

# ÜBER DIE ANZAHL DER LÖSUNGEN DER VIERFARBENAUFGABE

VON

J. NUUT

---

TARTU (DORPAT) 1929



## 1. Fragestellung.

Die Tatsache, dass 4 Farben zur Bezeichnung der Länder einer Landkarte genügen<sup>1)</sup>, gibt Anlass zu folgender Fragestellung<sup>2)</sup>:

Auf wieviele Arten lassen sich Gebiete einer Kugel­fläche mit Hilfe von 4 Zeichen benennen, wenn jedem Gebiet ein Zeichen, benachbarten Gebieten dabei stets verschiedene Zeichen zukommen sollen?

Als benachbart sind hierbei solche Gebiete anzusehen, die ein gemeinsames stetiges Grenzkurvenstück besitzen. Die geforderte Bezeichnung möge Vierfarbenbezeichnung heißen.

Dieses Problem soll durch ergänzende, die Art der Kugelt­eilung betreffende Forderungen eingeschränkt werden. Die Anzahl der Gebiete, Kanten und Ecken sei endlich, jedes der Gebiete, als Punktmenge für sich betrachtet, zusammenhängend. Es soll ferner eine der ursprünglichen Teilung dual zugeordnete Teilung existieren, von der Beschaffenheit, dass die Ecken der dualen Teilung den Gebieten der ursprünglichen eineindeutig entsprechen, dabei zwei Ecken der dualen Teilung höchstens eine Verbindungskante aufweisen, nämlich dann und nur dann, wenn die zugehörigen Gebiete der ursprünglichen Teilung benachbart sind. Diese duale Teilung bietet sozusagen eine graphische Darstellung der Gebietskollisionen in der ursprünglichen<sup>3)</sup>. Dass wirklich Kugelt­eilungen existieren, welche diese geforderte graphische Darstel-

---

1) Das Vierfarbenproblem oder Kartenfarbenproblem ist unter den Mathematikern zuerst von Francis Guthrie und de Morgan berührt worden; vgl. Federic Guthrie, Proc. Edinb. 10 (1880), p. 727; M. Dehn — P. Heegaard, Enz. d. math. Wiss. III AB 3, p. 177—178 (daselbst Literaturangaben); J. Sarv, Acta et Comm. Univ. Tartuensis (Dorpat.) A XIII<sub>1</sub> (1927). Ein geschichtlicher Überblick bei A. Errera, Period. di Matem. IV—VII — 1 (1927), p. 20—41.

2) Behandelt von A. C. Dixon, Messenger of Math. 32 (1902), p. 81—83, später in allgemeinerer Gestalt von G. D. Birkhoff, Annals of Math. 2 — XIV (1912), p. 42—46. Diese Arbeiten standen mir nicht zur Verfügung.

3) Die duale Teilung findet Verwendung in den Untersuchungen von P. G. Tait, Edinb. Proc. 10 (1880), p. 501 und p. 729, Edinb. Trans. 29 (1880), p. 657.

lung gestatten, ersieht man etwa am Beispiel der Tetraederteilung: wird in jedem der vier Tetraedergebiete je ein Punkt als Repräsentant gewählt, jedes Paar dieser Repräsentanten quer über die gemeinsame Grenze direkt verbunden, so erhält man eine zur ursprünglichen duale Teilung von der gewünschten Art.

Der Vierfarbenbezeichnung der Gebiete entspricht eindeutig eine Vierfarbenbezeichnung der Ecken in der dualen Teilung. Das oben formulierte Problem wird somit auf folgendes reduziert:

Auf der Kugel ist eine endliche Anzahl von Punkten (Ecken) durch stetige Kurven (Kanten) verbunden, dabei so, dass die Kanten sich nicht ausserhalb der Ecken treffen, und dass zwei Ecken höchstens eine Verbindungskante aufweisen. Es soll bestimmt werden, auf wieviele Arten eine Vierfarbenbezeichnung der Ecken durchführbar ist.

In dieser Fassung werden die Forderungen anschaulich-übersichtlicher, was die kombinatorische Behandlung der Frage erleichtert. Die gesuchte Anzahl der Vierfarbenbezeichnungen findet ihren Ausdruck jedenfalls in einer nicht-negativen ganzen Zahl. Der hypothetische Vierfarbensatz behauptet, dass diese Zahl positiv ist.

Wir wollen die duale Teilung ein Netz nennen, die Ecken dieser Teilung als Knoten, die Kanten als Fäden, die Gebiete als Maschen des Netzes ansprechen. Das Netz soll gesättigt heissen, sobald seine Maschen sämtlich dreieckig sind. Diese Bezeichnung rechtfertigt sich dadurch, dass einem Netz allemal neue Fäden hinzugefügt werden können, solange noch nicht alle Maschen dreieckig sind, während ein Netz mit ausschliesslich dreieckigen Maschen keine neuen Fäden mehr aufnehmen vermag, weil zweieckige Maschen der Definition nach nicht gestattet sind. Sollte der Vierfarbensatz für gesättigte Netze richtig sein, so muss er auch für alle Netze gelten, weil die Hinzunahme neuer Fäden wohl manche Vierfarbenbezeichnung, die vorher möglich war, unmöglich machen, keinesfalls aber neuen Arten Raum geben kann.

Projiziert man ein gesättigtes Netz stereographisch auf die Ebene, so entsteht ein aus dreieckigen Maschen gebildetes ebenes Netz mit dreieckigem Rand. Diesen Rand bilden nämlich die Projektionen der Fäden derjenigen ausgezeichneten sphäri-

schen Masche, die das Projektionszentrum enthält. Entfernt man aus der Projektion einen Randknoten und die in ihm mündenden Fäden, so verbleibt als Rest ein kompaktes Gebilde von aneinandergehefteten ebenen Dreiecken, jedoch wird der Rand dieses Gebildes im allgemeinen kein Dreieck, sondern ein  $r$ -Eck sein ( $r \geq 3$ ). Ebene Netze solcher Art sollen Normalnetze heissen; im Spezialfall  $r = 3$  erhält man gesättigte ebene Netze.

In der vorliegenden Arbeit soll die Anzahl der Vierfarbenbezeichnungen der Knoten von Normalnetzen bestimmt werden, und zwar mit Hilfe von Formeln, die planmässigen fernerer Untersuchungen über die Gültigkeit des Vierfarbensatzes zugänglich sind.

## 2. Die Farbeninvarianten.

Hat man eine Bezeichnung der Knoten eines Normalnetzes gemäss den Forderungen des Problems gefunden, so resultieren hieraus sofort 24 neue Bezeichnungsarten durch Permutation der vorgegebenen verwendeten Zeichen. Sämtliche 24 auseinander durch Permutation hervorgehende Vierfarbenbezeichnungen sollen hier als nicht wesentlich untereinander verschieden angesehen werden; untereinander wesentlich verschieden sind also nur solche Bezeichnungen, die nicht durch Permutation ineinander übergehen. Da die Anzahl aller überhaupt möglichen Bezeichnungen einer endlichen Menge von Punkten mit Hilfe einer endlichen Menge von Zeichen sicher endlich ist, so existiert eine obere Schranke für die Anzahl paarweise wesentlich verschiedener Vierfarbenbezeichnungen eines vorgelegten Normalnetzes. Fasst man also jedesmal alle nicht wesentlich verschiedenen Bezeichnungen in einen Komplex zusammen, so ist die Anzahl  $N$  dieser Komplexe endlich, und die Gesamtzahl der Lösungen für das Netz beträgt  $24 N$ . Das im § 1 gestellte Problem reduziert sich auf die Bestimmung der für das Normalnetz charakteristischen Zahl  $N$ . Wir nennen  $N$  die absolute Farbeninvariante des Normalnetzes.

Eine in mancher Hinsicht bequemere Definition dieser Farbeninvariante erhält man folgendermassen:

Es seien  $a, b, c, d$  die zu verwendenden 4 Zeichen. Geht man von einer fixierten Masche des Normalnetzes aus, so müssen die 3 Knoten dieser Masche notwendig mit 3 verschiedenen Zeichen versehen werden. Wählt man unter den 24 Möglich-

keiten eine aus, etwa die Bezeichnung der Knoten  $A, B, C$  der Reihe nach entsprechend mit  $a, b, c$ , — was fernerhin als  $A \equiv a, B \equiv b, C \equiv c$  geschrieben werden mag, so entsteht die Frage:

Drei zu einer dreieckigen Masche gehörige Knoten sind als  $a, b, c$  fixiert; auf wieviele Arten lässt sich die Vierfarbenbezeichnung der übrigen Knoten dann noch durchführen?

Zwei beliebige Vierfarbenbezeichnungen der übrigen Knoten sind dann jedenfalls wesentlich verschieden, da eine von der identischen verschiedene Permutation der Zeichen  $a, b, c, d$  nicht die für das Ausgangsdreieck verwendeten Zeichen  $a, b, c$  sämtlich in Ruhe lassen kann. Hat man andererseits eine ganz beliebige Vierfarbenbezeichnung des Normalnetzes gefunden, so ist es hieraus möglich durch Permutation zu einer und nur einer Bezeichnung zu gelangen, die  $A \equiv a, B \equiv b, C \equiv c$  liefert; die inverse Permutation führt von letzterer Vierfarbenbezeichnung zur erstgenannten zurück. D. h.:

Jede Vierfarbenbezeichnung überhaupt entsteht durch Permutation aus einer und nur einer Vierfarbenbezeichnung bei fixierter Bezeichnung der Ausgangsmasche. Existieren  $N'$  Vierfarbenbezeichnungen der letztgenannten Art, so muss die Gesamtzahl der Vierfarbenbezeichnungen des vorgelegten Normalnetzes gleich  $24N'$  sein. Hieraus fließt aber  $N' = N$ , m. a. W.:

Die absolute Farbeninvariante kann als Anzahl der Vierfarbenbezeichnungen bei fixierter Bezeichnung der Ausgangsmasche definiert werden.

Aus der Invarianz von  $N$  fließt dann sofort:

Die Anzahl der Vierfarbenbezeichnungen bei fixierter Ausgangsmasche ist von der speziellen Wahl dieser Masche unabhängig.

Eine ganz analoge Betrachtung lässt sich durchführen, sobald die Vierfarbenbedingung noch durch erschwerende Nebenbedingungen ergänzt wird. Als solche Nebenbedingungen werden weiterhin folgende auftreten:

1) Ein Komplex von Knotenpaaren auf dem Rande des Normalnetzes

$$(A_1, B_1), (A_2, B_2), \dots, (A_\mu, B_\mu) \quad (1)$$

soll dadurch ausgezeichnet sein, dass nur solche Vierfarbenbezeichnungen in Betracht kommen, die in jedem Paar die Komponenten  $A, B$  identisch bezeichnen, — geschrieben:  $A_i \equiv B_i$ .

2) Ein Komplex von Knotenpaaren auf dem Rande des Normalnetzes

$$(X_1, Y_1), (X_2, Y_2), \dots, (X_\nu, Y_\nu) \tag{2}$$

soll dadurch ausgezeichnet sein, dass nur solche Vierfarbenbezeichnungen in Betracht kommen, die in jedem Paar die Komponenten  $X, Y$  verschieden bezeichnen, — geschrieben  $X_i \neq Y_i$ .

Versteht man unter

$$N_{(+A_1B_1) \dots (+A_\mu B_\mu)(-X_1Y_1) \dots (-X_\nu Y_\nu)} \tag{3}$$

oder kurz

$$N_{(+AB)(-XY)} \tag{4}$$

die Anzahl der Vierfarbenbezeichnungen, die sich für das vorgelegte Netz ergeben, wenn die Bezeichnung der Knoten einer Ausgangsmasche festgelegt und die Erfüllung der beiden Nebenbedingungen gefordert wird, so folgt sofort die Unabhängigkeit dieser Anzahl von der speziellen Wahl der Ausgangsmasche. Diese Zahl  $N_{(+AB)(-XY)}$  soll als bedingte Farbeninvariante des Normalnetzes bezeichnet werden.

Sind die Nebenbedingungen unerfüllbar, so ist die zugehörige bedingte Farbeninvariante gleich null. Verschwinden die Nebenbedingungen, so geht die bedingte Farbeninvariante in die absolute über.

### 3. Reduzible Normalnetze.

Besitzt ein Normalnetz Fäden, die als Diagonalen des Randpolygons angesprochen werden können, so soll dieses Netz reduzibel heissen. Die Diagonalfäden wollen wir auch Querschnitte des reduziblen Normalnetzes nennen. Ein Normalnetz ohne Querschnitte soll irreduzibel heissen. Gesättigte Netze ( $r = 3$ ) sind allemal irreduzibel.

Ist  $AB$  (Fig. 1) ein Querschnitt eines reduziblen Normalnetzes, so können wir zur Bestimmung der absoluten

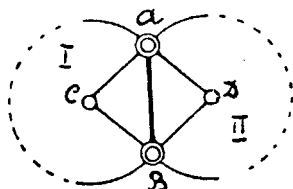


Fig. 1.

Farbeninvariante  $N$  dieses Netzes von der allemal existierenden Masche  $ABC$  ausgehen, etwa  $A \equiv a$ ,  $B \equiv b$ ,  $C \equiv c$  wählen. Sind  $N'$  und  $N''$  die absoluten Farbeninvarianten der beiden Teilnetze I und II, die aus dem gegebenen durch den Querschnitt  $AB$  entstehen, wobei  $C$  in I gelegen angenommen ist, so hat man für den Knoten  $D$  der in II notwendig existierenden Masche  $ABD$  noch 2 statthafte Bezeichnungen, nämlich  $D \equiv d$  oder  $D \equiv c$ . Jede dieser beiden Bezeichnungen führt im Teilnetz II zu  $N''$  Vierfarbenbezeichnungen, von denen jede mit den  $N'$  durch  $ABC$  bedingten Bezeichnungen des Teilnetzes I verträglich ist. Hieraus fließt

$$N = 2 N' N'' \quad (5)$$

Durch vollständige Induktion erkennt man ferner sofort, dass beim Vorhandensein von  $q$  Querschnitten, also  $q + 1$  Teilnetzen, die Zahl  $N$  sich aus der Formel

$$N = 2^q N' N'' \dots N^{(q+1)} \quad (6)$$

bestimmt, wenn  $N^{(\mu)}$  die absolute Farbeninvariante für das  $\mu$ -te Teilnetz bedeutet. Daraus folgt zugleich, dass man sich bei der Lösung des im § 1 gestellten Problems auf irreduzible Normalnetze beschränken darf. Zunächst soll aber ein Spezialfall reduzierbarer Netze erledigt werden.

Bezeichnet  $i$  die Anzahl der inneren, d. h. nicht auf dem Rande gelegenen Knoten eines Normalnetzes,  $f$  die Anzahl der Fäden,  $m$  die Anzahl der Maschen, d. h. der Elementardreiecke, aus denen das Netz zusammengesetzt ist, so hat man auf Grund der Euler'schen Polyederformel

$$(m + 1) + (r + i) = f + 2. \quad (7)$$

Eine einfache Überlegung zeigt aber

$$2f = 3m + r. \quad (8)$$

Wird dies mit (7) verknüpft, so resultiert

$$m = r + 2(i-1) \quad (9)$$

und

$$f = 2r + 3(i-1). \quad (10)$$

Ist das Netz frei von inneren Knoten, also  $i = 0$ , so ergibt sich demnach  $m = r - 2$ ,  $f = 2r - 3$ . Weil dann jedoch jeder Faden entweder zum Rande gehört oder einen Querschnitt darstellt, so berechnet sich die Anzahl der Querschnitte als  $(2r - 3) - r$ , d. h. sie ist gleich  $r - 3$ . Das Fehlen innerer Knoten bewirkt, dass sämtliche Teilnetze, in welche unser Normalnetz dank allen diesen Querschnitten zerfällt, einfach Elementardreiecke sind. Nun ist für ein alleinstehendes Elementardreieck die absolute Farbeninvariante gleich 1, wie aus der Definition ersichtlich. Auf Grund von (6) wird daher für ein innen knotenfreies Normalnetz die absolute Farbeninvariante, die wir dann als  $\overset{0}{N}$  bezeichnen wollen, gleich

$$\overset{0}{N} = 2^{r-3} = 2^{m-1}. \quad (11)$$

Die Zahl  $2^{m-1}$  ist eine obere Schranke für die absolute Farbeninvariante eines  $m$ -maschigen Netzes überhaupt. Denn schreitet man, um Vierfarbenbezeichnungen zu finden, von einer Masche ausgehend, von Dreieck zu Dreieck fort, jedoch so, dass eine Dreieckspitze allemal erst dann an die Reihe kommt, wenn beide Eckpunkte der zugehörigen Grundlinie schon bezeichnet sind, so hat man stets die Wahl zwischen beiden an der Basis nicht benutzten Zeichen, — sofern nicht andere Hemmnisse eintreten. Im günstigsten Falle verdoppelt sich somit mit jedem Schritt die Anzahl der in Betracht kommenden Bezeichnungsarten. Da ausser dem Ausgangsdreieck noch  $m - 1$  andere Dreiecke vorhanden sind, so treten höchstens  $2^{m-1}$  Verdoppelungen ein, woraus die Richtigkeit der Behauptung ersichtlich ist.

Die Zahl  $i$  soll die Ordnung des jeweiligen Normalnetzes heissen; die Farbeninvarianten eines Netzes  $i$ -ter Ordnung sollen fernerhin auch als  $\overset{i}{N}$  geschrieben werden.

Wir suchen eine Reduktionsformel, die es gestattet Farbeninvarianten für Normalnetze  $i$ -ter Ordnung aus Farbeninvarianten für Normalnetze  $(i-1)$ -ter Ordnung zu berechnen, wobei die absolute Farbeninvariante  $\overset{0}{N}$  schon durch (11) bekannt ist. Für  $i = 0$ ,  $m > 1$  ist das Netz allemal reduzibel; bei  $i > 0$  genügt die Betrachtung irreduzibler Typen.

