ÜBER EIGENSCHWINGUNGSZAHLEN FREIER PLATTEN

VON

E. KRAHN

TARTU 1931

K. Mattiesens Buchdruckerei Ant.-Ges., Tartu (Dorpat), 1931.

Hinsichtlich der Membranschwingungen hat R. Courant[1]) gezeigt, dass sich die Eigenwerte nicht nur durch die übliche, auf einer rekurrenten Bestimmung beruhende, Minimumeigenschaft bestimmen lassen, sondern, unabhängig von der Kenntnis der Eigenfunktionen, als Lösungen eines Maximum-Minimumproblems gegeben werden können. Eine analoge Bestimmung wird in der vorliegenden Arbeit für die Eigenwerte der frei schwingenden Platte durchgeführt. Weiter wird die asymptotische Verteilung der Eigenwerte behandelt und gezeigt, dass sie mit derjenigen bei der eingespannten Platte[2]) übereinstimmt.

Legen wir die Mittelebene der Platte im Ruhezustand in die xy-Ebene und bezeichnen das von ihr eingenommene Gebiet mit G, und wollen wir voraussetzen, dass G von endlich vielen Kurvenbögen mit stetig sich drehender Tangente begrenzt wird. Die Quadrate der Eigenfrequenzen, multipliziert mit einer nur von den physikalischen Eigenschaften der Platte abhängigen Konstanten, nennt man Eigenwerte, und man kann sie in bekannter Weise[3]) durch folgende Minimaleigenschaft bestimmen:

Der n-te Eigenwert λ_n ist das Minimum des Integrals

$$(1)\qquad J[\varphi] = \iint\limits_G \left\{ (\Delta\varphi)^2 - 2\,(1-\mu)\left[\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2}\,\frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} - \left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x\,\partial y}\right)^2\right]\right\} dx\,dy\ ^{4)},$$

1) Math. Zeitschrift Bd. 7. Vgl. zum Folgenden auch R. Courant und D. Hilbert. Methoden der math. Physik I, Kap. 5 und 6.

2) R. Courant. Math. Zeitschrift Bd. 15.

3) G. Kirchhoff. Gesamm. Abhandlungen S. 237. Lord Rayleigh. The theory of sound. W. Ritz. Werke, Abhandlung XVII.

4) Wie schon W. Ritz bemerkt, ist der Integrand für $0 < \mu < 1$ stets positiv.

wenn zum Vergleich solche Funktionen φ zugelassen werden, die einschliesslich ihrer ersten und zweiten Ableitungen in G stetig, deren dritte und vierte Ableitungen daselbst stückweise stetig sind, und die den Bedingungen

(2)
$$\iint\limits_G \varphi^2 \, dx \, dy = 1 \qquad \text{und}$$

(3)
$$\iint\limits_G \varphi u_i \, dx \, dy = 0 \qquad (i = 1, 2, 3, \ldots n-1)$$

genügen, wobei μ eine Materialkonstante ist und die u_i die $n-1$ ersten Eigenfunktionen sind.

Die Funktion $\varphi = u_n$, die das Integral J zum Minimum macht, nennt man n-te Eigenfunktion. Die ersten $n-1$ Eigenfunktionen müssen also bei der Bestimmung des n-ten Eigenwertes bekannt sein.

Die Bedingungen (2) und (3) dienen zur Normierung und Orthogonalisierung der Eigenfunktionen.

Die Funktion φ stellt die Abweichung der Punkte der Mittelebene der Platte von ihrer Ruhelage dar.

Kirchhoff [5]) hat gezeigt, dass die Eigenfunktionen, auf Grund der Minimaleigenschaft, am Rande des Gebietes den Bedingungen

(4)
$$\frac{\partial}{\partial \nu} \Delta u_i - (1-\mu) \frac{\partial}{\partial s} \left[\cos\vartheta \sin\vartheta \left(\frac{\partial^2 u_i}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 u_i}{\partial x^2} \right) + \right.$$
$$\left. + (\cos^2\vartheta - \sin^2\vartheta) \frac{\partial^2 u_i}{\partial x \, \partial y} \right] = 0$$

und

(5)
$$\mu \Delta u_i + (1-\mu) \left(\cos^2\vartheta \frac{\partial^2 u_i}{\partial x^2} + \sin^2\vartheta \frac{\partial^2 u_i}{\partial y^2} + \right.$$
$$\left. + 2 \cos\vartheta \sin\vartheta \frac{\partial^2 u_i}{\partial x \, \partial y} \right) = 0$$

5) G. Kirchhoff. Vorlesungen über Mechanik S. 459.

genügen müssen, — wo ϑ den Winkel der x-Achse mit der inneren Normale, $\frac{\partial}{\partial \nu}$ die Differentiation nach dieser und $\frac{\partial}{\partial s}$ die Differentiation nach der Randkurve bedeutet.

