiku teisendusvalemite ühiseks (81) nimetajaks ja lugejaiks võivad olla iga $n+1$ lineaarset avaldist (77), mis täidavad tingimust (78).

Kui teisendusvalemis (79) vanade koordinaatide kordajad a_{ik} täidavad tingimusi

$$(82) \quad \begin{vmatrix} a_{i1}^2 + a_{i2}^2 + \cdots + a_{in}^2 = 1 \\ a_{i1}a_{k1} + a_{i2}a_{k2} + \cdots + a_{in}a_{kn} = 0, \text{ kui } i \neq k \end{vmatrix}$$

siis nimetatakse neid valemeid ja koordinaatide teisinemist ortogonaalseiks. Ortogonaalsed teisendusvalemid on [81] võimalikud, sest determinantide korrutamisest saame [82]

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}^2 = \begin{vmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{vmatrix} = 1,$$

nii et tingimus (80) on tõesti täidetud.

Kui ortogonaalse teisenemise korral on

$$(83) \quad \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_n & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = 1,$$

siis nimetatakse seda teisenemist ka pärisortogonaalseks. Pärisortogonaalse teisenemise korral on determinandis (83) iga elemendi a_{lm} vastav alamdeterminant A_{lm} samane selle elemendiga. Sest siis on determinandi arvutamise järgi

$$a_{l1}A_{l1} + a_{l2}A_{l2} + \cdots + a_{ln}A_{ln} = 1$$

ja

$$a_{k1}A_{l1} + a_{k2}A_{l2} + \cdots + a_{kn}A_{ln} = 0, \text{ kui } k \neq l,$$

ja sellest n võrrandist n tundmatuga A_{li} saame tõesti [82]

$$(84) \quad A_{lm} = a_{lm}.$$

Pärisortogonaalse teisenemise korral on ka

$$(85) \quad \begin{cases} a_{1i}^2 + a_{2i}^2 + \cdots + a_{ni}^2 = 1 \\ a_{1i}a_{1k} + a_{2i}a_{2k} + \cdots + a_{ni}a_{nk} = 0, \text{ kui } i \neq k \end{cases}$$

nagu see järgneb [84] determinandi (83) arendusest tema veergude järgi. Seega on pärisortogonaalse teisenduse ümberpööre, s. o. vanade koordinaatide avaldumine uutes, ka pärisortogonaalne. Sest võrrandeid (79) x_i kohta lahendades saame [83 ja 84]

$$(86) \quad x_i = A_{0i} + a_{1i}x'_1 + a_{2i}x'_2 + \cdots + a_{ni}x'_n.$$

kus A_{0i} on konstandid ja seega need valemid [85] tõesti pärisortogonaalsed.

Pärisortogonaalsete teisenduste kor-
rutis (s. o. teisendus, millega x_i -dest saavad x''_i -d

(87) siis, kui x'_i -d saavad x_i -dest pärisortogonaalse teisenduse teel, nagu ka x''_i -d x'_i -dest) on ka pärisortogonaalne.

Sest olgu [79]

$x''_i = a'_{i0} + a'_{i1}x'_1 + \cdots + a'_{in}x'_n = a''_{i0} + a''_{i1}x_1 + \cdots + a''_{in}x_n$,
kus nii a_{ik} kui ka a'_{ik} täidavad tingimusi (82) ja (83), siis täidavad neid tõesti ka a''_{ik} , nagu see selgub siis, kui sinna paneme a_{ik} -de asemele a''_{ik} -te avaldised [79]:

$$a''_{ik} = a'_{i1}a_{1k} + a'_{i2}a_{2k} + \cdots + a'_{in}a_{nk}$$

ja arvutame nende tingimuste pahemad pooled.