Wo Missverständnisse ausgeschlossen sind, soll das Symbol  $N^i$  eventuell nicht nur die Farbeninvariante, sondern auch das zugehörige Netz selbst bezeichnen.

#### 4. Reduktion einer bedingten Farbeninvariante.

Für  $i = 1$  wird nach (9) und (10)  $m = r$ ,  $f = 2r$ . Man hat einen und nur einen irreduziblen Netztypus, der an ein Rad mit Speichen erinnert (Fig. 2). Ausser den  $r$  Randfäden müssen nämlich noch genau  $r$  Fäden auftreten, weil die Gesamtzahl  $2r$  beträgt. Soll kein Querschnitt existieren, so muss jeder innere Faden von einem Randknoten ausgehen und in den einzig vorhandenen inneren Knoten münden. Da genau  $r$  Randknoten vorhanden sind, so werden damit sämtliche  $r$  nach innen führende Fäden aufgebraucht. Das Netz ist damit eindeutig bestimmt.

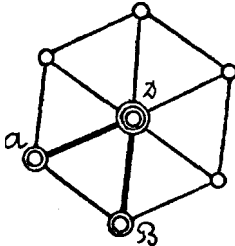


Fig. 2.

Entfernt man eine Masche, etwa  $ABD$ , so verbleibt ein reduzibles Restnetz ohne innere Knoten, mit  $r-2$  von  $D$  ausgehenden Querschnitten. Jede der  $N^0$  Vierfarbenbezeichnungen dieses Restnetzes führt dann

und nur dann zu einer Bezeichnung im  $N^1$ , wenn  $A \neq B$ , weil im Netz erster Ordnung diese beiden Punkte direkt verbunden erscheinen. Man hat daher

$$N^1 = N^0 - N_{(+AB)}^0. \quad (12)$$

Das auf dem Rande des Restnetzes gelegene Knotenpaar  $AB$  ist mit dem „zwischenliegenden“ Randknoten  $D$  direkt benachbart. Wir leiten zunächst eine Reduktionsformel zur Berechnung einer entsprechenden bedingten Farbeninvariante  $N_{(+AB)}$  ab, für den Fall, dass in den zwischenliegenden Punkt  $D$  Querschnitte münden. Diese Formel soll für ein sonst ganz beliebiges Normalnetz bestimmt werden, also nicht an den oben statthabenden Spezialfall  $i = 0$  gebunden sein.

Es sei im Normalnetz  $N$  (Fig. 3) der Faden  $DX$  ein Querschnitt, der das Netz in die Teilnetze I und II spaltet. Gesucht ist  $N_{(+AB)}$ . Als Ausgangsmasche diene diejenige, deren Grundlinie der Faden  $AD$  bildet. Unter den  $N'$  Vierfarbenbezeichnungen

gen des Teilnetzes I unterscheiden wir solche, die  $A \equiv X$  liefern, von solchen, wo  $A \neq X$  wird; ist die erstere Zahl  $N'_{(+AX)}$ , so berechnet sich die letztere als  $N' - N'_{(+AX)}$ . Um  $A \equiv B$  zu erhalten, kann man zunächst jede beliebige der Vierfarbenbezeichnungen  $N'_{(+AX)}$  des Teilnetzes I mit einer sonst beliebigen Bezeichnungsart von II verknüpfen, sobald nur die Bezeichnung von  $D$  mit der durch I bedingten übereinstimmt, und  $X \equiv B$  wird. Betrachtet man hierbei im Teilnetz II als Ausgangsmasche diejenige mit der Basis  $DB$ , so ist für diese Masche die Bezeichnung von  $D$  und  $B$  (letztere durch  $A \equiv X \equiv B$ ) vorgeschrieben, während für die dritte Spitze noch 2 Zeichen gleichwertig freibleiben. Kennzeichnet man die Farbeninvarianten für das Teilnetz II durch doppelte Strichlung, so kann man somit die auf diese Weise resultierenden bedingten Vierfarbenbezeichnungen des Gesamtnetzes als  $2N'_{(+AX)} N''_{(+XB)}$  in Rechnung setzen. Hierzu kommen nun aber noch die Bezeichnungsarten  $A \neq X$  von I. Diese dürfen mit solchen und nur solchen Bezeichnungsarten von II kombiniert werden, wo  $X \neq B$ . Dabei hat dann  $X$  in II entweder dasselbe Zeichen, wie die Spitze der Masche mit der Grundlinie  $DB$ , — oder aber das vierte, von den Eckbezeichnungen dieser Masche verschiedene Zeichen. Durch eine einfache Überlegung erkennt man aber, dass die Gesamtzahl dieser zwei möglichen Bezeichnungsweisen von II gleich sein muss der Anzahl, derjenigen Vierfarbenbezeichnungen von II, die, bei fixierter Ausgangsmasche,  $B \neq X$  ergeben, also gleich  $N'' - N''_{(+XB)}$ . Mithin treten zu den früher gezählten noch  $\{N' - N'_{(+AX)}\} \cdot \{N'' - N''_{(+XB)}\}$  Bezeichnungsmöglichkeiten hinzu. Also wird

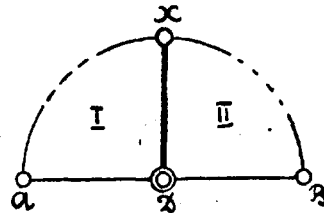


Fig. 3.

$N_{(+AB)} = 2N'_{(+AX)} N''_{(+XB)} +$   
 $+ \{N' - N'_{(+AX)}\} \{N'' - N''_{(+XB)}\} .$  (13)

In anderer Anordnung:

$$N_{(+AB)} = 3N'_{(+AX)} N''_{(+XB)} +$$

$$- \{N'_{(+AX)} N'' + N''_{(+XB)} N'\} + N' N'' .$$
 (14)

### 5. Verallgemeinerung der Reduktionsformel.

Die Formel (14) lässt sich durch vollständige Induktion für den Fall verallgemeinern, dass im Knoten  $D$   $q$  Querschnitte zusammenlaufen.

Es soll  $\varepsilon$  fernerhin überall als Abkürzung für  $-1$  stehen. Mit  $\alpha_q$  bezeichnen wir eine vom Index  $q$  abhängige, durch die Forderungen

$$\alpha_1 = 1, \alpha_\mu = 2\alpha_{\mu-1} + \varepsilon^{\mu-1} \quad (15)$$

eindeutig definierte Zahl. Die in  $D$  mündenden Querschnitte des gegebenen Normalnetzes seien  $DX_1, DX_2, \dots, DX_q$ . Zur Kennzeichnung der Farbeninvarianten der  $q+1$  Teilnetze, die dank diesen Querschnitten entstehen, verwenden wir oben angeetzte Indizes. Dann gilt die Relation:

$$\begin{aligned} N_{(+AB)} &= 3^q N'_{(+AX_1)} N''_{(+X_1X_2)} \dots N^{(q+1)}_{(+X_qB)} + \\ &- 3^{q-1} \{ N' N''_{(+X_1X_2)} \dots N^{(q+1)}_{(+X_qB)} + \dots + N'_{(+AX_1)} \dots \\ &\dots N^{(q)}_{(+X_{q-1}X_q)} N^{(q+1)} \} + 3^{q-2} \{ N' N'' N'''_{(+X_2X_3)} \dots N^{(q+1)}_{(+X_qB)} + \\ &+ \dots + N'_{(+AX_1)} \dots N^{(q-1)}_{(+X_{q-2}X_{q-1})} N^{(q)} N^{(q+1)} \} + \quad (16) \\ &- \dots + \\ &+ \varepsilon^q \{ N' N'' \dots N^{(q+1)}_{(+X_qB)} + \dots + N'_{(+AX_1)} N'' \dots N^{(q+1)} \} + \\ &+ \alpha_q N' N'' \dots N^{(q+1)}. \end{aligned}$$

Hier enthält die mit  $3^{q-k}$  verknüpfte Summe jedesmal sämtliche Produkte von  $k$  absoluten und  $q-k+1$  bedingten Farbeninvarianten, je eine Farbeninvariante aus jedem Teilnetz. Bei  $q=1$  reduziert sich (16) offenbar auf (14).

Zum Beweis der Allgemeingültigkeit von (16) bedienen wir uns für den Augenblick einer abgekürzten Schreibweise: es soll  $S^{(k)}$  für  $N^{(k)}_{(+X_{k-1}X_k)}$  gesetzt werden und das Sum-

menzeichen Verwendung finden. Die zu beweisende Formel wäre dann

$$\begin{aligned}
 N_{(+AB)} &= 3^q S' S'' \dots S^{(q+1)} - 3^{q-1} \Sigma N' S'' \dots S^{(q+1)} + \\
 &+ 3^{q-2} \Sigma N' N'' S''' \dots S^{(q+1)} - \dots + \varepsilon^q \Sigma N' N'' \dots N^{(q)} S^{(q+1)} + \\
 &+ \alpha_q N' N'' \dots N^{(q+1)}. \tag{17}
 \end{aligned}$$

Wird (17) für ein fixiertes  $q$  als bewiesen angenommen, und denkt man sich das letzte Teilnetz, dessen Index  $q+1$  ist, durch einen in  $D$  mündenden  $(q+1)$ -ten Querschnitt in zwei neue Teilnetze zerfällt, zu deren Kennzeichnung die Indizes  $\underline{q+1}$  (unterstrichen) und  $q+2$  dienen mögen, so hat man nach (5)

$$N^{(q+1)} = 2N^{\underline{(q+1)}} N^{(q+2)}, \tag{18}$$

und nach (14)

$$\begin{aligned}
 S^{(q+1)} &= 3S^{\underline{(q+1)}} S^{(q+2)} - \{S^{\underline{(q+1)}} N^{(q+2)} + \\
 &+ S^{(q+2)} N^{\underline{(q+1)}}\} + N^{\underline{(q+1)}} N^{(q+2)}. \tag{19}
 \end{aligned}$$

Wird dies in (17) eingeführt, so resultiert:

$$\begin{aligned}
 N_{(+AB)} &= 3^{q+1} S' S'' \dots S^{\underline{(q+1)}} S^{(q+2)} + \\
 &- 3^q \Sigma N' S'' \dots S^{\underline{(q+1)}} S^{(q+2)} + 3^{q-1} \Sigma N' N'' S''' \dots S^{\underline{(q+1)}} S^{(q+2)} + \\
 &+ \dots + \varepsilon^{q+1} \Sigma N' N'' \dots N^{\underline{(q+1)}} S^{(q+2)} + \\
 &+ (2\alpha_q + \varepsilon^q) N' N'' \dots N^{\underline{(q+1)}} N^{(q+2)}. \tag{20}
 \end{aligned}$$

Bei der Rechnung ist zu beachten, dass  $3^\mu - 2 \cdot 3^{\mu-1} = 3^{\mu-1}$  und  $-\varepsilon^k = \varepsilon^{k\pm 1}$ . Am überzeugendsten wirkt die ausführliche Durchrechnung in den einfachsten Spezialfällen  $q = 1, 2, \dots$

Wegen (15) ist aber nun (20) eine Formel vom selben Typus, wie (17), damit also die Allgemeingültigkeit der Reduktionsformel (16) erwiesen.

## 6. Allgemeine Eigenschaften der Vierfarbenkoeffizienten.

Die in (16) auftretenden, durch (15) definierten Zahlen  $a_t$  sind von grundlegender Bedeutung für das zu behandelnde Problem; sie mögen daher die Vierfarbenkoeffizienten genannt werden. Die Relationen (15) ermöglichen die Berechnung dieser Vierfarbenkoeffizienten  $a_t$  für jeden ganzzahligen Index  $t$ . Eine Tabelle sei hier angeführt:

$t$	-4	-3	-2	-1	0	+1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$a_t$	$-\frac{5}{16}$	$+\frac{3}{8}$	$-\frac{1}{4}$	$+\frac{1}{2}$	0	+1	1	3	5	11	21	43	85	171	341

Die Vierfarbenkoeffizienten genügen einer Fülle interessanter Beziehungen, von denen einige sofort Erwähnung finden sollen. Man überzeugt sich zunächst durch vollständige Induktion, dass stets

$$2a_{t-1} + a_t = a_{t+1} \quad (21)$$

ist. Tatsächlich gilt diese Relation für  $t=1$ ; besteht sie aber für irgendein  $t$ , so gilt sie auch für den nächstgrösseren und für den nächstkleineren Wert von  $t$ . Ersteres ersieht man aus der Schlusskette

$$\begin{aligned} 2a_t + a_{t+1} &= 2(2a_{t-1} + \varepsilon^{t-1}) + (2a^t + \varepsilon^t) = \\ &= 2(2a_{t-1} + a_t) + \varepsilon^{t+1} = 2a_{t+1} + \varepsilon^{t+1} = a_{t+2}, \end{aligned} \quad (22)$$

mit Hilfe von (15) und (21), letzteres folgt auf Grund von (15) aus der Umformung

$$2a_{t-2} + a_{t-1} = (a_{t-1} + \varepsilon^{t-1}) + a_{t-1} = 2a_{t-1} + \varepsilon^{t-1} = a_t. \quad (23)$$

Damit ist aber (21) durch vollständige Induktion bewiesen. Eine Weiterführung der oben gegebenen Tabelle gestaltet sich auf Grund von (21) höchst einfach. Sämtliche Vierfarbenkoeffizienten  $a_t$  sind bei positivem  $t$  positive ganze Zahlen. Schreibt man sie von  $a_1$  beginnend aufwärts im Binärsystem, so lauten die ersten Zahlen der Reihe:

1; 1; 11; 101; 1011; 10101; 101011; 1010101;  
10101011; . . . . .

Das Gesetz ist hier leicht zu erfassen.

Aus (21) folgt, dass bei positivem  $t$  sämtliche  $a_t$  ungerade sein müssen.

Wir überzeugen uns ferner, dass bei positivem  $t$  allemal

$$a_t = 2^{t-1} - 2^{t-2} + 2^{t-3} - \dots + \varepsilon^{t-1} 2^0 \tag{24}$$

ist. Denn erstens hat man hieraus sofort  $a_1 = 1$ ,  $a_2 = 1$ , und zweitens ist dann

$$\begin{aligned} 2a_t + a_{t+1} &= (2^t + 2^t) - (2^{t-1} + 2^{t-1}) + \dots + \varepsilon^{t-1}(2 + 2) + \varepsilon^t \cdot 2^0 = \\ &= 2^{t+1} - 2^t + \dots + \varepsilon^{t-1} \cdot 2^2 + \varepsilon^t \cdot 2^0 = \tag{25} \\ &= 2^{t+1} - 2^t + \dots + \varepsilon^{t-1} \cdot 2^2 + \varepsilon^t \cdot 2^1 + \varepsilon^{t+1} \cdot 2^0 = a_{t+2}, \end{aligned}$$

d. h. die Rekursionsformel (21) wird befriedigt.

Summiert man die geometrische Reihe, so folgt hieraus

$$a_t = \frac{1}{3}(2^t + \varepsilon^{t-1}) . \tag{26}$$

Diese zunächst nur für positive  $t$  bewiesene Relation ist unabhängig von der Beschränkung  $t > 0$ . Denn nach (15) ergibt sich aus (26) für den nächstkleineren  $t$ -Wert:

$$\begin{aligned} a_{t-1} &= \frac{1}{2}(a_t + \varepsilon^t) = \frac{1}{2}[\frac{1}{3}(2^t + \varepsilon^{t-1}) + \varepsilon^t] = \frac{1}{6}(2^t + 2\varepsilon^{t-2}) = \\ &= \frac{1}{3}(2^{t-1} + \varepsilon^{t-2}) . \tag{27} \end{aligned}$$

Die hierin enthaltene vollständige Induktion beweist unsere Behauptung.

Schreibt man (21) in der Gestalt

$$2a_{t-2} = a_t - a_{t-1}, \tag{28}$$

woraus

$$\begin{aligned} 4a_{t-4} &= 2(a_{t-2} - a_{t-3}) = 2a_{t-2} - 2a_{t-3} = \\ &= a_t - a_{t-1} - a_{t-1} + a_{t-2} = a_t - 2a_{t-1} + a_{t-2}, \tag{29} \end{aligned}$$

so folgt durch vollständige Induktion die Verallgemeinerung

$$2^k a_{t-2k} = a_t - \binom{k}{1} a_{t-1} + \binom{k}{2} a_{t-2} - \dots + \varepsilon^k \binom{k}{k} a_{t-k}, \quad (30)$$

wo die Symbole  $\binom{k}{s}$  Binomialkoeffizienten bedeuten.

Aus der Beziehung (26) folgt

$$a_t + a_{t+1} = 2^t. \quad (31)$$

Endlich sei noch das Additionstheorem

$$a_{s+t} = a_s a_{t+1} + 2a_{s-1} a_t, \quad (32)$$

erwähnt, welches sich wieder durch vollständige Induktion leicht beweisen lässt. Aus ihm wird ersichtlich, dass  $a_\tau$  den grössten gemeinsamen Teiler von  $a_\mu$  und  $a_\nu$  darstellt, sobald  $\tau$  der grösste gemeinsame Teiler der positiven ganzen Zahlen  $\mu$  und  $\nu$  ist.