H. Lamb [6]) hat bemerkt, dass u_i in den Ecken des Gebietes G noch einer weiteren Bedingung genügt, die im Falle einer quadratischen Platte, deren Seiten parallel der x- und y-Achse sind, die Form $\frac{\partial^2 u_i}{\partial x\, \partial y} = 0$ hat.

Die Lösungen des Minimalproblems — die Eigenfunktionen — genügen bekanntlich der Differentialgleichung

$$\Delta\Delta u = \lambda u \,, \tag{6}$$

wo λ der zu u gehörige Eigenwert ist.

Die oben erwähnte Minimaleigenschaft gestattet die Bestimmung der Eigenwerte nur dann, wenn alle vorangehenden Eigenfunktionen bekannt sind. Nun kann man aber von der Differentialgleichung (6) ausgehen und unter der Voraussetzung der Existenz einer abzählbar unendlichen Folge von Eigenwerten und dazugehörigen Eigenfunktionen der Gleichung (6) ihre Eigenwerte durch folgendes Maximum-Minimumproblem bestimmen, das nicht mehr die Kenntnis aller vorangehenden Eigenfunktionen verlangt.

Wir bezeichnen mit $j(v_1, v_2, \ldots v_{n-1})$ die untere Grenze des Integrals (1), wenn zum Vergleich solche Funktionen φ zugelassen werden, die nebst ihren ersten und zweiten Ableitungen in G stetig sind, deren dritte und vierte Ableitungen daselbst stückweise stetig sind und die den Bedingungen

$$\iint_G \varphi^2\, dx\, dy = 1 \qquad \text{und} \tag{7}$$

$$\iint_G \varphi\, v_i\, dx\, dy = 0 \qquad (i = 1, 2, 3, \ldots n-1) \tag{8}$$

6) H. Lamb. London Math. Soc. Proc. vol. XXI 1890.

genügen, wo v_i Funktionen sind, die denselben Stetigkeitsbedingungen genügen, wie die Funktionen φ. Der n-te Eigenwert λ_n der Differentialgleichung (6) ist dann gleich dem grössten Werte, den $j(v_1, v_2, \ldots v_{n-1})$ annehmen kann, wenn für das System $v_1, v_2, \ldots v_{n-1}$ alle zulässigen Funktionensysteme in Betracht gezogen werden.

Zum Beweise dafür zeigen wir, dass es bei jedem vorgegebenen System von Funktionen v_i Funktionen φ gibt, die dem Integral J einen Wert verleihen, der kleiner oder höchstens gleich dem n-ten Eigenwerte λ_n ist. Zu dem Zwecke bilden wir aus den n ersten Eigenfunktionen u_i und n Konstanten $c_1, c_2, \ldots c_n$ die Funktion

(9) $$\varphi = c_1 u_1 + c_2 u_2 + \ldots + c_n u_n$$

und wählen die c_i so, dass sie den n Bedingungen (7) und (8) genügen. Dann müssen die c_i $n-1$ lineare Gleichungen und die Gleichung

(10) $$c_1^2 + c_2^2 + \ldots + c_n^2 = 1$$

befriedigen.

Auf Grund der Greenschen Formel

(11)
$$\int_G\int \Delta U \Delta V \, dx\, dy = \int_G\int V \Delta\Delta U \, dx\, dy + \int_R \left(V \frac{\partial \Delta U}{\partial \nu} - \Delta U \frac{\partial V}{\partial \nu} \right) ds$$

findet man für zwei Eigenfunktionen u_i und u_k, weil diese der Gleichung (6) genügen,

(12) $$\int_G\int \Delta u_i \Delta u_k \, dx\, dy - \int_R \left(u_k \frac{\partial \Delta u_i}{\partial \nu} - \Delta u_i \frac{\partial u_k}{\partial \nu} \right) ds = 0$$

und

(13) $$\int_G\int \Delta u_i \, \Delta u_k \, dx\, dy - \int_R \left(u_i \frac{\partial \Delta u_k}{\partial \nu} - \Delta u_k \frac{\partial u_i}{\partial \nu} \right) ds = 0.$$