Ortogonaalse teisenemise korral teiseneb [85 ja 82] kahe punkti mingi $(x_i) \equiv (x'_i)$ ja $(y_i) \equiv (y'_i)$ samanimeliste koordinaatide vahede ruutude summa nende punktide uute samanimeliste koordinaatide vahede ruutude summaks, s. o.

$$(88) \quad \begin{aligned} (y_1 - x_1)^2 + (y_2 - x_2)^2 + \dots + (y_n - x_n)^2 = \\ = (y'_1 - x'_1)^2 + (y'_2 - x'_2)^2 + \dots + (y'_n - x'_n)^2 \end{aligned}$$

24. Mõõdugeomeetria alused. Kui ruumis on märke, millest iga üksik on ühes ainsas punktis, siis nimetame neid märke punktikujulisteks ja nende punktide märgeks, milles nad on. Punkti koordinaate nimetame ka selle punkti märgi omiks. Kui mõnel punktide kogul on punktikujuliste märkide kogu ja see märkide kogu võib saada teise punktide kogu märkide koguks, siis nimetatatakse seda märkide kogu füüsiliseks kehaks, tema üksikuid märke selle keha punktiks ja tema saamist teise punktide kogu märkide koguks selle keha liikumiseks.

Kui n -mõõtelises ruumis on 1) niisugune projektiivne koordinaadistik ja 2) niisuguseid kehasid, mis saavad nii ja ainult nii liikuda, et neil esiteks sirged jooned jäävad sirgeiks ja teiseks mingil $(n+2)$ -l punktil, millest ükski $n+1$ ei ole ühel ülitasapinnal, (ja seega [56, 72 ja 74] selle keha kõigil punktel) nende koordinaadid selles koordinaadistikus teisenevad päris-ortogonaalselt (s. o. iga punkti uued koordinaadid avalduvad eelmistes ühtede ja nendesamade pärisortogonaalsete valemite kaudu), siis nimetatatakse 1) seda koordinaadistikku Cartesiuse ristkoordinaadistikuks, 2) selle koordinaadistiku lõpmatuseruumi absoluutseks, 3) neid kehi kindlateks ja 4) iga kahte kujundit, millel kõikide punktide märgeks saavad olla sellesama kindla keha needsamad punktid, ühtivateks ehk kongruentseteks.

Ühtivaid sirge joone tükke nimetatakse ühepikkusteks ehk üht teise pikkuseks. Kui üks sirge joone tükk on ühtiv teise joonetüki osaga, siis nimetatakse esimest joonetükki teisest lühemaks ja teist temast pikemaks. Kui üks joonetükk AB on koos mingist arvust l osadest, millest igaüks on teise joonetüki mingi CD pikkune, siis öeldakse, et AB on CD -st l kord pikem ehk CD l -kordne ja et CD on AB -st l kord lühem ehk AB l -ndik. Sellega on defiinitud joonetüki

pikkus. Kui joonetüki pikkuse kirjutame selle joonetüki üle-kriipsutatud nimega, siis on siin

$$\overline{AB} = l\overline{CD} \text{ ja } CD = \frac{1}{l}\overline{AB}.$$

Sirge joonetüki pikkust nimetatakse ka selle joonetüki otsade vaheliseks kauguseks või teise otsa kauguseks teisest.

Cartesiuse ristkoordinaadistikus on telje ühepikkusil tükel otsade koordinaatide vahede absoluutväärtused samased ja kui telje kahel tükil on otsade koordinaatide vahedel absoluutväärtused samased, siis on need tükid ühepikkused. Sest mingi m -telje kõigil punktel on peale m -nda kõik teised koordinaadid nullid, nii et selle telje mingi kahe tüki $(x_i)(y_i)$ ja $(x'_i)(y'_i)$ kongruentsuse korral kindla keha definitsiooni järgi maksev valem (88) tõesti taandub valemiks

$$(y_m - x_m)^2 = (y'_m - x'_m)^2 \text{ ehk } |y_m - x_m| = |y'_m - x'_m|,$$

ja kui m -telje tükel $(x_i)(y_i)$ ja $(x'_i)(y'_i)$ on otsade koordinaatide vahedel absoluutväärtused samased, siis on need tükid ühepikkused sellepärast, et kindlal kehal, millel on olnud mingid punktid A ja B punktides (x_i) ja (y_i) ja siis saanud punkt A punktisse (x'_i) ja punkt B punktist (x'_i) punkti (y'_i) poole, peab selle tõestuse esimese osa põhjal [57] B olema punktis (y'_i) .