## 7. Die absolute Farbeninvariante für Normalnetze erster Ordnung.

Die im § 4 begonnene Berechnung der Zahl  $N$  für die Ordnung 1 kann nun zu Ende geführt werden. An (12) anknüpfend, berechnen wir nämlich zunächst  $\overset{0}{N}_{(+AB)}$  nach (16). Das Netz nullter Ordnung, um welches es sich hier handelt (Fig. 2), zerfällt durch  $r-2$  von  $D$  ausgehende Querschnitte in  $r-1$  fächerförmig aneinandergeheftete Dreiecke; dieser Netztypus soll fernerhin der Kürze halber als Fächer bezeichnet werden. Die spezielle Form der Teilnetze lässt bei Anwendung der Formel (16) die bedingten Farbeninvarianten

$$N'_{(+AX_1)}, N''_{(+X_1X_2)}, N'''_{(+X_2X_3)}, \dots, N^{(r-1)}_{(+X_{r-2}B)}$$

sämtlich verschwinden, während die absoluten Farbeninvarianten alle gleichzeitig zu 1 werden. Dann verschwinden auf der rechten Seite von (16) alle Glieder mit Ausnahme des letzten, welches sich auf den Vierfarbennkoeffizienten reduziert, d. h. es wird

$$\overset{0}{N}_{(+AB)} = a_{r-2}. \quad (33)$$

Auf Grund von (11) ist gleichzeitig  $\overset{0}{N} = 2^{r-2}$ . Nach (12) hat man also

$$\overset{1}{N} = \overset{0}{N} - \overset{0}{N}_{(+AB)} = 2^{r-2} - a_{r-2}, \tag{34}$$

woraus endlich, wegen (31),

$$\overset{1}{N} = a_{r-1} \tag{35}$$

folgt. Hier ist der Index des Vierfarbenkoeffizienten die um 1 verkleinerte Anzahl der Maschen des betrachteten Netzes erster Ordnung. Da allemal mindestens 3 Maschen existieren müssen, wenn das Normalnetz wirklich einen inneren Knoten enthalten soll, so ist dieser Index nicht kleiner als 2, der zugehörige Vierfarbenkoeffizient daher allemal positiv. Mit zunehmender Maschenzahl wächst die Anzahl der Vierfarbenbezeichnungen in diesem Falle recht rasch.

In Bezug auf den Fächer haben wir zugleich folgendes Resultat gefunden:

Ist  $m$  die Anzahl der Maschen eines Fächers, so gestattet dieser Fächer, bei fixierter Bezeichnung der Knoten einer Ausgangsmasche, genau  $a_{m-1}$  Vierfarbenbezeichnungen mit identischer Färbung der Endknoten  $A, B$ , ( $A \equiv B$ ), und  $a_m$  Vierfarbenbezeichnungen mit verschiedener Färbung dieser Endknoten  $A, B$ , ( $A \neq B$ ).

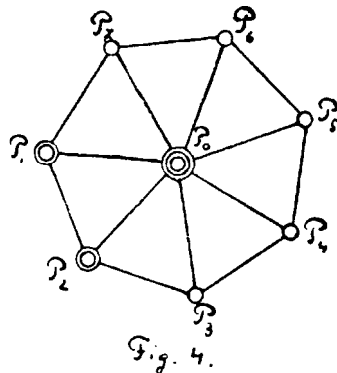


Fig. 4.

Zur Veranschaulichung und Kontrolle der Formel (35) sei hier eine Tabelle der Vierfarbenbezeichnungen eines Normalnetzes erster Ordnung mit 7 Randknoten  $P_1, P_2, \dots, P_7$  und dem inneren Knoten  $P_0$  angeführt. Laut (35) müssen dann  $a_6$ , d. h. 21 Vierfarbenbezeichnungen bei fixierter Bezeichnung der Ausgangsmasche existieren; in der Tabelle sind diese Vierfarben-

bezeichnungen in 21 Kolumnen gegeben, wobei  $P_0P_1P_2$  als Ausgangsmasche dient (Fig. 4):

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21
$P_0$	a	a	a	a	a	a	a	a	a	a	a	a	a	a	a	a	a	a	a	a	a
$P_1$	b	b	b	b	b	b	b	b	b	b	b	b	b	b	b	b	b	b	b	b	b
$P_2$	c	c	c	c	c	c	c	c	c	c	c	c	c	c	c	c	c	c	c	c	c
$P_3$	b	b	b	b	b	b	b	b	b	b	d	d	d	d	d	d	d	d	d	d	d
$P_4$	c	c	c	c	c	d	d	d	d	d	b	b	b	b	b	b	c	c	c	c	c
$P_5$	b	b	d	d	d	b	b	c	c	c	c	c	c	d	d	d	b	b	d	d	d
$P_6$	c	d	b	b	c	c	d	b	b	d	b	b	d	b	b	c	c	d	b	b	c
$P_7$	d	e	c	d	d	d	c	c	d	c	c	d	c	c	d	d	d	c	c	d	d

**8. Reduktion durch Abtrennung eines Fächers.**

Zur Berechnung von  $N^0$  spalteten wir das Netz erster Ordnung in einen Fächer  $N^0$  und ein Dreieck. Diese Methode gestattet eine Verallgemeinerung auf Netze höherer Ordnungen.

Es sei ein beliebiges Normalnetz  $N^i$  mit  $i$  inneren Knoten gegeben (Fig. 5). Wir fixieren einen Randfaden  $A_0A_1$ . Wenn das Netz irreduzibel ist, so hat diejenige Masche, deren Grundlinie dieser Faden  $A_0A_1$  bildet, zur Spitze notwendig einen inneren Knoten  $P$  des Netzes. Es kann möglich sein, dass die zum folgenden Randfaden gehörige Masche dieselbe Spitze  $P$  besitzt; wir wollen annehmen, dass  $m$  aufeinanderfolgende Randfäden

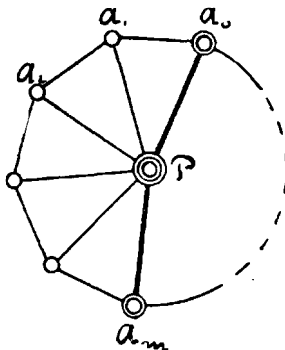


Fig. 5.

$$A_0A_1, A_1A_2, A_2A_3, \dots, A_{m-1}A_m$$

Grundlinien von Maschen mit gemeinsamer Spitze  $P$  sind. Die Gesamtheit dieser  $m$  Maschen, für sich betrachtet, bildet dann einen Fächer, solange  $A_0$  von  $A_m$  verschieden ist. Nach Abtrennung dieses Fächers vom Netz  $N^i$  verbleibt ein Teilnetz von der Ordnung  $i - 1$ ,

denn dieses Teilnetz besitzt alle früheren inneren Knoten, mit alleiniger Ausnahme des Knotens  $P$ , der nun zum Randknoten geworden ist. Wir nennen dieses Teilnetz das zum Fächer gehörige Residuum des Normalnetzes  $N$ . Für irreduzible Netze wird die Maschenzahl  $m$  des Fächers mindestens gleich 1 sein; der Maximalwert von  $m$  ist abhängig von der Struktur des Netzes und der speziellen Wahl der Randfäden. Bei  $i = 1$  darf  $m = r - 1$  gesetzt werden, wie es im § 4 geschehen. Die gemeinsame Spitze  $P$  der Fächermaschen nennen wir das Zentrum der ausgeführten Zerlegung des Netzes in Fächer und Residuum, die Zahl  $m$  soll der Index der Zerlegung heissen.

Es ist allemal für ein irreduzibles Normalnetz  $N$  möglich, das Zentrum und den Index der Zerlegung so zu wählen, dass das Residuum wieder irreduzibel wird. Sollte zunächst auch die zum Randfaden  $A_m A_{m+1}$  resp. zum Randfaden  $A_{-1} A_0$  gehörige Masche die Spitze  $P$  aufweisen, so dürfen wir diese Masche zum Fächer hinzuzählen, m. a. W. den Index  $m$  um eine Einheit vergrössern, solange  $A_{m+1}$  von  $A_0$ , resp.  $A_{-1}$  von  $A_m$  noch verschieden ist. Da die Anzahl der Knoten des Netzes endlich ist, so gelangt man auf diese Weise bei fixiertem Zentrum  $P$  jedenfalls zu einem maximalen Index  $m$ ; der zugehörige Fächer wird dann ein Maximalfächer.

Sollte nun ein irreduzibles Normalnetz  $N$  nach Abtrennung eines Maximalfächers ein reduzibles Residuum ergeben, so können die Querschnitte dieses Residuums nur von  $P$ , dem Zentrum der Zerlegung,

ausgehen, da widrigenfalls  $N$  selbst schon reduzibel wäre. Diese Querschnitte lassen sich dann in wohldefinierter Aufeinanderfolge als  $PX_1, PX_2, \dots, PX_q$  bezeichnen (Fig. 6). Das Residuum zerfällt in  $q + 1$  Teilnetze, von denen etwa dasjenige mit den Randknoten  $A_m, X_q, P$  als „letztes“ angesprochen werden kann. Es führt dann in diesem letzten Teilnetz kein Querschnitt mehr von  $P$  zum Rand.

Geht man nun von einem Faden auf dem Rande  $A_m X_q$  des letzten Teilnetzes aus, so liegt die Spitze  $J$  der zugehörigen Masche notwendig im Inneren dieses

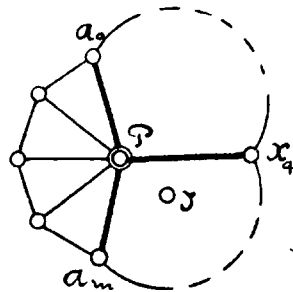


Fig. 6.

Teilnetzes, weil im einzig denkbaren anderen Falle, wo  $A_m X_q P$  selbst diese Masche wäre, der vorhin vom  $N^i$  abgetrennte Fächer kein Maximalfächer sein könnte. Von  $J$  ausgehende Fäden können den Rand von  $N^i$  offenbar nur auf dem Bogenstück  $A_m X_q$  treffen. Nimmt man statt der vorigen Zerlegung des  $N^i$  eine neue, diesmal mit  $J$  als Zentrum, so kann das zugehörige Residuum eventuell nur noch solche Querschnitte aufweisen, die  $J$  mit einem Knoten auf dem Randbogen  $A_m X_q$  verbinden. Wiederholt man wörtlich die oben durchgeführten Betrachtungen für unsere neue Zerlegung, so gelangt man zu einem neuen Teilnetz, welches gleichzeitig einen echten Teil des früher betrachteten Teilnetzes  $A_m X_q P$  ausmacht, dabei aber mit dem Randbogen  $A_m X_q$  nur einen echten Teil gemeinsam hat. In diesem neuen Teilnetz kann ein neuer Punkt  $J'$  als Zentrum einer dritten Zerlegungsart des  $N^i$  gefunden werden, u. s. f. Da die Anzahl der Knoten endlich ist, so bricht die Kette entweder ab, indem ein irreduzibles Residuum auftritt, — oder man gelangt zu einem Teilnetz mit dreieckigem Rand  $A^{(\nu)} X^{(\nu)} J^{(\nu)}$ . Die zum Randfaden  $A^{(\nu)} X^{(\nu)}$  gehörige Maschenspitze  $J^{(\nu+1)}$  liefert dann eine neue Zerlegungsart des  $N^i$  mit dem Index 1. Reduzibel kann das zugehörige Residuum dann sicher nicht mehr sein, weil kein Randpunkt mehr existiert, mit dem das Zentrum  $J^{(\nu+1)}$  verbunden sein könnte. Die jedesmalige Existenz von Zerlegungen mit irreduziblem Residuum ist somit gesichert.

Wir dürfen diese Tatsache auch folgendermassen aussprechen:

Jedes irreduzible Normalnetz  $i$ -ter Ordnung entsteht aus einem irreduziblen Normalnetz der Ordnung  $i-1$  durch Anheften eines Fächers.

## 9. Reduktionsformeln für die absolute Farbeninvariante.

Im irreduziblen Normalnetz  $N^i$  sei eine Zerlegung vom Index  $m$  um  $P$  als Zentrum ausgeführt (Fig. 5). Wir wollen die Berechnung der absoluten Farbeninvariante  $N^i$  auf die Be-

rechnung von Farbeninvarianten des Residuums, also eines Netzes niedrigerer Ordnung, zurückführen.

Wählt man als Ausgangsmasche der Vierfarbenbezeichnung eine Masche des Fächers, so hat man laut § 7 für den Fächer  $\alpha_{m-1}$  Bezeichnungsmöglichkeiten  $A_0 \equiv A_m$ , und  $\alpha_m$  Möglichkeiten  $A_0 \neq A_m$ . Nun darf hierbei jede im Fächer zu  $A_0 \equiv A_m$  führende Vierfarbenbezeichnung mit einer jeden Vierfarbenbezeichnung des Residuums kombiniert werden, sobald im Residuum  $A_0$  und  $P$  ebenso wie im Fächer bezeichnet erscheinen, dabei im Residuum  $A_0 \equiv A_m$  ist. Wählt man im Residuum das Dreieck mit der Basis  $A_0P$  zur Ausgangsmasche, so darf für die dritte Ecke dieses Dreiecks jede der beiden noch übrigen Bezeichnungen Verwendung finden, d. h. man hat  $2 \cdot \overset{i-1}{N}_{(+A_0A_m)}$  Vierfarbenbezeichnungen des Residuums zur Verfügung. Mit den  $\alpha_{m-1}$  Bezeichnungen des Fächers kombiniert ergibt dies  $2\alpha_{m-1} \overset{i-1}{N}_{(+A_0A_m)}$  Bezeichnungen für das Gesamtnetz. Hinzu treten noch die Bezeichnungsarten  $A_0 \neq A_m$ , deren es im Fächer  $\alpha_m$  gibt: analog dem in § 4 bei der Ableitung der Formel (13) angewandten Verfahren kommt man zu dem Schluss, dass jede der letztgenannten Vierfarbenbezeichnungen des Fächers mit  $\overset{i-1}{N} - \overset{i-1}{N}_{(+A_0A_m)}$  des Residuums zu kombinieren ist, wodurch also  $\alpha_m \{ \overset{i-1}{N} - \overset{i-1}{N}_{(+A_0A_m)} \}$  Vierfarbenbezeichnungen des Gesamtnetzes entstehen. Es ist daher

$$\overset{i}{N} = 2\alpha_{m-1} \overset{i-1}{N}_{(+A_0A_m)} + \alpha_m \{ \overset{i-1}{N} - \overset{i-1}{N}_{(+A_0A_m)} \}. \quad (36)$$

Schreibt man auf Grund von (15)  $\alpha_m + \varepsilon^m$  für  $2\alpha_{m-1}$ , so erhält man hieraus

$$\overset{i}{N} = \alpha_m \overset{i-1}{N} + \varepsilon^m \overset{i-1}{N}_{(+A_0A_m)}. \quad (37)$$

Zur Kontrolle der somit gefundenen Reduktionsformel wenden wir sie auf den Fall  $i = 1$  an, wo das Residuum ebenfalls ein Fächer, und zwar mit  $r - m$  Maschen ist. Man hat dann in diesem Residuum

$$\begin{aligned} \overset{0}{N}_{(+A_0A_m)} &= a_{r-m-1}, \quad \overset{0}{N} = \overset{0}{N}_{(+A_0A_m)} + \left\{ \overset{0}{N} - \overset{0}{N}_{(+A_0A_m)} \right\} = \\ &= a_{r-m-1} + a_{r-m} \end{aligned} \quad (38)$$

zu setzen; hieraus folgt nach (37):

$$\begin{aligned} \overset{1}{N} &= a_m(a_{r-m-1} + a_{r-m}) + \varepsilon^m a_{r-m-1} = \\ &= a_{r-m-1}(a_m + \varepsilon^m) + a_m a_{r-m} = \\ &= 2a_{r-m-1} a_{m-1} + a_m a_{r-m} = a_{r-1}, \end{aligned} \quad (39)$$

wenn (15) und (32) zu Hilfe genommen werden. Dieses Resultat ist mit dem früher im § 7 gefundenen identisch.

Die Formel (37) gilt allgemein, unabhängig davon, ob das Residuum reduzibel ist oder nicht. Wie schon früher (§ 8) bemerkt, kann das Residuum nur solche eventuelle Querschnitte enthalten, die im Zentrum der Zerlegung, d. h. in  $P$  münden, — vorausgesetzt, dass das Gesamtnetz  $i$ -ter Ordnung selbst irreduzibel ist. Mit Hilfe von (6) und (16) lässt sich (37) so erweitern, dass nur die irreduziblen Teile, in welche das Residuum dank diesen Querschnitten zerfällt, berücksichtigt zu werden brauchen. Nimmt man die Existenz von  $q$  Querschnitten  $PX_1, PX_2, \dots, PX_q$  an und verwendet zur Unterscheidung der  $q+1$  Teile, in die das Residuum zerfällt, oben angesetzte Indizes, so hat man

in (37)  $\overset{i-1}{N}$  durch die rechte Seite von (6), und gleichzeitig  $\overset{i-1}{N}_{(+A_0A_m)}$  durch die rechte Seite von (16) zu ersetzen.

M. a. W., um  $\overset{i}{N}$  zu erhalten, hat man die mit  $a_m$  multiplizierte rechte Seite von (6) zu der mit  $\varepsilon^m$  multiplizierten rechten Seite von (16) zu addieren. Hierbei lässt das aus (6) erhaltene Glied sich mit dem letzten Summanden aus (16) vereinigen, wodurch dann der Koeffizient  $2^q a_m + \varepsilon^m a_q$  entsteht. Es ist aber auf Grund von (31), (15) und (32):

$$\begin{aligned} 2^q a_m + \varepsilon^m a_q &= (a_q + a_{q+1}) a_m + (2a_{m-1} - a_m) a_q = \\ &= a_{q+1} a_m + 2a_{m-1} a_q = a_{m+q}. \end{aligned} \quad (40)$$

Man gelangt daher zur Formel

$$\begin{aligned}
 N &= a_{m+q} N' N'' \dots N^{(q+1)} + \\
 &+ 3^q \varepsilon^m N'_{(+A_0 X_1)} N''_{(+X_1 X_2)} \dots N^{(q+1)}_{(+X_q A_m)} + \\
 &+ 3^{q-1} \varepsilon^{m+1} \Sigma N' N''_{(+X_1 X_2)} \dots N^{(q+1)}_{(+X_q A_m)} + \\
 &+ 3^{q-2} \varepsilon^{m+2} \Sigma N' N'' N'''_{(+X_2 X_3)} \dots N^{(q+1)}_{(+X_q A_m)} + \\
 &+ \dots + \\
 &+ \varepsilon^{m+q} \Sigma N' N'' \dots N^{(q)} N^{(q+1)}_{(+X_q A_m)},
 \end{aligned} \tag{41}$$

wo die unter den Summenzeichen zusammengefassten Komplexe sämtliche Produkte von  $k$  absoluten und  $q + 1 - k$  bedingten Farbeninvarianten enthalten, sobald  $3^{q-k} \varepsilon^{m+k}$  der Koeffizient des Komplexes ist.