Nun beachten wir noch, dass der Ausdruck

(14) $$\iint_G (\Delta\varphi)^2\,dx\,dy - \int_R \left(\varphi\,\frac{\partial\Delta\varphi}{\partial\nu} - \Delta\varphi\,\frac{\partial\varphi}{\partial\nu}\right) ds\,,$$

falls φ den Randbedingungen (4) und (5) genügt, sich auf das Integral (1) reduziert, wovon man sich durch eine einfache Rechnung überzeugen kann, und setzen hier für φ die Summe (9) ein. Dann wird

$$J[\varphi] = \iint_G \left\{ (\Delta\varphi)^2 - 2(1-\mu)\left[\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}\,\frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2} - \left(\frac{\partial^2\varphi}{\partial x\,\partial y}\right)^2\right]\right\} dx\,dy =$$

(15) $$= \iint_G (\Delta\varphi)^2\,dx\,dy - \int_R \left(\varphi\,\frac{\partial\Delta\varphi}{\partial\nu} - \Delta\varphi\,\frac{\partial\varphi}{\partial\nu}\right) ds =$$

$$= \iint_G (c_1\,\Delta u_1 + c_2\,\Delta u_2 + \ldots + c_n\,\Delta u_n)^2\,dx\,dy +$$

$$+ \int_R \left\{ (c_1 u_1 + c_2 u_2 + \ldots + c_n u_n)\left(c_1\,\frac{\partial\Delta u_1}{\partial\nu} + c_2\,\frac{\partial\Delta u_2}{\partial\nu} + \ldots + \right.\right.$$

$$\left.\left. + c_n\,\frac{\partial\Delta u_n}{\partial\nu}\right) - (c_1\Delta u_1 + \ldots + c_n\Delta u_n)\left(c_1\,\frac{\partial u_1}{\partial\nu} + \ldots + c_n\,\frac{du_n}{d\nu}\right)\right\} ds =$$

(A) $$= \sum_{i=1}^{n} c_i^2 \iint_G (\Delta u_i)^2\,dx\,dy +$$

(B) $$+ 2\sum_{i=1}^{n}\ \sum_{k=i+1}^{n} c_i c_k \iint_G \Delta u_i\,\Delta u_k\,dx\,dy -$$

(C) $$- \sum_{i=1}^{n} c_i^2 \int_R \left(u_i\,\frac{\partial\Delta u_i}{\partial\nu} - \Delta u_i\,\frac{\partial u_i}{\partial\nu}\right) ds -$$

(D) $$- \sum_{i=1}^{n}\ \sum_{k=i+1}^{n} c_i c_k \int_R \left(u_i\,\frac{\partial u_k}{\partial\nu} + u_k\,\frac{\partial\Delta u_i}{\partial\nu} - \Delta u_i\,\frac{\partial u_k}{\partial\nu} - \right.$$

$$\left. - \Delta u_k\,\frac{\partial u_i}{\partial\nu}\right) ds = \sum_{i=1}^{n} c_i^2 \lambda_i\,,$$

weil die Summe von (B) und (D) auf Grund von (12) und (13) gleich Null ist und für (A) und (C) die nach Formel (14) gemachte Bemerkung gilt.

Da nun $\lambda_i \leqq \lambda_{i+1}$ ist, so folgt bei Beachtung von (10)

$$J[\varphi] \leqq \lambda_n \,. \tag{16}$$

Folglich ist auch $j(v_1, v_2, \ldots v_{u-1}) \leqq \lambda_n$ und λ_n der grösste Wert, welchen j bei $v_1 = u_1$, $v_2 = u_2$, $\ldots v_{u-1} = u_{n-1}$ wirklich erreicht. Damit ist die Maximum-Minimumeigenschaft bewiesen.