Kui sirge joon AB on lahutatud mingi joonetüki CD mingi m -ndiku pikkusteks osadeks ja kui on leitud niisuguste osade arv punktide A ja B vahel mingi l , siis öeldakse, et joonetükk AB on mõõdetud mõõduga CD ja on saadud siis ratsionaalne mõõtearv $\frac{l}{m}$, kui on

$$\overline{AB} = \frac{l}{m}\overline{CD},$$

siis aga irratsionaalne mõõtearv a , kui iga m korral on

$$\frac{l}{m}\overline{CD} < \overline{AB} < \frac{l+1}{m}\overline{CD} \text{ ja } \frac{l}{m} < a < \frac{l+1}{m}.$$

Seega on Cartesiuse ristkoordinaadistikus m -nda telje iga punkti koordinaat siis selle punkti kauguse mõõtearv nullipunktist, kui mõõduks on selle telje ühepunkti kaugus nullipunktist ja kui nullipunktist ühepunkti pool oleva punkti kauguse loeme positiivseks ja teisel pool oleva punkti oma negatiivseks.

Kui Cartesiuse ristkoordinaadistikus on kauguse mõõduks võetud mingi m -nda telje ühepunkti

kaugus nullipunktist, siis on kahe punkti (x_i) ja (y_i) vahelise kauguse mõõtearvu ruut nende punktide samanimeliste koordinaatide vahede ruutude summa. Sest kui kindlal kehal on olnud mingid punktid A ja B punktides (x_i) ja (y_i) ja siis saanud punkt A nullipunktiks ja punkt B m -nda telje mingiks r -punktiks, siis on [88] tõesti

$$(89) \quad (y_1 - x_1)^2 + (y_2 - x_2)^2 + \cdots + (y_n - x_n)^2 = r^2.$$

Sellest järgneb, et Cartesiusse ristkoordinaadistikus on kõigil telil ühepunkti ja nullipunkti vaheline kaugus samane — selle koordinaadistiku kaugusemõõt. Kui mingi kaugus on mõõdetud koordinaadistiku kaugusemõõduga, siis nimetame mõõtearvu lühidalt kaugusearvuks või veelgi lühemalt kauguseks.

Nende punktide kogu, mis n -mõõtelises ruumis on kõik mingist ühest punktist — keskpunktist — ühekaugusel, nimetatakse $(n-1)$ -mõõteliseks sfääriks, ühemõõtelist sfääri ringjooneks ja kahemõõtelist kerapinnaks. Öeldakse, et sfäär läheb kõigist oma punktist läbi ja et kõik tema punktid on tema peal. Kui $(n-1)$ -mõõtelise sfääri keskpunkt on mingi (a_i) ja tema punktide kaugus sellest keskpunktist mingi r , siis rahuldavad võrrandit

$$(90) \quad (x_1 - a_1)^2 + (x_2 - a_2)^2 + \cdots + (x_n - a_n)^2 = r^2$$

[89] selle sfääri iga punkti koordinaadid ja ainult need. Sellepärast nimetatakse seda võrrandit sfääri võrrandiks.

Kui mingist punktist A lähevad mingid kaks sirget joont AB ja AC , siis nimetatakse tasapinna ABC seda osa, mille punktid on joonest AB punkti C pool ja joonest AC punkti B pool, nurgaks BAC või CAB ja kirjutatakse $\widehat{BAC}$ või $\widehat{CAB}$. Seda nurka nimetatakse vahel ka kumeraks nurgaks ja siis tasapinna ülejäänud osa nõgusaks nurgaks. Kui mingi punkt D on punktist A punkti C kohta teisel pool, siis nimetatakse nurka BAD nurga BAC kõrvunurgaks. Sellest järgneb, et ka $\widehat{BAC}$ on $\widehat{BAD}$ -le kõrvunurgaks. Kui nurk BAC on kongruentne oma kõrvunurgaga, siis nimetatakse joont AB joonele AC ristjooneks. Kui joon AB on ristjooneks joonele AC ja selle juures lihtsuse jaoks $\overline{AB} = \overline{AC}$, s. o. kui kindlal kehal

on üks punkt A -s, teine B -s, kolmas C -s ja neljas joone AC peal A -st C kohta teisel pool C kaugusel mingis D -s ja kui see kindel keha saab nii liikuda, et tema esimene punkt jääb A -sse, teine läheb B -st D -sse ja kolmas C -st B -sse, siis on selle liikumisega selle keha neljas punkt [5 ja 69] läinud D -st joone AB peale A -st B kohta teisele poole mingisse punkti E , nii et nurk DAB on ka ühtiv oma kõrvunurgaga DAE ja seega ka joon AC AB -le ristjooneks. Selle kohta öeldakse, et AC ja BA on teine teisega risti.