### 10. Reduktion bedingter Farbeninvarianten.

Zur Bestimmung der absoluten Farbeninvariante  $N$  reichen die Formeln (37) resp. (41) noch nicht aus, weil dort rechts bedingte Farbeninvarianten auftreten, welche gleichfalls eine Reduktion erfordern. Da nach § 8 das Residuum, in dem diese bedingten Farbeninvarianten auftreten, stets als irreduzibel angenommen werden darf, so genügt es wiederum, Reduktionsformeln bedingter Farbeninvarianten ausschliesslich für irreduzible Netze aufzustellen.

In den Formeln des vorigen Paragraphen bedeuteten  $A_0, A_m$  zwei Randknoten eines, jetzt als irreduzibel vorausgesetzten, Normalnetzes ( $i-1$ -ter Ordnung; dabei erschienen  $A_0, A_m$  mit einem „zwischenliegenden“ Randknoten  $P$  benachbart, d. h. direkt verbunden. Wir verallgemeinern unsere nächstliegende Aufgabe etwas, indem wir die letzte Bedingung fallen lassen, mithin eine allgemeinere relative Lage von  $A_0, A_m$  auf dem Rande eines irreduziblen Normalnetzes, dessen Ordnung nun wieder durch  $i$  bezeichnet sein soll, gestatten. Die Namen dieser beiden ausgezeichneten Knoten sollen zweckentsprechend abgeändert werden. Führt man eine Zerlegung in Fächer und Residuum aus, so hat

man drei prinzipiell verschiedene Lagenmöglichkeiten des ausgezeichneten Knotenpaares :

- 1) beide Knoten, jetzt  $R_1$  und  $R_2$  genannt, können dem Rande des Residuums angehören (Fig. 7);
- 2) beide Knoten, jetzt  $F_1$  und  $F_2$  genannt, können dem Rande des Fächers angehören (Fig. 8);
- 3) einer der beiden Knoten,  $R$ , kann zum Rande des Residuums, der andere,  $F$ , zum Rande des Fächers gehören.

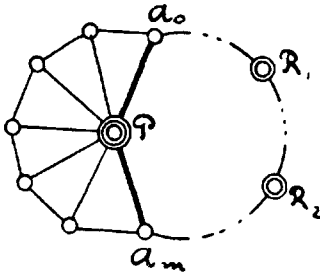


Fig. 7.

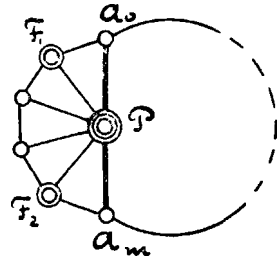


Fig. 8.

Es sei bemerkt, dass man durch Verkleinerung des Index  $m$  der Zerlegung stets zum ersten Fall gelangen kann, — jedoch darf dann nicht mehr allemal das Residuum als irreduzibel vorausgesetzt werden; hierdurch entstehen anderweitige Komplikationen, die unserer Fallunterscheidung äquivalent sind.

Die Behandlung des ersten Falles, d. h. die Bestimmung einer Reduktionsformel für  $\dot{N}_{(+R_1R_2)}^i$ , gestaltet sich höchst einfach, da zu den Voraussetzungen, unter denen (37) abgeleitet war, bloss die ergänzende Nebenbedingung hinzukommt, dass im Residuum  $R_1 \equiv R_2$  zu berücksichtigen ist. Die entsprechende Abänderung in (37) liefert dann

$$\dot{N}_{(+R_1R_2)}^i = a_m \dot{N}_{(+R_1R_2)}^{i-1} + e^m \dot{N}_{(+R_1R_2)}^{i-1} (+A_0A_m). \quad (42)$$

Hierzu ist nun noch zu bemerken, dass die beiden Paare  $R_1R_2$  und  $A_0A_m$  auf dem Rande des Residuums sich nicht gegenseitig trennen. Wohl aber können die Knoten  $R$  mit den

Knoten  $A$  zusammenfallen, oder auch beide  $R$  untereinander zusammenfallen; im letzteren Falle ist die Forderung  $R_1 \equiv R_2$  von selbst erfüllt, d. h.  $N_{(+R_1R_2)}$  wird mit  $N$  identisch.

Wir wenden uns nun zur zweiten Annahme. Es sei  $f$  die Anzahl der Maschen im Fächerteil  $PF_1F_2$ . Denkt man sich statt der tatsächlich ausgeführten Zerlegung zunächst nur eine Abtrennung dieses Fächerteiles vorgenommen, so darf man die für den ersten Fall gültige Formel (42) anwenden, wobei  $F_1$  an Stelle von  $R_1$  und  $A_0$ , und zugleich  $F_2$  an Stelle von  $R_2$  und  $A_m$  zu setzen ist. Da  $N_{(+XY)(+XY)}$  offenbar dasselbe bedeutet wie  $N_{(+XY)}$ , so folgt auf diese Weise:

$$\begin{aligned} N_{(+F_1F_2)}^i &= \alpha_f N_{(+F_1F_2)}^{i-1} + \varepsilon^f N_{(+F_1F_2)}^{i-1} = \\ &= (\alpha_f + \varepsilon^f) N_{(+F_1F_2)}^{i-1}. \end{aligned} \tag{43}$$

Der Strich bei  $N$  soll andeuten, dass nicht das Residuum für den Zerlegungsindex  $m$ , sondern dasjenige für den Index  $f$  gemeint ist. In letzterem Residuum sind nun aber sicher noch mindestens  $m - f$  von  $P$  ausgehende Querschnitte vorhanden, nämlich die zum Fächerteil  $PF_1F_2$  nicht zählenden Rippenfäden des Gesamtfächers  $PA_0A_m$ . Benutzt man dementsprechend die Formel (16), so zeigt sich, da für Dreiecke  $N = 1$ ,  $N_{(+XY)} = 0$  wird (letzteres unter Annahme nicht-zusammenfallender  $X, Y$ ),

$$N_{(+F_1F_2)}^{i-1} = \varepsilon^{m-f} N_{(+A_0A_m)}^{i-1} + \alpha_{m-f} N^{i-1}, \tag{44}$$

denn es verbleiben dann in der rechten Seite von (16) nur diejenigen beiden Glieder, die keine bedingte Farbeninvariante eines Dreiecks als Faktor enthalten. Wird dies in (43) eingeführt, so findet man mit Hilfe von (15)

$$N_{(+F_1F_2)}^i = 2\alpha_{f-1} \left\{ \alpha_{m-f} N^{i-1} + \varepsilon^{m-f} N_{(+A_0A_m)}^{i-1} \right\}, \tag{45}$$

womit auch die zweite Annahme erledigt ist. Es unterscheidet sich die Formel (45) von (42) dadurch, dass sozusagen  $f$  Fächermaschen gestrichen sind, dafür aber der Faktor  $2\alpha_{f-1}$  hinzukommt.

## 11. Untersuchung der dritten Annahme.

Zur Ableitung der Reduktionsformel bei der dritten Annahme bedarf es einiger Vorbereitungen.

Wir betrachten zunächst ein reduzibles Normalnetz, von dem der Querschnitt  $PA_1$  (Fig. 10) eine dreieckige Masche  $PA_1A_0$  abtrennt. Das danach verbleibende Teilnetz II ist von derselben Ordnung, wie das Gesamtnetz; wir kennzeichnen seine Farbeninvarianten durch Strichelung, während für das Gesamtnetz die gewöhnliche Bezeichnung ohne Strich verwendet werden soll.

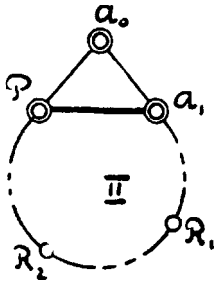


Fig. 10.

Sind  $R_1, R_2$  zwei Randknoten von II, für die  $R_1 \equiv R_2$  gefordert wird, so ist sofort ersichtlich, dass jede derartige Vierfarbenbezeichnung von II noch mit den 2 freibleibenden Bezeichnungsarten der Spitze  $A_0$  kombiniert werden darf. Dies führt zur Relation

$$N_{(+R_1R_2)} = 2N'_{(+R_1R_2)}, \quad (46)$$

die in gewissem Sinne eine Verallgemeinerung von (5) darstellt.

Ist nun aber  $R$  ein beliebiger der beiden Knoten  $R_1, R_2$ , und wird  $N_{(+A_0R)}$  gesucht, so hat man zu beachten, dass diejenigen und nur diejenigen Vierfarbenbezeichnungen von II in Betracht kommen, welche  $R \neq A_1$  und zugleich  $R \neq P$  liefern. Da durch die Forderung  $A_0 \equiv R$  die Bezeichnung von  $A_0$  dann schon eindeutig vorgeschrieben ist, so führt jede dieser Vierfarbenbezeichnungen von II auch zu einer und nur einer bedingten Vierfarbenbezeichnung im Gesamtnetz. Weil nun eine Vierfarbenbezeichnung mit der Nebenforderung  $R \equiv A_1$  notwendigerweise  $R \neq P$  fordert (sonst wären nämlich die benachbarten Knoten  $P$  und  $A_1$  identisch gefärbt, was nicht angeht), so gelangt man zur Formel

$$\begin{aligned} N_{(+RA_0)} &= N'_{(-RA_1)(-RP)} = \\ &= N' - N'_{(+RA_1)} - N'_{(+RP)}. \end{aligned} \quad (47)$$

Die Formeln (46) und (47) sollen nun verallgemeinert werden für den Fall der Existenz von  $q$  Querschnitten  $PA_1, PA_2, \dots, PA_q$ , die vom Gesamtnetz der Reihe nach  $q$  Dreiecke abtrennen und ein Restnetz II übrig lassen (Fig. 11). Sind  $R_1, R_2$  wieder Randknoten von II, so erhält man durch vollständige Induktion

$$N_{(+R_1R_2)} = 2^q N'_{(+R_1R_2)}, \tag{48}$$

als Verallgemeinerung von (46). Gleichfalls durch vollständige Induktion beweisen wir ferner die Relation

$$\begin{aligned} N_{(+RA_0)} &= \alpha_q \{N' - N'_{(+RP)}\} + \varepsilon^q N'_{(+RA_q)} = \\ &= \alpha_q N'_{(-RP)} + \varepsilon^q N'_{(+RA_q)}, \end{aligned} \tag{49}$$

wo  $R$  jeden der Punkte  $R_1, R_2$  bedeuten kann. Bei  $q=1$  folgt (47) als Spezialfall aus (49). Ist (49) für irgendein  $q$  stets gültig, so hat man im Falle der Existenz eines  $(q+1)$ -ten Querschnittes  $PA_{q+1}$ , der von II noch ein Dreieck abspaltet, auf Grund von (46) und (49):

$$\begin{aligned} N_{(+RA_0)} &= \alpha_q \{2N'' - 2N''_{(+RP)}\} + \\ &+ \varepsilon^q \{N'' - N''_{(+RA_{q+1})} - N''_{(+RP)}\}, \end{aligned} \tag{50}$$

wobei der Doppelstrich bei den Farbeninvarianten rechts das nach Abtrennung der Masche  $PA_qA_{q+1}$  von II verbleibende Teilnetz charakterisiert. Auf Grund von (15) erhält man hieraus sofort:

$$N_{(+RA_0)} = \alpha_{q+1} \{N'' - N''_{(+RP)}\} + \varepsilon^{q+1} N''_{(+RA_{q+1})}. \tag{51}$$

Damit ist die Allgemeingültigkeit von (49) bewiesen.

Wir bemerken ferner, dass in dem Falle, wo noch andere Nebenbedingungen der im § 2 erwähnten Gattungen auftreten, jedoch nur solche, die sich nicht auf die Knoten  $A_0, A_1, A_2, \dots, A_{q-1}$  beziehen, sondern nur Randknoten des Teilnetzes II

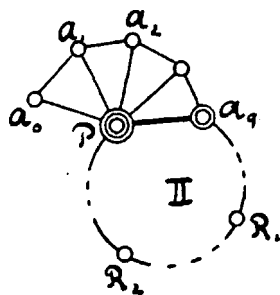


Fig. 11.

berücksichtigen, sämtliche Betrachtungen, die zu den Formeln (48), (49) führten, sich Wort für Wort wiederholen lassen, nur müssen rechts in den Farbeninvarianten von  $\Pi$  die neu hinzugetretenen Nebenbedingungen konsequent hinzugenommen werden. Fasst man die neuen Nebenbedingungen der ersten Gattung (§ 2) kurz unter dem Symbol  $(+M)$ , diejenigen der zweiten Gattung unter dem Symbol  $(-L)$  zusammen, so können wir statt (48) und (49) folgende, noch allgemeinere Relationen schreiben:

$$N_{(+M)(-L)(+R_1R_2)} = 2^q N'_{(+M)(-L)(+R_1R_2)}, \quad (52)$$

$$\begin{aligned} & N_{(+M)(-L)(+RA_0)} = \\ & = \alpha_q \{ N'_{(+M)(-L)} - N'_{(+M)(-L)(+RP)} \} + \varepsilon^q N'_{(+M)(-L)(+RA_q)}. \end{aligned} \quad (53)$$

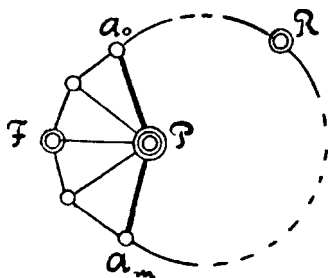


Fig. 9.

Die dritte Annahme des vorigen Paragraphen lässt sich nun leicht erledigen. An Stelle der tatsächlich ausgeführten Zerlegung (Fig. 9) fixieren wir zunächst eine solche, die nur den Fächer  $PFA_m$  abspaltet. Ist  $d$  die Anzahl der Maschen im Fächer  $PFA_0$ , so wird der Index dieser Hilfszerlegung gleich  $m - d$ , und es darf (42) angewandt werden. Man erhält so

$$N_{(+FR)}^i = \alpha_{m-d} N_{(+FR)}^{i-1} + \varepsilon^{m-d} N_{(+FR)(+FA_m)}^{i-1}, \quad (54)$$

wobei die Strichelung rechts andeutet, dass es sich um Farbeninvarianten des Residuums der Hilfszerlegung handelt. Auf Grund von (53) ist jedoch

$$N_{(+FR)}^{i-1} = \alpha_d \{ N_{(+FR)}^{i-1} - N_{(+FR)(+RP)}^{i-1} \} + \varepsilon^d N_{(+FR)(+RA_0)}^{i-1}, \quad (55)$$

$$\begin{aligned} & N_{(+FR)(+FA_m)}^{i-1} = N_{(+FR)(+RA_m)}^i = \\ & = \alpha_d \{ N_{(+RA_m)}^{i-1} - N_{(+RA_m)(+RP)}^{i-1} \} + \varepsilon^d N_{(+RA_m)(+RA_0)}^{i-1}, \end{aligned} \quad (56)$$

denn die Forderungen  $F \equiv R$ ,  $F \equiv A_m$ , sind den Forderungen  $F \equiv R$ ,  $R \equiv A_m$  gleichbedeutend. Werden (55) und (56) in (54) eingeführt, so erhält man die gesuchte Reduktion der Farbeninvariante für die dritte Annahme:

$$\begin{aligned} \dot{N}_{(+FR)}^i &= \alpha_{m-d} \alpha_d \left\{ N_{(+RP)}^{i-1} - N_{(+RP)}^{i-1} \right\} + \varepsilon^{m-d} \alpha_d N_{(+RA_m)}^{i-1} + \\ &+ \alpha_{m-d} \varepsilon^d N_{(+A_0R)}^{i-1} + \varepsilon^{m-d} \varepsilon^d N_{(+A_0R)}^{i-1} (+RA_m) . \end{aligned} \tag{57}$$

## 12. Die Auslese.

Auch die Formeln der beiden letzten Paragraphen geben noch nicht die Möglichkeit einer stets anwendbaren rekurrenten Berechnung der Farbeninvarianten, weil die Anzahl der Nebenbedingungen, die im Residuum zu erfüllen sind, wächst und die gegenseitige Lage der zu berücksichtigenden Randknotenpaare sich zu komplizieren scheint. Wir werden jedoch sehen, dass allemal nur solche Paarkombinationen in Betracht gezogen zu werden brauchen, in denen keine zwei Paare auf dem Rande des Netzes sich gegenseitig trennen. Einen solchen Komplex ausgezeichneter Randknotenpaare wollen wir fernerhin eine Auslese nennen. Ist die Anzahl der Paare einer Auslese gleich null, so reden wir auch von einer verschwindenden Auslese. Enthält die Kombination ein einziges Paar, so ist sie stets eine Auslese.