Die asymptotische Verteilung der Eigenwerte einer am Rande eingespannten Platte ist von R. Courant [2]) berechnet worden. Es liegt nahe zu vermuten, dass, ähnlich wie im Falle der Membranschwingungen [1]), das asymptotische Verteilungsgesetz der Eigenwerte einer schwingenden Platte von der Form der Platte und von der Art der am Rande vorgeschriebenen Bedingungen unabhängig ist. Die bisher bekannten Untersuchungen scheinen dem allerdings zu widersprechen, wie gleich näher ausgeführt werden wird. Um das asymptotische Verteilungsgesetz für ein beliebiges Gebiet G zu finden, müssen die Eigenwerte wenigstens für irgendein spezielles Gebiet explizite bekannt sein. Einige Eigenfunktionen und dazu gehörige Eigenwerte der frei schwingenden kreisförmigen Platte sind allerdings seit Kirchhoff bekannt; der Berechnung beliebig vieler, der Grösse nach geordneter Eigenwerte stehen aber sehr grosse Schwierigkeiten im Wege. In Hinsicht der quadratischen Platte hat W. Ritz in seiner berühmten, schon oben zitierten Arbeit „Theorie der Transversalschwingungen einer quadratischen Platte mit freien Rändern" [7]) die Eigenwerte und Eigenfunktionen durch ein Näherungsverfahren gefunden, und zwar, wie er zeigt, in guter Übereinstimmung mit der Erfahrung. Nun steht aber die Ritz'sche Formel Nr. 60

$$\lambda = [m^4 + n^4 + 2(1-\mu)\, m^2 n^2] \left(\frac{\pi}{2}\right)^4 \tag{17}$$

nicht im Einklang mit den anderen Formeln derselben Arbeit. Es handelt sich anscheinend um ein Versehen, das schon in der

7) Werke, Abhdl. XVII oder Annalen d. Phys. XXVIII. 1909. S. 737.

Formel Nr. 59 untergelaufen ist. Führt man die Rechnung in der dort angegebenen Weise durch, so erhält man

$$\lambda = (k_m^2 + k_n^2)^2 + (6 - 8\,\mu)\, k_m k_n (k_m + k_n) \tag{18}$$

und danach nimmt die Formel Nr. 60 die Form

$$\lambda = [m^2 + n^2]^2 \left(\frac{\pi}{2}\right)^4 \tag{19}$$

an. — Wäre die Ritz'sche Formel richtig, so würde das besagen, dass die Randbedingung einen wesentlichen Einfluss auf das Verteilungsgesetz hat, während die Formel in der Gestalt (19) eine Übereinstimmung mit der Eigenwertverteilung der eingespannten Platte zeigt. Auch R. Courant hat sich anscheinend des Ritz'schen Resultats wegen bei der Aufstellung des Verteilungsgesetzes der Eigenwerte auf die eingespannte Platte beschränkt.

Nach (19) ist für die quadratische Platte die asymptotische Anzahl $a_Q(\lambda)$ der unter λ gelegenen Eigenwerte, auf Grund der bekannten Abschätzung der Gitterpunkte im Kreise, gleich

$$a_Q(\lambda) \cong \frac{f}{4\pi} \sqrt{\lambda}\,, \tag{20}$$

wo f den Flächeninhalt von Q bedeutet.

Wie man leicht einsieht, gilt diese Formel für ein Quadrat beliebiger Grösse.

Unter Zugrundelegung des Ritz'schen Resultats in der Form (19) soll nun gezeigt werden, dass das asymptotische Eigenwertverteilungsgesetz von der Form des Gebiets unabhängig ist.

Der gefundene Ausdruck (20) bleibt als obere Schranke für die Anzahl der Eigenwerte bestehen, falls das betrachtete Gebiet sich in Quadrate zerlegen lässt; denn die Anzahl der unter λ gelegenen Eigenwerte für das ganze Gebiet ist höchstens gleich der gesamten Anzahl der unter λ gelegenen Eigenwerte der Quadrate, aus denen sich G zusammensetzt. Der Beweis folgt aus nachstehender Überlegung: wird den im Maximum-

Minimumproblem für das ganze Gebiet zugelassenen Funktionen φ und ihren Ableitungen gestattet auf den Linien, durch die die Quadrateinteilung erzielt wird, unstetig zu sein, indem endliche Sprünge zugelassen werden, so werden die den Funktionen φ auferlegten Bedingungen gemildert und der Wert der Lösung des Problems jedenfalls nicht vergrössert.

