SUR CERTAINS TYPES DE SYSTÈMES D'ÉQUATIONS LINÉAIRES À UNE INFINITÉ D'INCONNUES

SUR L'INTERPOLATION

PAR

HERMANN JAAKSON

TARTU 1925

C. Mattiesen, Tartu

Introduction.

Généralités.

1. La méthode de Fourier.

On doit à Fourier[1] une importante méthode permettant de résoudre une certaine catégorie de systèmes d'équations linéaires à une infinité d'inconnues. Elle consiste, au fond, comme l'on sait, à rejeter dans le système à résoudre toutes les équations, sauf les n premières, en n'y conservant que les n premières inconnues. On calcule les inconnues du système de n équations ainsi obtenu et appelé *système réduit*, et l'on passe à la limite pour $n \to \infty$. Dans bien des cas, étant finies et bien déterminées, ces limites constituent, en effet, une solution du système infini donné.

2. Remarques relatives à la méthode de Fourier.

La méthode que nous venons d'esquisser en quelques mots a été appelée par M. Riesz[2] *principe des réduites*. Cependant, à notre avis, il ne serait pas bien commode de l'élever au rang d'un principe, bien qu'elle ait une importance incontestable dans la théorie des systèmes d'équations linéaires à une infinité d'inconnues.

En effet, M. Riesz, lui-même, fait remarquer que ce principe devrait encore être beaucoup précisé. On s'en rend d'ailleurs compte aisément, puisque cette méthode n'est, au fond, qu'une règle concrète ne s'appliquant que dans des conditions assez restrictives, — et voilà pourquoi nous ne saurions pas la considérer comme un *principe*; nous l'appelons *méthode de Fourier*.

---

(1) Fourier, Théorie analytique de la chaleur, Art. 166 et suiv.

(2) Riesz, F., Les systèmes d'équations linéaires à une infinité d'inconnues, p. 7.

Déjà Poincaré (1), en étudiant la légitimité de cette méthode, a montré qu'il y a des systèmes auxquels elle ne s'applique pas ou, si elle s'y applique, ce n'est que sous des conditions plus ou moins restrictives.

D'ailleurs, l'exemple le plus instructif, dans cet ordre d'idées, est peut-être celui que l'on doit à M. Riesz (2). Le voici: Étant donnée une suite indéfinie de quantités

$$a_1, a_2, a_3, \ldots a_n, \ldots .$$

telles que $\lim_{n \to \infty} | a_n | = \infty$, on peut toujours, d'après le théorème de Weierstrass, construire une fonction entière

$$F(z) = C_0 + C_1 z + C_2 z^2 + \ldots + C_n z^n + \ldots$$

admettant pour zéros les quantités a_n et n'en admettant pas d'autres.

En supposant, pour fixer les idées, que les a_i soient distincts et $\neq 0$, les coefficients $C_0, C_1, C_2, \ldots C_n, \ldots$ devront satisfaire au système d'équations suivant:

$$0 = C_0 + C_1 a_i + C_2 a_i^2 + \ldots + C_n a_i^n + \ldots \} \qquad (i = 1, 2, 3, \ldots).$$

Mais, d'autre part, en essayant de résoudre ce système par la méthode de Fourier, on constatera aisément que ce ne sera possible que si les $|a_n|$ croissent assez rapidement.

M. Riesz en conclut: „Ainsi, nos équations peuvent être résolues en tout cas; mais le principe des réduites n'y s'applique que sous des conditions très restrictives."

3. Le principe des réduites.

Quant au principe des réduites, en attribuant à ce mot un sens beaucoup plus large que ce qu' entend par là M. Riesz, nous l'énonçons sous la forme suivante:

Pour résoudre un système d'équations linéaires à une infinité d'inconnues, on n'a qu'à ramener convenablement ce problème à la résolution d'un nombre fini ou, en général, d'une infinité

(1) Poincaré, Remarques sur l'emploi de la méthode ... (Bull. Soc. math. de France, t. XIII, 1885, p. 19—27).

(2) Riesz, F., Les systèmes d'équations ..., p. 8.

de systèmes auxiliaires, dont chacun ne contient qu'un nombre fini d'inconnues et s'appelle **système réduit.**

Nous verrons que ce principe peut être considéré comme une idée-directrice générale, suggérant des méthodes nouvelles et fécondes dans la théorie des systèmes d'équations linéaires à une infinité d'inconnues.

En effet, dans le présent travail, nous en développerons déjà quelques-unes, en nous faisant guider, dans nos recherches concernant certains types de systèmes infinis, par le principe des réduites énoncé.

Les méthodes que nous obtiendrons ainsi, et dont nous ferons usage dans ce travail, ont tous pour base commune ledit principe ; elles varient, en général, avec les types de systèmes que l'on étudiera, et ne représentent, au fond, que des modes d'application différents dudit principe.

En particulier, la méthode de Fourier n'est que l'un des modes d'application possibles de ce principe, et qui s'adapte aux systèmes infinis les plus simples admettant des solutions, qui se calculeront à l'aide d'un seul système réduit.

Mais, comme nous le montrerons dans ce travail, il y a encore d'autres modes d'application du même principe, dont l'importance incontestable consiste en ce qu'ils permettront de résoudre de tels systèmes auxquels la méthode de Fourier ne s'applique pas, et où il s'agit, en général, de ramener la résolution d'un système infini donné, à celle d'une infinité de systèmes réduits.

4. La nature des solutions.

Quand on se propose de résoudre un système infini, il est évident qu'il faut d'abord préciser ce qu'on convient d'entendre par ses solutions.

Dans le présent travail nous appellons solution d'un système infini tout ensemble des valeurs des inconnues qui satisfont à ce système, en rendant absolument convergentes toutes les séries qui y figureront.

A cette condition générale nous en ajouterons, dans certains cas, encore quelques autres ; ainsi, par exemple, nous exigerons, dans les premiers trois Chapitres, qu'aucune des valeurs des inconnues ne soit zéro.

5. Les séries de Dirichlet généralisées.

Dans les premièrs trois Chapitres nous allons étudier les systèmes infinis que l'on peut attacher, d'une façon naturelle, aux séries de Dirichlet.

On appelle ordinairement série de Dirichlet chaque série

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n e^{-\lambda_n z},$$

où les λ_n sont réels et $\lim_{n \to \infty} \lambda_n = \infty$.

Or, cette notion peut être généralisée considérablement, comme l'a montré récemment M. Väisälä (1), qui appelle série de Dirichlet toute série

$$\text{(I)} \qquad \sum_{n=1}^{\infty} a_n e^{-\lambda_n z},$$

où $\lambda_n = r_n e^{i\varphi_n}$ et $\lim_{n \to \infty} r_n = \infty$ (condition A).

Sans avoir l'intention de traiter cette question d'une façon détaillée, nous aurons, cependant, l'occasion de constater que la généralisation peut être poussée beaucoup plus loin, de sorte qu'elle embrasse aussi les séries de la forme suivante:

$$\text{(II)} \qquad \sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n e^{-\lambda_n z},$$

les λ_n étant, en général, des quantités complexes et l'ensemble dénombrable

$$(\ldots \lambda_{-n}, \ldots \lambda_{-1}, \lambda_0, \lambda_1, \ldots \lambda_n, \ldots)$$

ayant, au moins, deux points-limites dont l'un sera l'infini et l'autre un nombre fini quelconque, zéro par exemple. Mais ce n'est qu'un cas particulier; en général, on peut supposer qu'il y ait même une infinité de points-limites. Ainsi, dans ce travail, nous ferons usage des séries de Dirichlet généralisées

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n e^{-\lambda_n z},$$

(1) Väisälä, K., Verallgemeinerung des Begriffes der Dirichletschen Reihen (Acta et Commentationes Universitatis Dorpatensis A I. 2).

en supposant seulement que l'ensemble partiel

$$(\ldots \lambda_{-n}, \ldots \lambda_{-2}, \lambda_{-1}, \lambda_0)$$

soit borné: $|\lambda_{-n}| < \lambda \quad (n = 0, 1, 2, 3, \ldots)$ (condition *B*),

tandis que par rapport à l'autre ensemble partiel

$$(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \ldots \lambda_n, \ldots)$$

soit remplie la condition *A*: $\lim_{n \to \infty} |\lambda_n| = \infty$.

6. L'objet des études.

Caractérisons maintenant en quelques mots les types de systèmes infinis dont l'étude fera l'objet de ce travail.

Le Chapitre I sera consacré aux types suivants:

type I: $$0 = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n^i x_n \qquad (i = 0, 1, 2, \ldots),$$

type II: $$0 = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \lambda_n^i x_n \qquad (i = 0, 1, 2, \ldots).$$

Ce sont les systèmes que l'on obtiendra, en prenant une série de Dirichlet généralisée, sous la forme (I) ou (II), en la différentiant terme à terme une infinité de fois et en égalant à zéro tous les résultats ainsi obtenus, après y avoir remplacé la variable z par zéro et désigné les coefficients indéterminés par x_n.

En attachant ainsi ces systèmes aux séries de Dirichlet, il s'ensuit que les quantités données λ_n y sont assujetties aux mêmes conditions que dans les séries correspondantes; c'est-à-dire, dans le cas du type I, à la condition (*A*); tandis que dans le cas du type II, aux conditions (*A*) et (*B*).

Sous ces conditions, d'une nature générale, on calculera aisément une infinité de solutions des systèmes du type I ou du type II, par une méthode que l'on peut considérer comme un nouveau mode d'application du principe des réduites.

Quant à la méthode de Fourier, elle ne s'y appliquera que sous des conditions complémentaires et très restrictives, — ce qui résulte déjà des études de Poincaré(1) sur certains systèmes infinis appartenant, comme cas particuliers, aux types I et II.

(1) Poincaré, Remarques sur l'emploi . . . (Bull. Soc. math. de France, t. XIII, p. 19—27).

Dans le Chapitre II nous étudierons deux types de systèmes non homogènes:

type III: $c_i = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n^i x_n \qquad (i = 0, 1, 2, \ldots)$ et

type IV: $c_i = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \lambda_n^i x_n \qquad (i = 0, 1, 2, \ldots),$

qui ne diffèrent des types I et II que par les parties gauches (c_i) des équations, les c_i étant des quantités arbitrairement données, dont au moins une quelconque soit différente de zéro.

Remarquons en passant que le système traité par M. Borel (1) dans sa Thèse rentre comme cas particulier dans le type III.

L'application convenable du principe des réduites aux systèmes du type III ou du type IV permettra de calculer toujours une infinité de solutions.

Dans le Chapitre III nous étudierons les systèmes que l'on obtiendra par le procédé formel suivant: Étant donnée une série de Dirichlet généralisée (sous la forme I ou II)

$$\sum_n x_n e^{-\lambda_n z}$$

à coefficients indéterminés x_n et, d'autre part, une équation différentielle linéaire

$$P_0(z)\frac{d^n y}{dz^n} + P_1(z)\frac{d^{n-1}y}{dz^{n-1}} + \ldots + P_{n-1}(z)\frac{dy}{dz} + P_n(z) \cdot y = P(z),$$

où les $P_i(z)$ $(i = 0, 1, \ldots n)$ sont des polynomes entiers quelconques en z, tandis que $P(z)$ est, en général, une série entière, qui peut se réduire, en particulier, à un polynome ou même à une constante (le zéro y compris), — on posera

$$y = \sum_n x_n e^{-\lambda_n z}$$

et l'on exigera que la série de Dirichlet satisfasse formellement à l'équation différentielle, tout comme si elle était l'une des intégrales; cela reviendra à ce que les x_n devront satisfaire à un système d'équations linéaires à une infinité d'inconnues.

(1) Borel, Sur quelques points de la Théorie des fonctions (Annales de l'Ecole Norm. sup., 3-e série, t. XII, 1895, p. 9—55).

Quant à la résolution de tels systèmes, nous verrons que ce problème peut être ramené, au moins dans des cas très étendus, complètement à celui concernant les systèmes des deux premiers Chapitres.

Il faut cependant ajouter que le procédé de formation des systèmes infinis, que nous venons de décrire, fournira dans certains cas, lorsque $P(z) \equiv 0$, des systèmes contenant des équations incompatibles et n'ayant, par conséquent, aucune solution, — ce qui ne pourra jamais arriver si $P(z) \equiv 0$, c'est-à-dire si le système est homogène.

Enfin, le Chapitre IV sera consacré à la résolution du problème d'interpolation ou, ce qui sera la même chose, à la résolution des systèmes infinis correspondants; ces derniers embrassent, en particulier, les systèmes cités, d'après M. Riesz, au n° 2.

En nous servant convenablement du principe des réduites, nous démontrerons le théorème général suivant:

Étant données trois suites indéfinies:

1° celle des (a_n) satisfaisant aux conditions suivantes:

$$a_i \neq a_j \text{ pour } i \neq j,$$

$$|a_1| \leqq |a_2| \leqq \ldots \leqq |a_n| \leqq \ldots,$$

$$\text{et } |a_n| \to \infty \text{ pour } n \to \infty,$$

2° celle des nombres entiers et positifs quelconques ou zéros

$$p_1, \quad p_2, \quad \ldots \quad p_n, \quad \ldots,$$

3° et celle des quantités quelconques

$$c_1^{(0)}, c_1^{(1)}, \ldots c_1^{(p_1)}; \quad c_2^{(0)}, c_2^{(1)}, \ldots c_2^{(p_2)}; \quad \ldots \quad c_n^{(0)}, c_n^{(1)}, \ldots c_n^{(p_n)}; \quad \ldots,$$

— on peut construire une infinité de fonctions entières $F(z)$ telles que pour $z = a_n$ l'on ait:

$$\left.\begin{aligned} F(a_n) &= c_n^{(0)} \\ F'(a_n) &= c_n^{(1)} \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot & \\ F^{(p_n)}(a_n) &= c_n^{(p_n)} \end{aligned}\right\} (n = 1, 2, 3, \ldots),$$

$F^{(p_n)}(z)$ étant la dérivée d'ordre p_n de la fonction $F(z)$ et

$$F^{(0)}(z) = F(z).$$

CHAPITRE I.

Sur les systèmes d'équations linéaires et homogènes à une infinité d'inconnues attachés aux séries de Dirichlet.

I. Le problème. Les séries de Dirichlet.

7. Dans ce Chapitre nous nous proposerons de résoudre les deux types de systèmes d'équations linéaires et homogènes à une infinité d'inconnues:

$$0 = \sum_{n=1}^{\infty} {}^{i}\lambda_n x_n \qquad \text{(type I)}, \tag{1}$$

$$0 = \sum_{n=-\infty}^{\infty} {}^{i}\lambda_n x_n \qquad \text{(type II)} \tag{2}$$

$$(i = 0, 1, 2, 3, \ldots),$$

en y supposant que les quantités données λ_n satisfassent aux conditions suivantes:

$$\lambda_h \neq \lambda_k \text{ pour } h \neq k, \tag{3}$$

$$\lim_{n \to \infty} |\lambda_n| = \infty, \tag{4}$$

$$|\lambda_{-n}| < \lambda \qquad (n = 0, 1, 2, \ldots), \tag{5}$$

λ étant un nombre positif quelconque.

Cela posé, démontrons que nos systèmes (1) et (2) peuvent être résolus dans tous les cas et cela de façon que les solutions soient constituées par des valeurs des inconnues dont aucune ne sera zéro.

8. Comme nous venons de voir (n° 6), les systèmes (1) et (2) peuvent être attachés aux séries de Dirichlet.

Chacune d'elles fournit un système (1) ou (2); pour l'obtenir on n'a qu'à différentier la série de Dirichlet terme à terme une infinité de fois et à exiger que les résultats ainsi obtenus s'annulent pour $z = 0$.

Sous ce point de vue, les inconnues des systèmes (1) ou (2) peuvent être considérées comme coefficients indéterminés des séries de Dirichlet, et le problème de la résolution des systèmes (1) et (2) se ramène à celui de la construction des séries de Dirichlet. En effet, chacune de ces séries est complètement caractérisée par deux suites indéfinies: celle des λ_n et celle des coefficients. Or, la suite des λ_n étant donnée d'avance, et les coefficients se calculant comme inconnues des systèmes (1) ou (2), il en résultera donc qu'à chacune des solutions des systèmes (1) et (2) on peut faire correspondre une série de Dirichlet, concrète et bien déterminée. De plus, la suite des λ_n étant donnée d'avance, il ne s'y agit évidemment que de construire des séries de Dirichlet contenant effectivement tous les λ_n donnés, c'est ce qui ne sera possible que sous la condition que les solutions du système correspondant (1) ou (2) soient constituées par des valeurs des inconnues dont aucune ne sera zéro.

Et voilà pourquoi nous ne saurions, dans le présent Chapitre (et de même dans les deux Chapitres suivants), admettre que des solutions satisfaisant à la dernière condition.

9. Sans avoir l'intention d'étudier, d'une façon détaillée, les séries de Dirichlet qui correspondent aux solutions des systèmes (1) et (2), nous nous permettrons seulement de faire à ce sujet quelques remarques d'un caractère général.

Constatons tout de suite que chacune d'elles représente une fonction $F(z)$ bien déterminée, au moins pour une valeur de la variable z, à savoir $z = 0$. En effet, les x_n constituant une solution d'un des systèmes (1) ou (2), la série $\sum_n x_n$ sera, d'après la première équation de ce système, absolument convergente, et aura pour somme zéro; donc,

$$F(0) = \sum_n x_n = 0.$$

De même, on s'aperçoit aisément que lorsqu'une série de Dirichlet est uniformément convergente dans une région quel-

conque, limitée par une courbe passant par l'origine, elle y représentera une fonction holomorphe $F(z)$, s'annulant avec toutes ses dérivées pour $z = 0$:

$$F(0) = 0; \qquad F^{(n)}(0) = 0 \qquad (n = 1, 2, 3, \ldots).$$

En effet, chacun des termes de la série $(x_n e^{-\lambda_n z})$ étant une fonction holomorphe dans tout le plan de la variable z, il en résultera, d'après le théorème de Weierstrass, que, si la série est uniformément convergente dans une région, elle y représentera une fonction holomorphe $F(z)$, dont la dérivée d'ordre p sera

$$F^{(p)}(z) = \sum_n x_n (-\lambda_n)^p e^{-\lambda_n z};$$

donc, en tenant compte du système correspondant

$$0 = \sum_n x_n (-\lambda_n)^p \qquad (p = 0, 1, 2, \ldots),$$

on aura évidemment, d'après l'hypothèse faite,

$$F(0) = 0; \qquad F^{(p)}(0) = 0 \qquad (p = 1, 2, 3, \ldots).$$

Que de tels cas peuvent se présenter en réalité, on le verra tout de suite. Supposons, par exemple, que les λ_n soient réels et $\lim_{n \to \infty} \lambda_n = \infty$; alors à chacune des solutions correspondra une série ordinaire de Dirichlet. Étant absolument convergente pour $z = 0$, elle sera, d'après la théorie de telles séries, uniformément convergente dans tout le demiplan à droite de l'axe imaginaire.

Dans le cas où les λ_n représentent des quantités complexes, il s'agit des séries de Dirichlet généralisées, et alors la question, concernant la région de convergence, deviendra en général beaucoup plus compliquée, comme il résulte des recherches de M. Väisälä, citées déjà au n° **5.**

Tandis que la région de convergence d'une série ordinaire de Dirichlet représente toujours, comme on le sait, un demiplan à droite d'une parallèle à l'axe imaginaire, celle-ci d'une série de Dirichlet généralisée peut être, d'après M. Väisälä, une région quelconque, limitée par une courbe convexe. Il a démontré, en effet, qu'étant donnée une région quelconque, limitée par une courbe convexe, on peut construire une infinité de séries de Dirichlet généralisées dont chacune l'admet pour région de convergence absolue.

Puisqu'il ne s'agit pas ici d'étudier les séries de Dirichlet généralisées d'une façon détaillée, nous nous contenterons de constater seulement le fait suivant:

En assujettant les arguments des quantités λ_n à certaines restrictions, on peut indiquer des régions plus ou moins vastes où les séries de Dirichlet généralisées, correspondant aux solutions des systèmes (1) et (2), seront sûrs d'être uniformément convergentes.

En effet, supposons, par exemple, que les λ_n soient tous situés dans l'angle droit, formé par deux demidroites:

$$\varphi = \frac{\pi}{4} \quad \text{et} \quad \varphi = -\frac{\pi}{4},$$

issues de l'origine; la série

$$\sum_n x_n e^{-\lambda_n z},$$

dont les coefficients x_n constituent une solution du système correspondant (1) ou (2), sera alors uniformément convergente, au moins dans l'angle droit indiqué, comme on s'en assurera aisément par le raisonnement suivant:

Soit $z = \varrho e^{i\varphi}$ une valeur quelconque de la variable z dans ledit angle; on aura donc $-\frac{\pi}{4} \leqq \varphi \leqq +\frac{\pi}{4}$. D'autre part, en désignant

$$\lambda_n = r_n e^{i\varphi_n} \quad (n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots),$$

on aura, d'après l'hypothèse faite,

$$\varphi_n = \psi_n \pm 2\pi m,$$

m étant un entier positif quelconque ou zéro, et

$$-\frac{\pi}{4} \leqq \psi_n \leqq +\frac{\pi}{4}.$$

Par conséquent, $-\lambda_n z = -r_n \varrho\, e^{i(\varphi_n+\varphi)} = -r_n \varrho\, e^{i(\psi_n+\varphi)}$ et

$$\left| e^{-\lambda_n z} \right| = \frac{1}{e^{r_n \varrho \operatorname{Cos}(\psi_n+\varphi)}} \leqq 1, \text{ puisque } -\frac{\pi}{2} \leqq \psi_n + \varphi \leqq +\frac{\pi}{2};$$

donc,

$$\left| x_n e^{-\lambda_n z} \right| \leqq \left| x_n \right|.$$

Aussi, la série Σx_n étant absolument convergente, la série

$$\sum_n x_n e^{-\lambda_n z}$$

sera-t-elle uniformément convergente, au moins dans l'angle droit indiqué, et y représentera une fonction holomorphe.

De même, il est aisé de voir que, dans le cas où

$$-\frac{\pi}{2} \leqq \psi_n \leqq +\frac{\pi}{2},$$

les séries de Dirichlet correspondantes (ainsi que celles que l'on en obtiendrait en les différentiant terme à terme) seraient uniformément convergentes, au moins pour les valeurs réelles et positives de la variable z, c'est-à-dire sur l'axe réel à droite de l'axe imaginaire.

Il est évident que l'on pourrait multiplier indéfiniment de tels exemples.

Des remarques précédentes nous pouvons tirer les conclusions suivantes:

1° les séries de Dirichlet (ordinaires ou généralisées), correspondant aux solutions des systèmes (1) ou (2), sont absolument convergentes pour $z = 0$, quels que soient les arguments des quantités λ_n;

2° elles sont, au moins dans des cas étendus, uniformément convergentes dans des régions plus ou moins vastes et y représentent des fonctions holomorphes, s'annulant avec toutes les dérivées pour $z = 0$;

3° aussi, au moins sous certaines réserves, pourrait-on interpréter le problème de la résolution des systèmes (1) et (2) comme problème de construction des séries de Dirichlet, qui représentent des fonctions $F(z)$, complètement déterminées et holomorphes dans certaines régions, et s'annulant avec leurs dérivées pour $z = 0$:

$$F(0) = 0, \quad F^{(n)}(0) = 0 \qquad (n = 1, 2, 3, \ldots).$$

II. Sur l'application de la méthode de Fourier aux systèmes du type I.

10. Soit donné un système du type I

$$0 = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n^i x_n \quad (i = 0, 1, 2, \ldots);$$

en exigeant alors qu'une solution soit constituée par des valeurs des inconnues (x_n) dont aucune n'est zéro, on peut supposer, en particulier, que $x_1 \neq 0$, et présenter le système donné sous la forme suivante:

$$-\lambda_1^i = \sum_{n=2}^{\infty} \lambda_n^i \left(\frac{x_n}{x_1}\right) \quad (i = 0, 1, 2, \ldots), \tag{1a}$$

où les rapports $\left(\frac{x_n}{x_1}\right)$ joueront le rôle des inconnues. Essayons de les calculer par la méthode de Fourier. Le système réduit sera dans ce cas:

$$-\lambda_1^i = \sum_{k=2}^{n+1} \lambda_k^i \left(\frac{x_k}{x_1}\right) \quad (i = 0, 1, 2, \ldots n-1).$$

En désignant sa solution par

$$\left(\frac{x_2}{x_1}\right)^{(n)}, \ldots \left(\frac{x_k}{x_1}\right)^{(n)}, \ldots \left(\frac{x_{n+1}}{x_1}\right)^{(n)}$$

et en tenant compte de ce que

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & \ldots & 1 \\ \lambda_2 & \lambda_3 & \ldots & \lambda_{n+1} \\ \lambda_2^2 & \lambda_3^2 & \ldots & \lambda_{n+1}^2 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \lambda_2^{n-1} & \lambda_3^{n-1} & \ldots & \lambda_{n+1}^{n-1} \end{vmatrix} = (\lambda_3 - \lambda_2)(\lambda_4 - \lambda_2) \ldots (\lambda_{n+1} - \lambda_2)(\lambda_4 - \lambda_3) \ldots (\lambda_{n+1} - \lambda_3) \ldots \ldots \ldots (\lambda_{n+1} - \lambda_n) \neq 0,$$

on obtiendra aisément les valeurs des inconnues $\left(\frac{x_k}{x_1}\right)^{(n)}$, à l'aide des formules:

$$
(6)\begin{cases}
\left(\dfrac{x_2}{x_1}\right)^{(n)} = -\dfrac{\left(1-\dfrac{\lambda_1}{\lambda_3}\right)\left(1-\dfrac{\lambda_1}{\lambda_4}\right)\cdots\left(1-\dfrac{\lambda_1}{\lambda_{n+1}}\right)}{\left(1-\dfrac{\lambda_2}{\lambda_3}\right)\left(1-\dfrac{\lambda_2}{\lambda_4}\right)\cdots\left(1-\dfrac{\lambda_2}{\lambda_{n+1}}\right)} \\[2ex]
\left(\dfrac{x_3}{x_1}\right)^{(n)} = +\dfrac{\lambda_2}{\lambda_3}\cdot\dfrac{\left(1-\dfrac{\lambda_1}{\lambda_2}\right)}{\left(1-\dfrac{\lambda_2}{\lambda_3}\right)}\cdot\dfrac{\left(1-\dfrac{\lambda_1}{\lambda_4}\right)\left(1-\dfrac{\lambda_1}{\lambda_5}\right)\cdots\left(1-\dfrac{\lambda_1}{\lambda_{n+1}}\right)}{\left(1-\dfrac{\lambda_3}{\lambda_4}\right)\left(1-\dfrac{\lambda_3}{\lambda_5}\right)\cdots\left(1-\dfrac{\lambda_3}{\lambda_{n+1}}\right)} \\[2ex]
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\[2ex]
\left(\dfrac{x_h}{x_1}\right)^{(n)} = (-1)^{h-1}\dfrac{\lambda_2\lambda_3\ldots\lambda_{h-1}}{\lambda_h^{h-2}}\cdot\dfrac{\left(1-\dfrac{\lambda_1}{\lambda_2}\right)\left(1-\dfrac{\lambda_1}{\lambda_3}\right)\cdots\left(1-\dfrac{\lambda_1}{\lambda_{h-1}}\right)}{\left(1-\dfrac{\lambda_2}{\lambda_h}\right)\left(1-\dfrac{\lambda_3}{\lambda_h}\right)\cdots\left(1-\dfrac{\lambda_{h-1}}{\lambda_h}\right)}\cdot \\[2ex]
\qquad\cdot\dfrac{\left(1-\dfrac{\lambda_1}{\lambda_{h+1}}\right)\left(1-\dfrac{\lambda_1}{\lambda_{h+2}}\right)\cdots\left(1-\dfrac{\lambda_1}{\lambda_{n+1}}\right)}{\left(1-\dfrac{\lambda_h}{\lambda_{h+1}}\right)\left(1-\dfrac{\lambda_h}{\lambda_{h+2}}\right)\cdots\left(1-\dfrac{\lambda_h}{\lambda_{n+1}}\right)} \\[2ex]
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots
\end{cases}
$$

Donc, il ne s'y agit plus que de passer à la limite pour $n \to \infty$.