Eine Auslese kann positive Paare  $(+AB)$  und negative Paare  $(-XY)$  enthalten, — erstere fordern in der Vierfarbenbezeichnung  $A \equiv B$ , letztere  $X \neq Y$ . Jedenfalls bilden aber dann sowohl die positiven Paare für sich allein, als auch die negativen Paare allein schon eine Auslese; erstere möge kurz mit  $(+M)$ , letztere mit  $(-L)$  bezeichnet sein. Sind  $(+AB)$  und  $(+AC)$  in der Auslese vorhanden, so ist damit eo ipso die Forderung  $B \equiv C$  gestellt, — ohne dass  $(+BC)$  in  $(+M)$  ausdrücklich genannt zu sein braucht; ja es kann vorkommen, dass  $(+BC)$  in  $(+M)$  gar nicht genannt werden darf, weil  $(+M)$  der Definition der Auslese dann nicht mehr genügen würde. Wir nennen allemal das Paar  $BC$  ein von  $(+M)$  abhängiges Paar, gleichviel, ob es in  $(+M)$  ausdrücklich genannt ist oder nicht; allgemeiner soll ein Paar  $PQ$  ein von  $(+M)$  abhängiges Paar heissen, sobald

$P \equiv Q$  eine logische<sup>4)</sup> Konsequenz der in  $(+M)$  enthaltenen Forderungen ist, ohne Bezugnahme auf Relationen geometrischer Natur. Widrigenfalls ist  $(PQ)$  ein von  $(+M)$  unabhängiges Paar.

Sollte ein in  $(-L)$  genanntes Paar von  $(+M)$  abhängig sein, so wird die gleichzeitige Erfüllung der Forderungen  $(+M)(-L)$  aus rein logischen Gründen unmöglich. Wir sagen dann, die Auslese  $(+M)(-L)$  enthalte einen Widerspruch. Sind die beiden Knoten eines von  $(+M)$  abhängigen Paares benachbart, d. h. durch einen Faden des Netzes direkt verbunden, so ist schon die Forderung  $(+M)$  unerfüllbar. Auch hier sprechen wir von einem in der Auslese enthaltenen Widerspruch.

Eine Auslese  $(+M)(-L)$  soll widerspruchsfrei heissen, sobald sie keinen der beiden hier genannten Widersprüche enthält. Auf die wichtige Bedeutung dieses Begriffs kommen wir am Schluss der vorliegenden Arbeit noch zu sprechen.

Unser nächstes Ziel ist zu zeigen, wie sich die Berechnung der durch eine Auslese bedingten Farbeninvariante eines irreduziblen Normalnetzes  $i$ -ter Ordnung auf die Berechnung wiederum durch Auslesen bedingter Farbeninvarianten des Residuums reduziert. Es genügt hierbei die Reduktion für den Fall einer ausschliesslich positiven Auslese zu kennen, da, wie gleich bewiesen werden soll, die Beziehung

$$\begin{aligned}
 N_{(+M)(-L)} &= N_{(+M)} - \sum_{\mu=1}^t N_{(+M)(+X_\mu Y_\mu)} + \\
 &\quad + \sum_{\substack{\mu, \nu=1 \\ \mu \neq \nu}}^t N_{(+M)(+X_\mu Y_\mu)(+X_\nu Y_\nu)} + \\
 &\quad + \dots + \\
 &\quad + \varepsilon^t N_{(+M)(+X_1 Y_1)(+X_2 Y_2) \dots (+X_t Y_t)}
 \end{aligned} \tag{58}$$

besteht, wenn  $(-L)$  sich aus den Paaren  $(-X_1 Y_1)$ ,  $(-X_2 Y_2)$ ,  $\dots$ ,  $(-X_t Y_t)$  zusammensetzt. Aus (58) lässt sich die Farbeninvariante für eine beliebige Auslese berechnen, sobald man sämtliche Farbeninvarianten für positive Auslesen kennt.

Die Richtigkeit der Relation (58) erkennt man durch vollständige Induktion. Für  $t = 1$  ist sie offenbar richtig, — wir

4) D. h. eigentlich, sobald  $P \equiv Q$  aus der Forderung  $(+M)$  allein auf Grund der Transitivität des Begriffs der Identität folgt.

haben sie in diesem Falle auch schon in der speziellen Form, wo  $(+M)$  verschwindet, früher benutzt. Ist (58) aber für  $t$  richtig, und wird dann  $(-L)$  um ein Paar  $(-X_{t+1} Y_{t+1})$  bereichert, so hat man jedenfalls

$$\begin{aligned} & N_{(+M)(-L)(-X_{t+1} Y_{t+1})} = \\ & = N_{(+M)(-L)} - N_{(+M)(-L)(+X_{t+1} Y_{t+1})} , \end{aligned} \tag{59}$$

wie eine einfache Überlegung zeigt. Wird dies nun mit (58) verknüpft, so folgt

$$\begin{aligned} N_{(+M)(-L)(-X_{t+1} Y_{t+1})} &= N_{(+M)} - \sum_{\mu=1}^t N_{(+M)(+X_{\mu} Y_{\mu})} + \\ &+ \dots + \varepsilon^t N_{(+M)(+L)} - N_{(+M)(+X_{t+1} Y_{t+1})} + \\ &+ \sum_{\mu=1}^t N_{(+M)(+X_{t+1} Y_{t+1})(+X_{\mu} Y_{\mu})} + \dots + \\ &+ \varepsilon^{t+1} N_{(+M)(+X_{t+1} Y_{t+1})(+L)} . \end{aligned} \tag{60}$$

Anders geschrieben lautet hier die rechte Seite:

$$\begin{aligned} & N_{(+M)} - \sum_{\mu=1}^{t+1} N_{(+M)(+X_{\mu} Y_{\mu})} + \sum_{\substack{\mu, \nu=1 \\ \mu \neq \nu}}^{t+1} N_{(+M)(+X_{\mu} Y_{\mu})(+X_{\nu} Y_{\nu})} - \\ & - \dots + \\ & + \varepsilon^{t+1} N_{(+M)(+X_1 Y_1)(+X_2 Y_2) \dots (+X_{t+1} Y_{t+1})} . \end{aligned} \tag{61}$$

Da dies wieder vom Typus (58) ist, so ist die Formel bewiesen.

Beiläufig sei bemerkt, dass zugleich mit (58) auch die sozusagen polare Relation

$$\begin{aligned} N_{(+M)(+L)} &= N_{(+M)} - \sum_{\mu=1}^t N_{(+M)(-X_{\mu} Y_{\mu})} + \\ &+ \sum_{\substack{\mu, \nu=1 \\ \mu \neq \nu}}^t N_{(+M)(-X_{\mu} Y_{\mu})(-X_{\nu} Y_{\nu})} + \\ &+ \dots + \\ &+ \varepsilon^t N_{(+M)(-X_1 Y_1)(-X_2 Y_2) \dots (-X_t Y_t)} \end{aligned} \tag{62}$$

gilt, wie durch vollständige Induktion bewiesen werden kann. Auch allgemeinere analoge Beziehungen lassen sich ohne Schwierigkeiten angeben.

### 13. Reduzierte Maschenzahlen im Fächer.

Es sei auf dem Rande eines irreduziblen Normalnetzes eine positive Auslese fixiert. Wie verteilen sich die Komponenten der entsprechenden Knotenpaare auf Fächer und Residuum bei einer gegebenen Zerlegung dieses Netzes?

Die Knotenpaare der Auslese zerfallen in 3 Kategorien:

1) ein Knoten des Paares kann auf dem Fächer, der andere auf dem Residuum liegen; wir fassen solche Paare kurz unter dem Symbol  $(FR)$  zusammen;

2) beide Knoten des Paares können dem Fächer angehören; diese Kategorie werde durch das Symbol  $(FF)$  gekennzeichnet;

3) beide Knoten des Paares können auf dem Residuum liegen; als Symbol dieser Kategorie diene  $(RR)$ .

Wir zählen die Paare  $(FR)$  in der Reihenfolge der Knoten  $F$  auf dem Fächerrande ab, indem wir auf diesem Fächerrande eine Fortschreitungsrichtung fixieren und die  $F$ -Knoten dieser Paarkategorie in der durch diese Richtung bestimmten Reihenfolge als  $F_1, F_2, F_3, \dots, F_t$  bezeichnen. Es ist hierbei möglich, dass eventuell  $F_\mu$  mit  $F_{\mu+1}$  zusammenfällt; man kann die Bezeichnung aber stets so wählen, dass gleichzeitig die zugehörigen  $R$ -Knoten, die demnach  $R_1, R_2, R_3, \dots, R_t$  wären, auf dem Rande des Residuums aufeinanderfolgen, wobei allerdings benachbarte  $R$  dieser Reihenfolge auch zusammenfallen können. Die zugehörige Fortschreitungsrichtung auf dem Residuumrand ist der auf dem Fächerrand gewählten Richtung entgegengesetzt. Ist  $F_\mu$  von  $F_{\mu+v}$  verschieden, so kann  $R_{\mu+v}$  auf dem Residuumrand nicht dem Knoten  $R_\mu$  vorangehen, weil sonst die Paare  $(F_\mu R_\mu)$  und  $(F_{\mu+v} R_{\mu+v})$ , gegen die Annahme, sich gegenseitig trennen würden. Sind aber  $F_\mu$  und  $F_{\mu+v}$  identische Knoten, so müssen  $R_\mu, R_{\mu+1}, R_{\mu+2}, \dots, R_{\mu+v}$  sicher untereinander verschiedene Knoten sein; ihre Reihenfolge bestimmt dann die Numeration der (zusammenfallenden) Knoten  $F_\mu, F_{\mu+1}, F_{\mu+2}, \dots, F_{\mu+v}$ . Die somit wohldefinierte Abzählung der Paare  $(FR)$  teilt sowohl den Fächerrand, als auch den Residuumrand in nicht übereinandergreifende Teilbögen; verwendet man zur Bezeichnung der Fächer-

enden, d. h. der früher  $A_0$  und  $A_m$  genannten Knoten, wo Fächerrand und Residuumrand zusammenstossen, gleichbedeutend  $F_0$  oder  $R_0$  statt  $A_0$ ,  $F_{t+1}$  oder  $R_{t+1}$  statt  $A_m$ , so sind die Fächerrandteile entsprechend  $F_0 F_1$ ,  $F_1 F_2$ , . . . . ,  $F_{t-1} F_t$ ,  $F_t F_{t+1}$ , und die Residuumrandteile  $R_0 R_1$ ,  $R_1 R_2$ , . . . . ,  $R_{t-1} R_t$ ,  $R_t R_{t+1}$ . Einzelne dieser Teilbögen können in einen Knoten ausarten. Die Gesamtheit der Teilbögen erschöpft den ganzen Netzrand.

Beide Knoten eines Paares der Kategorie  $(FF)$  müssen dann jedenfalls ein und demselben Teilbogen  $F_\mu F_{\mu+1}$  des Fächerrandes angehören, weil widrigenfalls dieses Paar aus  $(FF)$  entweder das Paar  $(F_\mu R_\mu)$  oder das Paar  $(F_{\mu+1} R_{\mu+1})$  trennen würde.

Ebenso erkennt man, dass beide Knoten eines Paares der Kategorie  $(RR)$  ein und demselben Teilbogen  $R_\mu R_{\mu+1}$  des Residuumrandes angehören müssen, weil sonst dieses Paar entweder  $(F_\mu R_\mu)$  oder  $(F_{\mu+1} R_{\mu+1})$  trennen würde.

Es verteilen sich also sowohl die Paare  $(FF)$ , als auch die Paare  $(RR)$ , nach der Zugehörigkeit zu Teilbögen des Netzrandes in Komplexe. Jedem Paar  $(FF)$  entspricht ein Teilfächer, dessen Enden die Knoten dieses Paares sind; die Maschen dieses Teilfächers mögen als zu diesem Paare gehörige Maschen bezeichnet werden, ihre Anzahl nennen wir die Maschenzahl des Paares. Analog entspricht jedem Randbogen  $F_\mu F_{\mu+1}$  ein Teilfächer mit zugehöriger Maschenzahl.

Wir bezeichnen die Paare  $(FF)$  in irgendeiner Anordnung als  $(G_1 H_1)$ ,  $(G_2 H_2)$ , . . . ,  $(G_s H_s)$ . Die zu zwei solchen Paaren gehörigen Teilfächer besitzen entweder keine gemeinsamen Maschen, — wir sprechen dann von nebeneinander gelegenen Paaren, — oder aber es ist einer der beiden Teilfächer ein echter Teil des anderen, — die Paare sollen dann übereinander gelegen heissen. Letzterer Fall kann nur dann eintreten, wenn beide Paare dem gleichen Teilbogen  $F_\mu F_{\mu+1}$  angehören. In der Fig. 12 sind  $(G_1 H_1)$  und  $(G_2 H_2)$  übereinandergelegene,  $(G_1 H_1)$  und  $(G_3 H_3)$  nebeneinandergelegene Paare. Da die Anzahl der Knoten im Netz endlich ist, so lassen sich unter den  $(FF)$  stets sicher solche Paare finden, deren zugehörige Maschen nicht alle gleichzeitig ein und demselben anderen Paare aus  $(FF)$  angehören. Wir bezeichnen solche Paare als Maximalpaare

in  $(FF)$ . Desgleichen existieren allemal solche Paare in  $(FF)$ , zu welchen kein anderes Paar aus  $(FF)$  angebar ist, dessen zugehörige Maschen einen echten Teil der Maschen der erstgenannten Paare ausmachen; diese Paare mögen Minimalpaare heißen. Nennt man bei zwei übereinandergelegenen Paaren dasjenige, dessen Teilfächer kleiner ist, das niedrigere Paar, das andere das höhere Paar, so besitzt ein Maximalpaar also kein höheres, ein Minimalpaar dagegen kein niedrigeres Paar in  $(FF)$ . Ein und dasselbe Paar kann hierbei gleichzeitig Maximal- und Minimalpaar sein.

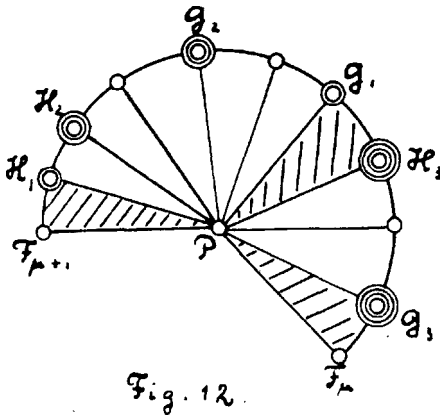


Fig. 12.

Streicht man von den Maschen eines Paares  $(G_\nu, H_\nu)$  alle diejenigen, die zugleich niedrigeren Paaren angehören, zählt dann die noch verbliebenen Maschen von  $(G_\nu, H_\nu)$ , so kommt man zu einer Anzahl, die wir die reduzierte Maschenzahl des Paares  $(G_\nu, H_\nu)$  resp. des zugehörigen

Teilfächers nennen wollen. Für die Fig. 12 sind z. B. die reduzierten Maschenzahlen der Paare  $(G_1, H_1)$ ,  $(G_2, H_2)$ ,  $(G_3, H_3)$  entsprechend 3, 2, 2. Die bei der Bestimmung der reduzierten Maschenzahl zu zählenden Maschen sollen die reduzierten Maschen des betreffenden Paares heißen.

Analog definieren wir die reduzierte Maschenzahl des Bogens  $F_\mu F_{\mu+1}$  als Anzahl derjenigen Maschen (in der Fig. 12 schraffiert), die für diesen Bogen noch verbleiben, nachdem man alle Maschen fortlässt, die Paaren aus  $(FF)$  angehören.

Enthält der Bogen  $F_\mu F_{\mu+1}$  insgesamt  $d$  Maschen, sind dabei  $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_k$  die reduzierten Maschenzahlen der zu diesem Bogen gehörigen Paare aus  $(FF)$ , bedeutet ferner  $\varrho$  die reduzierte Maschenzahl des Bogens  $F_\mu F_{\mu+1}$ , so gilt die evidente Relation:

$$\varphi_1 + \varphi_2 + \varphi_3 + \dots + \varphi_k + \varrho = d. \quad (63)$$

#### 14. Verallgemeinerung früher abgeleiteter Hilfsformeln.

Wir schreiten nun zu einer Verallgemeinerung der Formeln (48), (49).

Die bedingten Farbeninvarianten in diesen Formeln berücksichtigen nur je ein Knotenpaar der betreffenden Netze. So figuriert in (48) das einzige ausgezeichnete Knotenpaar  $(R_1R_2)$  — s. Fig. 11. Wählt man statt dessen aber nun eine auf dem Restnetz II gelegene beliebige Auslese  $(RR)$ , so lassen sich die Erörterungen des § 11 Wort für Wort wiederholen, nur muss statt  $(R_1R_2)$  die gesamte positive Forderung  $(+RR)$  berücksichtigt werden, womit man zur Formel

$$N_{(+RR)} = 2^q N'_{(+RR)} \quad (64)$$

gelangt.

Es sei analog bei (49) ausser der Forderung  $(+RA_0)$ , die wir nun  $(+R_1A_0)$  schreiben wollen, noch eine auf dem Restnetz II gelegene Auslese  $(+RR)$  zu beachten, jedoch von der speziellen Art, dass das Paar  $(R_1A_0)$  keines der Paare  $(RR)$  trennt, so dass also auch die Vereinigung  $(R_1A_0)(RR)$  eine Auslese darstellt. Durch wortgetreue Wiederholung der entsprechenden Ausführungen des § 11, unter Berücksichtigung der Nebenforderungen  $(+RR)$ , erkennt man die Richtigkeit der Formel:

$$\begin{aligned} N_{(+R_1A_0)(+RR)} &= \\ &= \alpha_q \{ N'_{(+RR)} - N'_{(+RR)(+R_1P)} \} + \varepsilon^q N'_{(+RR)(+R_1A_q)}. \end{aligned} \quad (65)$$

Hier wäre noch zu beachten, dass  $(R_1P)$  ein Paar aus  $(RR)$ , ebenso  $(R_1A_q)$  ein Paar aus  $(RR)$  nur dann auf dem Rande von II trennen kann, wenn  $(R_1A_0)$  dasselbe Paar aus  $(RR)$  auf dem Rande des Gesamtnetzes trennt. Es bilden daher die Paarkombinationen  $(RR)(R_1P)$  und  $(RR)(R_1A_q)$  auf dem Rande von II wieder Auslesen.