Cartesiuse ristkoordinaadistikus on iga telg risti iga teisega. Sest kui tasapinnal on Cartesiuse ristkoordinaadistik ja tasapinnalisel kindlal kehal mingid punktid A , B ja C selle koordinaadistiku nullipunktis, esimese telje ühepunktis ja teise telje ühepunktis ja kui punkt A on jäänud nullipunkti, aga punkt B läinud teise telje peale nullipunktist ühepunkti poole, siis on ta läinud nimelt ühepunkti (mis on ju nullipunktist kaugusemõõdu kaugusel) ja punkt C on siis tõesti läinud esimese telje peale nullipunktist ühepunkti kohta teisele poole sellepärast, et teise teisendusvalemi

$$y' = x$$

korral saab [82 ja 83] esimene olla vaid

$$x' = -y,$$

a n -mõõtelises ruumis on iga kaks telge ühel tasapinnal.

Cartesiuse ristkoordinaadistikus on mingist punktist kahe telje lõpmatusepunktesse minevad kiired teine teisega risti, sest selle punkti võime [87] võtta uueks nullpunktiks, jättes lõpmatusepunktid endisteks ja siis saavad need kaks kiirt teliks.

Kui mingist punktist A läheb ristjoon mingile sirgele joonele a , siis nimetatakse selle ristjoone tüki pikkust punktist A kuni lõikepunktini joonega a punkti A kauguseks joonest a .

Tasapinnal on sirgel joonel, mis läheb teise sirge joone absoluutmesse lõpmatusepunkti, kõik punktid samakaugusel teisest, sest kui teise neist joonist võtame [87] Cartesiuse ristkoordinaadistiku esimeseks teljeks, siis on teise joone kõigil punktel teine koordinaat (tasapinna projektiivse koordinaadistiku definitsiooni järgi) konstantne mingi b ,

nagu tema ristjoonel (Cartesiuse ristkoordinaadistikus) esimene koordinaat, nii et mingist punktist $(x; b)$ läheb ristjoon telje punktisse $(x; 0)$ ja selle kahe punkti vahelise kauguse ruut

$$(x - x)^2 + (b - 0)^2 = b^2$$

on tõesti konstantne ja seega see kaugus ise ka.

Kui tasapinnal on sirge joon, mille punktid on kõik sama-kaugusel teisest sirgest joonest, siis nimetatakse teda teisega paralleelseks.

Parandused.

Lk.	2	rida	8	alt	ka	teine	peab olema	teine	ka
"	4	"	8	"	selle	"	"	sellesama	
"	7	"	11	"	[1]	"	"	[2]	
"	11	"	7	"	selle	"	"	sellesama	
"	15	"	16	"	[11]	"	"	[12]	
"	15	lause	(18)	peab olema:					

Tetraeedri ühest nukist vastastahu punkttesse või ühe serva punkttest vastasserva punkttesse minevate joonetükkide kõik punktid on ka selle tetraeedri igast nukist vastastahu punkttesse minevate kui ka iga serva punkttest vastasserva punkttesse minevate joonetükkide omad.

Definitsioonid.

(Numbrid näitavad lehekülgi.)