11. Nous allons constater que les limites:

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{x_h}{x_1}\right)^{(n)} = \left(\frac{x_h}{x_1}\right) \quad (h = 2, 3, \ldots)$$

n'existeront sous une forme finie que dans des conditions beaucoup plus restrictives que celles de (3—5), et qu'elles ne constitueront une solution du système donné que dans des conditions encore moins générales.

Pour s'en assurer, il suffira d'examiner quelques exemples particuliers.

Supposons tout d'abord que la suite des λ_n soit telle que

$$(7) \qquad \lambda_n = n \qquad (n = 1, 2, 3, \ldots);$$

on déduira alors des formules (6), par un calcul simple, que

$$\left(\frac{x_2}{x_1}\right)^{(n)} = -n, \qquad \left(\frac{x_3}{x_1}\right)^{(n)} = \frac{n(n-1)}{1.2} \quad \text{et généralement}$$

$$\left(\frac{x_h}{x_1}\right)^{(n)} = (-1)^{h-1}\frac{n(n-1)(n-2)\ldots[n-(h-2)]}{1.2.3\ldots(h-1)} \qquad (h=2,3,4,\ldots).$$

Donc, $$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{x_h}{x_1}\right)^{(n)} = \pm\infty \qquad (h=2,3,4,\ldots),$$

c'est-à-dire, dans le cas (7), il n'y a pas de limites finies.

Supposons ensuite que les λ_n soient tels que

(8) $$\lambda_n = n^2 \qquad (n=1,2,3,\ldots);$$

alors, en employant la formule bien connue

$$\operatorname{Sin}\pi x = \pi x\left(1-\frac{x^2}{1^2}\right)\left(1-\frac{x^2}{2^2}\right)\ldots\left(1-\frac{x^2}{n^2}\right)\ldots,$$

on aura

$$\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{\lambda_1}{\lambda_{h+1}}\right)\left(1-\frac{\lambda_1}{\lambda_{h+2}}\right)\ldots\left(1-\frac{\lambda_1}{\lambda_{n+1}}\right) =$$

$$= \lim_{x\to 1}\frac{\operatorname{Sin}\pi x}{\pi x\left(1-\frac{x^2}{1^2}\right)\left(1-\frac{x^2}{2^2}\right)\ldots\left(1-\frac{x^2}{h^2}\right)} =$$

$$= \frac{1}{2\left(1-\frac{1}{2^2}\right)\left(1-\frac{1}{3^2}\right)\ldots\left(1-\frac{1}{h^2}\right)},$$

et de même

$$\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{\lambda_h}{\lambda_{h+1}}\right)\left(1-\frac{\lambda_h}{\lambda_{h+2}}\right)\ldots\left(1-\frac{\lambda_h}{\lambda_{n+1}}\right) =$$

$$= \lim_{x\to h}\frac{\operatorname{Sin}\pi x}{\pi x\left(1-\frac{x^2}{1^2}\right)\left(1-\frac{x^2}{2^2}\right)\ldots\left(1-\frac{x^2}{h^2}\right)} =$$

$$= (-1)^{h-1}\frac{1}{2\left(1-\frac{h^2}{1}\right)\left(1-\frac{h^2}{2^2}\right)\ldots\left(1-\frac{h^2}{(h-1)^2}\right)};$$

donc, d'après les formules (6),

$$\left(\frac{x_h}{x_1}\right) = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{x_h}{x_1}\right)^{(n)} = (-1)^{h-1}h^2 \qquad (h = 2, 3, 4, \ldots).$$

Aussi, dans le cas (8), chacune des limites $\left(\frac{x_h}{x_1}\right)$ sera-t-elle finie et bien déterminée; cependant, elles ne constituent pas une solution du système (1a), puisqu'elles ne rendent pas absolument convergentes les séries qui s'y trouvent.

12. Supposons enfin que

$$\lambda_n = p^{n-1}, \quad p > 1 \qquad (n = 1, 2, 3, \ldots); \tag{9}$$

alors on aura

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\left(1-\frac{\lambda_1}{\lambda_{h+1}}\right)\left(1-\frac{\lambda_1}{\lambda_{h+2}}\right)\cdots\left(1-\frac{\lambda_1}{\lambda_{n+1}}\right)}{\left(1-\frac{\lambda_h}{\lambda_{h+1}}\right)\left(1-\frac{\lambda_h}{\lambda_{h+2}}\right)\cdots\left(1-\frac{\lambda_h}{\lambda_{n+1}}\right)} =$$

$$= \frac{1}{\left(1-\frac{1}{p}\right)\left(1-\frac{1}{p^2}\right)\cdots\left(1-\frac{1}{p^{h-1}}\right)}$$

et, par conséquent, d'après les formules (6),

$$\left(\frac{x_h}{x_1}\right) = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{x_h}{x_1}\right)^{(n)} = (-1)^{h-1}\frac{p^{h-1}}{(p-1)(p^2-1)(p^3-1)\cdots(p^{h-1}-1)} \tag{10}$$

$$(h = 2, 3, 4, \ldots).$$

Cette fois on peut bien constater que les valeurs des inconnues $\left(\frac{x_h}{x_1}\right)$, fournies par la formule (10), rendent absolument convergente chacune des séries du système (1a).

En effet, i étant un entier positif quelconque ou zéro, examinons la $(i+1)^{\text{ième}}$ série

$$-\lambda_1^i = \sum_{n=2}^{\infty}\lambda_n^i\left(\frac{x_n}{x_1}\right).$$

En désignant

$$u_h = \lambda_h^i\left(\frac{x_h}{x_1}\right) \quad \text{et} \quad u_{h+1} = \lambda_{h+1}^i\left(\frac{x_{h+1}}{x_1}\right),$$

on aura $\left|\frac{u_{h+1}}{u_h}\right| = \frac{p^{i+1}}{p^h - 1}$ et, par suite, $\lim_{h\to\infty}\left|\frac{u_{h+1}}{u_h}\right| = 0$,

d'où se déduira immédiatement la convergence absolue. La série

$$\sum_{k=2}^{\infty} \lambda_k^i \left(\frac{x_k}{x_1}\right)$$

a donc une somme bien déterminée et, comme on s'en rendra compte aisément, celle-ci n'est que $-\lambda_1^i$, puisque

$$-\lambda_1^i = \sum_{k=2}^{n+1} \lambda_k^i \left(\frac{x_k}{x_1}\right)^{(n)},$$

quel que soit l'entier positif n, et, d'autre part,

$$\sum_{k=2}^{\infty} \lambda_k^i \left(\frac{x_k}{x_1}\right) = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=2}^{n+1} \lambda_k^i \left(\frac{x_k}{x_1}\right)^{(n)} \quad (^1)$$

Il en résulte donc que, sous l'hypothèse (9), la méthode de Fourier est applicable et permet de déterminer les rapports des inconnues du système donné $\left(\frac{x_h}{x_1}\right)$, de sorte qu'ils satisfassent au système (1a), et qu'aucun d'eux ne soit zéro.

En y prenant $x_1 = C$, C étant une constante arbitraire, différente de zéro, on obtiendra donc une solution du système donné (1) dépendant d'une constante arbitraire, et exprimée par les formules:

$$(11) \qquad x_1 = C, \quad x_h = (-1)^{h-1} C \cdot \frac{p^{h-1}}{(p-1)(p^2-1)\ldots(p^{h-1}-1)}$$

$$(h = 2, 3, 4, \ldots).$$

Remarquons encore que, en disposant de la constante arbitraire C, on peut faire assumer à une inconnue quelconque x_n la valeur

(1) D'une façon générale, remarquons que toutes les fois que l'on aura, par la méthode de Fourier, trouvé les valeurs des inconnues d'un système donné, qui rendraient absolument convergentes les séries du système, on en tirerait immédiatement, tout comme ci-dessus, la conclusion, que ces valeurs constituent effectivement une solution de ce système, puisqu'elles rendront les parties droites des équations égales aux parties gauches correspondantes.

$a \neq 0$ arbitrairement prescrite. En effet, pour cela on n'aura qu'à choisir C de sorte que soit

$$a = (-1)^{n-1} C \cdot \frac{p^{n-1}}{(p-1)(p^2-1)\dots(p^{n-1}-1)}.$$

Donc, des trois hypothèses concrètes, relatives à la nature de la suite des λ_n, que nous venons d'examiner ci-dessus, ce n'est que la dernière, qui permet de résoudre le système correspondant par la méthode de Fourier. En la comparant aux autres, on constate tout de suite que dans ce cas la croissance des λ_n est plus rapide que dans les deux cas précédents. Il est clair que c'est bien cette circonstance à laquelle, dans ce cas-ci, on doit le succès.

13. L'hypothèse (9) est loin d'être la seule, sous laquelle un système (1) peut être résolu par la méthode de Fourier; nous allons démontrer à ce sujet la proposition plus générale suivante:

Étant donnée une suite indéfinie des λ_n telle que

$$\lambda_i \neq \lambda_j \qquad (i \neq j)$$

$$\text{(12)} \qquad \text{et} \quad \left|\frac{\lambda_{h+1}}{\lambda_h}\right| \geqq p > 1 \quad \text{pour} \quad h \geqq N,$$

N étant un entier positif quelconque, on peut, par la méthode de Fourier, déterminer une solution du système correspondant, dépendant d'une constante arbitraire C.

En effet, les valeurs (6) des inconnues du système réduit auront pour $n \to \infty$ les limites finies et différentes de zéro:

$$\left(\frac{x_h}{x_1}\right) = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{x_h}{x_1}\right)^{(n)} = (-1)^{h-1}\frac{\lambda_2\lambda_3\dots\lambda_{h-1}}{\lambda_h{}^{h-2}} \cdot \frac{\left(1-\frac{\lambda_1}{\lambda_2}\right)\left(1-\frac{\lambda_1}{\lambda_3}\right)\dots\left(1-\frac{\lambda_1}{\lambda_{h-1}}\right)}{\left(1-\frac{\lambda_2}{\lambda_h}\right)\left(1-\frac{\lambda_3}{\lambda_h}\right)\dots\left(1-\frac{\lambda_{h-1}}{\lambda_h}\right)} \cdot$$

$$\cdot \frac{\left(1-\frac{\lambda_1}{\lambda_{h+1}}\right)\left(1-\frac{\lambda_1}{\lambda_{h+2}}\right)\dots}{\left(1-\frac{\lambda_h}{\lambda_{h+1}}\right)\left(1-\frac{\lambda_h}{\lambda_{h+2}}\right)\dots} \qquad (h = 2, 3, 4, \dots),$$

puisque, la série

$$\frac{1}{\lambda_{h+1}}+\frac{1}{\lambda_{h+2}}+\frac{1}{\lambda_{h+3}}+\cdots$$

étant, par hypothèse, absolument convergente, les produits infinis

$$\left(1-\frac{\lambda_1}{\lambda_{h+1}}\right)\left(1-\frac{\lambda_1}{\lambda_{h+2}}\right)\left(1-\frac{\lambda_1}{\lambda_{h+3}}\right)\cdots$$

et

$$\left(1-\frac{\lambda_h}{\lambda_{h+1}}\right)\left(1-\frac{\lambda_h}{\lambda_{h+2}}\right)\left(1-\frac{\lambda_h}{\lambda_{h+3}}\right)\cdots$$

le sont donc, eux-aussi, et diffèrent évidemment de zéro.

De plus, ces limites

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{x_h}{x_1}\right)^{(n)}=\left(\frac{x_h}{x_1}\right)$$

rendent absolument convergente chacune des séries

$$\sum_{k=2}^{\infty}\lambda_k^i\left(\frac{x_k}{x_1}\right),$$

i étant un entier positif quelconque ou zéro.

En effet, soit

$$u_h=\lambda_k^i\left(\frac{x_h}{x_1}\right),$$

et

$$u_{h+1}=\lambda_{h+1}^i\left(\frac{x_{h+1}}{x_1}\right);$$

alors

$$\left|\frac{u_{h+1}}{u_h}\right|=\left|\frac{\lambda_h}{\lambda_{h+1}}\right|^{h-i-1}\cdot\frac{\left|1-\frac{\lambda_1}{\lambda_h}\right|\cdots\left|1-\frac{\lambda_{h-1}}{\lambda_h}\right|}{\left|1-\frac{\lambda_1}{\lambda_{h+1}}\right|\cdots\left|1-\frac{\lambda_{h-1}}{\lambda_{h+1}}\right|}\cdot\frac{\left|1-\frac{\lambda_h}{\lambda_{h+2}}\right|\left|1-\frac{\lambda_h}{\lambda_{h+3}}\right|\cdots}{\left|1-\frac{\lambda_{h+1}}{\lambda_{h+2}}\right|\left|1-\frac{\lambda_{h+1}}{\lambda_{h+3}}\right|\cdots};$$

or, d'après l'hypothèse faite, on aura

$$\lim_{h\to\infty}\left|\frac{\lambda_h}{\lambda_{h+1}}\right|^{h-i-1}=0,$$

tandis que

$$\lim_{h\to\infty} \frac{\left|1-\frac{\lambda_1}{\lambda_h}\right| \cdots \left|1-\frac{\lambda_{h-1}}{\lambda_h}\right|}{\left|1-\frac{\lambda_1}{\lambda_{h+1}}\right| \cdots \left|1-\frac{\lambda_{h-1}}{\lambda_{h+1}}\right|} \cdot \frac{\left|1-\frac{\lambda_h}{\lambda_{h+2}}\right| \left|1-\frac{\lambda_h}{\lambda_{h+3}}\right| \cdots}{\left|1-\frac{\lambda_{h+1}}{\lambda_{h+2}}\right| \left|1-\frac{\lambda_{h+1}}{\lambda_{h+3}}\right| \cdots} =$$

$$= \lim_{h\to\infty} \frac{\left|1-\frac{\lambda_N}{\lambda_h}\right| \left|1-\frac{\lambda_{N+1}}{\lambda_h}\right| \cdots \left|1-\frac{\lambda_{h-1}}{\lambda_h}\right|}{\left|1-\frac{\lambda_N}{\lambda_{h+1}}\right| \left|1-\frac{\lambda_{N+1}}{\lambda_{h+1}}\right| \cdots \left|1-\frac{\lambda_{h-1}}{\lambda_{h+1}}\right|} \cdot$$

$$\cdot \lim_{h\to\infty} \frac{\left|1-\frac{\lambda_h}{\lambda_{h+2}}\right| \left|1-\frac{\lambda_h}{\lambda_{h+3}}\right| \cdots}{\left|1-\frac{\lambda_{h+1}}{\lambda_{h+2}}\right| \left|1-\frac{\lambda_{h+1}}{\lambda_{h+3}}\right| \cdots} < \frac{\left|\prod_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{1}{p^n}\right)\right|^2}{\left|\prod_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{1}{p_n}\right)\right|},$$

comme on s'en rendra aisément compte.

Donc,
$$\lim_{h\to\infty} \left|\frac{u_{h+1}}{u_h}\right| = 0,$$

d'où se déduira inmédiatement la convergence absolue.

Il en résulte que, sous l'hypothèse (12), une solution du système (1) sera fournie par les formules;

$$(13)\quad \begin{cases} x_1 = C, \quad x_h = (-1)^{h-1} C \dfrac{\lambda_2 \lambda_3 \ldots \lambda_{h-1}}{\lambda_h^{h-2}} \cdot \\ \cdot \dfrac{\left(1-\frac{\lambda_1}{\lambda_2}\right) \cdots \left(1-\frac{\lambda_1}{\lambda_{h-1}}\right) \left(1-\frac{\lambda_1}{\lambda_{h+1}}\right) \left(1-\frac{\lambda_1}{\lambda_{h+2}}\right) \cdots}{\left(1-\frac{\lambda_2}{\lambda_h}\right) \cdots \left(1-\frac{\lambda_{h-1}}{\lambda_h}\right) \left(1-\frac{\lambda_h}{\lambda_{h+1}}\right) \left(1-\frac{\lambda_h}{\lambda_{h+2}}\right) \cdots} \\ (h = 2, 3, 4, \ldots), \end{cases}$$

C désignant une constante arbitraire.

En disposant convenablement de C, on peut faire assumer évidemment à une inconnue quelconque x_n la valeur $\alpha \neq 0$ arbitrairement prescrite.

III. Sur l'application du principe des réduites dans un cas particulier.

14. Comme nous venons de voir (n° 11), la méthode de Fourier ne s'applique pas au système (1) dans le cas (7).

Cependant, il ne faut pas en conclure que le principe des réduites, lui-même, ne puisse pas s'appliquer. En effet, nous allons démontrer que l'on peut résoudre le système donné par une méthode nouvelle ne représentant, au fond, qu'un autre mode d'application du principe des réduites; au lieu de ramener le système donné à un seul système réduit, comme nous l'avons fait dans les cas précédents, nous le ramènerons, dans ce cas-ci, à une suite indéfinie de systèmes réduits.

Quant à la réduction, elle sera effectuée par deux étapes, à l'aide des systèmes infinis intermédiaires que l'on pourrait appeler systèmes réduits généralisés, dont chacun peut être résolu par la méthode de Fourier, c'est-à-dire être ramené à un seul système réduit fini.

En calculant les solutions des systèmes réduits, et en passant à la limite, on obtiendra les solutions des systèmes infinis intermédiaires; avec celles-ci on construira des solutions du système donné.

Notre tâche consistera donc en ce que nous aurons à fixer la loi de formation des systèmes réduits généralisés, et à déterminer le mode de construction des solutions du système donné, à l'aide de celles des systèmes réduits généralisés.

15. Étudions d'abord la loi de formation des systèmes réduits généralisés.

Le système particulier (S), que nous allons résoudre, s'écrit

$$0 = \sum_{n=1}^{\infty} n^i x_n \qquad (i = 0, 1, 2, \ldots).$$

C'est un système appartenant au type I, et complètement caractérisé par la suite indéfinie (E) des $\lambda_n = n$:

$$(E) = 1, 2, 3, 4, \ldots$$

Décomposons maintenant la suite (E) en une infinité de suites partielles (E_n) de la façon suivante: Constituons avec les

éléments de la suite (E), c'est-à-dire avec les nombres naturels, le Tableau à double entrée:

1	2^1	2^2	.	.	.	2^h	.	. .
3	3.2^1	3.2^2	.	.	.	3.2^h	.	. .
5	5.2^1	5.2^2	.	.	.	5.2^h	.	. .
.	.	.	.	.	.	.	.	. .
$(2n+1)$	$(2n+1)2^1$	$(2n+1)2^2$	.	.	.	$(2n+1)2^h$	.	. .
.	.	.	.	.	.	.	.	. .

On se rend aisément compte de ce que ce Tableau contient tous les nombres naturels, et que chacun d'eux n'y rentre qu'une seule fois en y occupant une place bien déterminée. En effet, s étant un entier positif, il est évident qu'on ne pourra le présenter que d'une seule manière sous la forme

$$s = (2n+1)2^h,$$

h et n étant certains entiers positifs ou zéros; donc, s occupera dans notre Tableau la case qui est située dans la file de rang $(n+1)$ et dans la colonne de rang $h+1$.

En entendant par (E_n) la suite

$$(E_n) = 2n+1, \quad (2n+1)2^1, \quad \ldots \quad (2n+1)2^h, \quad \ldots$$
$$(n = 0, 1, 2, 3, \ldots .),$$

et en tenant compte du Tableau à double entrée, l'on constatera immédiatement que la suite donnée (E) se décomposera, en effet, en une infinité de suites partielles (E_n), ce que l'on peut exprimer par la formule symbolique

$$(E) = (E_0) + (E_1) + \ldots + (E_n) + \ldots$$

Comme nous l'avons déjà remarqué, la suite (E) caractérise complètement le système donné (S); or, par analogie, chacune des suites partielles (E_n) déterminera, à son tour, un système (S_n).

En désignant les inconnues du système (S_n) respectivement par $y_{n1}, y_{n2}, \ldots y_{n(h+1)}, \ldots$, il se présentera sous la forme suivante:

$$(S_n) \ldots \qquad 0 = \sum_{h=0}^{\infty} [(2n+1)2^h]^i y_{n(h+1)} \qquad \begin{pmatrix} i = 0, 1, 2, \ldots \\ n = 0, 1, 2, \ldots \end{pmatrix}.$$

Ainsi, l'on obtiendra une infinité de systèmes (S_n) bien déterminés. En les examinant de près, on verra tout de suite que, quel que soit l'entier positif n, le système (S_n) est équivalent au système (S_0)

$$0 = \sum_{h=0}^{\infty} (2^h)^i y_{0(h+1)} \qquad (i = 0, 1, 2, \ldots),$$

les systèmes (S_n) et (S_0) ayant évidemment tous les deux les mêmes solutions. Aussi, peut-on poser tout simplement

$$y_{n(h+1)} = y_{h+1} \qquad (n = 0, 1, 2, \ldots),$$

et calculer les valeurs

$$y_1, y_2, \ldots y_{h+1}, \ldots$$

à l'aide de n'importe quel système (S_n). Or, prenons le système (S_0) et remarquons qu'il s'obtiendra du système (1) en y posant

$$\lambda_n = 2^{n-1} \quad \text{et} \quad x_n = y_n.$$

D'après le n° 12, on pourra en conclure immédiatement que le système (S_0) peut être résolu par la méthode de Fourier, les valeurs des inconnues $y_1, y_2, \ldots y_{h+1}, \ldots$ s'exprimant à l'aide des formules (11), si l'on y remplace p par 2.

On aura donc

$$(14) \qquad y_1 = C, \quad y_{h+1} = (-1)^h \frac{2^h}{(2-1)(2^2-1)\ldots(2^h-1)} C$$

$$(h = 1, 2, 3, \ldots),$$

C étant une constante arbitraire.

16. Démontrons maintenant que, en employant les solutions des systèmes (S_n), on peut construire une solution du système donné (S), c'est-à-dire que les systèmes (S_n) peuvent être considérés, par rapport au système (S), comme s y s t è m e s r é d u i t s g é n é r a l i s é s.

En effet, convenons de déterminer les valeurs des inconnues (x_s) du système donné (S) de la façon suivante:

Étant donné le rang s de l'inconnue x_s, nous le présenterons sous la forme

$$s = (2n + 1) 2^h \qquad \text{(voir n° 15)},$$

ce qui fera correspondre à s une seule valeur bien déterminée de h, ainsi qu'une seule valeur de n.

Cela étant, nous poserons $x_s = y_{h+1}$, où y_{h+1}, dépendant d'une constante arbitraire C, sera fourni par les formules (14).

Nous verrons que, en spécifiant convenablement cette constante arbitraire C, nous obtiendrons ainsi une solution du système donné (S).

Il est clair qu'il faut spécifier C, puisque, d'après ce que nous venons de dire, on obtiendra, en particulier,

$$x_1 = C, \quad x_3 = C, \ldots x_{2n+1} = C, \ldots;$$

par suite, si l'on y entendait par C une constante arbitraire, la première série du système (S)

$$\sum_{n=1}^{\infty} x_n$$

(pour ne parler que d'elle) contiendrait une infinité de termes tout à fait arbitraires et, par conséquent, elle n'aurait évidemment aucun sens précis.

De même, en spécifiant C, il faut tenir compte de n. En effet, si l'on prenait pour C, indépendamment de n, la même valeur quelconque $a \neq 0$, on aurait

$$x_1 = a, \quad x_3 = a, \ldots x_{2n+1} = a, \ldots;$$

donc, la série

$$\sum_{n=1}^{\infty} x_n,$$

contenant le même terme a une infinité de fois, ne serait pas convergente.

Or, étant $s = (2n+1)2^h$, prenons $x_s = y_{h+1}$ en posant dans les formules (14), par exemple,

$$C = \frac{1}{(n+1)!\, A_n},$$

où A_n est une constante quelconque assujettie à la condition

$$|A_n| \geqq 1 \qquad (n = 0, 1, 2, \ldots).$$

Alors on aura

$$(15)\quad \begin{cases} x_s = \dfrac{1}{(n+1)!\,A_n} & (h=0), \\ x_s = (-1)^h \dfrac{2^h}{(2-1)(2^2-1)\dots(2^h-1)} \cdot \dfrac{1}{(n+1)!\,A_n} & (h=1,2,3\dots), \\ \text{étant} \quad s=(2n+1)2^h \quad \text{et} \quad n \geqq 0, \end{cases}$$

et, comme nous verrons, les valeurs des x_s déterminées par ces formules constitueront une solution du système donné (S).

17. Démontrons maintenant que les x_s fournis par les formules (15) rendront absolument convergente chacune des séries du système (S), par exemple,

$$\sum_{s=1}^{\infty} s^i x_s,$$

i étant un entier positif quelconque ou zéro.

En effet, après avoir fixé i, l'on peut toujours, comme nous le verrons, indiquer respectivement un entier positif N tel que soit

$$(16)\qquad |s^i x_s| < \frac{1}{s^2} \quad \text{pour} \quad s > N.$$

Or, la série

$$\sum_{s=1}^{\infty} \frac{1}{s^2}$$

étant convergente, on en déduirait immédiatement la convergence absolue de la série

$$\sum_{s=1}^{\infty} s^i x_s.$$

Écrivons l'inégalité (16) sous la forme suivante

$$|s^{i+2} x_s| < 1,$$

et désignons

$$U_s = \frac{s^{i+2}\,2^h}{(2-1)(2^2-1)\dots(2^h-1)(n+1)!};$$

alors, en tenant compte de ce que $|A_n| \geqq 1$, et $s = (2n+1)2^h$, on aura évidemment

$$|s^{i+2} x_s| \leqq U_s.$$

Il en résultera donc que, si l'inégalité $U_s < 1$ pour $s > N$ était exacte, l'inégalité (16) le serait à fortiori.

Quant à U_s, il est aisé de voir qu'il s'écrit

$$U_s = P(h) \,.\, Q(n),$$

où l'on désigne par $P(h)$ et $Q(n)$ les expressions suivantes:

$$P(h) = \frac{2^{h(i+3)}}{(2^1-1)(2^2-1)\ldots(2^h-1)},$$

$$Q(n) = \frac{(2n+1)^{i+2}}{(n+1)!}.$$

Or, sous une autre forme, $P(h)$ étant

$$P(h) = \frac{1}{2^{\frac{h}{2}(h-2i-5)}\left(1-\frac{1}{2}\right)\left(1-\frac{1}{2^2}\right)\ldots\left(1-\frac{1}{2^h}\right)},$$

on en déduira aisément que $\lim_{h\to\infty} P(h) = 0$; de même, il est clair que

$$\lim_{n\to\infty} Q(n) = 0.$$

Par suite, l'on peut bien indiquer, d'une part, deux nombres positifs P et Q tels que

$$P \geqq P(h) \qquad (h = 0, 1, 2, \ldots),$$
$$Q \geqq Q(n) \qquad (n = 0, 1, 2, \ldots),$$

et, d'autre part, deux nombres entiers positifs h_0 et n_0 tels que

$$P \,.\, Q(n) < 1 \qquad \text{pour } n \geqq n_0,$$
$$Q \,.\, P(h) < 1 \qquad \text{pour } h \geqq h_0.$$

Il en résultera donc que $U_s < 1$ pour $h \geqq h_0$, indépendamment de n, ainsi que pour $n \geqq n_0$, indépendamment de h; par conséquent,

si pour une valeur entière et positive de $s=(2n+1)2^h$ l'inégalité $U_s<1$ devenait inexacte, ce ne serait possible que sous la condition que les valeurs correspondantes de n et h satisfassent à la fois aux inégalités:

$$n<n_0 \quad \text{et} \quad h<h_0.$$

Donc, la valeur la plus grande de s, pour laquelle l'inégalité $U_s<1$ pourrait éventuellement cesser d'être exacte, serait

$$[2(n_0-1)+1]\,2^{h_0-1}=(2n_0-1)\,2^{h_0-1}.$$

En la désignant par N:

$$N=(2n_0-1)\,2^{h_0-1},$$

on aura en tout cas

$$U_s<1 \quad \text{pour} \quad s>N=(2n_0-1)\,2^{h_0-1}.$$

Donc, la série

$$\sum_{s=1}^{\infty} s^i x_s$$

sera, en effet, absolument convergente et aura, par suite, une somme bien déterminée ne dépendant ni de l'ordre des termes de la série ni des différents modes de groupement de ces termes.

D'après cela, en tenant compte de ce que la série

$$\sum_{s=1}^{\infty} s^i x_s$$

contient tous les termes des $(i+1)^{\text{ièmes}}$ séries appartenant aux systèmes (S_n), et qu'elle n'en contient pas d'autres, il en résultera immédiatement que la somme de notre série sera nécessairement nulle, puisque les sommes des $(i+1)^{\text{ièmes}}$ séries, appartenant aux systèmes (S_n), sont elles-mêmes nulles.