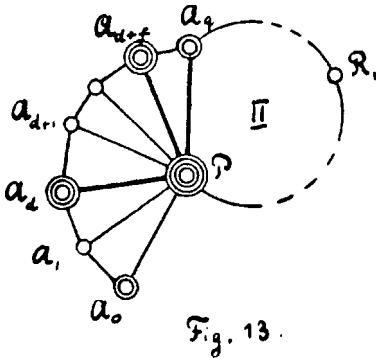
Im Spezialfall, wo  $R_1$  mit  $A_q$  zusammenfällt, ergibt (65):

$$\begin{aligned} N_{(+A_qA_0)(+RR)} &= \\ &= \alpha_q \{ N'_{(+RR)} - N'_{(+RR)(+A_qP)} \} + \varepsilon^q N'_{(+RR)(+A_qA_q)} = \\ &= \alpha_q N'_{(+RR)} + \varepsilon^q N'_{(+RR)} = 2\alpha_{q-1} N'_{(+RR)}, \end{aligned} \quad (66)$$

weil die Forderung  $(+A_qP)$  einen Widerspruch enthält (vgl. § 12), und  $(+A_qA_q)$  von selbst erfüllt ist.

Es werde nun den bisherigen Forderungen noch die Bedingung  $A_d \equiv A_{d+f}$  hinzugefügt (Fig. 13); dabei bildet offenbar sowohl  $(RR)(A_dA_{d+f})$  als auch  $(RR)(A_qR_1)(A_dA_{d+f})$  eine Auslese.

Die Berechnung von  $N_{(+A_dA_{d+f})(+RR)}$  kann schrittweise ausgeführt werden, indem man vom Gesamtnetz zuerst den



$d$ -maschigen Teil  $A_0PA_d$  abtrennt (die Farbeninvarianten des zugehörigen Restnetzes seien durch Tripelstrich gekennzeichnet), — hierauf noch den  $f$ -maschigen Teil  $A_dPA_{d+f}$  abtrennt (für die Farbeninvarianten des Restnetzes der Doppelstrich), endlich die noch übrigen  $q-d-f$  Maschen des Teiles  $A_{d+f}PA_q$  abtrennt (für das Restnetz der einfache Strich).

Auf Grund von (64) und (66) findet man dann:

$$\begin{aligned} N_{(+A_dA_{d+f})(+RR)} &= 2^d N'''_{(+A_dA_{d+f})(+RR)} = \\ &= 2^d \cdot 2\alpha_{f-1} N''_{(+RR)} = 2^d \cdot 2\alpha_{f-1} \cdot 2^{q-d-f} N'_{(+RR)} = \\ &= 2^{q-f} \cdot 2\alpha_{f-1} N'_{(+RR)}. \end{aligned} \quad (67)$$

Analog berechnet sich  $N_{(+A_0R_1)(+A_dA_{d+f})(+RR)}$ :

$$\begin{aligned} &N_{(+A_0R_1)(+A_dA_{d+f})(+RR)} = \\ &= \alpha_d \{ N'''_{(+A_dA_{d+f})(+RR)} - N'''_{(+A_dA_{d+f})(+R_1P)(+RR)} \} + \\ &\quad + \varepsilon^d N'''_{(+A_dA_{d+f})(+R_1A_d)(+RR)} = \\ &= 2\alpha_{f-1} \left\{ \alpha_d \{ N''_{(+RR)} - N''_{(+R_1P)(+RR)} \} + \varepsilon^d N''_{(+A_dR_1)(+RR)} \right\}, \end{aligned} \quad (68)$$

denn die Forderung  $(+A_dA_{d+f})(+RR)(+R_1A_d)$  ist mit  $(+A_dA_{d+f})(+RR)(+R_1A_{d+f})$  gleichbedeutend. Der letzte Schritt ergibt dann, unter Anwendung von (64) und (65):

$$\begin{aligned}
 & N_{(+A_0R_1)(+A_dA_{d+f})(+RR)} = \\
 & = 2\alpha_{f-1} \left\{ \alpha_d 2^{q-d-f} \{ N'_{(+RR)} - N'_{(+R_1P)(+RR)} \} + \right. \quad (69) \\
 & \left. + \varepsilon^d \left[ \alpha_{q-d-f} \{ N'_{(+RR)} - N'_{(+R_1P)(+RR)} \} + \varepsilon^{q-d-f} N'_{(+R_1A_q)(+RR)} \right] \right\}.
 \end{aligned}$$

Benutzt man hier die Relation (58) zur Einführung negativer Bedingungssymbole, so findet man bei  $N'_{(+RR)(-R_1P)}$  den Koeffizienten  $2^{q-d-f}\alpha_d + \varepsilon^d\alpha_{q-d-f}$ . Nun ist aber

$$\begin{aligned}
 2^v\alpha_\mu + \alpha_\nu\varepsilon^\mu &= 2^v\alpha_\mu + \alpha_\nu(2\alpha_{\mu-1} - \alpha_\mu) = (2^v - \alpha_\nu)\alpha_\mu + 2\alpha_{\mu-1}\alpha_\nu = \\
 &= \alpha_{\nu+1}\alpha_\mu + 2\alpha_{\mu-1}\alpha_\nu = \alpha_{\mu+\nu}, \quad (70)
 \end{aligned}$$

auf Grund der Formeln (15), (31) und (32). Somit erhält man:

$$\begin{aligned}
 & N_{(+A_0R_1)(+A_dA_{d+f})(+RR)} = \\
 & = 2\alpha_{f-1} \left\{ \alpha_{q-f} N'_{(+RR)(-R_1P)} + \varepsilon^{q-f} N'_{(+RR)(+R_1A_q)} \right\}. \quad (71)
 \end{aligned}$$

Diese Formel unterscheidet sich von (65) nur dadurch, dass statt der Maschenzahl  $q$  des Fächers  $A_0PA_q$  die reduzierte Maschenzahl (§ 13)  $q-f$  genommen, und ausserdem der Faktor  $2\alpha_{f-1}$  hinzugefügt ist.

### 15. Weitere Verallgemeinerungen.

Statt des einzigen ausgezeichneten Paares  $A_dA_{d+f}$  möge nun auf dem Rande des Fächers  $A_0PA_q$  eine positive Auslese von Paaren  $(+G_\mu H_\mu)$  festgelegt sein; wir bezeichnen diese Auslese analog dem § 13 kurz als  $(FF)$ . Es seien  $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \dots, \varphi_t$  die reduzierten Maschenzahlen dieser Auslese,  $q$  die zugehörige reduzierte Maschenzahl des Fächers  $A_0PA_q$ . Wir beweisen dann folgende Verallgemeinerungen der Relationen (64) und (65):

$$N_{(+FF)(+RR)} = 2^q \cdot 2^t \cdot \alpha_{\varphi_1-1} \alpha_{\varphi_2-1} \dots \alpha_{\varphi_t-1} N'_{(+RR)}; \quad (72)$$

$$\begin{aligned}
 & N_{(+A_0R_1)(+FF)(+RR)} = \quad (73) \\
 & = 2^t \alpha_{\varphi_1-1} \alpha_{\varphi_2-1} \dots \alpha_{\varphi_t-1} \left\{ \alpha_q N'_{(+RR)(-R_1P)} + \varepsilon^q N'_{(+RR)(+A_qR_1)} \right\}.
 \end{aligned}$$

Man erkennt sofort in (67) und (71) Spezialfälle von (72), (73) für  $t = 1$ . Den Beweis der Allgemeingültigkeit von (72), (73) führen wir durch vollständige Induktion, wobei noch derjenige Spezialfall von (73) zu berücksichtigen ist, der sich ergibt, sobald  $R_1$  mit  $A_q$  zusammenfällt; es wird dann  $N_{(+RR)(+R_1P)} = 0$ ,  $N_{(+RR)(+R_1A_q)} = N_{(+RR)}$  und man hat:

$$N_{(+A_0A_q)(+FF)(+RR)} = 2^{t+1} \alpha_{\varphi_1-1} \alpha_{\varphi_2-1} \dots \alpha_{\varphi_t-1} \alpha_{\varphi-1} N'_{(+RR)} . \tag{74}$$

Sind die fraglichen Formeln bis zu einem gewissen  $t$ -Wert richtig, so zeigt sich die Richtigkeit für  $t+1$  auf folgende Weise:

Da in  $(FF)$  stets Maximalpaare vorkommen müssen (§ 13), so darf angenommen werden, dass das hinzugekommene Paar  $(G_{t+1}H_{t+1})$  ein Maximalpaar darstellt. Ist  $\varphi_{t+1}$  die reduzierte Maschenzahl dieses Paares, so bleiben die ohne  $(G_{t+1}H_{t+1})$  bestimmten reduzierten Maschenzahlen der übrigen Paare auch nach Hinzunahme von  $(G_{t+1}H_{t+1})$  unverändert, weil letzteres Paar ein Maximalpaar sein sollte, seine Maschen also keinem höheren Paare aus  $(FF)$  angehören dürfen. Dagegen verkleinert sich die

reduzierte Maschenzahl des Fächers  $A_0PA_q$  um genau  $\varphi_{t+1}$  Einheiten, weil sämtliche reduzierten Maschen von  $(G_{t+1}H_{t+1})$  vorhin zu den reduzierten Maschen des Fächers zählten. War  $\varrho$  die vorher bestimmte reduzierte Maschenzahl des Fächers  $A_0PA_q$ , so ist sie nun also gleich  $\varrho - \varphi_{t+1}$  zu setzen.

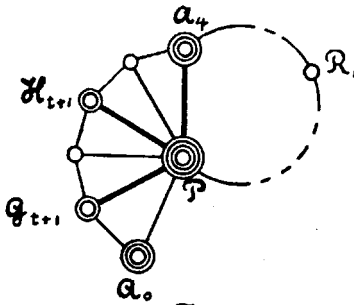


Fig. 14.

Der Gesamtfächer  $A_0PA_q$  (Fig. 14) sei nun in drei Teile —  $A_0PG_{t+1}$ ,  $G_{t+1}PH_{t+1}$ ,  $H_{t+1}PA_q$  — zerlegt, die

wir als ersten, zweiten, dritten Summanden ansprechen wollen. Im ersten Summanden seien  $\sigma$ , im letzten  $\tau$  reduzierte Maschen des Gesamtfächers vorhanden. Offenbar ist dann

$$\sigma + \varphi_{t+1} + \tau = \varrho . \tag{75}$$

Die  $t$  Paare der Auslese  $(FF)$  mögen so gezählt sein, dass die im ersten Summanden gelegenen Paare die Nummern 1 bis  $g$ ,

die im zweiten Summanden gelegenen die Nummern  $g + 1$  bis  $h$  die im dritten Summanden gelegenen die Nummern  $h + 1$  bis  $t$  erhalten. Dass tatsächlich die Paare aus  $(FF)$  sich alle auf die einzelnen Summanden verteilen, folgt aus dem Umstande, dass  $(FF)(G_{t+1}H_{t+1})$  eine Auslese darstellen soll, in der zudem noch  $(G_{t+1}H_{t+1})$  ein Maximalpaar sein muss.

Die Berechnung von  $N_{(+G_{t+1}H_{t+1})}(+FF)(+RR)$  und  $N_{(+A_0R_1)(+G_{t+1}H_{t+1})}(+FF)(+RR)$  führen wir in drei Schritten aus, indem wir zunächst den ersten, dann den zweiten, dann den dritten Summanden vom Gesamtnetz abspalten. Für die verbleibenden Restnetze verwenden wir entsprechend den dreifachen, doppelten und einfachen Strich. Die zum zweiten Summanden gehörigen Paare der Auslese  $(FF)$  wollen wir noch für den Augenblick mit  $(\underline{FF})$ , die zum dritten Summanden gehörigen mit  $(\overline{FF})$  symbolisieren. Weil keiner der Summanden mehr als  $t$  Paare  $(FF)$  enthält, so darf bei der Rechnung (72), (73) und (74) benutzt werden. Man findet:

$$\begin{aligned} N_{(+G_{t+1}H_{t+1})}(+FF)(+RR) &= \tag{76} \\ &= 2^g \alpha_{\varphi_1-1} \alpha_{\varphi_2-1} \dots \alpha_{\varphi_g-1} N'''_{(+G_{t+1}H_{t+1})}(\underline{FF})(\overline{FF})(+RR) = \\ &= 2^g \alpha_{\varphi_1-1} \dots \alpha_{\varphi_{g-1}} \cdot 2^{h-g+1} \alpha_{\varphi_{g+1}-1} \dots \alpha_{\varphi_h-1} \alpha_{\varphi_{t+1}-1} N''_{(+\underline{FF})(+\overline{FF})} = \\ &= 2^g \alpha_{\varphi_1-1} \dots \alpha_{\varphi_{g-1}} \cdot 2^{h-g+1} \alpha_{\varphi_{g+1}-1} \dots \alpha_{\varphi_h-1} \alpha_{\varphi_{t+1}-1} \cdot 2^{t-h} \alpha_{\varphi_{h+1}-1} \dots \\ &\quad \dots \alpha_{\varphi_t-1} N'_{(+RR)} = 2^{t+1} \alpha_{\varphi_1-1} \alpha_{\varphi_2-1} \dots \alpha_{\varphi_t-1} \alpha_{\varphi_{t+1}-1} N'_{(+RR)}, \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} N_{(+A_0R_1)(+G_{t+1}H_{t+1})}(+FF)(+RR) &= \\ &= 2^g \alpha_{\varphi_1-1} \dots \alpha_{\varphi_{g-1}} \left\{ \alpha_{\sigma} N'''_{(+G_{t+1}H_{t+1})}(\underline{FF})(\overline{FF})(+RR)(-R_1P) + \right. \\ &\quad \left. + \varepsilon^{\sigma} N'''_{(+G_{t+1}H_{t+1})}(\underline{FF})(\overline{FF})(+R_1G_{t+1}) \right\}; \end{aligned}$$

an dieser Stelle ist zu beachten,<sup>2</sup> dass  $(+\underline{FF})(+\overline{FF})(+G_{t+1}H_{t+1})(+R_1G_{t+1})$  mit  $(+\underline{FF})(+\overline{FF})(+G_{t+1}H_{t+1})(+R_1H_{t+1})$  gleichbedeutend ist, wodurch die weitere Umformung ermöglicht wird. Mit Hilfe von (74) erhält man dann:

$$\begin{aligned}
& N_{(+A_0R_1)(+G_{t+1}H_{t+1})}(+FF)(+RR) = \\
& = 2^g \alpha_{\varphi_1-1} \dots \alpha_{\varphi_g-1} \cdot 2^{h-g+1} \alpha_{\varphi_{g+1}-1} \dots \alpha_{\varphi_h-1} \alpha_{\varphi_{t+1}-1} \cdot \\
& \cdot \left\{ \alpha_\sigma N''_{(+FF)(+RR)(-R_1P)} + \varepsilon^\sigma N''_{(+FF)(+RR)(+R_1H_{t+1})} \right\} = \\
& = 2^{h+1} \alpha_{\varphi_1-1} \dots \alpha_{\varphi_h-1} \alpha_{\varphi_{t+1}-1} \cdot 2^{t-h} \alpha_{\varphi_{h+1}-1} \dots \alpha_{\varphi_t-1} \cdot \\
& \cdot \left\{ 2^\tau \alpha_\sigma N'_{(+RR)(-R_1P)} + \varepsilon^\sigma \left[ \alpha_\tau N'_{(+RR)(-R_1P)} + \varepsilon^\tau N'_{(+RR)(+R_1A_q)} \right] \right\}.
\end{aligned}$$

Verwendet man jetzt noch die Relationen (70) und (75), so folgt:

$$\begin{aligned}
& N_{(+R_0A_1)(+G_{t+1}H_{t+1})}(+FF)(+RR) = \\
& = 2^{t+1} \alpha_{\varphi_1-1} \dots \alpha_{\varphi_t-1} \alpha_{\varphi_{t+1}-1} \left\{ \alpha_{\sigma+\tau} N'_{(+RR)(-R_1P)} + \right. \\
& \quad \left. + \varepsilon^{\sigma+\tau} N'_{(+RR)(+R_1A_q)} \right\} = 2^{t+1} \alpha_{\varphi_1-1} \dots \alpha_{\varphi_{t+1}-1} \cdot \\
& \cdot \left\{ \alpha_{\varphi-\varphi_{t+1}} N'_{(+RR)(-R_1P)} + \varepsilon^{\varphi-\varphi_{t+1}} N'_{(+RR)(+R_1A_q)} \right\}. \tag{77}
\end{aligned}$$

Die Resultate (76) und (77) wiederholen aber nur die Aussagen (72), (73), diesmal für eine aus  $t+1$  Paaren bestehende Auslese ( $FF$ ). Damit sind die letztgenannten Formeln bewiesen.

## 16. Endgültige Verallgemeinerung.

Es sei ein beliebiges irreduzibles Normalnetz nach § 8 auf beliebige Art in Fächer und Residuum zerlegt; auf dem Rande dieses Normalnetzes sei eine beliebige positive Auslese fixiert, die dann in der Symbolik des § 13 als  $(+FR)(+FF)(+RR)$  geschrieben werden soll. Die Paare  $(FR)$  seien wie im § 13 numeriert, ihre Anzahl sei  $t$ . Die beiden Knoten, die sowohl dem Fächerrande als auch dem Residuumrande angehören, sollen gleichwertig  $F_0$  oder  $R_0$  und  $F_{t+1}$  oder  $R_{t+1}$  heissen (§ 13). Entfernt man vom Normalnetz den Fächerteil  $F_{t+1}PF_t$  ( $P$  bedeutet, wie früher, das Zentrum der Zerlegung), so verbleibt ein reduzibles Netz, das durch den Querschnitt  $PF_0$  in den Fächer  $F_tPF_0$  und das frühere Residuum zerfällt. Für dieses verbleibende reduzible Netz soll nun eine Formel bewiesen werden, die (77) als Spezialfall enthält.