Absoluutne lõpmatuseruum	78	lõikuvad	7, 15
algteisendus	70	lõpmatuse-joon	68
Diagonaaljoon	54	„ -punkt	52, 67, 68, 71
Ebapunkt	57	„ -ruum	71, 73
ebaruum	57	läheb läbi	4, 11, 18, 80
eelmine	53	lühem	78
Harmooniline rida	53	Möödetud	79
„ salk	53, 54	mõõt	79
Joonetükk	6	mõõtearv	79
juuresolev	7	märgid, punktide	78
järgmine	53	„ punktikujulised	78
Kaugus	79, 81	määratud	51
keha, füüsiline	78	määravad	4, 11, 18, 28, 41
„ kindel	78	Negatiivne kaugus	79
kerapind	80	nukid	7, 15, 23, 36, 54
keskpunkt	80	nullipunkt	52, 67, 68, 71
kolmnurk	7	nurk, kumer	80
kongruentne	78	„ nõgus	80
koordinaadid,		Ortogonaalne teisendus	76
Cartesiuse rist-	78	otsad	6
projektiivsed	67, 68, 71	Paralleelne	82
koordinaadistiku nulli-, ühe- ja		peal	4, 11, 80
lõpmatusepunktid	67	pentatopp	23
koordinaadistiku projektsioon	67	piire	7
koordinaatide simpleks	73	pikem	78
„ teisendus	70	pikend	6
„ teljed	67, 71	pikkus	79
„ ülitasapind	73	pind	15
kujund	62	pool	5, 14, 22, 34, 50
kõrvunurgad	80	positiivne kaugus	79
küljed	7, 54	projektiivsed koordinaadid	67, 68, 71
Lahutaja paar	53, 65, 66	projektiivne	62
laiend	11, 17, 18, 27, 41	projektsioon	62
liikumine	78	punkt	1
lõik	6	„	52
lõikepind	24	pärisortogonaalne	77
lõikepunkt	7	pärispunkt	61

pärisruum	61	teisendus, koordinaatide	70
Ringjoon	80	" -valemid	70
risti	81	telg, koordinaatide	67, 71
ristjoon	80	tetraeeder	15
ruum	18, 27, 28, 41	täielik nelikülg	54
" n -mõõteline	41	Vahel	2
Sees	18	vastas	7, 15, 23, 36
sein	23, 36	võrrand, sfääri	80
serv	15, 23, 36	" ülitasapinna	73
sfäär	80	Ühendab	6
simpleks	36, 72	ühepunkt	52, 67, 68, 71
sirge joon	4	ülitasapind	48
sisemised punktid	16, 10, 15, 24, 36	x -telg	68
Tahk	15, 23	xy -koordinaadistik	68
tasapind	11	y -telg	68

Referat.

Die Grundlagen der Geometrie.

Nach dem Erscheinen so gründlicher Arbeiten, wie
M. Pasch, Vorlesungen über neuere Geometrie (1882),
G. Peano, I Principii di Geometria (1889),
D. Hilbert, Grundlagen der Geometrie (1899),
O. Veblen, A System of Axioms for Geometry (Transact. of
the Amer. Math. Soc. V, 1904) und
F. Schur, Grundlagen der Geometrie (1909),
ist für Untersuchungen über die Grundlagen der Geometrie
wohl nur übrig geblieben etwa:

- 1) die Anzahl der Grundbegriffe und Grundsätze zu reduzieren,
- 2) den Inhalt der Grundbegriffe und Grundsätze der unmittelbaren Anschauung näher zu bringen und
- 3) den Beweisgang der geometrischen Sätze zu kürzen.

In der vorliegenden Arbeit ist hauptsächlich der ersten und zweiten dieser Aufgaben nachgegangen worden.

Im ersten Teil der Arbeit (§§ 1—17) werden als Anschauungsprotokolle die folgenden elf Grundsätze über die Grundbegriffe „Punkt“ und „zwischen“ angenommen:

I. Gibt es einen Punkt, so gibt es auch einen anderen Punkt.

II. Gibt es zwei Punkte, so gibt es auch einen dritten Punkt so, dass der zweite zwischen dem dritten und dem ersten liegt.

III. Gibt es drei Punkte so, dass der zweite zwischen dem dritten und dem ersten liegt, so liegt der zweite auch zwischen dem ersten und dem dritten.

IV. Gibt es drei Punkte so, dass der zweite zwischen dem ersten und dem dritten liegt, so liegt nicht der dritte zwischen dem ersten und dem zweiten.

V. Gibt es vier Punkte so, dass der zweite zwischen dem ersten und dem dritten und der dritte zwischen dem ersten und dem vierten liegt, so liegt der dritte auch zwischen dem zweiten und dem vierten.

VI. Gibt es vier Punkte so, dass der zweite zwischen dem ersten und dem dritten und der dritte zwischen dem zweiten und dem vierten liegt, so liegt der dritte auch zwischen dem ersten und dem vierten.