Donc, les x_s déterminés par les formules (15) constituent, en effet, une solution du système donné (S).

En multipliant toutes ces valeurs par une constante arbitraire A, on obtiendra encore une solution du système (S), ce dernier étant un système homogène.

18. La solution du système (S) dépendant de la constante arbitraire A et des quantités A_n, assujetties à la condition

$$|A_n| \geqq 1 \qquad (n = 0, 1, 2, \ldots),$$

s'écrira sous la forme suivante:

$$(16)\begin{cases} x_s = \dfrac{A}{(n+1)!\,A_n} & \text{pour } h = 0, \\ x_s = (-1)^h \dfrac{2^h}{(2-1)(2^2-1)\ldots(2^h-1)} \cdot \dfrac{A}{(n+1)!\,A_n} & \text{pour } h = 1, 2, 3, \ldots, \\ \text{où } s = (2n+1)\,2^h \quad \text{et} \quad n \geqq 0. \end{cases}$$

En l'examinant de près, on constatera:

1° pour $A \neq 0$ aucune des inconnues x_s n'est zéro: $x_s \neq 0$;

2° étant donnée, d'une part, une suite finie de r quantités quelconques différentes de zéro: $a_1, a_2, \ldots a_r$, et, d'autre part, une suite de r nombres entiers positifs: $\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_r$ appartenant tous à des suites partielles distinctes (E_i) (n° **15**), on peut faire assumer aux inconnues

$$x_{\alpha_1}, \quad x_{\alpha_2}, \quad \ldots \quad x_{\alpha_r}$$

respectivement les valeurs prescrites

$$a_1, \quad a_2, \quad \ldots \quad a_r:$$

$$x_{\alpha_i} = a_i \qquad (i = 1, 2, \ldots r).$$

En effet, en remplaçant dans les formules (16) les x_{α_i} respectivement par les a_i et en résolvant ces r équations par rapport aux quantités A_k, on obtiendra évidemment pour elles les valeurs satisfaisant à la condition: $|A_k| \geqq 1$, si l'on attribuera à la constante arbitraire A une valeur quelconque dont le module sera assez grand.

Nous venons de supposer que les nombres entiers positifs $\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_r$ appartiennent tous à des suites partielles distinctes (E_i); remarquons que c'est une condition tout à fait essentielle, puisque de toutes les inconnues, dont les rangs appartiennent à la même suite partielle (E_k), c'est seulement une quelconque qui peut être fixée arbitrairement; en lui faisant assumer une valeur prescrite, on attribuera du même coup à toutes les autres in-

connues du même système (S_k) les valeurs correspondantes complètement déterminées.

Donc, la nature de la solution que nous venons de construire dépend essentiellement du mode de décomposition de la suite (E).

Or, généralement une suite (E) peut être décomposée d'une infinité de manières, c'est ce qui permettra de prescrire arbitrairement les valeurs d'un nombre fini d'inconnues quelconques.

En effet, étant donnée une suite de nombres entiers positifs quelconques: $a_1, a_2, \ldots a_r$, en décomposant la suite (E) en une infinité de suites partielles (E_n), on peut faire rentrer les éléments

$$\lambda_{a_1}, \quad \lambda_{a_2}, \quad \ldots \lambda_{a_r}$$

dans r suites partielles, de sorte que chacune d'elles ne contienne qu'une seule de ces r quantités (λ_{a_i}).

Nous le démontrerons ci-dessous, dans le cas général, où les éléments λ_n de la suite (E) ne sont assujettis qu'aux conditions (3—5, n° 7), qui caractérisent les systèmes (1) et (2).

IV. Sur la construction des solutions des systèmes du type I.

19. Étant donné un système quelconque (S) du type I

$$0 = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n^i x_n \qquad (i = 0, 1, 2, \ldots),$$

dont les λ_n satisfont aux conditions (3) et (4) (n° 7), nous allons le résoudre par une méthode dont l'idée essentielle vient d'être exposée tout à l'heure, à propos du système particulier (n° 15).

A cet effet nous aurons:

1° à décomposer convenablement la suite

$$(E) = \lambda_1, \ \lambda_2, \ \ldots \ \lambda_n, \ \ldots$$

en une infinité de suites partielles (E_n),

2° à faire correspondre à chacune des suites partielles (E_n) un système réduit généralisé (S_n), et

3° à construire des solutions du système donné (S) à l'aide de celles des systèmes (S_n).

Examinons l'une après l'autre ces trois questions.

20. Quant à la décomposition de la suite donnée (E), nous démontrerons la proposition suivante:

Étant donnée une suite $(E) = \lambda_1, \lambda_2, \ldots \lambda_n, \ldots$ telle que

$$\lim_{n \to \infty} |\lambda_n| = \infty,$$

on peut la décomposer en une infinité de suites partielles (E_n), de sorte que, en désignant les éléments de (E_n) par

$$\mu_{n1}, \mu_{n2}, \ldots \mu_{nh}, \ldots,$$

ceux-ci satisfassent à la condition

$$\left|\frac{\mu_{n(h+1)}}{\mu_{nh}}\right| \geqq p > 1 \qquad \begin{pmatrix} h = 1, 2, 3, \ldots \\ n = 1, 2, 3, \ldots \end{pmatrix},$$

et que les r éléments:

$$\lambda_{\alpha_1}, \lambda_{\alpha_2}, \ldots \lambda_{\alpha_r},$$

choisis arbitrairement dans la suite (E), soient répartis entre r suites partielles (E_n) dont chacune n'en contiendra qu'un seul, r étant d'ailleurs un entier positif quelconque.

Désignons par (E^0) la suite naturelle des nombres

$$(E^0) = 1, 2, 3, \ldots,$$

et par (E_n^0) la suite partielle suivante:

$$(E_n^0) = 1.2^{n-1}, \quad 3.2^{n-1} \quad 5.2^{n-1}, \ldots (2k-1)\,2^{n-1}, \ldots$$
$$(n = 1, 2, 3, \ldots);$$

en examinant alors le Tableau du n° **15**, on se rendra aisément compte de ce que la suite (E^0) se décomposera, d'une façon bien déterminée, en une infinité de suites partielles (E_n^0):

$$(E^0) = (E_1^0) + (E_2^0) + \ldots + (E_n^0) + \ldots$$

Or, il est à remarquer qu'il y a une correspondance univoque et réciproque entre les λ_n et les nombres naturels n: $\lambda_n \longleftrightarrow n$;

cela permettra de faire correspondre à la décomposition de la suite (E^0) la décomposition de la suite donnée (E)

$$(E) = (E_1^1) + (E_2^1) + \ldots + (E_n^1) + \ldots,$$

(E_n^1) y désignant la suite partielle suivante:

$$(E_n^1) = \lambda_{1.2^{n-1}}, \quad \lambda_{3.2^{n-1}}, \quad \ldots \lambda_{(2k-1)2^{n-1}}, \quad \ldots$$

$$(n = 1, 2, 3, \ldots),$$

qui jouit évidemment de la même propriété fondamentale que la suite (E), c'est-à-dire qui a aussi pour point-limite ∞:

$$\lim_{k\to\infty} \left|\lambda_{(2k-1)2^{n-1}}\right| = \infty.$$

Cela étant, nous allons maintenant décomposer la suite donnée (E) conformément à la proposition énoncée

$$(E) = (E_1) + (E_2) + \ldots + (E_n) + \ldots,$$

en procédant de la maniére suivante:

Nous construirons les suites (E_n) successivement: d'abord (E_1), ensuite (E_2), ensuite (E_3), et ainsi de suite.

De même, les éléments des suites (E_n) seront choisis successivement: μ_{n1},, μ_{n2}, μ_{n3}, . . .

Nous désignerons par

$$(E) - (E_1) - (E_2) - \ldots - (E_{n-1})$$

la suite partielle de (E) que l'on obtiendra en enlevant de la suite (E) tous les éléments des suites partielles

$$(E_1), \quad (E_2), \quad \ldots \quad (E_{n-1}).$$

Cela étant, fixons la loi de formation des suites (E_n) de la manière suivante:

1° Le premier élément μ_{n1} de la suite (E_n) soit celui des éléments de la suite $(E) - (E_1) - (E_2) - \ldots - (E_{n-1})$ qui occupe le rang le plus petit; en particulier, le premier élément μ_{11} de la suite (E_1) soit λ_1: $\mu_{11} = \lambda_1$.

2° Tous les autres éléments de la suite (E_n)

$$\mu_{n2}, \quad \mu_{n3}, \quad \ldots \quad \mu_{nh}, \quad \mu_{n(h+1)}, \quad \ldots$$

seront choisis exclusivement entre les éléments de la suite (E_n^1).

3° Dans le cas où la suite (E_n^1) contient quelques-unes des r quantités fixées arbitrairement à l'avance:

$$\lambda_{\alpha_1},\ \lambda_{\alpha_2},\ \ldots\ \lambda_{\alpha_r},$$

on choisira $\mu_{n2},\ \mu_{n3},\ \ldots\ \mu_{nh},\ \ldots$ de sorte que la suite (E_n) n'en contienne qu'une seule au plus.

4° μ_{nh} étant déterminé, l'on prendra pour $\mu_{n(h+1)}$ celui des éléments de (E_n^1) dont le module sera

$$\geqq |\mu_{nh}|^p,\quad p>1,$$

et qui occupera le rang le plus petit possible, compatible avec la condition précédente (3°), p étant un nombre positif fixe.

D'après cette loi de formation, la construction d'une suite (E_n) peut être effectuée aisément.

En effet, pour déterminer le premier élément μ_{n1}, on n'aura qu'à trouver celui des éléments de la suite

$$(E)-(E_1)-(E_2)-\ldots-(E_{n-1})$$

dont l'indice sera le plus petit. Or, pour cela il suffit de déterminer seulement un nombre fini de premiers éléments des suites $(E_1),\ (E_2),\ \ldots\ (E_{n-1})$, de sorte que l'on ne continue le procédé de formation de chacune de ces $(n-1)$ suites que jusqu'au moment que l'on obtiendra le premier élément dont le rang sera supérieur à celui du premier élément de la suite (E_n^1), ce dernier étant 2^{n-1}.

Il est clair que, après un nombre fini d'opérations, on trouvera tous les éléments de la suite

$$(E)-(E_1)-(E_2)-\ldots-(E_{n-1})$$

dont les rangs sont inférieurs à 1.2^{n-1}, et dont le nombre sera au moins un, puisque, d'après la condition 2°, $\lambda_{1.2^{n-1}}$ appartiendra certainement à celle-là.

Or, entre ces éléments, en nombre limité, il y aura évidemment un dont l'indice sera le plus petit; c'est celui-ci que l'on désignera par μ_{n1}.

Quant aux autres éléments de la suite (E_n)

$$\mu_{n2},\ \mu_{n3},\ \ldots\ \mu_{nh},\ \ldots,$$

on les choisira successivement entre les éléments de la suite

$$(E_n^1) = \lambda_{1.2^{n-1}},\ \lambda_{3.2^{n-1}},\ \ldots\ \lambda_{(2k-1)2^{n-1}},\ \ldots,$$

en tenant compte des conditions 3° et 4°.

Ainsi, à chacune des suites (E_n^1) on fait correspondre une suite bien déterminée (E_n). Le nombre des suites (E_n^1) étant l'infini, le nombre des suites (E_n) le sera, par suite, lui-aussi.

De la loi de formation des suites (E_n) on tirera aisément les conclusions suivantes:

1° Chacune des suites (E_n) ne contient que les éléments appartenant aussi à (E).

2° Chacun des éléments de (E) appartiendra à l'une des suites partielles (E_n) et à une seule.

3° Les n premiers éléments de (E) rentrent dans les premières suites partielles (E_1), (E_2) . . . dont le nombre sera n au plus.

4° Chacune des suites (E_n) satisfait aux conditions énoncées dans notre proposition.

Il en résultera donc que la décomposition de la suite donnée (E)

$$(E) = (E_1) + (E_2) + \ldots + (E_n) + \ldots,$$

que nous venons d'effectuer, sera bien telle qu'on l'exige dans notre proposition.

21. Après avoir décomposé la suite (E) en une infinité de suites partielles (E_n), nous ferons correspondre à chacune d'elles (E_n) un système réduit généralisé (S_n)

$$0 = \sum_{h=1}^{\infty} \mu_{nh}^{i} y_{nh} \qquad (i = 0, 1, 2, \ldots),$$

en y désignant les inconnues par y_{nh}.

Tous ces systèmes (S_n) appartiennent évidemment au type I et, d'après la proposition du n° **20**, ils sont caractérisés par la relation

$$\left| \frac{\mu_{n(h+1)}}{\mu_{nh}} \right| \geq p > 1 \qquad \begin{pmatrix} n = 1, 2, 3, \ldots \\ h = 1, 2, 3, \ldots \end{pmatrix}.$$

Par suite, d'après le n° **13**, leurs solutions sont fournies par les formules (13), en y remplaçant les quantités

$$C,\ \lambda_1,\ \lambda_2,\ \lambda_3,\ \ldots\ \lambda_h,\ \ldots$$

respectivement par

$$C_n, \quad \mu_{n1}, \quad \mu_{n2}, \quad \mu_{n3}, \ldots \mu_{nh}, \ldots$$

On aura donc

$$(17)\quad \left\{\begin{array}{c} y_{n1} = C_n; \quad y_{nh} = (-1)^{h-1} C_n \dfrac{\mu_{n2}\,\mu_{n3} \ldots \mu_{n(h-1)}}{\mu_{nh}^{h-2}} \cdot \\ \left(1-\dfrac{\mu_{n1}}{\mu_{n2}}\right)\left(1-\dfrac{\mu_{n1}}{\mu_{n3}}\right)\ldots\left(1-\dfrac{\mu_{n1}}{\mu_{n(h-1)}}\right)\left(1-\dfrac{\mu_{n1}}{\mu_{n(h+1)}}\right)\left(1-\dfrac{\mu_{n1}}{\mu_{n(h+2)}}\right)\ldots \\ \cdot \dfrac{}{\left(1-\dfrac{\mu_{n2}}{\mu_{nh}}\right)\left(1-\dfrac{\mu_{n3}}{\mu_{nh}}\right)\ldots\left(1-\dfrac{\mu_{n(h-1)}}{\mu_{nh}}\right)\left(1-\dfrac{\mu_{nh}}{\mu_{n(h+1)}}\right)\left(1-\dfrac{\mu_{nh}}{\mu_{n(h+2)}}\right)\ldots} \\ (h = 2, 3, 4, \ldots), \end{array}\right.$$

C_n étant une constante arbitraire.

D'après le n° **13**, on peut dire que

$$y_{nh} \neq 0 \quad \text{pour} \quad C_n \neq 0.$$

22. Il nous reste enfin à construire une solution du système donné (S) à l'aide des solutions des systèmes réduits généralisés (S_n).

A cet effet nous établirons tout d'abord une correspondance univoque et réciproque entre les inconnues x_s du système donné (S) et celles des systèmes (S_n), c'est-à-dire les y_{nh}.

Remarquons que chacun des éléments λ_n de la suite (E) entre aussi dans une des suites partielles (E_n) et dans une seule (n° **20**), y étant désigné par un μ à deux indices, et qu'inversement chacun des μ à deux indices représente l'un des λ; c'est ce qui permettra d'établir la correspondance désirée.

En effet, soit, par exemple,

$$\lambda_s = \mu_{nh};$$

en tenant alors compte de ce que λ_s est lié dans le système (S) à l'inconnue x_s et que de même μ_{nh} est lié dans le système (S_n) à l'inconnue y_{nh}, on aura immédiatement la correspondance désirée

$$x_s \longleftrightarrow \lambda_s = \mu_{nh} \longleftrightarrow y_{nh},$$

ou simplement :

$$x_s \longleftrightarrow y_{nh}.$$

Cela étant, nous allons démontrer qu'en prenant

$$x_s = y_{nh} \quad \text{pour} \quad x_s \longleftrightarrow y_{nh},$$

y_{nh} étant déterminé par les formules (17), on obtiendra une solution du système donné (S) en y spécifiant convenablement la constante arbitraire C_n.

Remarquons tout d'abord que la série

$$\sum_{h=1}^{\infty} (2nh)^3 \mu_{nh}^n y_{nh}$$

est absolument convergente, quelle que soit la valeur attribuée à la constante arbitraire C_n de laquelle dépend, d'après les formules (17), y_{nh}.

En effet, en posant

$$u_h = |\mu_{nh}^n y_{nh}| \quad \text{et} \quad v_h = |(2nh)^3 \mu_{nh}^n y_{nh}|,$$

on aura

$$\frac{v_{h+1}}{v_h} = \frac{(h+1)^3}{h^3} \cdot \frac{u_{h+1}}{u_h}.$$

Or,

$$\lim_{h\to\infty} \left(\frac{h+1}{h}\right)^3 = 1$$

et, d'après le n° 13,

$$\lim_{h\to\infty} \frac{u_{h+1}}{u_h} = 0;$$

par suite,

$$\lim_{h\to\infty} \frac{v_{h+1}}{v_h} = 0.$$

Il en résultera, en particulier, que, en prenant, dans les formules (17), $C_n = 1$ et en désignant par $\bar{y}_{nh}$ la valeur correspondante de y_{nh} $(h = 1, 2, 3, \ldots)$, on peut trouver un entier positif N_n tel que pour $h \geq N_n$ soit

$$|(2nh)^3 \mu_{nh}^n \bar{y}_{nh}| < 1,$$

le nombre des termes de la série

$$\sum_{h=1}^{\infty}(2nh)^3\,\mu_{nh}^n\,y_{nh}$$

dont les modules sont ≥ 1 étant N_n-1.

Entre ces N_n-1 termes nous choisirons celui dont le module sera le plus grand, ou au moins pas plus petit que ceux des autres N_n-2 termes.

En désignant son module par r_n, nous déterminons un nombre positif ϱ_n de la façon suivante:

$$\varrho_n = r_n, \quad \text{si } N_n > 1, \quad \text{tandis que } \varrho_n = 1, \quad \text{si } N_n = 1;$$

cela étant, convenons de spécifier la constante arbitraire C_n de sorte que soit

$$C_n = \frac{1}{\varrho_n A_n},$$

A_n y désignant une constante assujettie à la seule condition

$$|A_n| > 1.$$

D'après cela, on aura évidemment

$$|(2nh)^3\,\mu_{nh}^n\,y_{nh}| < 1 \qquad (h = 1, 2, 3, \ldots);$$

par suite,

$$|\mu_{nh}^n\,y_{nh}| < \frac{1}{(2nh)^3},$$

ou, en tenant compte de ce que $2nh \geq n+h$, on aura

$$|\mu_{nh}^n\,y_{nh}| < \frac{1}{(n+h)^3}.$$

Pour $|\mu_{nh}| \geq 1$ on en déduira l'inégalité

$$|\mu_{nh}^i\,y_{nh}| < \frac{1}{(n+h)^3} \qquad (i = 0, 1, 2, \ldots n), \tag{18}$$

permettant de démontrer ci-dessous la convergence absolue des séries du système (S).

23. En prenant $x_s = y_{nh}$ (pour $x_s \longleftrightarrow y_{nh}$) et en posant

$$C_n = \frac{1}{\varrho_n A_n} \quad (\text{n}^\circ\ \mathbf{22}),$$

les valeurs des x_s constitueront une solution du système donné (S).

En effet, elles rendent absolument convergente chacune des séries du système (S)

$$\sum_{s=1}^{\infty} \lambda_s^i x_s,$$

i étant un entier positif quelconque ou zéro.

On s'en assurera par les considérations suivantes. En remarquant que $\lambda_s = \mu_{nh}$, et $x_s = y_{nh}$ et en tenant compte du n° **20**, on s'aperçoit immédiatement de ce que la $(i+1)^{\text{ième}}$ série du système (S) contient tous les termes des $(i+1)^{\text{ièmes}}$ séries des systémes réduits généralisés (S_n) et qu'elle n'en contient que ceux-ci.

Or, désignons

$$v_{nh} = \mu_{nh}^i y_{nh} = \lambda_s^i x_s,$$

constituons le Tableau à double entrée

$$\begin{array}{|llllll|}
\hline
| v_{11} |, & | v_{12} |, & | v_{13} |, & \ldots & | v_{1h} |, & \ldots \\
| v_{21} |, & | v_{22} |, & | v_{23} |, & \ldots & | v_{2h} |, & \ldots \\
\ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\
| v_{n1} |, & | v_{n2} |, & | v_{n3} |, & \ldots & | v_{nh} |, & \ldots \\
\ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\
\hline
\end{array}$$

et servons nous du critère de convergence suivant:

La série double à termes positifs

$$\sum_{n=1}^{\infty} \sum_{h=1}^{\infty} | v_{nh} |$$

converge, si l'on a

$$| v_{nh} | < \frac{1}{(n+h)^2 + \varrho} \qquad (\varrho > 0)$$

pour $n \geqq N$, indépendamment de k, et pour $h \geqq H$, indépendamment de n[1].

Nous verrons que dans ce cas-ci l'on peut bien trouver deux entiers positifs N et H tels que soit

$$|v_{nh}| < \frac{1}{(n+h)^{2+\varrho}} \qquad (\varrho > 0)$$

pour $n \geqq N$, indépendamment de h, et pour $h \geqq H$, indépendamment de n.

En effet, en tenant compte de ce que dans la suite

$$(E) = \lambda_1, \quad \lambda_2, \quad \ldots \quad \lambda_3, \quad \ldots$$

les modules des éléments ($|\lambda_k|$) vont en croissant

$$\left(\lim_{k\to\infty} |\lambda_k| = \infty\right),$$

on peut dire que $|\lambda_k| \geqq 1$ pour $k \geqq k_0$, k_0 étant un certain entier positif. D'autre part, d'après le mode de décomposition de la suite (E) (n° **20**), les premiers $(k_0 - 1)$ éléments de (E) sont répartis entre les premières suites partielles (E_m) dont le nombre sera $(k_0 - 1)$ au plus. Il en résultera donc que l'on pourra indiquer un entier positif N_1 tel que

$$|\mu_{nh}| \geq 1 \quad \text{pour } n \geq N_1, \quad \text{quel que soit } h.$$

---

(1) Numérotons les termes du Tableau ci-dessus d'après la règle suivante:

$$|v_{11}| = u_1; \quad |v_{21}| = u_2, \quad |v_{12}| = u_3; \quad |v_{31}| = u_4, \quad |v_{22}| = u_5, \quad |v_{13}| = u_6;$$

et ainsi de suite; en remarquant alors que sur la première diagonale se trouve un seul élément, sur la deuxième, 2 éléments, sur la troisième, 3 éléments, et ainsi de suite, on aura pour $u_m = |v_{nh}|$

$$m \leqq 1 + 2 + 3 + \ldots + (n+h-1) = \frac{(n+h)(n+h-1)}{2} < (n+h)^2;$$

$$\text{donc,} \quad m^{1+\varrho_1} < (n+h)^{2+2\varrho_1} \qquad (\varrho_1 > 0)$$

et, par suite, en posant $2\varrho_1 = \varrho$, on aura, d'après l'hypothèse faite,

$$u_m = |v_{nh}| < \frac{1}{(n+h)^{2+\varrho}} < \frac{1}{m^{1+\varrho_1}} \qquad (\varrho_1 > 0),$$

d'où l'on déduira immédiatement la convergence de la série double

$$\sum_{n=1}^{\infty} \sum_{h=1}^{\infty} |v_{nh}|.$$

Or, i étant fixé à l'avance, désignons par N celui des deux entiers i et N_1 lequel ne sera pas plus petit que l'autre; alors, d'après l'inégalité (18), on aura

$$|v_{nh}| < \frac{1}{(n+h)^{2+\varrho}} \qquad (\varrho = 1 > 0)$$

pour $n \geq N$, indépendamment de h.

Donc, il ne nous reste qu'à examiner les termes qui occupent les premières $(N-1)$ lignes dans notre Tableau et qui appartiennent aux $(i+1)^{\text{ièmes}}$ series des $(N-1)$ premiers systèms réduits généralisés (S_n). Or, on s'en assurera aisément, tout comme au n° **22**, que chacune des $(N-1)$ séries:

$$\sum_{n=1}^{\infty}{}'(2nh)^3 \mu_{nh}^i y_{nh} \qquad (n = 1, 2, 3, \ldots N-1)$$

sera absolument convergente; par suite, pour chacune d'elles on pourra indiquer respectivement un entier positif H_n tel que soit

$$|(2nh)^3 \mu_{nh}^i y_{nh}| < 1 \qquad \text{pour } h \geq H_n$$

$$(n = 1, 2, 3, \ldots N-1),$$

d'où l'on déduira

$$|\mu_{nh}^i y_{nh}| < \frac{1}{(2nh)^3} < \frac{1}{(n+h)^3}.$$

Donc, en désignant par H celui des $(N-1)$ entiers: H_1, H_2 ... H_{N-1} qui ne sera pas plus petit que chacun des autres, on aura

$$|v_{nh}| < \frac{1}{(n+h)^{2+\varrho}} \qquad (\varrho = 1)$$

pour $h \geq H$, indépendamment de n.

Il en résultera, d'après le critère cité, que la série double

$$\sum_{n=1}^{\infty} \sum_{h=1}^{\infty} |v_{nh}|$$

sera bien convergente; donc, la série

$$\sum_{h=1}^{\infty} \sum_{h=1}^{\infty} v_{nh}$$

sera absolument convergente.

Elle aura, par suite, une somme bien déterminée, ne dépendant ni de l'ordre ni des différents modes de groupement des termes. Or, remarquons que

$$0 = \sum_{h=1}^{\infty} \mu_{nh}^{i} y_{nh}$$

[c'est la $(i+1)^{\text{ième}}$ équation du système (S_n)]; d'après cela, on aura évidemment

$$0 = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{h=1}^{\infty} v_{nh},$$

puisque la série double

$$\sum_{n=1}^{\infty} \sum_{h=1}^{\infty} v_{nh}$$

contient tous les termes des $(i+1)^{\text{ièmes}}$ séries des systèmes (S_n) et n'en contient que ceux-ci.

Enfin, la $(i+1)^{\text{ième}}$ série du système donné (S), ayant les mêmes termes que la série absolument convergente

$$\sum_{n=1}^{\infty} \sum_{h=1}^{\infty} v_{nh}$$

et ne différant de celle-ci que par le mode de groupement des termes, on en conclut immédiatement qu'elle sera absolument convergente, elle-aussi, et qu'elle aura pour somme zéro:

$$0 = \sum_{s=1}^{\infty} \lambda_s^i \, x_s;$$

donc, les valeurs des x_s déterminées ci-dessus satisferont bien au système donné (S).

24. En multipliant les valeurs de toutes les inconnues constituant une solution du système donné (S) par une constante arbitraire A, on obtiendra évidemment encore une solution du système (S), celui-ci étant un système homogène.

Aussi, une solution dépendant de la constante arbitraire A et des quantités A_n assujetties à la condition: $|A_n| > 1$ s'exprimera-t-elle à l'aide des formules suivantes:

$$
(19)\quad \left\{\begin{array}{l}
x_s = \dfrac{A}{\varrho_n A_n} \qquad \text{pour } h = 1, \\[2ex]
x_s = (-)^{h-1}\,\dfrac{A}{\varrho_n A_n}\,\dfrac{\mu_{n2}\,\mu_{n3}\,\ldots\,\mu_{n(h-1)}}{\mu_{nh}^{h-2}}\cdot \\[2ex]
\cdot\,\dfrac{\left(1-\dfrac{\mu_{n1}}{\mu_{n2}}\right)\left(1-\dfrac{\mu_{n1}}{\mu_{n3}}\right)\ldots\left(1-\dfrac{\mu_{n1}}{\mu_{n(h-1)}}\right)}{\left(1-\dfrac{\mu_{n2}}{\mu_{nh}}\right)\left(1-\dfrac{\mu_{n3}}{\mu_{nh}}\right)\ldots\left(1-\dfrac{\mu_{n(h-1)}}{\mu_{nh}}\right)}\cdot\dfrac{\left(1-\dfrac{\mu_{n1}}{\mu_{n(h+1)}}\right)\left(1-\dfrac{\mu_{n1}}{\mu_{n(h+2)}}\right)\ldots}{\left(1-\dfrac{\mu_{nh}}{\mu_{n(h+1)}}\right)\left(1-\dfrac{\mu_{nh}}{\mu_{n(h+2)}}\right)\ldots} \\[2ex]
(h = 2, 3, 4, \ldots),
\end{array}\right.
$$

les valeurs de n et de h qui correspondent à s étant déterminées par la décomposition de la suite (E) (n° **20**): $\lambda_s = \mu_{nh}$, et ϱ_n se calculant d'aprés le n° **22**.