Um Komplikationen in den Symbolen zu vermeiden, denken wir uns ( $FF$ ) nur solche Paare enthaltend, die nicht dem entfernten Fächerteil  $F_{t+1}PF_t$  angehören. Die Anzahl dieser Paare ( $FF$ ) sei  $f$ , ihre reduzierten Maschenzahlen seien  $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \dots, \varphi_f$ . Die reduzierten Maschenzahlen der Teilbögen  $F_0F_1, F_1F_2, F_2F_3, \dots, F_{t-1}F_t$  des Fächerrandes (vgl. § 13) seien entsprechend  $q_1, q_2, q_3, \dots, q_t$ . Die Farbeninvarianten des Residuums sollen durch Strichelung gekennzeichnet werden. Die zu beweisende Formel lautet dann:

$$\begin{aligned}
 & N_{(+FR)(+FF)(+RR)} = \tag{78} \\
 & = 2^f \alpha_{\varphi_1-1} \dots \alpha_{\varphi_f-1} \cdot \left\{ \alpha_{q_1} \dots \alpha_{q_t} N'_{(+RR)(-R_1P)(-R_2P) \dots (-R_tP)} + \right. \\
 & + \sum_{\mu=1}^t \alpha_{q_1} \dots \alpha_{q_{\mu-1}} \varepsilon^{q_\mu} \alpha_{q_{\mu+1}} \dots \alpha_{q_t} N'_{(+RR)(+R_{\mu-1}R_\mu)(-R_1P) \dots (-R_tP)} + \\
 & + \dots + \\
 & \left. + \varepsilon^{q_1} \varepsilon^{q_2} \dots \varepsilon^{q_t} N'_{(+RR)(+R_0R_1)(+R_1R_2) \dots (+R_{t-1}R_t)(-R_1P) \dots (-R_tP)} \right\} .
 \end{aligned}$$

Die Glieder der Schleifenklammer sind hier in Zeilen verteilt; in der  $k$ -ten Zeile enthält jeder Koeffizient genau  $k - 1$  Faktoren vom Typus  $\varepsilon^q$ , und jeder überhaupt mögliche Koeffizient dieser Art muss dort ein und nur einmal vorkommen; kommt im Koeffizienten  $\varepsilon^{q_\mu}$  vor, so ist die zugehörige Farbeninvariante ausser den Bedingungen  $(+RR)(-R_1P) \dots (-R_tP)$  noch allemal der Bedingung  $(+R_{\mu-1}R_\mu)$  zu unterwerfen. Die Bedingungen in den Farbeninvarianten des Residuums, die in dieser Formel vorkommen, können übrigens mit Hilfe der Relation (58) vereinfacht werden, wenn man beachtet, dass die Erfüllung der Forderung  $(+R_0P)$  unmöglich ist. Es ist z. B. die Farbeninvariante der letzten Zeile gleich der Farbeninvariante  $N'_{(+RR)(+R_0R_1)(+R_1R_2) \dots (+R_{t-1}R_t)}$ .

Setzt man in (78)  $t = 1$  und schreibt nachher  $t$  für  $f$ , so gelangt man zur Formel (73) zurück, die somit wirklich einen Spezialfall der allgemeineren Relation (78) darstellt. Durch vollständige Induktion soll die Allgemeingültigkeit bewiesen werden. Es sei aber vor allem bemerkt, dass sämtliche Bedingungen in den Farbeninvarianten des Residuums wirklich wieder Auslesen darstellen, wie auf Grund der im § 13 entwickelten Tatsachen gefolgert werden kann.

Die Richtigkeit von (78) bis zu einem Werte  $t-1$  werde nun vorausgesetzt. Trennt man dann von dem uns vorliegenden reduzierten Netz noch den Fächerteil  $F_t P F_{t-1}$  ab, so verbleibt ein Restnetz, in dem (78) anwendbar ist, weil dort nur noch  $t-1$  Paare ( $FR$ ) verblieben sind. Die in diesem Restnetz verbliebenen Paare aus ( $FF$ ) mögen durch ( $\underline{FF}$ ) symbolisiert werden; ihre Anzahl sei  $f'$ , ihre reduzierten Maschenzahlen sind die früheren, weil die abgetrennten Paare neben den verbliebenen, nicht aber über ihnen liegen (§ 13). Die Numeration sei so durchgeführt, dass den verbliebenen Paaren die Nummern  $1, 2, \dots, f'$ , den abgetrennten die Nummern  $f'+1, f'+2, \dots, f$  zukommen. Für die Farbeninvarianten des nach Abtrennung von  $F_t P F_{t-1}$  verbliebenen Restnetzes soll der Doppelstrich Verwendung finden. Auf Grund von (73) hat man:

$$\begin{aligned} & N_{(+FR)(+FF)(+RR)} = \\ & = 2^{f-f'} \alpha_{\varphi_{f'+1}-1} \dots \alpha_{\varphi_f-1} \cdot \left\{ \alpha_{\varphi_t} N''_{(+FR)(+FF)(+RR)(-R_t P)} + \right. \\ & \quad \left. + \varepsilon^{\varphi_t} N''_{(+FR)(+FF)(+RR)(+R_t F_{t-1})} \right\}, \end{aligned} \quad (79)$$

wo ( $\underline{FR}$ ) die Auslese ( $+F_1 R_1$ ), ( $+F_2 R_2$ ), ..., ( $+F_{t-1} R_{t-1}$ ) symbolisiert. Bemerkt man noch die Gleichwertigkeit der Auslesen ( $\underline{FR})(\underline{FF})(+RR)(+R_t F_{t-1})$  und ( $\underline{FR})(\underline{FF})(+RR)(+R_{t-1} R_t)$ , so kann man auf die Farbeninvarianten rechts die Formel (78) anwenden, wenn man vorher, mit Hilfe von (58), die Bedingungen positiv ausdrückt. Man erhält so schliesslich in dem Ausdruck für  $N_{(+FR)(+FF)(+RR)}$  den gemeinschaftlichen Faktor

$$2^f \alpha_{\varphi_1-1} \dots \alpha_{\varphi_f-1}. \quad (80)$$

Ferner ist

$$\begin{aligned} & N'_{(+RR)(-R_1 P) \dots (-R_{t-1} P)} - N'_{(+RR)(+R_t P)(-R_1 P) \dots (-R_{t-1} P)} = \\ & = N'_{(+RR)(-R_1 P) \dots (-R_t P)}, \end{aligned} \quad (81)$$

und die Forderung ( $+R_{t-1} R_t$ )( $-R_1 P$ ) ... ( $R_{t-1} P$ ) offenbar mit der Forderung ( $+R_{t-1} R_t$ )( $-R_1 P$ ) ... ( $-R_{t-1} P$ )( $-R_t P$ ) gleichbedeutend. Auf Grund dieser Erwägungen wird dann aber der

nach Absonderung des Faktors (80) aus der Umformung sich ergebende Ausdruck identisch mit der Schleifenklammer in (78). Damit ist die Richtigkeit von (78) erwiesen.

## 17. Die Vierfarbenformel.

Wir sind jetzt imstande eine Reduktionsformel anzugeben, welche die Berechnung einer durch eine beliebige positive Auslese bedingten Farbeninvariante eines Normalnetzes auf die Berechnung ebenfalls nur durch Auslesen bedingter Farbeninvarianten des Residuums zurückführt.

Das vorgelegte Normalnetz sei von der Ordnung  $i$ , die auf seinem Rande fixierte Auslese, wie früher, durch  $(RR)(FF)(FR)$  dargestellt,  $t$  bedeute die Anzahl der Paare  $(FR)$ . Statt der tatsächlich ausgeführten Zerlegung, wo  $F_{t+1}PF_0$  der Fächer ist, betrachten wir zunächst eine Hilfszerlegung mit  $F_{t+1}PF_t$  als Hilfsfächer. Das zugehörige Hilfsresiduum zerfällt dann noch durch den Querschnitt  $PF_0$  in den Fächer  $F_tPF_0$  und das tatsächliche Residuum. Die  $f$  Paare  $(FF)$  sollen so abgezählt sein, dass dem Hilfsfächer die  $f-f'$  letzten angehören.  $\varphi_\mu$  und  $\varrho_\mu$  sollen dieselbe Bedeutung haben, wie im vorigen Paragraphen. Für die Farbeninvarianten des Hilfsresiduums verwenden wir nun den einfachen Strich, während das tatsächliche Residuum ohne Strich, dafür aber mit Angabe der Ordnungszahl  $i-1$  geschrieben werden soll. Die Gesamtheit der  $f'$  ersten Paare  $(FF)$  werde als  $(FF)$  bezeichnet.

Zunächst erledigen wir die Annahme  $t=1$ .

Die im § 11 abgeleitete Relation (57) bleibt auch dann noch richtig, wenn überall eine nur auf das Residuum bezügliche ergänzende Bedingung  $(+RR)$  hinzugefügt wird, weil letztere keinen wesentlichen Einfluss auf den Gang der Ableitung hat. Dasselbe gilt für die im § 9 gegebene Beziehung (37), die dann lautet:

$$N_{(+RR)}^i = a_m N_{(+RR)}^{i-1} + \varepsilon^m N_{(+RR)(+A_0A_m)}^{i-1}. \quad (82)$$

Es sei nun  $t=1$ ,  $f=f'$ . Die Hilfszerlegung ergibt:

$$N_{(+FR)(+FF)(+RR)}^i = a_{\varrho_2} N'_{(+FR)(+FF)(+RR)} + \varepsilon^{\varrho_2} N'_{(+FR)(+FF)(+RR)(+F_1F_2)}, \quad (83)$$

infolge (82) für  $m = \varrho_2$ . Hier ist  $(+FR)(+FF)(+RR)(+F_1F_2)$  mit der Auslese  $(+FR)(+FF)(+RR)(+R_1R_2)$  gleichbedeutend. Berücksichtigt man dies und verwendet (73), zieht dabei noch in Betracht, dass

$$\overset{i-1}{N}_{(+RR)(+R_1R_2)(-R_1P)} = \overset{i-1}{N}_{(+RR)(+R_1R_2)} \quad (84)$$

sein muss, weil  $R_2$  und  $P$  im Netz benachbart sind, so folgt

$$\begin{aligned} & \overset{i}{N}_{(+FR)(+FF)(+RR)} = \\ & = 2^f \alpha_{\varphi_1-1} \dots \alpha_{\varphi_f-1} \cdot \left\{ \alpha_{\varrho_1} \alpha_{\varrho_2} \overset{i-1}{N}_{(+RR)(-R_1P)} + \varepsilon^{\varrho_1} \alpha_{\varrho_2} \overset{i-1}{N}_{(+RR)(+R_0R_1)} + \right. \\ & \quad \left. + \alpha_{\varrho_1} \varepsilon^{\varrho_2} \overset{i-1}{N}_{(+RR)(+R_1R_2)} + \varepsilon^{\varrho_1} \varepsilon^{\varrho_2} \overset{i-1}{N}_{(+RR)(+R_0R_1)(+R_1R_2)} \right\}. \end{aligned} \quad (85)$$

Diese Formel ist eine Verallgemeinerung der Relation (57).

Verwendet man (85) für denjenigen Spezialfall, wo  $F_1$  mit  $F_2$  und  $R_1$  mit  $R_2$  zusammenfällt, so wird die Forderung  $(+FR)$  von selbst erfüllt und bedarf daher keiner besonderen Erwähnung. Es ist dann  $\varrho_2 = 0$ , desgleichen also  $\alpha_{\varrho_2} = 0$ , und  $\varepsilon^{\varrho_2}$  wird gleich 1. Man erhält so

$$\begin{aligned} & \overset{i}{N}_{(+FF)(+RR)} = \\ & = 2^f \alpha_{\varphi_1-1} \dots \alpha_{\varphi_f-1} \cdot \left\{ \alpha_{\varrho_1} \overset{i-1}{N}_{(+RR)} + \varepsilon^{\varrho_1} \overset{i-1}{N}_{(+RR)(+R_0R_1)} \right\}. \end{aligned} \quad (86)$$

Dies ist eine Verallgemeinerung von (82).

Den Fall  $f > f'$ ,  $t = 1$  brauchen wir nicht besonders zu betrachten, da er sich aus dem Fall eines allgemeinen  $t$  sofort ergibt und wir uns direkt letzterem zuwenden.

Es sei also  $t$  ganz beliebig. Die Hilfszerlegung zeigt dann nach (86):

$$\begin{aligned} & \overset{i}{N}_{(+RF)(+FF)(+RR)} = \\ & = 2^{f-f'} \alpha_{\varphi_{f'+1}-1} \dots \alpha_{\varphi_f-1} \cdot \left\{ \alpha_{\varrho_{t+1}} \overset{i}{N}'_{(+RF)(+FF)(+RR)} + \right. \\ & \quad \left. + \varepsilon^{\varrho_{t+1}} \overset{i}{N}'_{(+RF)(+FF)(+RR)(+F_tF_{t+1})} \right\}. \end{aligned} \quad (87)$$

Da  $(+RF)(+FF)(+RR)(+F_tF_{t+1})$  mit  $(+RF)(+FF)(+RR)(+R_tR_{t+1})$  gleichbedeutend ist, so führt die nunmehrige Anwendung von (78) zur Relation:

$$\begin{aligned}
 & \overset{i}{N}_{(+RF)(+FF)(+RR)} = \\
 & = 2^f a_{\varphi_1-1} \dots a_{\varphi_f-1} \cdot \left\{ a_{\varrho_{t+1}} \left[ a_{\varrho_1} \dots a_{\varrho_t} \overset{i-1}{N}_{(+RR)(-RP)} + \right. \right. \\
 & + \sum_{\mu=1}^t a_{\varrho_1} \dots a_{\varrho_{\mu-1}} \varepsilon^{\varrho_\mu} a_{\varrho_{\mu+1}} \dots a_{\varrho_t} \overset{i-1}{N}_{(+RR)(+R_{\mu-1}R_\mu)(-RP)} + \\
 & + \dots \dots \dots \left. \left. \right] + \varepsilon^{\varrho_{t+1}} \left[ a_{\varrho_1} \dots a_{\varrho_t} \overset{i-1}{N}_{(+RR)(+R_tR_{t+1})(-RP)} + \right. \right. \\
 & + \sum_{\mu=1}^t a_{\varrho_1} \dots a_{\varrho_{\mu-1}} \varepsilon^{\varrho_\mu} a_{\varrho_{\mu+1}} \dots a_{\varrho_t} \overset{i-1}{N}_{(+RR)(+R_tR_{t+1})(+R_{\mu-1}R_\mu)(-RP)} + \\
 & \left. \left. + \dots \dots \dots \right] \right\}, \tag{88}
 \end{aligned}$$

wo  $(-RP)$  die Auslese  $(-R_1P)(-R_2P) \dots (-R_tP)$  symbolisiert. In etwas geänderter Schreibweise lautet dies:

$$\begin{aligned}
 & \overset{i}{N}_{(+RF)(+FF)(+RR)} = \\
 & = 2^f a_{\varphi_1-1} \dots a_{\varphi_f-1} \cdot \left\{ a_{\varrho_1} \dots a_{\varrho_{t+1}} \overset{i-1}{N}_{(+RR)(-RP)} + \tag{89} \right. \\
 & + \sum_{\mu=1}^{t+1} a_{\varrho_1} \dots a_{\varrho_{\mu-1}} \varepsilon^{\varrho_\mu} a_{\varrho_{\mu+1}} \dots a_{\varrho_{t+1}} \overset{i-1}{N}_{(+RR)(+R_{\mu-1}R_\mu)(-RP)} + \\
 & \left. + \dots \dots \dots + \varepsilon^{\varrho_1} \varepsilon^{\varrho_2} \dots \varepsilon^{\varrho_{t+1}} \overset{i-1}{N}_{(+RR)(+R_0R_1) \dots (+R_tR_{t+1})(-RP)} \right\}.
 \end{aligned}$$

Die Formel (89) löst das im § 1 gestellte Problem auf rekurrentem Wege und stellt somit das wesentliche Endziel unserer diesbezüglichen Untersuchung dar. Wir nennen sie die Vierfarbenformel. Die vorher abgeleiteten Reduktionsformeln sind allesamt als Spezialfälle in der Vierfarbenformel enthalten.

**18. Spezielle Anwendungen der Vierfarbenformel.**

Zur wirklichen Berechnung der Farbeninvarianten bedürfen wir noch ihrer Kenntnis für Normalnetze erster Ordnung, wobei es genügt irreduzible Netze zu betrachten. Man erhält die Farben-

invarianten für irreduzible Normalnetze erster Ordnung direkt aus der Vierfarbenformel folgendermassen:

Hat das betreffende Netz  $m+1$  Maschen, so lässt sich ein Maximalfächer mit  $m$  Maschen abtrennen und das Residuum besteht aus einer einzigen dreieckigen Masche. Weil somit für die Punkte  $R_\mu$  von  $(FR)$  überhaupt kein Platz verbleibt, so hat man  $t=0$ . Es muss aber auch die Auslese  $(+RR)$  verschwinden, da die beiden in Betracht kommenden Randpunkte des Residuums allemal als Punkte auf dem Fächerrand angesehen werden dürfen. Es ist mithin  $\overset{0}{N}_{(+RR)} = \overset{0}{N} = 1$ . Das Glied, wo die Bedingung  $(+R_0R_1)$  vorkommt, verschwindet, denn  $R_0$  und  $R_1$  sind benachbart. Schreibt man noch  $\varrho$  für  $\varrho_1$ , so folgt aus (89) jetzt:

$$\overset{1}{N}_{(+FF)} = 2^f \alpha_{\varphi_1-1} \alpha_{\varphi_2-1} \dots \alpha_{\varphi_f-1} \alpha_\varrho. \quad (90)$$

Wegen der invarianten Bedeutung der Zahl  $\overset{1}{N}_{(+FF)}$  ist es hierbei gleichgültig, welche der Maschen man als Residuum ansieht, obwohl die reduzierten Maschenzahlen hiervon beeinflusst werden. Es dürfte demnach nur eine Permutation dieser Maschenzahlen eintreten.