Das so modifizierte Problem definiert aber gerade den n-ten Eigenwert für das aus den getrennten Quadraten bestehende Gebiet. Bezeichnen wir die Anzahl der unter λ gelegenen Eigenwerte des i-ten quadratischen Gebiets mit $a_i(\lambda)$, die entsprechende Anzahl für das ganze Gebiet mit $a(\lambda)$, die Fläche des i-ten Quadrats mit f_i, die des ganzen Gebiets mit f, so ist

$$a(\lambda) \leqq \sum_i a_i(\lambda) \cong \frac{\sqrt{\lambda}}{4\pi} \sum_i f_i = \frac{\sqrt{\lambda}}{4\pi} f \,. \tag{21}$$

Haben wir es mit einem Gebiete G zu tun, das sich nicht in Quadrate zerlegen lässt, sondern das allgemeiner von endlich vielen, mit stetig sich drehender Tangente versehenen Kurvenbögen begrenzt ist, so können wir dieses Gebiet von aussen beliebig genau durch ein aus Quadraten bestehendes Gebiet G' approximieren. Setzen wir die Eigenfunktionen des Gebiets G in dem Gebiet G' so fort, dass die Funktionen nebst ihren ersten und zweiten Ableitungen dabei stetig bleiben, die dritten und vierten Ableitungen stückweise stetig, und die Funktionen selbst nebst den genannten Ableitungen beschränkt bleiben, so wird sich das über G' erstreckte Integral J von dem über G erstreckten Integral um eine Grösse von der Grössenordnung der Differenz der Flächeninhalte G' und G unterscheiden. Die im Gebiete G' erklärte Funktion kann mit einem beliebig wenig von eins verschiedenen Faktor multipliziert werden, damit die Bedingung

$$\iint_{G'} \varphi^2 \, dx \, dy = 1 \tag{22}$$

erfüllt werde, und wird nun in dem Maximnm-Minimumproblem für das Gebiet G' eine zulässige Funktion sein, nachdem wir auch die Funktionen v_i in das Gebiet $G' - G$ fortgesetzt und mit einem beliebig wenig von eins verschiedenen Faktor multipliziert haben. Durch genügend genaue Approximation des Gebietes G vermittelst eines aus Quadraten bestehenden Gebietes G' kann man es also erreichen, dass der Eigenwert für das Gebiet G sich um eine beliebig kleine Zahl von dem Eigenwert des Gebietes G' unterscheidet. Es bleibt also, wenn wir die Anzahl der unter λ gelegenen Eigenwerte des Gebietes G mit $A(\lambda)$ bezeichnen, die asymptotische Abschätzung bestehen

$$A(\lambda) \lesssim \frac{\sqrt{\lambda}}{4\pi} F, \tag{23}$$

wo F der Flächeninhalt von G ist.

Um eine untere asymptotische Schranke für diese Anzahl zu erhalten, vergleichen wir die Eigenwerte der freien Platte mit denen der eingespannten.

Verlangen wir im Maximum-Minimumproblem von den Funktionen φ, dass sie ausser den dort angegebenen Bedingungen am Rande des Gebiets noch den Bedingungen

$$\varphi = 0 \text{ und } \frac{\partial \varphi}{\partial \nu} = 0 \tag{24}$$

genügen, so wird der Wert des Minimums von J vergrössert, jedenfalls nicht verkleinert. Wählen wir als Funktionen v_1, $v_2, \ldots v_{n-1}$ die $n-1$ ersten Eigenfunktionen der freien Platte, so finden wir einen Minimalwert des Integrals J, der grösser oder gleich dem Eigenwert der freien Platte ist und kleiner oder gleich dem Eigenwert der eingespannten. Der Eigenwert der eingespannten Platte ist also bestimmt grösser oder gleich dem Eigenwert der freien Platte, und die Anzahl der unter λ gelegenen Eigenwerte der freien grösser oder gleich der Anzahl der entsprechenden Eigenwerte der eingespannten Platte. Da diese letztere Anzahl aber asymptotisch gleich $\frac{\sqrt{\lambda}}{4\pi} F$ ist, so schliessen wir unter Benutzung von (23), dass

$$A(\lambda) \cong \frac{\sqrt{\lambda}}{4\pi} F. \tag{25}$$

Aus der Übereinstimmung der asymptotischen Anzahlen für die freie und die eingespannte Platte schliesst man, dass bei Randbedingungen, die schwächer als die bei der eingespannten Platte sind, z. B. im Falle der gestützten Platte ($\varphi = 0$ am Rande), die asymptotische Verteilung der Eigenwerte dieselbe ist, wie die hier angegebene.