Grâce à la présence des quantités A et A_n dans les formules (19), on peut faire prendre aux inconnues

$$x_{\alpha_1},\ x_{\alpha_2},\ \ldots\ x_{\alpha_r}$$

du système (S) respectivement les valeurs

$$a_1,\ a_2,\ \ldots\ a_r,$$

prescrites arbitrairement, si l'on choisit ces r inconnues d'une certaine manière, r étant d'ailleurs un entier positif quelconque.

En effet, ceux des x_s qui constituent, d'après le mode de détermination des x_s, la solution du système réduit généralisé (S_n), dépendent tous de la même quantité $\dfrac{A}{A_n}$; par suite, ce n'est qu'une seule de ces inconnues à laquelle on peut faire prendre une valeur prescrite arbitrairement, en choisissant convenablement la valeur de $\dfrac{A}{A_n}$; celle-ci une fois fixée, toutes les autres inconnues du même système (S_n) obtiendront évidemment des valeurs complètement déterminées.

D'après cela, il faut donc que parmi les r inconnues:

$$x_{\alpha_1},\ x_{\alpha_2},\ \ldots\ x_{\alpha_r}$$

il n'y ait aucune paire correspondant au même système réduit (S_n).

D'autre part, c'est aussi la condition suffisante. En effet, supposons-la satisfaite et remplaçons dans les formules (19) les

inconnues $x_{\alpha_1}, x_{\alpha_2}, \ldots x_{\alpha_r}$ respectivement par $a_1, a_2, \ldots a_r$; en résolvant alors ces r équations par rapport aux quantités indéterminées $An_1, An_2, \ldots An_r$, on constatera aisément qu'il suffit d'attribuer à la constante arbitraire A des valeurs dont les modules sont assez grands, pour que les valeurs correspondantes $An_1, An_2, \ldots An_r$ satisfassent à la condition

$$| An_i | > 1 \qquad (i = 1, 2, \ldots r),$$

quel que soit l'entier positif r.

C'est donc d'une infinité de manières que l'on peut choisir $A, An_1, An_2, \ldots An_r$ de sorte que l'on ait

$$x_{\alpha_i} = a_i \qquad (i = 1, 2, 3, \ldots r).$$

Or, les formules (19) renferment une infinité de quantités An $(n = 1, 2, 3, \ldots)$; par conséquent, après avoir fixé d'une certaine manière $A, An_1, An_2, \ldots An_r$, il y restera encore une infinité de An indéterminés. On peut donc dire que, quel que soit l'entier positif r, en choisissant les r inconnues: $x_{\alpha_1}, x_{\alpha_2}, \ldots x_{\alpha_r}$ de sorte qu'il n'y ait aucune paire correspondant au même système (S_n), les formules (19) permettront de calculer une infinité de solutions numériques du système donné (S) telles que, dans tous le cas, les inconnues $x_{\alpha_1}, x_{\alpha_2}, \ldots x_{\alpha_r}$ prennent respectivement les valeurs arbitrairement prescrites $a_1, a_2, \ldots a_r$.

En remarquant enfin que, d'après la proposition du n° **20**, la suite

$$(E) = \lambda_1, \lambda_2, \ldots \lambda_n, \ldots$$

peut être décomposée toujours de sorte que les r éléments quelconques: $\lambda_{\alpha_1}, \lambda_{\alpha_2}, \ldots \lambda_{\alpha_r}$ appartiennent tous à des suites partielles distinctes (E_n), il en résultera immédiatement que l'on peut faire correspondre les r inconnues: $x_{\alpha_1}, x_{\alpha_2}, \ldots x_{\alpha_r}$, arbitrairement choisies à l'avance, à des systèmes réduits généralisés distincts (S_n), et leur faire prendre, par suite, les valeurs arbitrairement prescrites.

On en conclut donc qu'étant donné un système quelconque (S) du type I, l'application convenable du principe des réduites permet toujours de construire une infinité de solutions du système (S), telles qu'aucune des inconnues ne soit zéro et que les inconnues $x_{\alpha_1}, x_{\alpha_2}, \ldots x_{\alpha_r}$, arbitrairement

choisies à l'avance, prennent les valeurs arbitrairement prescrites (a_i):

$$x_{\alpha_i} = a_i \qquad (i = 1, 2, \ldots r),$$

r étant un nombre entier positif quelconque.

V. Sur la construction des solutions des systèmes du type II.

25. Étant donné un système quelconque du type II

$$0 = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \lambda_n^i x_n,$$

dont les λ_n satisfont aux conditions (3), (4) et (5), on peut le résoudre par un procédé tout à fait analogue à celui que nous venons d'appliquer aux systèmes du type I. A cet effet on n'aura, au fond, qu'à reprendre tous les raisonnements précédents, en n'y apportant que des modifications légères permettant d'obtenir ici les mêmes résultats que dans le cas des systèmes du type I.

La méthode de construction des solutions étant cette fois, quant à ses traits essentiels, la même que dans le cas précédent, il ne s'agira pas, ci-dessous, de la développer de nouveau, mais il suffira de mettre en évidence la légitimité et l'efficacité de l'application aux systèmes du type II de la mèthode déjà exposée à propos des systèmes du type I. C'est dans cet ordre d'idées que nous allons maintenant faire quelques remarques nécessaires.

26. La proposition concernant la décomposition de la suite (E), démontrée au n° **20**, restera valable aussi dans le cas où l'on conviendra d'entendre par (E) la suite

$$\ldots \lambda_{-n}, \lambda_{-(n-1)}, \ldots \lambda_{-2}, \lambda_{-1}, \lambda_0, \lambda_1, \lambda_2, \ldots \lambda_n, \ldots$$

qui caractérise le type II, c'est-à-dire qui satisfait aux conditions (3), (4) et (5).

En effet, en désignant

$$(E^{(1)}) = \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \ldots \lambda_n, \ldots \qquad \text{et}$$

$$(E^{(2)}) = \lambda_0, \lambda_{-1}, \lambda_{-2}, \ldots \lambda_{-n}, \ldots,$$

on aura $$(E) = (E^{(1)}) + (E^{(2)}).$$

Or, les éléments de la première de ces deux suites partielles satisfaisant à la condition

$$\lim_{n\to\infty} |\lambda_n| = \infty,$$

on peut donc la décomposer selon la proposition énoncée:

$$(E^{(1)}) = (E_1^{(1)}) + (E_2^{(1)}) + \ldots + (E_n^{(1)}) + \ldots,$$

où les suites partielles

$$(E_n^{(1)}) = \mu_{n1}^{(1)}, \mu_{n2}^{(1)}, \ldots \mu_{nh}^{(1)}, \ldots$$

sont telles que

$$1^0 \qquad \left|\frac{\mu_{n(h+1)}^{(1)}}{\mu_{nh}^{(1)}}\right| \geq p > 1$$

et 2^0 que $(E_n^{(1)})$ ne contient des r quantités: $\lambda_{\alpha_1}, \lambda_{\alpha_2}, \ldots \lambda_{\alpha_r}$, arbitrairement choisies à l'avance, dans la suite donnée (E), qu'une seule au plus.

D'autre part, en tenant compte de ce que

$$\lim_{n\to\infty} |\mu_{n1}^{(1)}| = \infty,$$

on peut indiquer évidemment un entier positif M tel que

$$\left|\frac{\mu_{n1}^{(1)}}{\lambda}\right| \geq p > 1 \qquad \text{pour } n \geq M,$$

λ y ayant le même sens que dans l'inégalité (5) (n° 7).

Or, à partir de la $M^{\text{ième}}$ suite partielle $(E_M^{(1)})$, associons à chacune d'elles, d'après certaine règle, un élément λ_{-i} de la suite partielle $(E^{(2)})$, de sorte que 1^0 la suite

$$(E_n) = \lambda_{-i}, \mu_{n1}^{(1)}, \mu_{n2}^{(1)}, \ldots \mu_{nh}^{(1)}, \ldots \qquad (n \geq M)$$

ne contienne des r quantités: $\lambda_{\alpha_1}, \lambda_{\alpha_2}, \ldots \lambda_{\alpha_r}$ qu'une seule au plus, et 2^0 qu'à l'aide des suites (E_n) s'établisse une correspondance univoque et réciproque entre les éléments de la suite $(E^{(2)})$, d'une part, et les suites partielles $(E_n^{(1)})$, d'autre part, où $n \geq M$:

$$\lambda_{-i} \longleftrightarrow (E_n^{(1)}).$$

En faisant correspondre ainsi à chacun des éléments λ_{-i} $(i = 0, 1, 2, \ldots)$ une suite partielle $(E_n^{(1)})$ $(n \geq M)$, on obtiendra une infinité de suites partielles (E_n). Désignons leurs éléments de la manière suivante:

$$\lambda_{-i} = \mu_{n1}, \quad \mu_{nh}^{(1)} = \mu_{n(h+1)} \qquad (n \geq M)$$

et posons pour $n < M$

$$\mu_{nh}^{(1)} = \mu_{nh}, \quad \text{ainsi que} \quad (E_n^{(1)}) = (E_n) \qquad (n < M);$$

alors la décomposition de la suite (E) s'obtiendra évidemment sous la forme

$$(E) = (E_1) + (E_2) + \ldots + (E_n) + \ldots$$

Donc, en tenant compte de l'inégalité

$$|\lambda_{-i}| < \lambda \qquad (i = 0, 1, 2, \ldots) \quad (\text{n° } 7),$$

il en résultera la proposition suivante:

Étant donnée une suite

$$(E) = \ldots \lambda_{-n}, \ldots \lambda_{-2}, \lambda_{-1}, \lambda_0, \lambda_1, \lambda_2 \ldots \lambda_n, \ldots$$

telle que l'on ait:

1^0 $\lambda_h \neq \lambda_k$ pour $h \neq k$,

2^0 $\lim\limits_{n \to \infty} |\lambda_n| = \infty$,

3^0 $|\lambda_{-n}| < \lambda \qquad (n = 0, 1, 2, \ldots)$,

on peut la décomposer en une infinité de suites partielles (E_n), de sorte que, en désignant les éléments de (E_n) par

$$\mu_{n1}, \quad \mu_{n2}, \quad \ldots \quad \mu_{nh}, \quad \ldots,$$

ceux-ci satisfassent à la condition

$$\left| \frac{\mu_{n(h+1)}}{\mu_{nh}} \right| \geq p > 1 \qquad \begin{pmatrix} h = 1, 2, 3, \ldots \\ n = 1, 2, 3, \ldots \end{pmatrix},$$

et que les r éléments: $\lambda_{\alpha_1}, \lambda_{\alpha_2}, \ldots \lambda_{\alpha_r}$, arbitrairement choisis à l'avance, dans la suite (E), soient

répartis entre r suites partielles (E_n) dont chacune n'en contiendra qu'un seul, r étant d'ailleurs un nombre entier positif quelconque.

27. Aprés avoir décomposé la suite (E) en une infinité de suites partielles (E_n), nous ferons correspondre à chacune d'elles (E_n) un système réduit généralisé (S_n), à savoir:

$$(S_n) \qquad 0 = \sum_{h=1}^{\infty} \mu_{nh}^{i} y_{nh} \qquad (i = 0, 1, 2, \ldots),$$

dont les inconnues y_{nh} se calculeront à l'aide des formules (17) contenant des constantes arbitraires C_n.

Ensuite, nous établirons une correspondance univoque et réciproque entre les inconnues x_s du système donné (S) et celles (y_{nh}) des systèmes réduits généralisés (S_n'), de sorte que soit

$$x_s \longleftrightarrow \lambda_s = \mu_{nh} \longleftrightarrow y_{nh}.$$

Enfin, pour obtenir une solution du système donné (S), nous poserons

$$x_s = y_{nh} \qquad \text{pour } x_s \longleftrightarrow y_{nh},$$

en spécifiant la constante arbitraire C_n de sorte que soit

$$C_n = \frac{1}{\varrho_n A_n} \qquad (|A_n| > 1),$$

ϱ_n étant un nombre positif que l'on déterminera de la manière suivante:

Prenons, comme au n° **22**, la série

$$\sum_{h=1}^{\infty} (2nh)^3 \mu_{nh}^{n} \bar{y}_{nh},$$

en entendant par $\bar{y}_{nh}$ la valeur de y_{nh} obtenue des formules (17) en y faisant $C_n = 1$.

Remarquons que, d'après le mode de décomposition de la suite (E), si $n \geq M$ (n° **26**), les μ_{n1} représentent les éléments de la suite partielle

$$(E^{(2)}) = \lambda_0, \lambda_{-1}, \lambda_{-2}, \ldots \lambda_{-n}, \ldots$$

Or, en tenant compte de l'inégalité

$$|\lambda_{-i}| < \lambda \qquad (i = 0, 1, 2, \ldots),$$

prenons un nombre positif $\mu > 1$ tel que soit

$$|\lambda_{-i}| < \mu > 1 \qquad (i = 0, 1, 2, \ldots),$$

et remplaçons dans la série ci-dessus μ_{n1} par μ $(n \geq M)$.

Cela étant, convenons d'entendre, pour $n \geq M$, par ϱ_n celui des modules des termes de la série absolument convergente

$$(2n \,.\, 1)^3 \mu^n \bar{y}_{n1} + \sum_{h=2}^{\infty} (2nh)^3 \mu_{nh}^n \bar{y}_{nh}$$

qui ne sera pas inférieur à aucun des autres. Pour $n < M$ soit, par exemple, $\varrho_n = 1$ $(n < M)$.

Il en résultera que, à partir d'une certaine valeur de n,

$$|\mu_{nh}^i y_{nh}| < \frac{1}{(n+h)^3} \qquad (i = 0, 1, 2, \ldots n), \tag{18}$$

puisque pour n assez grand on aura simultanément

$$|\mu_{n1}| < \mu > 1 \qquad \text{et} \qquad |\mu_{nh}| \geq 1 \qquad (h \geq 2).$$

L'inégalité (18) permettra de démontrer que les valeurs des inconnues x_s, que nous venons de déterminer, constituent une solution du système donné (S). Pour s'en assurer, on n'aura qu'à répéter les raisonnements du n° **23**.

Enfin, tout comme au n° **24**, on en déduira le résultat suivant:

Étant donné un système quelconque (S) du type II, en y appliquant convenablement le principe des réduites, on peut toujours construire une infinité de solutions du système (S), telles qu'aucune des inconnues ne soit zéro, et que les inconnues $x_{\alpha_1}, x_{\alpha_2}, \ldots x_{\alpha_r}$, arbitrairement choisies à l'avance, prennent les valeurs arbitrairement prescrites (a_i):

$$x_{\alpha_i} = a_i \qquad (i = 1, 2, \ldots r),$$

r étant un nombre entier positif quelconque.

CHAPITRE II.

Sur les systèmes d'équations linéaires non homogènes à une infinité d'inconnues attachés aux séries de Dirichlet.

I. Généralités.

28. Dans le Chapitre II nous allons appliquer le principe des réduites à la résolution des systèmes linéaires non homogènes appartenant aux types suivants:

$$c_i = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n^i x_n \qquad \text{(type III)}, \tag{20}$$

$$c_i = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \lambda_n^i x_n \qquad \text{(type IV)} \tag{21}$$

$$(i = 0, 1, 2, 3, \ldots),$$

dont les λ_n satisfont aux conditions (3), (4) et (5) (n° 7).

Ces systèmes, étant analogues respectivement aux systèmes du type I et du type II, ne diffèrent de ceux-ci que par les parties gauches des équations; tandis que dans le cas précédent tous les c_i étaient nuls, on suppose, dans ce cas-ci, qu'au moins l'un des c_i soit différent de zéro; et c'est la seule condition à laquelle sera assujettie la suite des c_i.

29. Les systèmes (20) et (21) peuvent être attachés aux séries de Dirichlet par le même procédé formel que les systèmes homogènes (1) et (2) (n° 8).

Étant donnée, sous la forme I ou II, une série de Dirichlet quelconque

$$\sum_n x_n e^{-\lambda_n z}$$

à coefficients indéterminés x_n, nous en déduirons une suite indéfinie de séries analogues

$$\sum_n (-\lambda_n) x_n e^{-\lambda_n z}, \qquad \sum_n (-\lambda_n)^2 x_n e^{-\lambda_n z}, \quad \ldots,$$

dont chacune s'obtiendra en différentiant terme à terme la série précédente; cela étant, il est aisé de voir qu'en faisant prendre à toutes ces séries pour $z = 0$ respectivement les valeurs prescrites

$$c_0, \quad -c_1, \quad c_2, \quad \ldots \quad (-1)^n c_n, \quad \ldots,$$

on obtiendra évidemment un système (20) ou (21), ayant pour inconnues les coefficients indéterminés x_n de la série de Dirichlet.

Ainsi, à chacune des séries de Dirichlet on peut faire correspondre un système (20) ou (21), en fixant d'une façon quelconque la suite des c_i; de même, il est clair qu'inversement chacune des solutions d'un système quelconque (20) ou (21) fournira une série de Dirichlet ayant pour coefficients les valeurs des inconnues du système résolu.

Cette série représentera une fonction $F(z)$ bien déterminée, au moins pour $z = 0$:

$$F(0) = c_0.$$

De plus, dans des cas assez étendus $F(z)$ sera déterminée non seulement à l'origine ($z = 0$), mais certainement aussi dans des régions beaucoup plus vastes; pour s'en assurer, il suffirait d'assujettir les arguments des λ_n à certaines conditions, tout comme nous l'avons fait ci-dessus, au n° **9**.

Les mêmes considérations que celles du n° **9** nous conduiront à la conclusion suivante:

On pourrait, au moins sous certaines réserves, interpréter le problème de la résolution des systèmes (20) et (21) comme celui de la construction de séries de Dirichlet qui représentent des fonctions $F(z)$ holomorphes dans certaines régions, et telles que

$$F(0) = c_0, \quad F^{(n)}(0) = (-1)^n c_n \qquad (n = 1, 2, 3, \ldots).$$

II. Sur l'application de la méthode de Fourier à certains systèmes du type III.

30. Nous allons appliquer la méthode de Fourier à certains systèmes du type III dont les c_i satisfont à la condition particulière

$$c_i = 0 \quad \text{pour} \quad i \neq k \quad \text{et} \quad c_k \neq 0,$$

k étant un entier positif quelconque ou zéro.

Ces systèmes se présenteront donc sous la forme suivante :

$$(22) \quad \left\{ \begin{array}{l} 0 = \sum_{h=1}^{\infty} x_h \\ \cdots\cdots \\ 0 = \sum_{h=1}^{\infty} \lambda_h^{k-1} x_h \\ c_k = \sum_{h=1}^{\infty} \lambda_h^{k} x_h \\ 0 = \sum_{h=1}^{\infty} \lambda_h^{k+1} x_h \\ \cdots\cdots\cdots \\ \cdots\cdots\cdots \end{array} \right.$$

En y rejetant toutes les équations, sauf les n premières ($n > k$), et en ne conservant dans les parties droites de celles-ci que les n premiers termes, on obtiendra un système réduit fini.

Désignons sa solution par

$$x_1^{(n)}, \quad x_2^{(n)}, \quad \ldots \quad x_h^{(n)}, \quad \ldots \quad x_n^{(n)};$$

il est clair qu'on aura alors

$$x_h^{(n)} = (-1)^{h+k-1} c_k \frac{\Delta_{k+1,\,h}^{(n)}}{\Delta^{(n)}} \qquad (h = 1, 2, \ldots n),$$

$\Delta^{(n)}$ et $\Delta^{(n)}_{k+1,\,h}$ étant les déterminants suivants :

$$\Delta^{(n)} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ \lambda_1 & \lambda_2 & \dots & \lambda_n \\ \lambda_1^2 & \lambda_2^2 & \dots & \lambda_n^2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \lambda_1^{n-1} & \lambda_2^{n-1} & \dots & \lambda_n^{n-1} \end{vmatrix},$$

$$\Delta^{(n)}_{k+1,\,h} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 & 1 & \dots & 1 \\ \lambda_1 & \lambda_2 & \dots & \lambda_{h-1} & \lambda_{h+1} & \dots & \lambda_n \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \lambda_1^{k-1} & \lambda_2^{k-1} & \dots & \lambda_{h-1}^{k-1} & \lambda_{h+1}^{k-1} & \dots & \lambda_n^{k-1} \\ \lambda_1^{k+1} & \lambda_2^{k+1} & \dots & \lambda_{h-1}^{k+1} & \lambda_{h+1}^{k+1} & \dots & \lambda_n^{k+1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \lambda_1^{n-1} & \lambda_2^{n-1} & \dots & \lambda_{h-1}^{n-1} & \lambda_{h+1}^{n-1} & \dots & \lambda_n^{n-1} \end{vmatrix}.$$

Comme on le sait,

$$\Delta^{(n)} = \Pi(\lambda_j - \lambda_g),\ j > g \quad \begin{pmatrix} j = 2, 3, \dots n \\ g = 1, 2, \dots n-1 \end{pmatrix} \quad (\text{n° } \mathbf{10}).$$

Quant à $\Delta^{(n)}_{k+1,\,h}$, on peut le présenter sous la forme d'un produit de deux facteurs : $\Delta^{(n)}_{k+1,\,h} = P_1 P_2$ dont le premier sera

$$P_1 = \Pi(\lambda_j - \lambda_g),\ j > g \quad \begin{pmatrix} j = 2, 3, \dots h-1,\ h+1, \dots n \\ g = 1, 2, \dots h-1,\ h+1, \dots n-1 \end{pmatrix},$$

puisque $\Delta^{(n)}_{k+1,\,h}$, s'annulant pour $\lambda_g = \lambda_j$, aura pour facteur chacun des $(\lambda_j - \lambda_g)$.

D'autre part, $\Delta^{(n)}_{k+1,\,h}$ est évidemment un polynôme entier et homogène d'ordre

$$\frac{n(n-1)}{2} - k$$

des $(n-1)$ quantités :

$$\lambda_1,\ \lambda_2, \dots \lambda_{h-1},\ \lambda_{h+1}, \dots \lambda_n,$$

et de degré $(n-1)$ par rapport à chacun des λ_i, tandis que P_1 est un polynôme entier et homogène d'ordre

$$\frac{n(n-1)}{2} - (n-1)$$

des mêmes $(n-1)$ quantités, et de degré $(n-2)$; par suite,

$$P_2 = \frac{\Delta^{(n)}_{k+1,\,h}}{P_1}$$

sera un polynôme entier et homogène d'ordre $(n-k-1)$, et du premier degré par rapport à chacune de ces $(n-1)$ quantités (λ_i).

Enfin, en remarquant que toute permutation de deux λ quelconques: λ_g et λ_j ne produira dans $\Delta^{(n)}_{k+1,\,h}$ ainsi que dans P_1 qu'un changement de signe, on en pourra conclure immédiatement que

$$P_2 = \frac{\Delta^{(n)}_{k+1,\,h}}{P_1}$$

sera une fonction symétrique des $(n-1)$ quantités:

$$\lambda_1,\ \lambda_2,\ \ldots\ \lambda_{h-1},\ \lambda_{h+1},\ \ldots\ \lambda_n.$$

Aussi, tous les termes de P_2 ont-ils le même coefficient numérique que l'on peut déterminer en calculant un terme quelconque de P_2. Or, en divisant, par exemple, le terme diagonal de $\Delta^{(n)}_{k+1,\,h}$ par le terme de P_1

$$\lambda_2^1\,\lambda_3^2\ \ldots\ \lambda_{h-1}^{h-2}\,\lambda_{h+1}^{h-1}\ \ldots\ \lambda_n^{n-2},$$

on obtiendra le terme suivant de P_2:

$$\lambda_{k+1}\ \ldots\ \lambda_{h-1}\,\lambda_{h+1}\ \ldots\ \lambda_n \qquad (\text{pour } k<h-1),$$

ou

$$\lambda_{k+2}\quad \lambda_{k+3}\ \ldots\ \lambda_n \qquad (\text{pour } k\geq h-1).$$

Il en résultera donc que le coefficient numérique est $+1$. Par suite, P_2 est complètement déterminé: c'est la fonction symétrique, entière et homogène, d'ordre $(n-k-1)$ des $(n-1)$ quantités: $\lambda_1,\ \ldots\ \lambda_{h-1},\ \lambda_{h+1},\ \ldots\ \lambda_n$, et du premier degré par rapport à chacune d'elles, tous les termes de ce polynôme ayant le même coefficient numérique $+1$.

Nous le désignons par

$$\sum^{(n-1)} (\lambda_2\ \lambda_3\ \lambda_4\ \ldots\ \lambda_{n-k}) \qquad \text{(pour } h=1\text{)},$$

ou par $$\sum_{(\lambda_h,\,\lambda_1)}^{(n-1)} (\lambda_2\ \lambda_3\ \lambda_4\ \ldots\ \lambda_{n-k}) \qquad \text{(pour } h>1\text{)}.$$

Dans le cas où $h=1$, c'est une fonction symétrique des $(n-1)$ quantités: $\lambda_2, \lambda_3, \ldots \lambda_n$, tandis que dans le cas où $h>1$, c'est la même fonction des $(n-1)$ quantités:

$$\lambda_1,\ \lambda_2,\ \ldots\ \lambda_{h-1},\ \lambda_{h+1},\ \lambda_n;$$

celle-ci s'obtiendra évidemment de la fonction précédente, quand on y échange entre elles seulement les quantités λ_h et λ_1; et voilà pourquoi nous la désignons par

$$\sum_{(\lambda_h,\,\lambda_1)}^{(n-1)} \lambda_2\lambda_3 \ldots \lambda_{n-k}.$$

Remarquons, enfin, que le produit

$$\lambda_2\lambda_3\ \ldots\ \lambda_{n-k}$$

est celui des termes de P_2 dont le poids est le plus petit pour $h=1$.