Statt der reduzierten Maschenzahl des Fächers, die wir  $\varrho$  nannten, könnte man die reduzierte Maschenzahl  $\varphi$  des Netzes verwenden, indem man darunter die Anzahl derjenigen Maschen des Netzes erster Ordnung versteht, die nicht reduzierte Maschen der Paare  $(FF)$  sind. Man erkennt leicht, dass  $\varphi$  um eine Einheit grösser ist als  $\varrho$  (es tritt nämlich die Residuummasche zu den reduzierten Maschen des Fächers hinzu). Dann gewinnt (90) eine symmetrischere Gestalt:

$$\overset{1}{N}_{(+FF)} = 2^f \alpha_{\varphi_1-1} \alpha_{\varphi_2-1} \dots \alpha_{\varphi_f-1} \alpha_{\varphi-1}. \quad (91)$$

Aus (91) ist zu ersehen, dass eine Farbinvariante eines irreduziblen Normalnetzes erster Ordnung dann und nur dann verschwindet, wenn irgendeine reduzierte Maschenzahl gleich 1 ist.

Als auf die Fig. 4 bezügliche Kontrollbeispiele nehmen wir etwa

$$\begin{aligned} \overset{1}{N}_{(+P_1P_3)(+P_3P_5)} &= 2^2 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1 = 4 \\ \overset{1}{N}_{(+P_3P_6)} &= 2 \cdot 1 \cdot 3 = 6. \end{aligned}$$

Vergleicht man dies mit der Tabelle des § 7, so zeigt sich, dass dort der ersten Forderung die Bezeichnungen der Kolonnen 1, 2, 6, 7, der zweiten Forderung die Bezeichnungen der Kolonnen 3, 4, 8, 9, 13, 18 genügen.

Zur Kontrolle der Vierfarbenformel an Netzen höherer Ordnungen betrachten wir die den regulären Polyedern entsprechenden Netze.

Das Tetraedernetz (Fig. 15) ist das einfachste Netz erster Ordnung. Laut (35) hat man hier  $N^1 = a_2 = 1$ , wie ja auch direkt aus der Figur ersichtlich ist, da bei  $P_0 \equiv a$ ,  $P_1 \equiv b$ ,  $P_2 \equiv c$  nur noch  $P_3 \equiv d$  möglich bleibt.

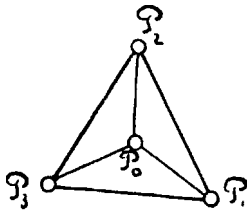


Fig. 15.

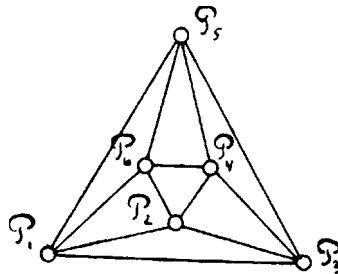


Fig. 16.

Das Oktaedernetz (Fig. 16) ist von der Ordnung 3. Nimmt man eine Zerlegung um  $P_2$  als Zentrum vor, wobei der Zerlegungsindex gleich 1 wird, so folgt nach (37):

$$N^3 = N^2 - N^2_{(+1, 3)},$$

wenn man die Knoten abkürzend durch ihre Nummern bezeichnet.

Für das Residuum  $P_1P_2P_3P_4P_5$  zeigt die Zerlegung vom Index 2 um  $P_4$  als Zentrum:

$$N^2 = N^1 + N^1_{(+2, 5)}$$

$$N^2_{(+1, 3)} = N^1 - N^1_{(+1, 4)},$$

auf Grund von (89). Weil aber  $N^1 = a_3 = 3$ ,  $N^1_{(+2, 5)} = N^1_{(+1, 4)} = 2$ , so folgt  $N^2 = 5$ ,  $N^2_{(+1, 3)} = 1$ , also  $N^3 = 4$ .

Dient  $P_1P_2P_3$  als Ausgangsmasche, so sind die 4 Bezeichnungenarten, wenn die Farben in der Reihenfolge der Knotennumeration genannt werden, die folgenden:

$$abcabc, \quad abcabd, \quad abcadc, \quad abedbc.$$

Für das Ikosaedernetz, das von der Ordnung 9 ist, kann die langwierige Rechnung etwas abgekürzt werden, wenn

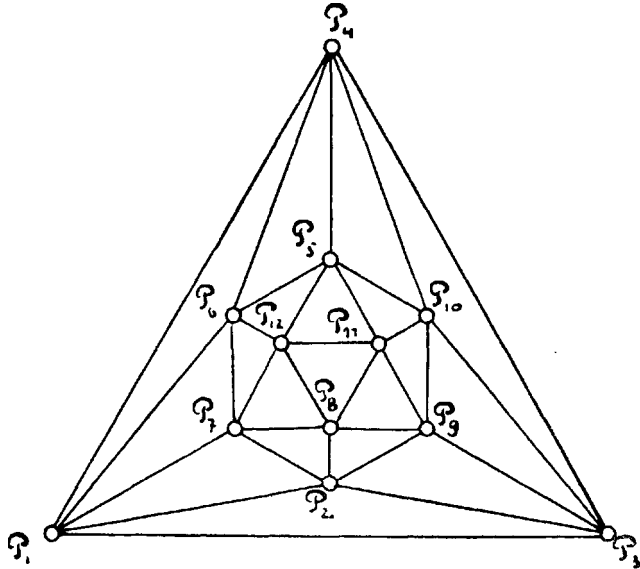


Fig. 17.

man bei der Ableitung der Relationen die topologische Symmetrie der Figuren in Betracht zieht (Fig. 17). Als aufeinanderfolgende Residuen seien etwa die folgenden genommen (genannt sind die Nummern der jeweiligen Randknoten):

$$\begin{aligned} &(1, 2, 3, 4, 1); \quad (1, 2, 9, 3, 4, 1); \quad (1, 2, 9, 10, 4, 1); \\ &(1, 2, 9, 10, 5, 4, 1); \quad (1, 2, 9, 10, 5, 6, 1); \quad (2, 9, 10, 5, 6, 7, 2); \\ &(2, 9, 11, 5, 6, 7, 2); \quad (2, 9, 11, 12, 7, 2). \end{aligned}$$

Die entsprechenden Zerlegungszentren und Indizes sind:

$$\begin{aligned} &P_2(\text{Ind. } 1); \quad P_9(\text{Ind. } 1); \quad P_{10}(\text{Ind. } 2); \quad P_5(\text{Ind. } 1); \\ &P_8(\text{Ind. } 2); \quad P_7(\text{Ind. } 2); \quad P_{11}(\text{Ind. } 2); \quad P_{12}(\text{Ind. } 3). \end{aligned}$$

Auf Grund der Vierfarbenformel ist

$$\begin{aligned} N^9 &= N^8 - N^8_{(+1, 3)}; & N^8 &= N^7 - N^7_{(+2, 3)}; & N^7 &= N^6 + N^6_{(+4, 9)}; \\ N^6 &= N^5 - N^5_{(+4, 10)}; & N^5 &= N^4 + N^4_{(+1, 5)}; & N^4 &= N^3 + N^3_{(+2, 6)}; \\ N^3 &= N^2 + N^2_{(+5, 9)}; & N^2 &= 3 \cdot N^1 - N^1_{(+7, 11)}. \end{aligned}$$

Mit der niedrigsten Ordnung beginnend, findet man:

$$\begin{aligned} N^1 &= 5; & N^2 &= 3 \cdot 5 - 2 = 13; & N^3 &= 13 + 5 = 18; \\ N^4 &= 18 + 6 = 24; & N^5 &= 24 + 7 = 31; & N^6 &= 31 - 11 = 20; \\ N^7 &= 20 + 6 = 26; & N^8 &= 26 - 8 = 18; & N^9 &= 18 - 8 = 10. \end{aligned}$$

Es gestattet somit das Ikosaeder 10 wesentlich verschiedene Vierfarbenbezeichnungen seiner Ecken, mithin das Dodekaeder 10 wesentlich verschiedene Vierfarbenbezeichnungen der Flächen. Lässt man die Forderung „wesentlich“ fallen, so erhält man die 24-fache Zahl, d. h. 240.

In der Reihenfolge der Ecken genannt, sind die 10 Vierfarbenbezeichnungen des Ikosaeders die folgenden ( $P_1P_2P_3$  dient als Ausgangsmasche):

<i>abcbcdadacb</i> ;	<i>abcdcbcadabd</i> ;
<i>abcbcdcdaba</i> ;	<i>abedcbcdedaba</i> ;
<i>abcbadcdadcb</i> ;	<i>abcdcbdcabada</i> ;
<i>abcbcdcdadba</i> ;	<i>abedacdcabdb</i> ;
<i>abcdabcadbed</i> ;	<i>abcdacdadbecb</i> .

Diese Tabelle bezeugt u. a. die interessante Tatsache, dass zwei diametral gegenüberliegende Ecken des Ikosaeders niemals identisch gefärbt werden können.

### 19. Der allgemeine Vierfarbensatz.

Die Vierfarbenformel ermöglicht es, für jedes Normalnetz die absolute Farbeninvariante als explizite Funktion der Vierfarbennoeffizienten darzustellen, sobald das Netz tatsächlich vorgegeben ist. Diese Funktion ist wesentlich von der Struktur des Netzes

abhängig. Für einzelne spezielle Typen kann man die zugehörigen Bildungsgesetze dieser Funktion ganz allgemein angeben; ob sich aber ein Bildungsgesetz konstruieren lässt, welches jedem Netztypus entspricht, bleibt eine offene Frage.

Zur Lösung des Vierfarbenproblems, d. h. zur Beantwortung der Frage, ob die absolute Farbeninvariante allemal positiv ist, könnte man aber ohne Kenntnis der fraglichen Funktion gelangen, indem man auf Grund der Vierfarbenformel nachweist, dass diese Farbeninvariante notwendig positiv sein muss, sofern sie im Residuum positiv ist. Dies wäre ein Beweis durch vollständige Induktion, wobei die Normalnetze nach der Ordnungszahl angeordnet auftreten. Nun kommen aber in der Vierfarbenformel rechts im allgemeinen bedingte Farbeninvarianten vor, auch dann, wenn links nur die absolute Farbeninvariante steht; man wird also auf diesem Wege zur Untersuchung des Verhaltens bedingter Farbeninvarianten geführt. Setzt man die Richtigkeit der Vierfarbenhypothese voraus, so gelangt man durch Induktion zu folgendem Theorem, welches den Vierfarbensatz als Spezialfall in sich enthält, und daher als allgemeiner Vierfarbensatz bezeichnet werden mag:

Bedeutet  $(+M)(-L)$  eine beliebige widerspruchsfreie Auslese auf dem Rande eines irreduziblen Normalnetzes, so ist die durch diese Auslese bedingte Farbeninvariante positiv.

Anders ausgedrückt:

$N_{(+M)(-L)}$  verschwindet nur dann, wenn  $(+M)(-L)$  einen Widerspruch enthält.

Über den Begriff des Widerspruchs in einer Auslese vergleiche man § 12.

Der Beweis des allgemeinen Vierfarbensatzes durch vollständige Induktion bietet an einzelnen Stellen Schwierigkeiten, wie es scheint, technischen Charakters. Es ist aber auch nicht die Möglichkeit von der Hand zu weisen, dass der fragliche Beweis nur gleichzeitig mit dem Beweis eines anderen, hier nicht formulierten Satzes durchgeführt werden kann, analog dem, wie der Beweis des Vierfarbensatzes den gleichzeitigen Beweis des allgemeinen Vierfarbensatzes erfordert.

Dass der allgemeine Vierfarbensatz in Normalnetzen erster Ordnung wirklich gilt, erkennt man verhältnismässig leicht, indem

man die Farbeninvariante  $N_{(+M)(-L)}$  explizite aufschreibt. Wird im Normalnetz erster Ordnung eine beliebige Masche als Residuum ausgezeichnet, so verbleibt ein Fächer, in welchem für jedes Paar der Auslese  $(M)(L)$  die zugehörige reduzierte Maschenzahl bestimmt ist. Die Anzahl der ungezählten Maschen (hierher gehört auch das Residuum) bestimmt die reduzierte Maschenzahl des Normalnetzes. Es seien  $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \dots, \varphi_m$  die so gefundenen reduzierten Maschenzahlen der positiven, also  $(M)$  entnommenen Paare, ferner  $\psi_1, \psi_2, \psi_3, \dots, \psi_l$  die reduzierten Maschenzahlen der negativen, also  $(L)$  angehörigen Paare, endlich  $\varphi$  die reduzierte Maschenzahl des Netzes. Bei der Bestimmung der reduzierten Maschenzahlen ist die gleichzeitige Anwesenheit der Paare  $(M), (L)$  zu berücksichtigen. Die Symbole  $\varphi_\nu, \psi_\mu$  verwenden wir auch zur Bezeichnung der zugehörigen Paare.

Wir fixieren ein Paar  $\psi_\mu$ . Gibt es zu diesem  $\psi_\mu$  kein höheres Paar  $\varphi_\nu$ , so nennen wir  $\varphi_\nu$  mit  $\varphi$  assoziiert; im entgegengesetzten Falle existiert unter sämtlichen höheren Paaren  $\varphi_\nu$  ein und nur ein solches Paar  $\varphi_{\nu_1}$ , welches höher ist als  $\psi_\mu$ , doch niedriger als jedes andere  $\varphi_\nu$  derselben Art, — es soll dann  $\psi_\mu$  mit  $\varphi_{\nu_1}$  assoziiert heissen. Je zwei demselben  $\varphi_\nu$  assoziierte Paare  $\psi$  sollen verwandte Paare heissen.

In jedem Komplex sämtlich untereinander verwandter Paare  $\psi$  gibt es sicher Paare, die kein höheres verwandtes Paar aufweisen. Solche Paare nennen wir relative Maximalpaare der Verwandtschaft. Die Anzahl  $\lambda_\nu$  der mit  $\varphi_\nu$  assoziierten relativen Maximalpaare  $\psi_\mu$  werden als Charakteristik von  $\varphi_\nu$  bezeichnet; analog ist die Definition der Charakteristik von  $\varphi$ .

Unter den mit  $\psi_\mu$  verwandten, aber in Bezug auf  $\psi_\mu$  niedrigeren Paaren gibt es notwendigerweise solche, die nicht zugleich niedrigere Paare für Paare derselben Art sind. Wir nennen sie die grössten unter  $\psi_\mu$  gelegenen Paare. Die Anzahl  $\tau_\mu$  dieser grössten unter  $\psi_\mu$  gelegenen Paare sei die Charakteristik von  $\psi_\mu$ .

Es gilt dann die Formel:

$$N_{(+M)(-L)}^1 = 2^m \cdot \alpha_{\psi_1+\tau_1} \alpha_{\psi_2+\tau_2} \cdots \alpha_{\psi_l+\tau_l} \cdot \alpha_{\varphi_1+\lambda_1-1} \alpha_{\varphi_2+\lambda_2-1} \cdots \alpha_{\varphi_m+\lambda_m-1} \alpha_{\varphi+\lambda-1} \cdot \quad (92)$$

Der Beweis ergibt sich leicht durch vollständige Induktion, worauf hier aber nicht weiter eingegangen werden soll. Es ist (92) eine Verallgemeinerung der Relation (91).

Aus (92) ist ersichtlich, dass  $\overset{1}{N}_{(+M)(-L)}$  dann und nur dann verschwindet, wenn entweder  $\psi_\mu + \tau_\mu = 0$ , oder  $\varphi_\nu + \lambda_\nu - 1 = 0$ . Im ersteren Falle wäre  $\psi_\mu = 0$  die reduzierte Maschenzahl für ein Paar aus  $(-L)$ , wobei kein niedrigeres verwandtes Paar existiert. Weil der diesem Paare  $\psi_\mu$  entsprechende Teilfläche dann von Paaren aus  $(+M)$  überdeckt sein muss, so lässt sich folgern, dass das  $\psi_\mu$  entsprechende Paar von  $(+M)$  abhängig ist, was nach § 12 einen Widerspruch darstellt. Im letzteren Falle ist entweder  $\varphi_\nu = 0$ ,  $\lambda_\nu = 1$ , oder  $\varphi_\nu = 1$ ,  $\lambda_\nu = 0$ . Für die erste dieser Annahmen sei etwa  $(A_\nu B_\nu)$  das  $\varphi_\nu$  entsprechende Paar aus  $(+M)$ , ferner  $(X_\mu Y_\mu)$  das einzige mit  $(A_\nu B_\nu)$  assoziierte relative Maximalpaar aus  $(-L)$ . Da die Differenz der Bögen  $A_\nu B_\nu$  und  $X_\mu Y_\mu$  mit Bögen aus  $(M)$  überdeckt sein muss, — sonst könnte  $\varphi_\nu$  nicht null sein, — so zeigt sich eine Abhängigkeit des Paares  $(X_\mu Y_\mu)$  von  $(M)$ , womit wieder ein Widerspruch aufgedeckt ist. Die zweite Annahme hätte zu bedeuten, dass schon in der Auslese  $(M)$  für sich allein der Teilfläche  $(A_\nu B_\nu)$  die reduzierte Maschenzahl 1 aufweist, woraus dann folgt, dass wegen der Forderung  $(+M)$  zwei benachbarten Knoten identische Farben zukommen sollen, was wiederum einen Widerspruch bedeutet.

Der allgemeine Vierfarbensatz ist daher für Netze erster Ordnung richtig.