VII. Gibt es vier Punkte so, dass der zweite zwischen dem ersten und dem dritten wie auch zwischen dem ersten und dem vierten liegt, so liegt entweder der dritte zwischen dem zweiten und dem vierten oder der vierte zwischen dem zweiten und dem dritten.

VIII. Gibt es vier Punkte so, dass der zweite und auch der dritte zwischen dem ersten und dem vierten liegen, so liegt entweder der zweite zwischen dem ersten und dem dritten oder der dritte zwischen dem ersten und dem zweiten.

IX. Gibt es zwei Punkte, so gibt es noch einen dritten Punkt so, dass von den drei Punkten keiner zwischen den beiden anderen liegt.

X. Trifft eine Gerade eine Verlängerung einer Seite eines Dreiecks und die dieser Verlängerung anliegende zweite Seite desselben, so trifft sie auch die dritte Seite.

XI. Gibt es eine Ebene, so gibt es auch einen Punkt, der nicht auf dieser Ebene liegt.

Aus diesen Grundsätzen und aus den Definitionen der Geraden, der Ebene und der mehrdimensionalen Räume werden ausführlich bewiesen der „Bestimmungssatz“:

„irgend $n + 1$ Punkte eines n -dimensionalen Raumes, die nicht in einem $(n - 1)$ -dimensionalen Raume liegen, bestimmen denselben n -dimensionalen Raum“

und der „Trennungssatz“:

„ein n -dimensionaler Raum wird durch jede seine Hyperebene so in zwei Teile getrennt, dass die Strecke von irgendeinem Punkte des einen Teiles nach irgendeinem Punkte des anderen stets einen gemeinsamen Punkt mit der Hyperebene hat, diejenige von irgendeinem Punkte des einen Teiles nach irgendeinem anderen Punkte desselben aber keinen“.

Im zweiten Teil (§§ 18—24) werden aus den Möbius'schen Netzkonstruktionen und aus dem Begriff der irrationalen Zahlen die projektiven Koordinaten im n -dimensionalen Raum und ihre Transformationsformeln hergeleitet und dabei auch die Gleichung der Hyperebene gewonnen. Nachdem nachgewiesen worden ist, dass die Transformationsformeln auch jede eigentlich orthogonale Substitution enthalten, werden folgende Definitionen als Grundlage für eine Massgeometrie aufgestellt:

Ein Zeichen im Raume heisst punktförmig, wenn es nur einen einzigen Punkt einnimmt, und wird das Zeichen dieses Punktes genannt.

Wenn eine Menge von Punkten eine Menge von punktförmigen Zeichen besitzt und diese letztere zur Zeichenmenge einer anderen Punktmenge werden kann, so heisst diese Zeichenmenge ein physischer Körper, jedes einzelne Zeichen ein Punkt dieses Körpers, der betreffende Wechsel aber Bewegung.

Wenn es 1) ein solches projektives Koordinatensystem und 2) solche physische Körper gibt, die so und nur so bewegt werden können, dass die Koordinaten der Körperpunkte sich in diesem Koordinatensystem eigentlich-orthogonal transformieren, so heissen 1) diese Körper starre Körper, 2) dieses Koordinatensystem ein orthogonales cartesisches, 3) der Unendlichkeitsraum dieses Systems der absolute Unendlichkeitsraum und 4) zwei Figuren kongruent, falls alle Punkte der einen dieselben Punkte desselben starren Körpers zu Zeichen haben können wie die Punkte der anderen.

Nachdem aus der gewöhnlichen Definition des Abstandes die Gleichung der $(n-1)$ -dimensionalen Sphäre erhalten und nach den Definitionen des Winkels und der Nebenwinkel die senkrechten Geraden und der Abstand eines Punktes von einer Geraden definiert worden sind, wird nachgewiesen, dass im orthogonalem cartesischen Koordinatensystem die Einheitspunkte aller Achsen den gleichen Abstand vom Nullpunkt aufweisen und jede Achse zu jeder anderen senkrecht steht, und dass endlich alle Punkte einer Geraden den gleichen Abstand von einer anderen Geraden aufweisen, die mit der ersteren einen gemeinsamen absoluten Unendlichkeitspunkt hat.