Cela étant, les valeurs des inconnues $x_h^{(n)}$ du système réduit s'exprimeront sous la forme suivante:

$$x_h^{(n)} = (-1)^{h+k-1} c_k \frac{\sum_{(\lambda_h,\,\lambda_1)}^{(n-1)} \lambda_2\lambda_3 \ldots \lambda_{n-k}}{(\lambda_h-\lambda_1)(\lambda_h-\lambda_2)\ldots(\lambda_h-\lambda_{h-1})\ (\lambda_{h+1}-\lambda_h)\ldots(\lambda_n-\lambda_h)}.$$

En divisant encore le numérateur ainsi que le dénominateur par

$$\lambda_1 \cdot \lambda_2 \ldots \lambda_{h-1}\ \lambda_{h+1} \ldots \lambda_n,$$

on aura définitivement

$$(23)\quad x_h^{(n)} = (-1)^{h+k-1} c_k \frac{\sum_{(\lambda_h,\,\lambda_1)}^{(n-1)} \frac{1}{\lambda_2\lambda_3\ldots\lambda_{k+1}}}{\left(\frac{\lambda_h}{\lambda_1}-1\right)\left(\frac{\lambda_h}{\lambda_2}-1\right)\ldots\left(\frac{\lambda_h}{\lambda_{h-1}}-1\right)\left(1-\frac{\lambda_h}{\lambda_{h+1}}\right)\left(1-\frac{\lambda_h}{\lambda_{h+2}}\right)\ldots\left(1-\frac{\lambda_h}{\lambda_n}\right)}$$

$$(h=1,\ 2,\ 3,\ \ldots),$$

où l'on entend par

$$\sum_{(\lambda_h,\,\lambda_1)}^{(n-1)} \frac{1}{\lambda_2\lambda_3\ldots\lambda_{k+1}}$$

la fonction symétrique, entière et homogène, d'ordre k des $(n-1)$ quantités :

$$\frac{1}{\lambda_1},\ \frac{1}{\lambda_2},\ \ldots\ \frac{1}{\lambda_{h-1}},\ \frac{1}{\lambda_{h+1}},\ \ldots\ \frac{1}{\lambda_n},$$

et du premier degré par rapport à chacune d'elles, tous les termes de ce polynôme ayant le même coefficient numérique $+1$.

$$\sum^{n-1} \frac{1}{\lambda_2\lambda_3\ldots\lambda_{k+1}}$$

est la même fonction des $(n-1)$ quantités :

$$\frac{1}{\lambda_2},\ \frac{1}{\lambda_3},\ \ldots\ \frac{1}{\lambda_n}.$$

En particulier, pour $k=0$, on aura

$$(23^a)\quad \left\{ x_h^{(n)} = (-1)^{h-1} c_0 \frac{1}{\left(\frac{\lambda_h}{\lambda_1}-1\right)\left(\frac{\lambda_h}{\lambda_2}-1\right)\ldots\left(\frac{\lambda_h}{\lambda_{h-1}}-1\right)\left(1-\frac{\lambda_h}{\lambda_{h+1}}\right)\ldots\left(1-\frac{\lambda_h}{\lambda_n}\right)} \right.$$
$$\left. (h=1,2,3,\ldots). \right.$$

31. Après avoir résolu le système réduit, formé de n équations, il nous reste à passer à la limite pour $n\to\infty$. A cet effet il faut étudier de près les expressions

$$\sum^{n-1} \frac{1}{\lambda_2\lambda_3\ldots\lambda_{k+1}} \quad \text{et} \quad \sum_{(\lambda_h,\,\lambda_1)}^{n-1} \frac{1}{\lambda_2\lambda_3\ldots\lambda_{k+1}}.$$

Nous allons démontrer tout d'abord la formule récurrente suivante :

$$(24)\quad \left\{ (m-1)\sum^{n-1} \frac{1}{\lambda_2\lambda_3\ldots\lambda_m} = s_1 \sum^{n-1} \frac{1}{\lambda_2\lambda_3\ldots\lambda_{m-1}} - \right.$$
$$\left. - s_2 \sum^{n-1} \frac{1}{\lambda_2\lambda_3\ldots\lambda_{m-2}} + \ldots + (-1)^{m-2} s_{m-1}, \right.$$

où

$$s_m = \frac{1}{\lambda_2^m} + \frac{1}{\lambda_3^m} + \ldots + \frac{1}{\lambda_n^m} \qquad (m = 1, 2, 3, \ldots).$$

En effet, il est aisé de voir que

$$\sum^{n-1} \frac{1}{\lambda_2 \lambda_3 \ldots \lambda_{m-1}} \cdot s_1 = (m-1) \sum^{n-1} \frac{1}{\lambda_2 \lambda_3 \ldots \lambda_m} + \sum^{n-1} \frac{1}{\lambda_2^2 \lambda_3 \ldots \lambda_{m-1}},$$

$$-\sum^{n-1} \frac{1}{\lambda_2 \lambda_3 \ldots \lambda_{m-2}} \cdot s_2 = -\sum^{n-1} \frac{1}{\lambda_2^2 \lambda_3 \ldots \lambda_{m-1}} - \sum^{n-1} \frac{1}{\lambda_2^3 \lambda_3 \ldots \lambda_{m-2}},$$

$$\sum^{n-1} \frac{1}{\lambda_2 \lambda_3 \ldots \lambda_{m-3}} \cdot s_3 = \sum^{n-1} \frac{1}{\lambda_2^3 \lambda_3 \ldots \lambda_{m-2}} + \sum^{n-1} \frac{1}{\lambda_2^4 \lambda_3 \ldots \lambda_{m-3}},$$

. . . . . .

$$(-1)^{m-3} \sum^{n-1} \frac{1}{\lambda_2} \cdot s_{m-2} = (-1)^{m-3} \sum^{n-1} \frac{1}{\lambda_2^{m-2} \lambda_3} + (-1)^{m-3} s_{m-1}.$$

En ajoutant ces égalités, on obtiendra immédiatement la formule (24).

32. Démontrons maintenant la formule

$$(25) \quad \left\{ \begin{aligned} \sum_{(\lambda_h, \lambda_1)}^{n-1} \frac{1}{\lambda_2 \lambda_3 \ldots \lambda_m} &= \sum^{n-1} \frac{1}{\lambda_2 \lambda_3 \ldots \lambda_m} + \left(\frac{1}{\lambda_1} - \frac{1}{\lambda_h}\right) \left\{ \sum^{n-1} \frac{1}{\lambda_2 \lambda_3 \ldots \lambda_{m-1}} - \right. \\ &- \frac{1}{\lambda_h} \sum^{n-1} \frac{1}{\lambda_2 \ldots \lambda_{m-2}} + \frac{1}{\lambda_h^2} \sum^{n-1} \frac{1}{\lambda_2 \ldots \lambda_{m-3}} - \ldots + \\ &\left. + (-1)^{m-3} \frac{1}{\lambda_h^{m-3}} \sum^{n-1} \frac{1}{\lambda_2} + (-1)^{m-2} \frac{1}{\lambda_h^{m-2}} \right\}. \end{aligned} \right.$$

Il est clair que

$$\sum_{(\lambda_h, \lambda_1)}^{n-1} \frac{1}{\lambda_2} = \sum \frac{1}{\lambda_2} + \left(\frac{1}{\lambda_1} - \frac{1}{\lambda_h}\right).$$

D'autre part, désignons par u_i la somme de tous les termes de

$$\sum^{n-1} \frac{1}{\lambda_2 \lambda_3 \ldots \lambda_{i+1}}$$

ne contenant pas $\frac{1}{\lambda_h}$; on aura alors évidemment

$$u_1 = \sum^{n-1} \frac{1}{\lambda_2} - \frac{1}{\lambda_h}.$$

Donc, comme il est aisé de le voir,

$$\sum_{(\lambda_h,\lambda_1)}^{n-1} \frac{1}{\lambda_2\lambda_3} = \sum^{n-1} \frac{1}{\lambda_2\lambda_3} + \left(\frac{1}{\lambda_1} - \frac{1}{\lambda_h}\right) u_1 = \sum^{n-1} \frac{1}{\lambda_2\lambda_3} + \left(\frac{1}{\lambda_1} - \frac{1}{\lambda_h}\right)\left\{\sum^{n-1} \frac{1}{\lambda_2} - \frac{1}{\lambda_h}\right\},$$

et $$u_2 = \sum^{n-1} \frac{1}{\lambda_2\lambda_3} - u_1 \cdot \frac{1}{\lambda_h} = \sum^{n-1} \frac{1}{\lambda_2\lambda_3} - \frac{1}{\lambda_h} \sum^{n-1} \frac{1}{\lambda_2} + \frac{1}{\lambda_h^2};$$

de même,

$$\sum_{(\lambda_h,\lambda_1)}^{n-1} \frac{1}{\lambda_2\lambda_3\lambda_4} = \sum^{n-1} \frac{1}{\lambda_2\lambda_3\lambda_4} + \left(\frac{1}{\lambda_1} - \frac{1}{\lambda_h}\right) u_2 = \sum^{n-1} \frac{1}{\lambda_2\lambda_3\lambda_4} +$$
$$+ \left(\frac{1}{\lambda_1} - \frac{1}{\lambda_h}\right)\left\{\sum^{n-1} \frac{1}{\lambda_2\lambda_3} - \frac{1}{\lambda_h} \sum^{n-1} \frac{1}{\lambda_2} + \frac{1}{\lambda_h^2}\right\},$$

et

$$u_3 = \sum^{n-1} \frac{1}{\lambda_2\lambda_3\lambda_4} - u_2 \cdot \frac{1}{\lambda_h} = \sum^{n-1} \frac{1}{\lambda_2\lambda_3\lambda_4} - \frac{1}{\lambda_h} \sum^{n-1} \frac{1}{\lambda_2\lambda_3} + \frac{1}{\lambda_h^2} \sum^{n-1} \frac{1}{\lambda_2} - \frac{1}{\lambda_h^3};$$

et ainsi de suite.

Nous avons démontré que la formule (25) est valable pour $m = 2, 3, 4$.

D'autre part, on s'en assurera immédiatement que, si la formule (25) est valable pour $m = i \geqq 2$, elle le sera aussi pour $m = i + 1$.

Il en résultera donc que la formule (25) sera valable, quel que soit l'entier positif $m \geqq 2$.

33. Étant donnée une suite des λ_n telle que soit

$$\left|\frac{\lambda_{n+1}}{\lambda_n}\right| \geqq p > 1 \qquad \text{pour } n \geqq N,$$

N étant un entier positif quelconque, les expressions

$$\sum^{n-1} \frac{1}{\lambda_2 \lambda_3 \ldots \lambda_m} \quad \text{et} \quad \sum_{(\lambda_h, \lambda_1)}^{n-1} \frac{1}{\lambda_2 \lambda_3 \ldots \lambda_m}$$

auront pour $n \to \infty$ des limites finies et bien déterminées.

En effet, étant

$$s_m = \frac{1}{\lambda_2^m} + \frac{1}{\lambda_3^m} + \ldots + \frac{1}{\lambda_n^m},$$

tous les s_m auront des limites finies et bien déterminées:

$$\lim_{n \to \infty} s_m = \sigma_m \qquad (m = 1, 2, 3, \ldots),$$

puisque, par hypothèse, les séries

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{\lambda_n^m}$$

seront absolument convergentes.

Aussi, en se servant de la formule récurrente (24), établira-t-on de proche en proche l'existence des limites finies et bien déterminées:

$$\lim_{n \to \infty} \sum^{n-1} \frac{1}{\lambda_2}, \quad \lim_{n \to \infty} \sum^{n-1} \frac{1}{\lambda_2 \lambda_3}, \quad \ldots \quad \lim_{n \to \infty} \sum^{n-1} \frac{1}{\lambda_2 \lambda_3 \ldots \lambda_m}, \quad \ldots$$

On aura, par exemple,

1. $\lim_{n \to \infty} \sum^{n-1} \frac{1}{\lambda_2} = \sigma_1,$

2. $\lim_{n \to \infty} \sum^{n-1} \frac{1}{\lambda_2 \lambda_3} = \sigma_1^2 - \sigma_2,$

3. $\lim_{n \to \infty} \sum^{n-1} \frac{1}{\lambda_2 \lambda_3 \lambda_4} = \sigma_1^2 \sigma_2 - \sigma_1 \sigma_2 + \sigma_3;$

et ainsi de suite.

Quant à la limite

$$\lim_{n \to \infty} \sum_{(\lambda_h, \lambda_1)}^{n-1} \frac{1}{\lambda_2 \lambda_3 \ldots \lambda_m},$$

elle sera déterminée à l'aide de la formule (25):

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{(\lambda_h,\,\lambda_1)}^{n-1} \frac{1}{\lambda_2\lambda_3\ldots\lambda_m} = \lim_{n\to\infty} \sum^{n-1} \frac{1}{\lambda_2\lambda_3\ldots\lambda_m} +$$

$$+ \left(\frac{1}{\lambda_1} - \frac{1}{\lambda_h}\right)\left\{\lim_{n\to\infty} \sum^{n-1} \frac{1}{\lambda_2\lambda_3\ldots\lambda_{m-1}} - \ldots + (-1)^{m-2}\frac{1}{\lambda_h^{m-2}}\right\}.$$

Désignons ces limites, dont l'existence vient d'être démontrée, de la façon suivante:

$$\sum \frac{1}{\lambda_2\lambda_3\ldots\lambda_m} = \lim_{n\to\infty} \sum^{n-1} \frac{1}{\lambda_2\lambda_3\ldots\lambda_m},$$

et

$$\sum_{(\lambda_h,\,\lambda_1)} \frac{1}{\lambda_2\lambda_3\ldots\lambda_m} = \lim_{n\to\infty} \sum_{(\lambda_h,\,\lambda_1)}^{n-1} \frac{1}{\lambda_2\lambda_3\ldots\lambda_m};$$

alors, en passant à la limite pour $n \to \infty$, les formules (24) et (25) s'écriront

$$(24a)\quad \begin{cases} (m-1)\sum \dfrac{1}{\lambda_2\lambda_3\ldots\lambda_m} = \sigma_1 \sum \dfrac{1}{\lambda_2\lambda_3\ldots\lambda_{m-1}} - \\ \qquad - \sigma_2 \sum \dfrac{1}{\lambda_2\lambda_3\ldots\lambda_{m-2}} + \ldots + (-1)^{m-2}\sigma_{m-1}, \end{cases}$$

et

$$(25a)\quad \begin{cases} \displaystyle\sum_{(\lambda_h,\,\lambda_1)} \frac{1}{\lambda_2\lambda_3\ldots\lambda_m} = \sum \frac{1}{\lambda_2\lambda_3\ldots\lambda_m} + \left(\frac{1}{\lambda_1} - \frac{1}{\lambda_h}\right)\left\{\sum \frac{1}{\lambda_2\lambda_3\ldots\lambda_{m-1}} - \right. \\ \left. - \dfrac{1}{\lambda_h}\sum \dfrac{1}{\lambda_2\lambda_3\ldots\lambda_{m-2}} + \ldots + (-1)^{m-3}\dfrac{1}{\lambda_h^{m-3}}\sum \dfrac{1}{\lambda_2} + (-1)^{m-2}\dfrac{1}{\lambda_h^{m-2}}\right\}. \end{cases}$$

34. Étant donnée une suite des λ_n telle que soit

$$\lambda_n = p^{n-1},\ p > 1 \qquad (n = 1, 2, 3, \ldots),$$

on aura

$$(26)\qquad \sum \frac{1}{\lambda_2\lambda_3\ldots\lambda_m} = \frac{1}{(p-1)(p^2-1)\ldots(p^{m-1}-1)}.$$

En effet, dans cette hypothèse, on aura

$$\sigma_m = \frac{1}{p^m} + \frac{1}{p^{2m}} + \frac{1}{p^{3m}} + \ldots = \frac{1}{p^m - 1} \qquad (m = 1, 2, 3, \ldots).$$

D'autre part, en prenant dans la formule (24a)

$$m = 2, 3, 4, \ldots,$$

on obtiendra respectivement

$$1. \quad \sum \frac{1}{\lambda_2} = \sigma_1,$$

$$2. \quad \sum \frac{1}{\lambda_2 \lambda_2} = \sigma_1^2 - \sigma_2,$$

$$3. \quad \sum \frac{1}{\lambda_2 \lambda_3 \lambda_4} = \sigma_1^2 \sigma_2 - \sigma_1 \sigma_2 + \sigma_3,$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots;$$

ou, en désignant

$$\gamma_1 = 1,$$

$$\gamma_2 = \frac{\sigma_1}{\sigma_2} - \frac{\sigma_2}{\sigma_2 \sigma_1},$$

$$\gamma_3 = \frac{\sigma_1}{\sigma_3} - \frac{\sigma_2}{\sigma_3 \sigma_2} + \frac{\sigma_3}{\sigma_3 \sigma_2 \sigma_1},$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,$$

on aura

$$1. \quad \sum \frac{1}{\lambda_2} = \sigma_1 \gamma_1,$$

$$2. \quad \sum \frac{1}{\lambda_2 \lambda_3} = \sigma_1 \sigma_2 \gamma_2,$$

$$3. \quad \sum \frac{1}{\lambda_2 \lambda_3 \lambda_4} = \sigma_1 \sigma_2 \sigma_3 \gamma_3,$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots$$

Or, calculons maintenant γ_2 et γ_3. Il est aisé de voir que, par hypothèse, on aura

$$\gamma_2 = \frac{p^2-1}{p-1} - (p-1) = 2,$$

et

$$\gamma_3 = \frac{p^3-1}{p-1} - (p^3-1) + (p^2-1)(p-1) = 3.$$

Donc, d'après cela,

$$\Sigma \frac{1}{\lambda_2} = \sigma_1 = \frac{1}{p-1},$$

$$\Sigma \frac{1}{\lambda_2 \lambda_3} = \sigma_1 \sigma_2 = \frac{1}{(p-1)(p^2-1)},$$

$$\Sigma \frac{1}{\lambda_2 \lambda_3 \lambda_4} = \sigma_1 \sigma_2 \sigma_3 = \frac{1}{(p-1)(p^2-1)(p^3-1)}.$$

En désignant généralement

$$\gamma_{m-2} = \frac{\sigma_1}{\sigma_{m-2}} - \frac{\sigma_2}{\sigma_{m-2}\sigma_{m-3}} + \frac{\sigma_3}{\sigma_{m-2}\sigma_{m-3}\sigma_{m-4}} - \ldots +$$
$$+ (-1)^{m-2} \frac{\sigma_{m-3}}{\sigma_{m-2}\sigma_{m-3}\ldots\sigma_3\sigma_2} + (-1)^{m-1} \frac{\sigma_{m-2}}{\sigma_{m-2}\sigma_{m-3}\ldots\sigma_2\sigma_1},$$

nous allons démontrer que, si $\gamma_{m-2} = m-2$, il en résultera que

$$\gamma_{m-1} = m-1.$$

A cet effet calculons la différence

$$D = \gamma_{m-1} - \gamma_{m-2} =$$
$$= \sigma_1 \left(\frac{1}{\sigma_{m-1}} - \frac{1}{\sigma_{m-2}}\right) - \frac{\sigma_2}{\sigma_{m-2}} \left(\frac{1}{\sigma_{m-1}} - \frac{1}{\sigma_{m-3}}\right) + \frac{\sigma_3}{\sigma_{m-2}\sigma_{m-3}} \left(\frac{1}{\sigma_{m-1}} - \frac{1}{\sigma_{m-4}}\right) -$$
$$- \ldots + (-1)^{m-2} \frac{\sigma_{m-3}}{\sigma_{m-2}\sigma_{m-3}\ldots\sigma_3} \left(\frac{1}{\sigma_{m-1}} - \frac{1}{\sigma_2}\right) +$$
$$+ (-1)^{m-1} \frac{\sigma_{m-2}}{\sigma_{m-2}\sigma_{m-3}\ldots\sigma_3\sigma_2} \left(\frac{1}{\sigma_{m-1}} - \frac{1}{\sigma_1}\right) + (-1)^m \frac{\sigma_{m-1}}{\sigma_{m-1}\sigma_{m-2}\ldots\sigma_3\sigma_2\sigma_1}.$$

En tenant compte de ce que, par hypothèse,

$$\sigma_1\left(\frac{1}{\sigma_{m-1}}-\frac{1}{\sigma_{m-2}}\right)=\frac{p^{m-1}-p^{m-2}}{p-1}=p^{m-2},$$

$$\sigma_2\left(\frac{1}{\sigma_{m-1}}-\frac{1}{\sigma_{m-3}}\right)=p^{m-3},$$

. . . . . .

$$\sigma_{m-2}\left(\frac{1}{\sigma_{m-1}}-\frac{1}{\sigma_1}\right)=p,$$

on peut présenter D sous la forme suivante:

$$D=p^{m-2}-\frac{p^{m-3}}{\sigma_{m-2}}+\frac{p^{m-4}}{\sigma_{m-2}\sigma_{m-3}}-\ldots+(-1)^{m-2}\frac{p^2}{\sigma_{m-2}\sigma_{m-3}\ldots\sigma_3}+$$

$$+(-1)^{m-1}\frac{p}{\sigma_{m-2}\sigma_{m-3}\ldots\sigma_3\sigma_2}+(-1)^m\frac{1}{\sigma_{m-2}\sigma_{m-3}\ldots\sigma_3\sigma_2\sigma_1}.$$

Or, la somme des deux derniers termes est évidemment

$$(-1)^{m-1}\frac{1}{\sigma_{m-2}\sigma_{m-3}\ldots\sigma_3\sigma_2}\left(p-\frac{1}{\sigma_1}\right)=(-1)^{m-1}\frac{1}{\sigma_{m-2}\sigma_{m-3}\ldots\sigma_3\sigma_2},$$

par suite, la somme des trois derniers termes est

$$(-1)^{m-2}\frac{1}{\sigma_{m-2}\sigma_{m-3}\ldots\sigma_3}\left(p^2-\frac{1}{\sigma_2}\right)=(-1)^{m-2}\frac{1}{\sigma_{m-2}\sigma_{m-3}\ldots\sigma_3};$$

et ainsi de suite; enfin, la somme de tous les termes, sauf le premier, est

$$-\frac{1}{\sigma_{m-2}}.$$

Donc,

$$D=p^{m-2}-\frac{1}{\sigma_{m-2}}=1, \qquad \text{et}$$

$$\gamma_{m-1}=\gamma_{m-2}+1=m-1 \qquad \text{si } \gamma_{m-2}=m-2.$$

Or, comme nous le venons de constater déjà,

$$\gamma_1=1, \quad \gamma_2=2, \quad \gamma_3=3;$$

par suite, on aura $\gamma_4 = 4$, $\gamma_5 = 5$ et, généralement,

$$\gamma_{m-1} = m-1 \qquad (m \geq 2).$$

D'après cela, il est facile de vérifier que, si la formule

$$\sum \frac{1}{\lambda_2 \lambda_3 \ldots \lambda_i} = \sigma_1 \sigma_2 \ldots \sigma_{i-1}$$

est valable pour $i = 2, 3, 4, \ldots (m-1)$, elle sera valable aussi pour $i = m$, et, par suite, généralement pour $m \geq 2$.

En effet, d'après notre supposition, on déduira aisément de (24a) que

$$(m-1) \sum \frac{1}{\lambda_2 \lambda_3 \ldots \lambda_m} = \sigma_1 \sigma_2 \ldots \sigma_{m-1} \gamma_{m-1},$$

et il en résultera immédiatement que

$$\sum \frac{1}{\lambda_2 \lambda_3 \ldots \lambda_m} = \sigma_1 \sigma_2 \ldots \sigma_{m-1} = \frac{1}{(p-1)(p^2-1)\ldots(p^{m-1}-1)},$$

puisque $\gamma_{m-1} = m-1$.

Or, nous avons démontré ci-dessus que la formule (26) est bien valable pour $m = 2, 3, 4$; par conséquent, elle le sera généralement pour $m \geq 2$.

35. Étant donnée une suite des λ_n telle que soit

$$\left| \frac{\lambda_{h+1}}{\lambda_h} \right| \geq p \geq 4 \qquad (h = 1, 2, 3, \ldots), \tag{27}$$

les modules des expressions

$$\sum \frac{1}{\lambda_2 \lambda_3 \ldots \lambda_m} \quad \text{et} \quad \sum_{(\lambda_k, \lambda_1)} \frac{1}{\lambda_2 \lambda_3 \ldots \lambda_m}$$

satisfont aux inégalités suivantes:

$$\frac{1}{2}|A| < \left| \sum \frac{1}{\lambda_2 \lambda_3 \ldots \lambda_m} \right| < \frac{3}{2}|A|, \tag{28}$$

$$\frac{1}{8}|A'| < \left| \sum_{(\lambda_k, \lambda_1)} \frac{1}{\lambda_2 \lambda_3 \ldots \lambda_m} \right| < \frac{15}{8}|A'|, \tag{29}$$

A et A' étant les premiers termes de ces expressions:

$$A = \frac{1}{\lambda_2 \lambda_3 \dots \lambda_m},$$

$$A' = \frac{1}{\lambda_1 \lambda_2 \dots \lambda_{k-1} \lambda_{k+1} \dots \lambda_m} \qquad (\text{pour } k < m),$$

$$= \frac{1}{\lambda_1 \lambda_2 \dots \lambda_{m-1}} \qquad (\text{pour } k \geqq m).$$

Nous vérifions d'abord la première de ces deux inégalités. Remarquons préalablement qu'il résulte de (27) que

$$\left| \frac{\lambda_n}{\lambda_i} \right| \geqq p^{n-i} \qquad (n > i \geqq 1), \tag{30}$$

puisque

$$\left| \frac{\lambda_n}{\lambda_i} \right| = \left| \frac{\lambda_n}{\lambda_{n-1}} \right| \cdot \left| \frac{\lambda_{n-1}}{\lambda_{n-2}} \right| \cdots \left| \frac{\lambda_{i+2}}{\lambda_{i+1}} \right| \cdot \left| \frac{\lambda_{i+1}}{\lambda_i} \right|,$$

et chacun de ces $(n-i)$ facteurs est $\geqq p$.

Cela étant, examinons de près le cas particulier

$$\lambda_n = p^{n-1}, \quad p > 1 \qquad (n = 1, 2, 3, \dots).$$

D'après la formule (26),

$$\sum \frac{1}{\lambda_2 \lambda_3 \dots \lambda_m} = \frac{1}{p^{\frac{m(m-1)}{2}}} \cdot \frac{1}{\left(1 - \frac{1}{p}\right)\left(1 - \frac{1}{p^2}\right) \dots \left(1 - \frac{1}{p^{m-1}}\right)};$$

d'autre part,

$$A = \frac{1}{p\, p^2 \dots p^{m-1}} = \frac{1}{p^{\frac{m(m-1)}{2}}};$$

par suite,

$$\sum \frac{1}{\lambda_2 \lambda_3 \dots \lambda_m} = A \cdot \frac{1}{\left(1 - \frac{1}{p}\right)\left(1 - \frac{1}{p^2}\right) \cdots \left(1 - \frac{1}{p^{m-1}}\right)}.$$

Or,

$$\left(1-\frac{1}{p}\right)\left(1-\frac{1}{p^2}\right)\dots\left(1-\frac{1}{p^{m-1}}\right)>\prod_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{1}{p^n}\right)$$

et $$\prod_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{1}{p^n}\right)=1-\frac{1}{p-1}+\frac{1}{(p-1)(p^2-1)}-$$

$$-\dots+(-1)^n\frac{1}{(p-1)(p^2-1)\dots(p^n-1)}+\dots.$$

En effet, il est clair que

$$(1-a_1)(1-a_2)\dots(1-a_n)=1-\sum^{n}a_1+\sum^{n}a_1a_2+$$

$$+\dots+(-1)^n a_1a_2\dots a_n;$$

donc, en y posant

$$a_i=\frac{1}{p^i}\qquad(p>1,\ i=1,2,3,\dots)$$

et en passant à la limite pour $n\to\infty$, on obtiendra, d'après la formule (26),

$$\prod_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{1}{p^n}\right)=1-\frac{1}{p-1}+\frac{1}{(p-1)(p^2-1)}-\dots\qquad(p>1).$$

On en conclut immédiatement que pour $p\geqq 4$ on aura

$$1>\prod_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{1}{p^n}\right)>1-\frac{1}{3}=\frac{2}{3},$$

et, par suite,

$$\frac{1}{\left(1-\frac{1}{p}\right)\left(1-\frac{1}{p^2}\right)\dots\left(1-\frac{1}{p^{m-1}}\right)}<\frac{1}{\prod_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{1}{p^n}\right)}<\frac{3}{2}\qquad(\text{pour } p\geqq 4).$$

Donc,

$$\sum\frac{1}{\lambda_2\lambda_3\dots\lambda_m}<\frac{3}{2}A,$$

ou

$$\frac{\sum \frac{1}{\lambda_2\lambda_3\ldots\lambda_m}}{A} < \frac{3}{2} \quad \text{pour } \lambda_n = p^{n-1} \quad (p \geqq 4,\ n = 1, 2, 3, \ldots).$$

A l'aide de la dernière inégalité nous allons maintenant démontrer qu'étant donnée une suite des λ_n satisfaisant à la condition (27), on aura

$$\frac{\sum \frac{1}{|\lambda_2\lambda_3\ldots\lambda_m|}}{|A|} < \frac{3}{2}. \tag{31}$$

En effet, la partie gauche de l'inégalité (31) représente une série dont les termes s'écriront sous la forme suivante:

$$\left| \frac{\frac{1}{\lambda_{\nu_2}\lambda_{\nu_3}\ldots\lambda_{\nu_m}}}{\frac{1}{\lambda_2\lambda_3\ldots\lambda_m}} \right| = \left| \frac{\lambda_2}{\lambda_{\nu_2}} \frac{\lambda_3}{\lambda_{\nu_3}} \ldots \frac{\lambda_m}{\lambda_{\nu_m}} \right|,$$

où $$\nu_2 \geqq 2, \quad \nu_3 \geqq 3, \ \ldots \ \nu_m \geqq m.$$

En tenant compte de ce que, sous l'hypothèse (27),

$$\left| \frac{\lambda_i}{\lambda_{\nu_i}} \right| \leqq \frac{1}{p^{\nu_i - i}},$$

tandis que

$$\left| \frac{\lambda_i}{\lambda_{\nu_i}} \right| = \frac{1}{p^{\nu_i - i}} \qquad \text{pour } \lambda_n = p^{n-1} \quad (n = 1, 2, 3 \ldots),$$

on en conclut immédiatement qu'aucun des termes de notre série à termes positifs ne sera plus grand sous l'hypothèse (27) qu'il ne l'est dans le cas particulier, lorsque

$$\lambda_n = 4^{n-1} \quad (n = 1, 2, 3, \ldots).$$

Or, dans ce cas particulier, comme nous le venons de voir, la somme de la série est inférieure à $\frac{3}{2}$; par suite, elle le sera aussi sous l'hypothèse (27).

Donc, l'inégalitè (31) étant vérifiée, on en déduira que

$$\left| \Sigma \frac{1}{\lambda_2 \lambda_3 \dots \lambda_m} \right| \leq \Sigma \frac{1}{|\lambda_2 \lambda_3 \dots \lambda_m|} < \frac{3}{2} |A|,$$

et que

$$\frac{\Sigma \frac{1}{|\lambda_2 \lambda_3 \dots \lambda_m|} - |A|}{|A|} < \frac{1}{2}.$$

D'après cela, on aura

$$\left| \Sigma \frac{1}{\lambda_2 \lambda_3 \dots \lambda_m} \right| \geq |A| - \left| \Sigma \frac{1}{\lambda_2 \lambda_3 \dots \lambda_m} - A \right| \geq$$

$$\geq |A| \left(1 - \frac{\Sigma \frac{1}{|\lambda_2 \lambda_3 \dots \lambda_m|} - |A|}{|A|} \right) > \frac{1}{2} |A|.$$

Donc,

$$\frac{1}{2} |A| < \left| \Sigma \frac{1}{\lambda_2 \lambda_3 \dots \lambda_m} \right| < \frac{3}{2} |A|.$$

36. Examinons maintenant

$$\Sigma_{(\lambda_k, \lambda_1)} \frac{1}{\lambda_2 \lambda_3 \dots \lambda_m}.$$

On peut le présenter sous la forme

$$\Sigma \frac{1}{\beta_1 \beta_2 \dots \beta_{m-1}}$$

si l'on désigne

$$\beta_1 = \lambda_1, \quad \beta_2 = \lambda_2, \quad \dots \quad \beta_{k-1} = \lambda_{k-1}, \quad \beta_n = \lambda_{n+1} \qquad (n \geq k).$$

En remarquant que

$$\left| \frac{\beta_n}{\beta_i} \right| = \left| \frac{\lambda_{n+1}}{\lambda_{i+1}} \right| \qquad \text{pour } k \leq i < n,$$

$$= \left| \frac{\lambda_{n+1}}{\lambda_i} \right| \qquad \text{pour } i < k \leq n,$$

$$= \left| \frac{\lambda_n}{\lambda_i} \right| \qquad \text{pour } i < n < k,$$

on aura, d'après (30),

$$\left|\frac{\beta_n}{\beta_i}\right| \geqq p^{n-i} \qquad \text{pour } n > i \geqq 1 ;$$

par suite, d'après (31),

$$\Sigma \frac{1}{|\beta_2\beta_3 \dots \beta_{m-1}|} < \frac{3}{2}\left|\frac{1}{\beta_2\beta_3 \dots \beta_{m-1}}\right|$$

et

$$\Sigma' \frac{1}{|\beta_2\beta_3 \dots \beta_m|} < \frac{3}{2}\left|\frac{1}{\beta_2\beta_3 \dots \beta_m}\right|.$$

Donc,

$$\Sigma \frac{1}{|\beta_1\beta_2 \dots \beta_{m-1}|} = \frac{1}{|\beta_1|}\Sigma \frac{1}{|\beta_2\beta_3 \dots \beta_{m-1}|} + \Sigma' \frac{1}{|\beta_2\beta_3 \dots \beta_m|} < \frac{3}{2}\left|\frac{1}{\beta_1}\right| \cdot$$

$$\cdot \left|\frac{1}{\beta_2\beta_3 \dots \beta_{m-1}}\right| + \frac{3}{2}\left|\frac{1}{\beta_2\beta_3 \dots \beta_m}\right| = \frac{3}{2}\left(1 + \left|\frac{\beta_1}{\beta_m}\right|\right)\left|\frac{1}{\beta_1\beta_2 \dots \beta_{m-1}}\right| .$$

D'autre part,

$$\left|\frac{\beta_1}{\beta_m}\right| \leqq \frac{1}{p^{m-1}} \qquad \text{et} \qquad 1 + \frac{1}{p^{m-1}} \leqq \frac{5}{4} \qquad (p \geqq 4,\ m \geqq 2).$$

Aussi,

$$\Sigma \frac{1}{|\beta_1\beta_2 \dots \beta_{m-1}|} = \sum_{(\lambda_k, \lambda_1)} \frac{1}{|\lambda_2\lambda_3 \dots \lambda_m|} < \frac{15}{8}|A'|.$$

On en déduira aisément l'inégalité (29): on n'aura qu'à répéter les raisonnements du numéro précédent par lesquels nous avons déduit de (31) l'inégalité (28).

En tenant compte des inégalités (28) et (29), on peut dire que, sous la condition (27), toutes les expressions:

$$\Sigma \frac{1}{\lambda_2\lambda_3 \dots \lambda_m} \qquad \text{et} \qquad \sum_{(\lambda_k, \lambda_1)} \frac{1}{\lambda_2\lambda_3 \dots \lambda_m} \qquad (m = 2, 3, 4, \dots)$$

sont certainement différentes de zéro.

37. Étant donné un système particulier quelconque du type III

$$c_i = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n^i x_n \qquad (i = 0, 1, 2, \ldots)$$

dont les c_i et λ_n satisfont respectivement aux conditions suivantes:

1^0 $\qquad c_i = 0$ pour $i \neq k$, $c_k \neq 0$,

k étant un entier positif quelconque ou zéro,

2^0 $\qquad \left|\frac{\lambda_{h+1}}{\lambda_h}\right| \geqq p \geqq 4 \qquad (h = 1, 2, 3, \ldots)$,

on peut le résoudre par la méthode de Fourier.

Les valeurs des inconnues sont fournies par les formules

$$(32)\quad \left\{ x_h = (-1)^{h+k-1} c_k \frac{\sum\limits_{(\lambda_h, \lambda_1)} \frac{1}{\lambda_2 \lambda_3 \ldots \lambda_{k+1}}}{\left(\frac{\lambda_h}{\lambda_1} - 1\right)\left(\frac{\lambda_h}{\lambda_2} - 1\right) \ldots \left(\frac{\lambda_h}{\lambda_{h-1}} - 1\right)\left(1 - \frac{\lambda_h}{\lambda_{h+1}}\right)\left(1 - \frac{\lambda_h}{\lambda_{h+2}}\right) \ldots} \right.$$

$$(h = 1, 2, 3, \ldots),$$

chacune d'elles étant différente de zéro.

En effet, dans ces conditions, les valeurs des inconnues $(x_h^{(n)})$ du système réduit, formé de n équations, auront pour $n \to \infty$ des limites bien déterminées, finies et différentes de zéro

$$x_h = \lim_{n \to \infty} x_h^{(n)},$$

puisque

$$\sum_{(\lambda_h, \lambda_1)} \frac{1}{\lambda_2 \lambda_3 \ldots \lambda_{k+1}} \neq 0 \quad (\text{n}^\circ\ \mathbf{36}), \quad \text{et}$$

$$\left|\left(1 - \frac{\lambda_h}{\lambda_{h+1}}\right)\left(1 - \frac{\lambda_h}{\lambda_{h+2}}\right) \ldots\right| \geqq \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{1}{p^n}\right) > \frac{2}{3} \qquad (\text{n}^\circ\ \mathbf{35}).$$

Ces limites s'exprimeront évidemment par les formules (32); de plus, elles satisferont au système donné, en rendant absolument convergente chacune des séries de ce système

$$\sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n^i \, x_n,$$

i étant un entier positif quelconque ou zéro.

Pour s'en rendre compte, désignons

$$u_h = \lambda_h^i \, x_h \qquad (h = 1, 2, 3, \ldots);$$

alors on aura

$$\frac{u_{h+1}}{u_h} = -\left(\frac{\lambda_h}{\lambda_{h+1}}\right)^{h-i} \frac{\left(1-\frac{\lambda_1}{\lambda_h}\right)\cdots\left(1-\frac{\lambda_{h-1}}{\lambda_h}\right)\left(1-\frac{\lambda_h}{\lambda_{h+2}}\right)\left(1-\frac{\lambda_h}{\lambda_{h+3}}\right)\cdots}{\left(1-\frac{\lambda_1}{\lambda_{h+1}}\right)\cdots\left(1-\frac{\lambda_{h-1}}{\lambda_{h+1}}\right)\left(1-\frac{\lambda_{h+1}}{\lambda_{h+2}}\right)\left(1-\frac{\lambda_{h+1}}{\lambda_{h+3}}\right)\cdots} \cdot$$

$$\cdot \frac{\sum_{(\lambda_{h+1},\lambda_1)} \frac{1}{\lambda_2\lambda_3\ldots\lambda_{k+1}}}{\sum_{(\lambda_h,\lambda_1)} \frac{1}{\lambda_2\lambda_3\ldots\lambda_{k+1}}}.$$

Or, d'après (27) et (29), il en résultera que

$$\left|\frac{u_{h+1}}{u_h}\right| < 15\left[\frac{\prod_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{1}{p^n}\right)}{\prod_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{1}{p^n}\right)}\right]^2 \left(\frac{1}{p}\right)^{h-i} \quad (\text{pour } h \geqq k+1);$$

par suite,

$$\lim_{h\to\infty}\left|\frac{u_{h+1}}{u_h}\right| = 0.$$

Donc, notre proposition est bien démontrée.

III. Sur la construction des solutions des systèmes du type III dans le cas général.

38. Soit donné un système quelconque du type III

$$c_i = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n^i x_n \qquad (i = 0, 1, 2, \ldots),$$

dont les λ_n et les c_i ne sont assujettis qu'aux conditions suivantes :

1^0 $\lambda_h \neq \lambda_k$ pour $h \neq k$,

2^0 $\lim_{n\to\infty} |\lambda_n| = \infty$,

3^0 qu'au moins un des c_i soit différent de zéro.

Cela étant, nous allons démontrer que l'on peut toujours construire une solution de ce système, par une méthode analogue à celle que nous venons d'appliquer, dans le Chapitre I, à la construction des solutions des systèmes du type I et du type II.

Nous aurons, cette fois aussi, à décomposer convenablement la suite des λ_n en une infinité de suites partielles, à faire correspondre à chacune d'elles un système réduit généralisé, et à constituer, enfin, une solution du système donné, à l'aide de celles des systèmes réduits généralisés.

39. Examinons tout d'abord la question de la décomposition de la suite

$$(E) = \lambda_1, \ \lambda_2, \ \lambda_3, \ \ldots \ \lambda_n, \ \ldots$$

en une infinité de suites partielles (E_n).

Désignons, comme au n° **20**, par (E_n^1) la suite

$$(E_n^1) = \lambda_{1.2^{n-1}}, \quad \lambda_{3.2^{n-1}}, \quad \ldots \ \lambda_{(2k-1)\,2^{n-1}}, \quad \ldots,$$

par

$$(E) - (E_1) - (E_2) - \ldots - (E_{n-1})$$

la suite partielle de (E) que l'on obtiendra en enlevant de la suite (E) tous les éléments des suites partielles

$$(E_1), \quad (E_2), \ \ldots \ (E_{n-1}),$$

et par

$$\mu_{n1}, \ \mu_{n2}, \ \ldots \ \mu_{nh}, \ \ldots$$

les éléments de la suite partielle (E_n).

Cela étant, nous exigeons que la décomposition de la suite (E) soit effectuée d'après la règle suivante :

1° Que le premier élément de la suite (E_n) soit celui des éléments de la suite

$$(E) - (E_1) - (E_2) - \ldots - (E_{n-1})$$

dont le rang est le plus petit; qu'en particulier le premier élément μ_{11} de la suite (E_1) soit λ_1: $\mu_{11} = \lambda_1$.

2° Tous les autres éléments de la suite (E_n)

$$\mu_{n2}, \quad \mu_{n3}, \quad \ldots \quad \mu_{nh}, \quad \mu_{n(h+1)}, \quad \ldots$$

seront choisis exclusivement entre les éléments de la suite (E_n^1).

3° On choisira une quantité positive p_n de sorte que soit

$$4 \leqq p_n > |c_{n-1}|^{\frac{1}{n}}; \tag{33}$$

pour fixer les idées, nous supposons de plus que p_n soit l'entier positif le plus petit qui satisfait à la condition (33).

4° μ_{nh} étant déjà déterminé, on prendra pour $\mu_{n(h+1)}$ celui des éléments de (E_n^1) dont le module satisfait aux conditions:

$$\left|\frac{\mu_{n(h+1)}}{\mu_{nh}}\right| \geqq p_n \qquad (h \geq 1), \tag{34}$$

$$\left|\frac{\mu_{nh}}{\mu_{n(h-1)}}\right| < \left|\frac{\mu_{n(h+1)}}{\mu_{nh}}\right| \qquad \text{pour } h \geq 2 \tag{35}$$

et dont le rang aura la valeur la plus petite, compatible avec les conditions (34) et (35).

Comme il est aisé de le voir, la décomposition de la suite (E) peut être bien effectuée, conformément à la règle que nous venons de fixer.

En effet, on n'aura qu'à répéter les raisonnements du n° **20**, pour mettre en évidence qu'il suffit d'un nombre fini d'opérations, pour déterminer le premier élément de la suite (E_n), c'est-à-dire μ_{n1}.

Celui-ci étant trouvé, on choisira, d'après (33), p_n; alors, en tenant compte des conditions 2° et 4°, on déterminera de proche en proche

$$\mu_{n2}, \quad \mu_{n3}, \quad \mu_{n4}, \quad \ldots \quad \mu_{nh}, \quad \mu_{n\,h+1)}, \quad \ldots$$

On obtiendra ainsi la décomposition de la suite (E) en une infinité de suites partielles

$$(E) = (E_1) + (E_2) + \ldots + (E_n) + \ldots,$$

les éléments de la suite (E_n) satisfaisant aux conditions suivantes :

1^0 $\quad 4 \leqq p_n \leqq \left|\frac{\mu_{n2}}{\mu_{n1}}\right| < \left|\frac{\mu_{n3}}{\mu_{n2}}\right| < \ldots < \left|\frac{\mu_{n(h+1)}}{\mu_{nh}}\right| < \ldots,$

2^0 $\quad 4 \leqq p_n > |c_{n-1}|^{\frac{1}{n}},$

3^0 $\quad \lim_{h \to \infty} |\mu_{nh}| = \infty,$ quel que soit l'entier positif n,

4^0 tous les n premiers éléments de (E) rentrent dans les premières suites partielles : (E_1), (E_2), ... dont le nombre sera n au plus ; donc,

(36) $\quad \lim_{n \to \infty} |\mu_{nh}| = \infty,$ quel que soit l'entier positif h.

40. Après avoir décomposé la suite (E) en une infinité de suites partielles (E_n), nous ferons correspondre à chacune d'elles (E_n) un système réduit généralisé (S_n)

$$\gamma_i = \sum_{h=1}^{\infty} \mu_{nh}^i y_{nh} \qquad (i = 0, 1, 2 \ldots),$$

où $\gamma_i = 0$ pour $i \neq n-1$, $\gamma_{n-1} = c_{n-1}$ et, d'après (33) et (34),

$$\left|\frac{\mu_{n(h+1)}}{\mu_{nh}}\right| \geqq p_n \geqq 4.$$

Il est clair que tous les systèmes (S_n) appartiennent à la catégorie de systèmes particuliers du type III que nous venons d'étudier ci-dessus ; par suite, chacun d'eux peut être résolu, d'après le n° **37**, par la méthode de Fourier, les valeurs des inconnues étant fournies par les formules (32), si l'on y remplace $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \ldots \lambda_h, \ldots$ respectivement par

$$\mu_{n1}, \quad \mu_{n2}, \quad \mu_{n3}, \quad \ldots \quad \mu_{nh}, \quad \ldots,$$

x_h par y_{nh}, et k par $n-1$. On aura donc

$$(37)\quad \left\{ y_{nh} = \frac{(-1)^{h+n} c_{n-1} \cdot \sum_{(\mu_{nh}, \mu_{n1})} \frac{1}{\mu_{n2}\, \mu_{n3} \ldots \mu_{nn}}}{\left(\frac{\mu_{nh}}{\mu_{n1}} - 1\right)\left(\frac{\mu_{nh}}{\mu_{n2}} - 1\right) \ldots \left(\frac{\mu_{nh}}{\mu_{n(h-1)}} - 1\right)\left(1 - \frac{\mu_{nh}}{\mu_{n(h+1)}}\right)\left(1 - \frac{\mu_{nh}}{\mu_{n(h+2)}}\right) \ldots} \right.$$

$$\left. (h = 1, 2, 3, \ldots). \right.$$

Remarquons que, d'après le n° **37**, $y_{nh} \neq 0$, quels que soient les entiers positifs n et h.

41. En établissant une correspondance univoque et réciproque entre les inconnues du système donné (S) et celles des systèmes réduits généralisés (S_n), de sorte que

$$x_s \longleftrightarrow \lambda_s = \mu_{nh} \longleftrightarrow y_{nh},$$

et en posant

$$x_s = y_{nh} \quad \text{pour} \quad x_s \longleftrightarrow y_{nh},$$

y_{nh} étant fourni par la formule (37), les valeurs des x_s ainsi déterminées constitueront une solution du système donné (S).

En effet, nous allons démontrer qu'elles rendent absolument convergente chacune des séries du système (S)

$$\sum_{s=1}^{\infty} \lambda_s^i x_s,$$

i étant un entier positif quelconque ou zéro, et que la somme de la $(i+1)^{\text{ième}}$ série sera c_i:

$$c_i = \sum_{s=1}^{\infty} \lambda_s^i x_s.$$

Étant $\lambda_s = \mu_{nh}$ et $x_s = y_{hn}$, il est clair que l'on peut former la série double

$$\sum_{n=1}^{\infty} \sum_{h=1}^{\infty} \mu_{nh}^i\, y_{nh}$$

contenant tous les termes de la $(i+1)^{\text{ième}}$ série de (S)

$$\sum_{s=1}^{\infty} \lambda_s^i x_s$$

et n'en contenant que ceux-ci.

D'après le critère du n° **23**, on peut dire que la série double sera absolument convergente (et, par suite, la $(i+1)^{\text{ième}}$ série du système (S) le sera aussi) si l'on a

$$|\mu_{nh}^i y_{nh}| < \frac{1}{(n+h)^{2+\varrho}} \qquad (\varrho > 0)$$

pour $n \geq N$, indépendamment de h, et
pour $h \geq H$, indépendamment de n.

Nous verrons que, dans ce cas-ci, l'on peut assigner, en effet, deux entiers positifs: N et H tels que l'on ait

$$|\mu_{nh}^i y_{nh}| < \frac{1}{(2nh)^3},$$

ou

$$|(2nh)^3 \mu_{nh}^i y_{nh}| < 1$$

pour $h \geq H$, indépendamment de n, et
pour $n \geq N$, indépendamment de h.

Il est évident, qu'il en résulterait immédiatement la convergence absolue de la série double, ainsi que celle de la série

$$\sum_{s=1}^{\infty} \lambda_s^i x_s.$$

Remarquons, enfin, que, sans restreindre la généralité, il suffit de n'étudier ci-dessous que le cas où $i > 0$, puisqu'il est clair que, si la série

$$\sum_{s=1}^{\infty} \lambda_s^i x_s$$

est absolument convergente pour $i > 0$, elle le sera à fortiori pour $i = 0$.

Aussi, supposons-nous que i soit un entier positif fixe, choisi d'ailleurs arbitrairement.

42. En désignant

$$U_{nh} = |(2nh)^3 \mu_{nh}^i y_{nh}| =$$

$$= \left| \frac{(2nh)^3 c_{n-1} \mu_{nh}^i \cdot \sum_{(\mu_{nh}, \mu_{n1})} \frac{1}{\mu_{n2} \mu_{n3} \dots \mu_{nn}}}{\left(\frac{\mu_{nh}}{\mu_{n1}} - 1\right)\left(\frac{\mu_{nh}}{\mu_{n2}} - 1\right) \dots \left(\frac{\mu_{nh}}{\mu_{n(h-1)}} - 1\right)\left(1 - \frac{\mu_{nh}}{\mu_{n(h+1)}}\right)\left(1 - \frac{\mu_{nh}}{\mu_{n(h+2)}}\right) \dots} \right|,$$

on aura donc à démontrer que l'on peut trouver deux entiers: H et N tels que soit

$$U_{nh} < 1$$

pour $h \geqq H$, indépendamment de n, et
pour $n \geqq N$, indépendamment de h.

Remarquons que, d'après (33), (34) et le n° **35**,

$$\left|\left(1 - \frac{\mu_{nh}}{\mu_{n(h+1)}}\right)\left(1 - \frac{\mu_{nh}}{\mu_{n(h+2)}}\right) \dots\right| \geqq \prod_{n=1}^{\infty}\left(1 - \frac{1}{4^n}\right) > \frac{2}{3}$$

et que, d'après (29),

$$\sum_{(\mu_{nh}, \mu_{n1})} \frac{1}{\mu_{n2} \mu_{n3} \dots \mu_{nn}} \Bigg| < \frac{15}{8} \left| \frac{1}{\mu_{n1} \dots \mu_{n(h-1)} \mu_{n(h+1)} \dots \mu_{nn}} \right| \quad \text{pour } h < n,$$

ou

$$< \frac{15}{8} \left| \frac{1}{\mu_{n1} \mu_{n2} \dots \mu_{n(n-1)}} \right| \quad \text{pour } h \geqq n.$$

D'autre part, d'après (34),

$$|\mu_{nk}| \geqq |\mu_{n1}| \, p_n^{k-1} \qquad \text{pour } k > 1;$$

par suite,

$$\left| \sum_{(\mu_{nh}, \mu_{n1})} \frac{1}{\mu_{n2} \mu_{n3} \dots \mu_{nn}} \right| < \frac{15}{8} \frac{1}{|\mu_{n1}^{n-1}|} \frac{1}{p_n^{\frac{(n-1)(n-2)}{2}}}.$$

Donc, quels que soient $n > 1$ et $h > 1$, on aura toujours

$$(38) \qquad U_{nh} < \left| \frac{45}{2} \frac{n^3 h^3 c_{n-1}}{\mu_{n1}^{n-1} p_n^{\frac{(n-1)(n-2)}{2}}} \frac{\mu_{nh}^i}{\left(\frac{\mu_{nh}}{\mu_{n1}} - 1\right) \dots \left(\frac{\mu_{nh}}{\mu_{n(h-1)}} - 1\right)} \right|;$$

de même, en tenant compte de ce que, pour chaque valeur entière et positive de h,

$$\left|\left(\frac{\mu_{nh}}{\mu_{n1}}-1\right)\left(\frac{\mu_{nh}}{\mu_{n2}}-1\right)\cdots\left(\frac{\mu_{nh}}{\mu_{n(h-1)}}-1\right)\left(1-\frac{\mu_{nh}}{\mu_{n(h+1)}}\right)\left(1-\frac{\mu_{nh}}{\mu_{n(h+2)}}\right)\cdots\right|>\frac{2}{3},$$

on aura

$$U_{nh}<\left|\frac{45}{2}\,\frac{n^3h^3\,c_{n-1}\,\mu_{nh}^i}{\mu_{n1}\,\mu_{n2}\cdots\mu_{n(n-1)}}\right| \tag{39}$$

pour $n>1$, quel que soit h.

43. Examinons de près l'expression

$$\frac{\mu_{nh}^i}{\left(\frac{\mu_{nh}}{\mu_{n1}}-1\right)\left(\frac{\mu_{nh}}{\mu_{n2}}-1\right)\cdots\left(\frac{\mu_{nh}}{\mu_{n(h-1)}}-1\right)},$$

en supposant que soit $h>2i$.

Dans cette hypothèse, on aura

$$\left|\frac{\mu_{nh}^i}{\left(\frac{\mu_{nh}}{\mu_{n1}}-1\right)\cdots\left(\frac{\mu_{nh}}{\mu_{n(h-1)}}-1\right)}\right|=$$

$$=\left|\frac{\mu_{n1}\,\mu_{n2}\cdots\mu_{ni}\,\frac{\mu_{n(i+1)}}{\mu_{nh}}\cdots\frac{\mu_{n(2i-1)}}{\mu_{nh}}}{\left(1-\frac{\mu_{n1}}{\mu_{nh}}\right)\cdots\left(1-\frac{\mu_{n(2i-1)}}{\mu_{nh}}\right)\left(\frac{\mu_{nh}}{\mu_{n(2i)}}-1\right)\cdots\left(\frac{\mu_{nh}}{\mu_{n(h-1)}}-1\right)}\right|<$$

$$<\left|\frac{3}{2}\,\frac{\mu_{n1}^i}{\left(\frac{\mu_{nh}}{\mu_{n(2i)}}-1\right)\cdots\left(\frac{\mu_{nh}}{\mu_{n(h-1)}}-1\right)}\right|\cdot\left|\frac{\mu_{n2}}{\mu_{n1}}\frac{\mu_{n3}}{\mu_{n1}}\cdots\frac{\mu_{ni}}{\mu_{n1}}\frac{\mu_{n(i+1)}}{\mu_{nh}}\frac{\mu_{n(i+2)}}{\mu_{nh}}\cdots\frac{\mu_{n(2i-1)}}{\mu_{nh}}\right|=$$

$$=\left|\frac{3}{2}\,\frac{\mu_{n1}^i}{\left(\frac{\mu_{nh}}{\mu_{n(2i)}}-1\right)\cdots\left(\frac{\mu_{nh}}{\mu_{n(h-1)}}-1\right)}\right|\cdot\prod_{k=2}^{i}\left(\frac{\left|\frac{\mu_{nk}}{\mu_{n1}}\right|}{\left|\frac{\mu_{nh}}{\mu_{n(2i-k+1)}}\right|}\right).$$

Or, remarquons que, d'après (34) et (33),

$$|\mu_{nh}|>|\mu_{n(2i)}| \qquad \text{pour } h>2i,$$

et que

$$\left|\frac{\mu_{nk}}{\mu_{n1}}\right| = \left|\frac{\mu_{n2}}{\mu_{n1}}\right| \cdot \left|\frac{\mu_{n3}}{\mu_{n2}}\right| \cdots \left|\frac{\mu_{n(k-1)}}{\mu_{n(k-2)}}\right| \cdot \left|\frac{\mu_{nk}}{\mu_{n(k-1)}}\right|,$$

$$\left|\frac{\mu_{n(2i)}}{\mu_{n(2i-k+1)}}\right| = \left|\frac{\mu_{n(2i-k+2)}}{\mu_{n(2i-k+1)}}\right| \cdot \left|\frac{\mu_{n(2i-k+3)}}{\mu_{n(2i-k+2)}}\right| \cdots \left|\frac{\mu_{n(2i-1)}}{\mu_{n(2i-2)}}\right| \cdot \left|\frac{\mu_{n(2i)}}{\mu_{n(2i-1)}}\right|.$$

Ces deux produits contiennent tous les deux $(k-1)$ facteurs; or, chacun des facteurs du dernier produit étant, d'après (35), supérieur au plus grand facteur du premier produit

$$\left|\frac{\mu_{nk}}{\mu_{n(k-1)}}\right| \qquad (k = 2, 3, \ldots i),$$

on aura

$$\left|\frac{\mu_{nk}}{\mu_{n1}}\right| < \left|\frac{\mu_{nh}}{\mu_{n(2i-k+1)}}\right| \qquad \text{pour } k = 2, 3, \ldots i;$$

par suite,

$$\prod_{k=2}^{i} \left(\frac{\left|\frac{\mu_{nk}}{\mu_{n1}}\right|}{\left|\frac{\mu_{nh}}{\mu_{n(2i-k+1)}}\right|} \right) < 1.$$

D'autre part,

$$\left|\left(\frac{\mu_{nh}}{\mu_{n(2i)}} - 1\right) \cdots \left(\frac{\mu_{nh}}{\mu_{n(h-1)}} - 1\right)\right| > \left|\frac{2}{3} \frac{\mu_{nh}}{\mu_{n(2i)}} \frac{\mu_{nh}}{\mu_{n(2i+1)}} \cdots \frac{\mu_{nh}}{\mu_{n(h-1)}}\right| \geqq$$

$$\geqq \frac{2}{3} p_n^{h-2i} p_n^{h-2i-1} \cdots p_n^2 p_n^1 = \frac{2}{3} \cdot p_n^{\frac{(h-2i+1)(h-2i)}{2}} \geqq \frac{2}{3} \cdot 4^{\frac{(h-2i+1)(h-2i)}{2}}.$$

Donc,

$$\left|\frac{\mu_{nh}^i}{\left(\frac{\mu_{nh}}{\mu_{n1}} - 1\right) \cdots \left(\frac{\mu_{nh}}{\mu_{n(h-1)}} - 1\right)}\right| < \frac{9}{4} \frac{|\mu_{n1}^i|}{4^{\frac{(h-2i+1)(h-2i)}{2}}} \tag{40}$$

pour $h > 2i$, quel que soit n.

44. En tenant compte des inégalités (38), (40) et (33), et en constatant que

$$\frac{(n-1)(n-2)}{2} - n > 0 \qquad \text{pour } n \geqq 5,$$

on aura

$$U_{nh} < \left| \frac{45}{2} \frac{n^3 h^3 c_{n-1}}{\mu_{n1}^{n-1} \, p_n^{\frac{(n-1)(n-2)}{2}}} \cdot \frac{9}{4} \frac{\mu_{n1}^{i}}{4^{\frac{(h-2i+1)(h-2i)}{2}}} \right| <$$

$$< \frac{405}{8} \frac{1}{\left|\mu_{n1}^{n-i-1}\right|} \frac{n^3}{p_n^{\frac{(n-1)(n-2)}{2}-n}} \frac{h^3}{4^{\frac{(h-2i+1)(h-2i)}{2}}} \leqq$$

$$\leqq \frac{405}{8} \frac{1}{\left|\mu_{n1}^{n-i-1}\right|} \frac{n^3}{4^{\frac{(n-1)(n-2)}{2}-n}} \frac{h^3}{4^{\frac{(h-2i+1)(h-2i)}{2}}}$$

pour $h > 2i$ et $n \geqq 5$.

Or, d'après (36),

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{\left|\mu_{n1}^{n-i-1}\right|} = 0;$$

de même, il est clair que

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n^3}{4^{\frac{(n-1)(n-2)}{2}-n}} = 0,$$

et

$$\lim_{h\to\infty} \frac{h^3}{4^{\frac{(h-2i+1)(h-2i)}{2}}} = 0;$$

par suite, on peut trouver évidemment deux entiers positifs n_0 et h_0 tels que soient

$$\frac{405}{8} \frac{1}{\left|\mu_{n1}^{n-i-1}\right|} \frac{n^3}{4^{\frac{(n-1)(n-2)}{2}-n}} < 1 \qquad \text{pour } n \geqq n_0,$$

et

$$\frac{h^3}{4^{\frac{(h-2i+1)(h-2i)}{2}}} < 1 \qquad \text{pour } h \geqq h_0,$$

et l'on en tirera immédiatement la conclusion suivante :

$$U_{nh} < 1 \quad \text{pour } n \geqq n_0 \quad \text{et} \quad h \geqq h_0.$$

45. Allons maintenant examiner les valeurs de

$$U_{nh} \text{ pour } n < n_0.$$

n étant fixe: $n = \bar{n}$, la série à termes positifs

$$\sum_{h=1}^{\infty} U_{\bar{n}h} = \sum_{h=1}^{\infty} \left| (2\bar{n}h)^3 \mu^i_{\bar{n}h} y_{\bar{n}h} \right|$$

convergera, comme on s'en assurera aisément, par les mêmes raisonnements que plus haut, au n° **22.**

On peut donc faire correspondre à $n = \bar{n}$ une valeur de h: $h = h_{\bar{n}}$ telle que soit

$$U_{\bar{n}h} < 1 \text{ pour } h \geqq h_{\bar{n}}.$$

Aussi, aura-t-on

$$\begin{aligned} &U_{1h} < 1 \text{ pour } h \geqq h_1, \\ &U_{2h} < 1 \text{ pour } h \geqq h_2, \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots \\ &U_{(n_0-1)h} < 1 \text{ pour } h \geqq h_{n_0-1}. \end{aligned}$$

Cela étant, désignons par H celui des n_0 entiers positifs:

$$h_0,\ h_1,\ h_2,\ \ldots\ h_{n_0-1}$$

qui sera le plus grand, ou, au moins, pas plus petit que chacun des autres n_0-1 entiers; alors, d'après ce que nous venons de voir, on aura évidemment

$$U_{nh} < 1 \text{ pour } h \geqq H, \text{ indépendamment de } n.$$

46. Enfin, il ne faut étudier que le cas: $h < H \geqq 2$. Il est clair que pour $h < H$ on aura:

$$\begin{aligned} &1^0 \quad h^3 \leqq (H-1)^3, \\ &2^0 \quad \left|\mu^i_{nh}\right| \leqq \left|\mu^i_{n(H-1)}\right|; \end{aligned}$$

par suite, d'après (39),

$$U_{nh} < \left| \frac{45}{2} \cdot \frac{n^3(H-1)^3\, c_{n-1}\, \mu^i_{n(H-1)}}{\mu_{n1}\, \mu_{n2} \cdots \mu_{n(n-1)}} \right| \quad \text{pour } h < H.$$

En supposant, de plus, que soit

$$n-1 \geqq H+i-2, \text{ c'est-à-dire } n \geqq H+i-1,$$

on aura

$$\left|\frac{\mu^{i}_{n(H-1)}}{\mu_{n1}\,\mu_{n2}\ldots\mu_{n(n-1)}}\right| =$$

$$= \left|\frac{1}{\mu_{n1}\,\mu_{n2}\ldots\mu_{n(H-2)}}\right| \cdot \left|\frac{\mu_{n(H-1)}}{\mu_{n(H-1)}} \cdot \frac{\mu_{n(H-1)}}{\mu_{nH}} \cdots \frac{\mu_{n(H-1)}}{\mu_{n(H+i-2)}}\right| \cdot \left|\frac{1}{\mu_{n(H+i-1)}\cdots\mu_{n(n-1)}}\right| \leqq$$

$$\leqq \left|\frac{1}{\mu_{n1}\,\mu_{n2}\ldots\mu_{n(H-2)}}\right| \cdot \left|\frac{1}{\mu_{n(H+i-1)}\ldots\mu_{n(n-1)}}\right| \leqq$$

$$\leqq \frac{1}{\left|\mu_{n1}^{H-2}\right|} \cdot \frac{1}{p_n^{\frac{(H-2)(H-3)}{2}}} \cdot \frac{1}{\left|\mu_{n1}^{n-H-i+1}\right|} \cdot \frac{1}{p_n^{\frac{(n+H+i-4)(n-H-i+1)}{2}}} =$$

$$= \frac{1}{\left|\mu_{n1}^{n-i-1}\right|} \cdot \frac{1}{p_n^{\frac{n^2-3n+5i-2iH-i^2+2}{2}}}.$$

Or, i et h étant deux entiers positifs fixes, il suffit évidemment de prendre n assez grand, pour que soit

$$\frac{n^2-3n+5i-2iH-i^2+2}{2} - n > 0.$$

D'après cela, en tenant compte de (33), on aura

$$U_{nh} < \left|\frac{45}{2} \cdot \frac{n^3(H-1)^3}{\mu_{n1}^{n-i-1}} \cdot \frac{1}{p_n^{\frac{n^2-3n+5i-2iH-i^2+2}{2}-n}}\right| \leqq$$

$$\leqq \frac{45}{2} \cdot \frac{(H-1)^3}{\left|\mu_{n1}^{n-i-1}\right|} \cdot \frac{n^3}{4^{\frac{n^2-5n+5i-2iH-i^2+2}{2}}}$$

pour $h < H \geqq 2$, n étant assez grand.

Or,

$$\lim_{n\to\infty} \frac{45}{2} \cdot \frac{(H-1)^3}{\left|\mu_{n1}^{n-i-1}\right|} = 0 = \lim_{n\to\infty} \frac{n^3}{4^{\frac{n^2-5n+5i-2iH-i^2+2}{2}}}.$$

Il en résultera donc que l'on peut trouver un entier positif n_1 tel que soit

$$U_{nh} < 1$$

pour $n \geqq n_1$ et $h < H \geqq 2$.

Donc, en désignant par N celui des deux entiers positifs:

$$n_1 \text{ et } n_0 \text{ (n° 44)}$$

qui ne sera pas inférieur à l'autre, on aura

$$U_{nh} < 1 \text{ pour } n \geqq N, \text{ indépendamment de } h.$$

47. Des résultats obtenus dans les deux derniers numéros il s'ensuit immédiatement que la série double

$$\sum_{n=1}^{\infty} \sum_{h=1}^{\infty} \mu_{nh}^{i} \, y_{nh}$$

converge absolument et qu'elle aura, par conséquent, une somme bien déterminée. Nous allons constater tout de suite qu'elle aura pour somme c_i.

En effet, d'après le mode de détermination des y_{nh},

$$\sum_{h=1}^{\infty} \mu_{nh}^{i} \, y_{nh} = \gamma_i,$$

où $\gamma_i = 0$ pour $n \neq i+1$ et $\gamma_i = c_i$ pour $n = i+1$ (n° **40**); par conséquent, il est clair que

$$c_i = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{h=1}^{\infty} \mu_{nh}^{i} \, y_{nh}.$$

Enfin, la $(i+1)^{\text{ième}}$ série du système donné (S)

$$\sum_{s=1}^{\infty} \lambda_s^{i} \, x_s,$$

ayant les mêmes termes que la série absolument convergente

$$\sum_{n=1}^{\infty} \sum_{h=1}^{\infty} \mu_{nh}^{i} \, y_{nh},$$

et ne différant d'elle que par le mode de groupement des termes, sera absolument convergente, elle-aussi, et aura pour somme c_i, comme la série double.

Donc, les x_s déterminés au n° **41**

$$(x_s = y_{nh} \quad \text{pour } x_s \longleftrightarrow y_{nh})$$

sont tous différents de zéro et constituent, en effet, une solution du système donné (S).

48. Il est aisé de démontrer qu'étant donné un système quelconque du type III

$$c_i = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n^i \, x_n \qquad (i = 0, 1, 2, \ldots),$$

on peut même construire une infinité de solutions, telles que les inconnues

$$x_{\alpha_1}, \quad x_{\alpha_2}, \quad \ldots \quad x_{\alpha_r},$$

arbitrairement choisies d'avance, prennent les valeurs prescrites (a_i):

$$x_{\alpha_i} = a_i \qquad (i = 1, 2, \ldots r),$$

r étant un entier positif quelconque.

En effet, décomposons la suite des λ_n

$$(E) = \lambda_1, \ \lambda_2, \ \lambda_3, \ \ldots \ \lambda_n, \ \ldots$$

en deux suites partielles indéfinies:

$$(E_1) = \mu_{11}, \ \mu_{12}, \ \mu_{13}, \ \ldots \ \mu_{1h}, \ \ldots,$$
$$(E_2) = \mu_{21}, \ \mu_{22}, \ \mu_{23}, \ \ldots \ \mu_{2h}, \ \ldots,$$
$$(E) = (E_1) + (E_2),$$

de sorte que les éléments

$$\lambda_{\alpha_1}, \quad \lambda_{\alpha_2}, \quad \ldots \quad \lambda_{\alpha_r}$$

appartiennent tous à l'une d'elles, soit, par exemple, à (E_2).

Cela étant, nous ferons correspondre aux suites (E_1) et (E_2) les systèmes (S_1) et (S_2) suivants:

$$(S_1) \quad \ldots \quad c_i = \sum_{h=1}^{\infty} \mu_{1h}^i \, y_{1h} \qquad (i = 0, 1, 2, \ldots),$$

$$(S_2) \quad \ldots \quad 0 = \sum_{h=1}^{\infty} \mu_{2h}^i \, y_{2h} \qquad (i = 0, 1, 2, \ldots),$$

dont le premier est évidemment un système du type III, tandis que (S_2) est un système du type I.

Ensuite, nous établirons une correspondance univoque et réciproque entre les inconnues (x_s) du système donné (S) et celles des systèmes auxiliaires, c'est-à-dire les y_{kh} $(k = 1, 2)$, de sorte que soit

$$x_s \longleftrightarrow \lambda_s = \mu_{kh} \longleftrightarrow y_{kh} \qquad (k = 1 \text{ ou } 2).$$

Supposons, pour le moment, que l'on ait résolu les systèmes auxiliaires (S_1) et (S_2); alors, en posant

$$x_s = y_{kh} \quad \text{pour } x_s \longleftrightarrow y_{kh},$$

on obtiendrait évidemment une solution du système donné (S).

En effet, prenons une série quelconque du système (S), soit, par exemple, la $(i+1)^{\text{ième}}$ série

$$\sum_{s=1}^{\infty} \lambda_s^i \, x_s ;$$

celle-ci contiendra tous les termes des $(i+1)^{\text{ièmes}}$ séries des systèmes (S_1) et (S_2):

$$\sum_{h=1}^{\infty} \mu_{1h}^i \, y_{1h} \quad \text{et} \quad \sum_{h=1}^{\infty} \mu_{2h}^i \, y_{2h},$$

et n'en contiendra que ceux-ci.

Les dernières deux séries étant, d'après notre supposition, absolument convergentes et ayant pour sommes respectivement c_i et 0, il en résulterait donc que la série

$$\sum_{s=1}^{\infty} \lambda_s^i \, x_s$$

sera absolument convergente, elle-aussi, et qu'elle aura pour somme c_i.

Or, le système (S_1), étant un système du type III, peut être résolu toujours, comme nous l'avons démontré ci-dessus. De même, le système (S_2) étant un système du type I, on peut calculer, d'après le n° **24**, une infinité de solutions, de sorte que les inconnues correspondant aux

$$x_{\alpha_1},\quad x_{\alpha_2},\ \ldots\ x_{\alpha_r}$$

prennent les valeurs prescrites $a_1,\quad a_2,\ \ldots\ a_r$.

On en tirera donc la conclusion suivante:

Étant donné un système quelconque (S) du type III, l'application convenable du principe des réduites fournira une infinité de solutions de (S), telles qu'aucune des inconnues ne sera zéro, et que les inconnues

$$x_{\alpha_1},\quad x_{\alpha_2},\ \ldots\ x_{\alpha_r},$$

arbitrairement choisies à l'avance, prendront les valeurs prescrites (a_i):

$$x_{\alpha_i} = a_i \qquad (i = 1, 2, \ldots r),$$

r étant un entier positif quelconque.

IV. Sur la construction des solutions des systèmes du type IV.

49. Nous allons étendre le résultat obtenu au numéro précédent aux systèmes du type IV.

A cet effet on n'aura, au fond, qu' à répéter les raisonnements du numéro précédent.

En effet, soit donné un système quelconque (S) du type IV

$$c_i = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \lambda_n^i\, x_n \qquad (i = 0, 1, 2, \ldots).$$

Décomposons la suite des λ_n

$$(E) = \ldots\ \lambda_{-n},\ \ldots\ \lambda_{-1},\quad \lambda_0,\quad \lambda_1,\ \ldots\ \lambda_n,\ \ldots$$

en deux suites partielles indéfinies:

$$(E_1) = \mu_{11}, \quad \mu_{12}, \ldots \mu_{1h}, \ldots$$

et

$$(E_2) = \ldots \mu_{2(-h)} \ldots \mu_{2(-1)}, \quad \mu_{20}, \quad \mu_{21}, \ldots \mu_{2h}, \ldots,$$

de sorte que les éléments

$$\lambda_{\alpha_1}, \quad \lambda_{\alpha_2}, \ldots \lambda_{\alpha_r},$$

arbitrairement choisis d'avance, appartiennent tous à (E_2), cette dernière suite jouissant du même caractère que la suite donnée (E), c'est-à-dire ayant, au moins, deux points-limites.

De plus, nous exigerons que les éléments μ_{kh} $(k = 1, 2)$ satisfassent aux conditions:

$$(41) \quad \begin{cases} 1^0 & \mu_{kg} \neq \mu_{kj} \text{ pour } g \neq j, \\ 2^0 & \mu_{1m} \neq \mu_{2n}, \text{ quels que soient } m \text{ et } n, \\ 3^0 & \lim\limits_{h \to \infty} |\mu_{kh}| = \infty \qquad (k = 1, 2), \\ 4^0 & |\mu_{2(-n)}| < \mu \qquad (n = 0, 1, 2, \ldots), \end{cases}$$

μ étant un nombre positif fixe.

Il est aisé de voir que la décomposition

$$(E) = (E_1) + (E_2)$$

peut être effectuée toujours de sorte que toutes les conditions ci-dessus soient remplies.

Par exemple, on pourrait procéder de la manière suivante: On choisira un entier positif n_0 tel que soit

$$1.2^{n_0-1} > |a_i| \qquad (i = 1, 2, \ldots r);$$

on prendra pour (E_1) la suite

$$(E_1) = \lambda_{1.2^{n_0-1}}, \quad \lambda_{3.2^{n_0-1}}, \quad \ldots \quad \lambda_{(2m-1)2^{n_0-1}}, \quad \ldots,$$

et pour (E_2) la suite

$$(E_2) = (E) - (E_1);$$

alors la décomposition

$$(E) = (E_1) + (E_2)$$

satisfera évidemment à toutes nos exigeances.

50. Faisons correspondre aux suites partielles (E_1) et (E_2) les systèmes réduits généralisés (S_1) et (S_2):

$$\left.\begin{array}{ll} (S_1) & c_i = \sum_{h=1}^{\infty} \mu_{1h}^i y_{1h} \\ (S_2) & 0 = \sum_{h=-\infty}^{\infty} \mu_{2h}^i y_{2h} \end{array}\right\} \quad (i = 0, 1, 2, \ldots).$$

Il est clair que, d'après (41), (S_1) sera un système du type III, tandis que (S_2) sera un système du type II.

Établissons une correspondance univoque et réciproque entre les x_s et les y_{kh} $(k = 1, 2)$ de sorte que soit

$$x_s \longleftrightarrow \lambda_s = \mu_{kh} \longleftrightarrow y_{kh}.$$

Calculons, d'après les numéros **25, 26** et **27**, une solution du système (S_2) dépendant d'une infinité de quantités indéterminées A_n assujetties à la seule condition: $|A_n| > 1$, de sorte que les r inconnues de (S_2) correspondant aux

$$x_{\alpha_1}, \quad x_{\alpha_r}, \quad \ldots \quad x_{\alpha_r}$$

prennent les valeurs prescrites (a_i) $(i = 1, 2, \ldots r)$.

D'autre part, calculons, d'après les numéros **38—47**, une solution du système (S_1).

Cela étant, prenons

$$x_s = y_{kh} \quad \text{pour} \quad x_s \longleftrightarrow y_{kh} \qquad (k = 1, 2);$$

alors les x_s constitueront une solution du système donné (S), comme on s'en rendra aisément compte, par les mêmes considérations que ci-dessus, au n° **48.**

Grâce à la présence des quantités indéterminées A_n $(|A_n| > 1)$, on en déduira une infinité de solutions numériques dont chacune sera telle que

$$x_{\alpha_i} = a_i \qquad (i = 1, 2, \ldots r).$$

Enfin, les solutions de (S_1) et de (S_2) étant constituées par des valeurs des inconnues dont aucune n'est zéro, il en résultera

immédiatement que les solutions du système donné (S) auront le même caractère.

Donc, étant donné un système quelconque du type IV, l'application convenable du principe des réduites fournira une infinité de solutions, telles qu'aucune des inconnues ne sera zéro, et que les inconnues

$$x_{\alpha_1},\ x_{\alpha_2},\ \ldots\ x_{\alpha_r},$$

arbitrairement choisies à l'avance, prendront les valeurs prescrites (a_i):

$$x_{\alpha_i} = a_i \qquad (i = 1, 2, \ldots r),$$

r étant un entier positif quelconque.

CHAPITRE III.

Sur les systèmes d'équations linéaires à une infinité d'inconnues attachés aux séries de Dirichlet et aux équations différentielles linéaires.

I. Sur le procédé de formation des systèmes du type V et du type VI.

51. Dans ce Chapitre nous allons former et étudier une certaine catégorie de systèmes linéaires à une infinité d'inconnues attachés, d'une part, aux séries de Dirichlet et, d'autre part, aux équations différentielles linéaires.

Décrivons tout d'abord le procédé de formation de ces systèmes.

Soit donnée, d'une part, une série de Dirichlet quelconque, sous la forme (I) ou (II) (n° **5**)

$$\sum_h x_h e^{-\lambda_h z}$$

à coefficients indéterminés x_h, les quantités λ_h satisfaisant respectivement à la condition (A) ou aux conditions (A) et (B) (n° **5**).

Soit donnée, d'autre part, une équation différentielle linéaire quelconque

$$P_0(z)\,\frac{d^m y}{dz^m} + P_1(z)\,\frac{d^{m-1} y}{dz^{m-1}} + \ldots + P_m(z). \quad y = P(z)$$

dont les coefficients sont assujettis aux conditions suivantes:

1° que $P(z)$ soit, en général, une fonction entière en z

$$P(z) = c_0 + c_1 z + c_2 z^2 + \ldots + c_n z^n + \ldots,$$

se réduisant, en particulier, à un polynôme entier, ou même à une constante (le zéro y compris);

2° que $P_0(z)$, $P_1(z)$, ... $P_m(z)$ soient des polynômes entiers en z

$$P_i(z) = a_{i0} + a_{i1}z + a_{i2}z^2 + \ldots + a_{in_i}z^{n_i}$$
$$(i = 0, 1, 2, \ldots m).$$

Cela étant, remplaçons dans l'équation différentielle donnée

$$y, \quad \frac{dy}{dz}, \quad \frac{d^2y}{dz^2}, \quad \ldots \quad \frac{d^my}{dz^m}$$

respectivement par les séries

$$\sum_h x_h e^{-\lambda_h z},$$
$$\sum_h (-\lambda_h)\, x_h e^{-\lambda_h z},$$
$$\sum_h (-\lambda_h)^2 x_h e^{-\lambda_h z},$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$\sum_h (-\lambda_h)^m x_h e^{-\lambda_h z},$$

dont chacune (sauf la première) se déduit de la précédente en la différentiant terme à terme.

On obtiendra ainsi

$$(42) \quad \left\{ \sum_h \Big\{ P_0(z)\,(-\lambda_h)^m + P_1(z)\,(-\lambda_h)^{m-1} + \ldots + P_{m-1}(z)\,(-\lambda_h) + P_m(z) \Big\} e^{-\lambda_h z} x_h = P(z) \right.$$

ou, en tenant compte de ce que

$$P_i(z) = a_{i0} + a_{i1}z + \ldots + a_{in_i}z^{n_i} \qquad (i = 0, 1, 2, \ldots m),$$

on aura

$$\sum_h \Big\{ \varphi_0(\lambda_h) + z\varphi_1(\lambda_h) + z^2\varphi_2(\lambda_h) + \ldots + z^r\varphi_r(\lambda_h) \Big\} e^{-\lambda_h z} x_h = P(z),$$

en y désignant par

$$\varphi_0(\lambda_h), \quad \varphi_1(\lambda_h), \quad \ldots \quad \varphi_r(\lambda_h)$$

les polynômes entiers en λ_h de degré m au plus:

$$\varphi_k(\lambda_h) = a_{0k}(-\lambda_h)^m + a_{1k}(-\lambda_h)^{m-1} + \ldots + a_{(m-1)k}(-\lambda_h) + a_{mk}$$
$$(k = 0, 1, 2, \ldots r),$$

et par r celui des $(m+1)$ entiers positifs ou zéros

$$n_0, \quad n_1, \quad n_2, \ldots n_m$$

qui n'est pas inférieur à aucun des autres.

En développant l'expression

$$\{\varphi_0(\lambda_h) + \ldots\} e^{-\lambda_h z}$$

suivant les puissances croissantes de z

$$\left\{\varphi_0(\lambda_h) + z\varphi_1(\lambda_h) + \ldots + z^r\varphi_r(\lambda_h)\right\} e^{-\lambda_h z} x_h =$$

$$= \Big\{\varphi_0(\lambda_h) + z\varphi_1(\lambda_h) + z^2\varphi_2(\lambda_h) + \ldots + z^r\varphi_r(\lambda_h) +$$
$$+ z\varphi_0(\lambda_h)\frac{(-\lambda_h)}{1!} + z^2\varphi_1(\lambda_h)\frac{(-\lambda_h)}{1!} + \ldots + z^r\varphi_{r-1}(\lambda_h)\frac{(-\lambda_h)}{1!} +$$
$$+ z^{r+1}\varphi_r(\lambda_h)\frac{(-\lambda_h)}{1!} +$$
$$+ z^2\varphi_0(\lambda_h)\frac{(-\lambda_h)^2}{2!} + \ldots + z^r\varphi_{r-2}(\lambda_h)\frac{(-\lambda_h)^2}{2!} + z^{r+1}\varphi_{r-1}(\lambda_h)\frac{(-\lambda_h)^2}{2!} +$$
$$+ z^{r+2}\varphi_r(\lambda_h)\frac{(-\lambda_h)^2}{2!} +$$
$$\ldots\ldots\ldots\Big\} x_h,$$

l'équation (42) s'écrira

$$\sum_h \left\{ \sum_{i=0}^{r} \left[\varphi_0(\lambda_h)\frac{(-\lambda_h)^i}{i!} + \varphi_1(\lambda_h)\frac{(-\lambda_h)^{i-1}}{(i-1)!} + \ldots + \varphi_{i-1}(\lambda_h)\frac{(-\lambda_h)}{1!} + \right.\right.$$
$$\left. + \varphi_i(\lambda_h)\right] x_h z^i +$$
$$+ \sum_{i=r+1}^{\infty} \left[\varphi_0(\lambda_h)\frac{(-\lambda_h)^i}{i!} + \varphi_1(\lambda_h)\frac{(-\lambda_h)^{i-1}}{(i-1)!} + \ldots + \right.$$
$$\left.\left. + \varphi_r(\lambda_h)\frac{(-\lambda_h)^{i-r}}{(i-r)!}\right] x_h z^i \right\} = \dot{P}(z).$$

Or, égalons les coefficients des mêmes puissances de z dans les deux parties de la dernière équation; alors on obtiendra évidemment un système d'équations linéaires à une infinité d'inconnues (x_h)

$$\begin{cases} c_i = \sum_h \left[\varphi_0(\lambda_h) \frac{(-\lambda_h)^i}{i!} + \varphi_1(\lambda_h) \frac{(-\lambda_h)^{i-1}}{(i-1)!} + \ldots + \varphi_i(\lambda_h) \right] x_h \\ \qquad\qquad (i = 0, 1, 2, \ldots r), \\ c_i = \sum_h \left[\varphi_0(\lambda_h) \frac{(-\lambda_h)^i}{i!} + \varphi_1(\lambda_h) \frac{(-\lambda_h)^{i-1}}{(i-1)!} + \ldots + \varphi_r(\lambda_h) \frac{(-\lambda_h)^{i-r}}{(i-r)!} \right] x_h \\ \qquad\qquad (i \geqq r+1). \end{cases}$$

En remarquant enfin que pour $i \geqq r$ dans la $(i+1)^{\text{ième}}$ équation de ce système les coefficients des x_h sont des polynômes entiers en λ_h de degré $(m+i)$ au plus, ne contenant que les puissances des λ_h dont les exposants sont $\geqq i-r$, il en résultera que le nombre des termes y sera $(m+r+1)$ au plus.

Donc, le système obtenu par le procédé de formation que nous venons de décrire peut être présenté sous la forme suivante:

$$(43) \quad \begin{cases} c_i = \sum_h \left\{ a_{i0} \lambda_h^{m+i} + a_{i1} \lambda_h^{m+i-1} + \ldots + a_{i(m+i)} \right\} x_h \\ \qquad\qquad (i = 0, 1, 2, \ldots r), \\ c_i = \sum_h \left\{ a_{i0} \lambda_h^{m+i} + a_{i1} \lambda_h^{m+i-1} + \ldots + a_{i(m+r)} \lambda_h^{i-r} \right\} x_h \\ \qquad\qquad (i \geqq r+1), \end{cases}$$

les a_{ik} y désignant à leur tour des polynômes linéaires des coefficients des $P_j(z)$ $(j = 0, 1, \ldots m)$; par exemple,

$$a_{i0} = a_{00} \frac{(-1)^{m+i}}{i!},$$

$$a_{i1} = \left(\frac{a_{10}}{i!} + \frac{a_{01}}{(i-1)!} \right) (-1)^{m+i-1},$$

$$a_{i2} = \left(\frac{a_{20}}{i!} + \frac{a_{11}}{(i-1)!} + \frac{a_{02}}{(i-2)!} \right) (-1)^{m+i-2}$$

. . . . . .

52. Nous allons constater qu'il y a des cas où les coefficients des x_h, dans la $(i+1)^{\text{ième}}$ équation de (43), sont des polynômes de degré $(m+i)$ (comme l'on sait, c'est le degré le plus élevé possible); d'autre part, il y a aussi des cas où le degré maximal n'est pas effectivement atteint; il peut même arriver que notre procédé de formation des systèmes ne s'applique point à l'équation différentielle donnée, parce que la partie droite de la $(i+1)^{\text{ième}}$ équation du système peut s'annuler identiquement, tandis que $c_i \neq 0$.

En effet, remarquons qu'en tenant compte de ce que

$$a_{i0} = (-1)^{m+i} \frac{a_{00}}{i!},$$

on en tirera immédiatement la conclusion suivante: pour que le coefficient de x_h dans la $(i+1)^{\text{ième}}$ équation du système (43) soit un polynôme entier de degré $(m+i)$, il faut et il suffit que soit $a_{00} \neq 0$.

D'autre part, montrons maintenant que le degré du coefficient de x_h dans la $(i+1)^{\text{ième}}$ équation du système peut être inférieur à $(m+i)$.

Soient, par exemple,

$$\begin{aligned} P_0(z) &= z^m, \\ P_1(z) &= z^{m-1}, \\ &\cdots\cdots \\ P_{m-1}(z) &= z, \\ P_m(z) &= 1; \end{aligned}$$

alors on aura évidemment

$$\begin{aligned} \varphi_0(\lambda_h) &= +1, \\ \varphi_1(\lambda_h) &= (-\lambda_h)^1, \\ &\cdots\cdots \\ \varphi_m(\lambda_h) &= (-\lambda_h)^m; \end{aligned}$$

par suite,

$$\left\{\varphi_0(\lambda_h)\frac{(-\lambda_h)^i}{i!} + \ldots + \varphi_i(\lambda_h)\right\} = (-\lambda_h)^i\left[\frac{1}{i!} + \frac{1}{(i-1)!} + \ldots + \frac{1}{1!} + 1\right]$$

$$(i = 0, 1, 2, \ldots m),$$

ainsi que

$$\left\{\varphi_0(\lambda_h)\frac{(-\lambda_h)^i}{i!}+\ldots+\varphi_m(\lambda_h)\frac{(-\lambda_h)^{i-m}}{(i-m)!}\right\}=(-\lambda_h)^i\left[\frac{1}{i!}+\frac{1}{(i-1)!}+\right.$$

$$\left.+\ldots+\frac{1}{(i-m)!}\right] \qquad (i\geq m+1).$$

Il en résulte, en particulier, que le système que l'on obtient dans ce cas-ci appartient évidemment à l'un des quatre types étudiés déjà dans les Chapitres précédents.

Enfin, examinons le cas suivant.

Soit donnée une équation différentielle linéaire telle que l'on ait

$$c_0 \neq 0,$$
$$P_0(0)=a_{00}=0,$$
$$P_1(0)=a_{10}=0,$$
$$\ldots\ldots$$
$$P_m(0)=a_{m0}=0;$$

alors

$$\varphi_0(\lambda_h)=a_{00}(-\lambda_h)^m+a_{10}(-\lambda_h)^{m-1}+\ldots+a_{m0}\equiv 0$$

et il en résultera immédiatement que notre procédé de formation des systèmes ne s'appliquera pas à l'équation différentielle donnée.

En effet, d'après ce procédé, le coefficient de x_h dans la première équation du système est $\varphi_0(\lambda_h)$; or, dans ce cas-ci $\varphi_0(\lambda_h)\equiv 0$; par conséquent, la partie droite de la première équation du système, s'annulant identiquement, ne peut pas être égalée à $c_0 \neq 0$.

53. Le dernier exemple montre qu'il y a des cas où notre procédé de formation des systèmes cesse d'être applicable; d'autre part, d'après les exemples précédents, il y a des cas où il s'appliquera bien et permettra alors d'obtenir des systèmes d'équations linéaires à une infinité d'inconnues de la forme (43).

Appelons systèmes du type V ceux de ces systèmes où h ne parcourt que les valeurs entières positives:

$$h=1,2,3,\ldots,$$

et systèmes du type VI les systèmes analogues où h parcourt toutes les valeurs entières (négatives, zéro et positives):

$$h = \ldots -n, \ldots -2, -1, 0, 1, 2, \ldots n, \ldots .$$

Les systèmes du type V et du type VI peuvent être caractérisés de la manière suivante:

1° Ils sont obtenus des équations différentielles linéaires en y appliquant le procédé de formation que nous venons de décrire ci-dessus, les systèmes du type V étant attachés aux séries de Dirichlet de la forme (I), et ceux du type VI, aux séries de Dirichlet de la forme (II) (n° 5).

2° Le coefficient de x_h dans la $(i+1)^{\text{ième}}$ équation du système est, en général, un polynôme entier en λ_h

$$(44)\quad \begin{cases} a_{i0}\lambda_h^{m+i} + a_{i1}\lambda_h^{m+i-1} + \ldots + a_{i(m+i)} & (i = 0, 1, 2, \ldots r) \quad \text{et} \\ a_{i0}\lambda_h^{m+i} + a_{i1}\lambda_h^{m+i-1} + \ldots + a_{i(m+r)}\lambda_h^{i-r} & (i \geqq r+1), \end{cases}$$

les a_{ik} y dépendant linéairement des coefficients des polynômes

$$P_0(z),\ P_1(z),\ \ldots\ P_m(z),$$

et r y désignant le degré le plus élevé des $P_j(z)$ $(j = 0, 1, \ldots m)$.

3° Les polynômes (44) ne sont pas identiquement nuls, au moins pour une infinité de valeurs entières et positives de i; ils ne le sont pas, en particulier, lorsque $c_i \neq 0$.

4° Pour toutes ces valeurs de i le nombre des termes des polynômes (44) est donc au moins 1 et au plus $(m+r+1)$; par suite, si $a_{i0} = 0$, $a_{i1} = 0$, $\ldots$ $a_{i(k-1)} = 0$, mais $a_{ik} \neq 0$, on aura

$$0 \leqq k \leqq m + r.$$

D'après tout cela, un système du type V s'écrira sous la forme suivante:

$$\begin{cases} c_i = \sum_{h=1}^{\infty} \left\{ a_{ik}\lambda_h^{m+i-k} + \ldots + a_{i(m+i)} \right\} x_h & (i = 0, 1, 2, \ldots r), \\ c_i = \sum_{h=1}^{\infty} \left\{ a_{ik}\lambda_h^{m+i-k} + \ldots + a_{i(m+r)}\lambda_h^{i-r} \right\} & (i \geqq r+1), \\ a_{ik} \neq 0, \qquad 0 \leqq k \leqq m + r. \end{cases}$$

Quant aux systèmes du type VI, ils se présenteront sous une forme tout à fait analogue; seulement

$$\sum_{h=1}^{\infty} \text{ y sera remplacé par } \sum_{h=-\infty}^{+\infty}.$$

II. Sur la résolution des systèmes du type V.

54. Nous allons montrer que le problème de la résolution des systèmes du type V peut être ramené complètement à celui de la résolution des systèmes du type III ou du type I.

Pour s'en assurer, nous démontrerons la proposition suivante:

Étant donné un système quelconque du type V

$$(45)\quad \begin{cases} c_i = \sum_{h=1}^{\infty} \left\{ a_{ik} \lambda_h^{m+i-k} + \ldots + a_{i(m+i)} \right\} x_h \qquad (i = 0, 1, \ldots r), \\ c_i = \sum_{h=1}^{\infty} \left\{ a_{ik} \lambda_h^{m+i-k} + \ldots + a_{i(m+r)} \lambda_h^{i-r} \right\} x_h \qquad (i \geqq r+1), \\ a_{ik} \neq 0, \quad 0 \leqq k \leqq m+r, \end{cases}$$

et en supposant qu'il ait une solution (x_h), celle-ci rendrait absolument convergentes toutes les séries

$$\sum_{h=1}^{\infty} \lambda_h^p x_h \qquad (p = 0, 1, 2, \ldots).$$

En effet, d'après l'hypothèse faite, le système donné a une solution (x_h); par suite, en tenant compte de ce que nous entendons par une solution (n° 4), on peut dire que la série

$$\sum_{h=1}^{\infty} \left| \left\{ a_{ik} \lambda_h^{m+i-k} + \ldots + a_{i(m+r)} \lambda_h^{i-r} \right\} x_h \right|$$

convergera pour chaque valeur entière et positive de $i \geqq r+1$. Étant $a_{ik} \neq 0$, le terme général peut être présenté évidemment sous la forme suivante:

$$u_h = \left| 1 + \frac{a_{i(k+1)}}{a_{ik}} \cdot \frac{1}{\lambda_h} + \ldots + \frac{a_{i(m+r)}}{a_{ik}} \cdot \frac{1}{\lambda_h^{m+r-k}} \right| \cdot \left| a_{ik} \lambda_h^{m+i-k} x_h \right|.$$

Or, en remarquant que, d'après le n° **53**, le coefficient de x_h dans la $(i+1)^{\text{ième}}$ équation du système (45) est, en général, un polynôme entier en λ_h, c'est-à-dire $k < m+r$, et que, d'autre part,

$$\lim_{h\to\infty} \frac{1}{|\lambda_h|} = 0,$$

il vient

$$\lim_{h\to\infty} \left\{ \left| \frac{a_{i(k+1)}}{a_{ik}} \cdot \frac{1}{\lambda_h} \right| + \ldots + \left| \frac{a_{i(m+r)}}{a_{ik}} \cdot \frac{1}{\lambda_h^{m+r-k}} \right| \right\} = 0.$$

Par conséquent, quelque petite que soit la valeur positive de ε, on peut indiquer respectivement un entier positif $n(\varepsilon)$ tel que soit

$$u_h > \left| (1-\varepsilon)\, a_{ik} \right| \cdot \left| \lambda_h^{m+i-k} x_h \right| \qquad \text{pour } h \geq n(\varepsilon);$$

par suite, la série dont le terme général est

$$\left| (1-\varepsilon)\, a_{ik} \right| \cdot \left| \lambda_h^{m+i-k} x_h \right|$$

convergera, ainsi que le fera la série dont le terme général est

$$\left| \lambda_h^{m+i-k} x_h \right|.$$

On en déduira donc immédiatement la convergence absolue de la série

$$\sum_{h=1}^{\infty} \lambda_h^p x_h \qquad \text{pour } p = 0, 1, 2, \ldots m+i-k.$$

Or, étant $m+i-k \geq i-r \quad (i > r+1)$, on voit que $m+i-k$ croît indéfiniment avec i; aussi, toutes les séries

$$\sum_{h=1}^{\infty} \lambda_h^p x_h \qquad (p = 0, 1, 2, \ldots)$$

convergeront-elles absolument.

55. La série

$$\sum_{h=1}^{\infty} \lambda_h^p \, x_h$$

étant absolument convergente, elle aura une somme bien déterminée que nous désignerons par σ_p:

$$\sigma_p = \sum_{h=1}^{\infty}{}' \lambda_h^p \, x_h.$$

Cela étant, on déduit de la $(i+1)^{\text{ième}}$ équation du système donné (45), dans l'hypothèse que ce système ait une solution, la relation suivante:

$$c_i = a_{ik} \, \sigma_{m+i-k} + a_{i(k+1)} \, \sigma_{m+i-k-1} + \ldots + a_{i(m+r)} \, \sigma_{i-r} \quad (i \geq r+1).$$

Généralement, chacune des équations du système donné (45) nous fournira une relation analogue. On peut les considérer comme équations ayant pour inconnues les σ_h, et constituant un système que nous appellerons système associé.

Nous en tirerons donc la conclusion suivante. Pour qu'un système quelconque du type V (45) ait une solution (x_h), il faut que le système associé

$$(46) \quad \begin{cases} c_i = a_{ik} \, \sigma_{m+i-k} + a_{i(k+1)} \, \sigma_{m+i-k-1} + \ldots + a_{i(m+i)} \, \sigma_0 \\ \qquad (i = 0, 1, 2, \ldots r), \\ c_i = a_{ik} \, \sigma_{m+i-k} + a_{i(k+1)} \, \sigma_{m+i-k-1} + \ldots + a_{i(m+r)} \, \sigma_{i-r} \\ \qquad (i \geq r+1) \end{cases}$$

ne contienne que des équations compatibles et qu'il ait une solution (σ_h), lui-aussi.

Remarquons que le système associé (46) est un système infini récurrent. En effet, quelque grand que soit l'entier positif s, on peut toujours indiquer une valeur entière et positive de i. soit $i = i_0$, telle que

$$i - r > s \quad \text{pour } i \geq i_0;$$

par conséquent, σ_s ne peut figurer que dans un nombre fini d'équations du système associé, puisque σ_s n'entrera plus dans la $(i+1)^{\text{ième}}$ équation si $i \geq i_0$.

Il est aisé de démontrer que la condition nécessaire pour l'existence d'une solution du système donné (45) est aussi suffisante.

En effet, supposons que le système associé (46) ait une solution constituée par les valeurs

$$\sigma_1, \quad \sigma_2, \quad \sigma_3, \quad \ldots \quad \sigma_h, \quad \ldots ;$$

prenons alors le système auxiliaire

$$\sigma_i = \sum_{h=1}^{\infty} \lambda_h^i \, x_h \qquad (i = 0, 1, 2, \ldots) ; \tag{47}$$

celui-ci appartient au type III lorsqu'il y a entre les σ_i au moins un qui diffère de 0, ou bien au type I si $\sigma_i = 0$ $(i = 0, 1, 2, \ldots)$.

En tout cas, il aura une infinité de solutions, comme nous venons de voir dans les Chapitres précédents.

Or, on se rendra aisément compte de ce que chacune des solutions du système auxiliaire (47) est aussi une solution du système donné (45).

En effet,

$$c_i = a_{ik} \, \sigma_{m+i-k} + \ldots + a_{i(m+r)} \, \sigma_{i-r} =$$

$$= a_{ik} \cdot \sum_{h=1}^{\infty} \lambda_h^{m+i-k} x_h + \ldots + a_{i(m+r)} \cdot \sum_{h=1}^{\infty} \lambda_h^{i-r} x_h =$$

$$= \sum_{h=1}^{\infty} \left\{ a_{ik} \, \lambda_h^{m+i-k} + \ldots + a_{i(m+r)} \, \lambda_h^{i-r} \right\} x_h \qquad (i \geq r+1)$$

et, de même,

$$c_i = \sum_{h=1}^{\infty} \left\{ a_{ik} \, \lambda_h^{m+i-k} + \ldots + a_{i(m+i)} \right\} x_h \qquad (i = 0, 1, 2, \ldots r).$$

56. D'après cela, étant donné un système quelconque du type V, et en se proposant de le résoudre, on n'aura évidemment qu'à procéder de la manière suivante :

1° On constituera le système associé récurrent et on l'examinera de près : si ce système contient des équations non compa-

tibles, il est clair que le système donné n'aura aucune solution; dans le cas où le système associé admet des solutions on les calculera.

2° À chacune des solutions du système associé

$$(\sigma_0, \quad \sigma_1, \quad \sigma_2, \quad \ldots \quad \sigma_h, \quad \ldots)$$

on fera correspondre un système auxiliaire

$$\sigma_i = \sum_{h=1}^{\infty} \lambda_h^i x_h \qquad (i = 0, 1, 2, \ldots),$$

appartenant ou bien au type III, ou bien au type I, selon les cas.

3° On calculera les solutions des systèmes auxiliaires.

Chacune d'elles sera aussi une solution du système donné du type V et celui-ci n'en aura pas d'autres, comme il résulte évidemment des considérations précédentes.

Ainsi, la résolution d'un système du type V peut être ramenée complètement à la résolution du système associé récurrent et de tous les systèmes auxiliaires correspondants.

57. L'existence des solutions du système donné du type V dépend entièrement de l'existence des solutions du système associé.

Or, remarquons que dans le cas d'un système homogène du type V (c'est-à-dire lorsque $c_i = 0$, $i = 0, 1, 2, \ldots$) le système associé sera homogène, lui-aussi, et aura, par suite, toujours au moins la solution triviale

$$\sigma_i = 0 \qquad (i = 0, 1, 2, \ldots)$$

à laquelle correspondra le système auxiliaire du type I

$$0 = \sum_{h=1}^{\infty} \lambda_h^i x_h \qquad (i = 0, 1, 2, \ldots).$$

Ce dernier système ayant une infinité de solutions (Chap. I), et chacune d'elles étant aussi une solution du système homogène donné (du type V), il en résulte qu'entre les systèmes homogènes du type V il n'y en a pas qui n'aient point de solution

D'autre part, il est aisé de constater que l'on peut bien former des systèmes non homogènes du type V n'ayant aucune solution.

En effet, supposons, par exemple, que soient:

$$\begin{aligned} &1^0 \quad m = 1, \\ &2^0 \quad P_0(z) = a_0 z \qquad (a_0 \neq 0), \\ &3^0 \quad P_1(z) = b_0 z - a_0 \qquad (b_0 \neq 0), \\ &4^0 \quad \frac{c_0}{-a_0} \neq \frac{c_1}{b_0}; \end{aligned}$$

on aura alors $\varphi_0(\lambda_h) = -a_0$ et $\varphi_1(\lambda_h) = b_0 - a_0 \lambda_h$; par suite,

$$\frac{(-\lambda_h)}{1!} \varphi_0(\lambda_h) + \varphi_1(\lambda_h) = b_0,$$

et les deux premières équations du système correspondant du type V attaché à l'équation différentielle

$$a_0 z \frac{dy}{dz} + (b_0 z - a_0) y = c_0 + c_1 z + c_2 z^2 + \dots$$

sont

$$c_0 = \sum_{h=1}^{\infty} (-a_0) x_h,$$

$$c_1 = \sum_{h=1}^{\infty} b_0 x_h;$$

aussi, les deux premières équations du système associé sont-elles

$$\begin{aligned} c_0 &= -a_0 \sigma_0, \\ c_1 &= \quad b_0 \sigma_0. \end{aligned}$$

D'après la condition 4°, celles-ci ne sont pas compatibles et, par suite, dans ce cas-ci notre système non homogène du type V n'aura aucune solution.

Remarquons enfin qu'il y a des systèmes du type V dont les systèmes associés ont une infinité de solutions numériques.

En effet, soit

$$P_0(0) = a_{00} \neq 0;$$

alors, comme nous l'avons vu, au n° **52**, le coefficient de x_h dans la $(i+1)^{\text{ième}}$ équation d'un système du type V sera un polynôme entier en λ_h de degré

$$(m+i) \qquad (i=0, 1, 2, \ldots),$$

c'est-à-dire

$$a_{i0} \neq 0 \quad \text{et} \quad k=0.$$

Aussi, est-il clair que de tous les σ qui entrent effectivement dans la $(i+1)^{\text{ième}}$ équation du système associé c'est σ_{m+i} qui aura l'indice le plus grand.

On peut donc exprimer successivement tous les σ_n où $n > m-1$ en fonction de

$$\sigma_0, \ \sigma_1, \ \ldots \ \sigma_{m-1},$$

en considérant ces derniers comme constantes arbitraires.

On obtiendra ainsi une solution du système associé, dépendant, en général, de ces m constantes arbitraires et représentant, par suite, une infinité de solutions numériques. Donc, dans ce cas-ci, le système donné du type V sera équivalent à une infinité de systèmes auxiliaires du type III ou du type I.

III. Sur la résolution des systèmes du type VI.

58. Au numéro **53** nous avons déjà constaté que le procédé de formation des systèmes du type VI, ainsi que la forme sous laquelle ils se présentent, sont presque les mêmes que dans le cas des systèmes du type V ; la seule différence consiste en ce que les systèmes du type V sont attachés aux séries de Dirichlet de la forme (I), tandis que ceux du type VI, aux séries de Dirichlet de la forme (II) (n° **5**).

Aussi serait-il bien naturel d'essayer d'étendre les résultats obtenus ci-dessus pour les systèmes du type V aux systèmes du type VI.

Or, en examinant de près cette question, on constatera aisément que les raisonnements du n° **54** ne s'appliqueront pas aux systèmes du type VI.

En effet, au numéro **54** nous avons démontré que chacune des solutions d'un système du type V fera converger absolument les séries

$$\sum_{h=1}^{\infty} \lambda_h^i x_h \qquad (i = 0, 1, 2, \ldots),$$

puisque de la convergence d'une série

$$\sum_{h=1}^{\infty} \left| \left\{ a_{ik} \lambda_h^{m+i-k} + \ldots + a_{i(m+r)} \lambda_h^{i-r} \right\} x_h \right|$$

résultera immédiatement la convergence absolue de la série

$$\sum_{h=1}^{\infty} \lambda_h^{m+i-k} x_h.$$

En essayant maintenant d'obtenir le même résultat pour les systèmes du type VI, on verra tout de suite que dans ce cas les raisonnements précédents se trouveront évidemment en défaut. En effet, il est clair qu'en supposant que les séries d'un système du type VI

$$\sum_{h=-\infty}^{+\infty} \left\{ a_{ik} \lambda_h^{m+i-k} + \ldots + a_{i(m+i)} \right\} x_h \qquad (i = 0, 1, 2, \ldots r),$$

$$\sum_{h=-\infty}^{+\infty} \left\{ a_{ik} \lambda_h^{m+i-k} + \ldots + a_{i(m+r)} \lambda_h^{i-r} \right\} x_h \qquad (i \geq r+1)$$

convergent absolument, et que la suite des λ_h ne soit assujettie qu'aux conditions générales (A) et (B) (n° **5**), on ne peut pas en déduire, par les raisonnements du n° **54** au moins, la convergence absolue des séries

$$\sum_{h=-\infty}^{+\infty} \lambda_h^i x_h \qquad (i = 0, 1, 2 \ldots).$$

Mais qu'est ce qu'on doit dire alors à propos de la question intéréssante suivante?

Y a-t-il des systèmes du type VI ayant des solutions qui font converger absolument les séries du système, sans qu'elles rendent absolument convergentes les séries

$$\sum_{h=-\infty}^{+\infty} \lambda_h^i x_h \qquad (i = 0, 1, 2, \ldots),$$

ou au moins quelques-unes de ces séries?

En laissant ouverte cette question délicate, nous ne nous allons occuper que de celles des solutions des systèmes du type VI qui rendent absolument convergentes toutes les séries

$$\sum_{h=-\infty}^{+\infty} \lambda_h^i x_h \qquad (i = 0, 1, 2, \ldots);$$

nous les appelons solutions (a).

59. Il est aisé de voir que tout ce que nous venons de dire à propos des solutions des systèmes du type V peut être étendu, au fond, aux solutions (a) des systèmes du type VI. A cet effet on n'aura qu'à répéter les raisonnements des numéros **55—57**.

En procédant ainsi, on démontrera la proposition suivante:

Soit donné un système quelconque du type VI (n° **53**)

$$(48)\quad \begin{cases} c_i = \sum_{h=-\infty}^{+\infty} \left\{ a_{ik} \lambda_h^{m+i-k} + \ldots + a_{i(m+i)} \right\} x_h & (i = 0, 1, 2 \ldots r), \\ c_i = \sum_{h=-\infty}^{+\infty} \left\{ a_{ik} \lambda_h^{m+i-k} + \ldots + a_{i(m+r)} \lambda_h^{i-r} \right\} x_h & (i \geq r+1), \\ a_{ik} \neq 0, \qquad 0 \leq k \leq m+r; \end{cases}$$

pour qu'il ait des solutions (a), il faut et il suffit que le système associé récurrent

$$(49)\quad \begin{cases} c_i = a_{ik} \sigma_{m+i-k} + \ldots + a_{i(m+i)} \sigma_0 & (i = 0, 1, 2, \ldots r) \\ c_i = a_{ik} \sigma_{m+i-k} + \ldots + a_{i(m+r)} \sigma_{i-r} & (i \geq r+1) \end{cases}$$

ait, lui-aussi, au moins une solution.

En faisant correspondre à chacune des solutions du système associé

$$\sigma_0, \quad \sigma_1, \quad \sigma_2, \quad \ldots \quad \sigma_h, \quad \ldots$$

un système auxiliaire

$$(50)\qquad \sigma_i = \sum_{h=-\infty}^{+\infty} \lambda_h^i x_h \qquad (i = 0, 1, 2, \ldots),$$

on peut dire que l'ensemble des solutions de tous ces systèmes auxiliaires contient toutes les solutions (*a*) du système donné du type VI et qu'il n'en contient que ceux-ci.

Les systèmes auxiliaires (50) étant du type II ou du type IV, on se rendra aisément compte de ce que la construction des solutions (*a*) d'un système du type VI (48) peut être ramenée, à l'aide du système associé récurrent (49), complètement à la résolution des systèmes du type IV ou du type II.

60. L'existence des solutions (*a*) d'un système du type VI dépendra entièrement de l'existence des solutions du système associé correspondant.

Celui-ci aura en tout cas la solution triviale

$$\sigma_i = 0 \qquad (i = 0, 1, 2, \ldots)$$

si le système donné du type VI est homogène, puisque dans ce cas le système associé correspondant le sera évidemment, lui-aussi.

Il en résulte donc que chacun des systèmes homogènes du type VI a une infinité de solutions (*a*), au moins toutes celles du système auxiliaire du type II

$$0 = \sum_{h=-\infty}^{+\infty} \lambda_h^i \, x_h \qquad (i = 0, 1, 2, \ldots).$$

Quant aux systèmes non homogènes du type VI, on pourrait montrer à l'aide des exemples, comme au n° **57**:

1° qu'en partant de certaines équations différentielles linéaires, on obtiendra des systèmes du type VI dont les systèmes associés contiennent des équations incompatibles et n'ont, par suite, aucune solution;

2° qu'il y a, d'autre part, des systèmes non homogènes du type VI dont les systèmes associés ont un nombre fini ou même une infinité de solutions numériques.

D'après cela, on trouve, d'une part, des systèmes non homogènes du type VI qui n'ont aucune solution (*a*) et, d'autre part, des systèmes qui en ont une infinité.

CHAPITRE IV.

Sur l'interpolation.

I. Généralités.

61. Jusqu'ici nous avons appliqué le principe des réduites aux différents systèmes d'équations linéaires à une infinité d'inconnues attachés aux séries de Dirichlet.

Allons maintenant l'appliquer à certains systèmes d'équations linéaires attachés aux séries entières.

L'objet de nos études, dans ce dernier Chapitre, sera le problème d'interpolation que l'on peut énoncer sous une forme plus ou moins générale.

Convenons d'appeler problème spécial de l'interpolation le problème suivant:

Étant données deux suites indéfinies de quantités quelconques:

$$c_1,\ c_2,\ c_3,\ \ldots\ c_n,\ \ldots,$$

$$a_1,\ a_2,\ a_3,\ \ldots\ a_n,\ \ldots,$$

les éléments de la dernière satisfaisant aux conditions

$$|a_1| \leqq |a_2| \leqq |a_3| \leqq \ldots \leqq |a_n| \leqq \ldots,$$

$$|a_n| \to \infty \qquad \text{pour } n \to \infty,$$

former une fonction entière $F(z)$ qui, pour $z = a_1,\ a_2,\ \ldots\ a_n,\ \ldots$ prenne respectivement les valeurs $c_1,\ c_2,\ \ldots\ c_n,\ \ldots$

En posant

$$F(z) = C_0 + C_1 z + C_2 z^2 + \ldots + C_n z^n + \ldots,$$

on n'aura qu'à déterminer les coefficients C_n de sorte qu'ils

satisfassent au système d'équations linéaires à une infinité d'inconnues

$$(51)\quad c_i = C_0 + C_1 a_i + C_2 a_i^2 + \ldots + C_n a_i^n + \ldots \Big\} \quad (i = 1, 2, 3, \ldots).$$

Appelons ces systèmes (51) systèmes du type VII. Cela étant, il est clair que le problème spécial de l'interpolation équivaut à la résolution du système correspondant du type VII.

Quant au problème généralisé de l'interpolation, nous l'énoncerons sous la forme suivante:

Étant données trois suites indéfinies:

1° une suite des (a_n)

$$a_1,\quad a_2,\quad a_3,\quad a_n,\quad \ldots$$

telle que

$$|a_1| \leqq |a_2| \leqq |a_3| \leqq \ldots \leqq |a_n| \leqq \ldots,$$

$$|a_n| \to \infty \text{ pour } n \to \infty,$$

2° une suite de nombres entiers positifs quelconques ou zéros

$$p_1,\quad p_2,\quad p_3,\quad \ldots\ p_n,\quad \ldots,\quad \text{et}$$

3° une suite de quantités quelconques

$$c_1^{(0)},\ c_1^{(1)} \ldots c_1^{(p_1)},\ c_2^{(0)},\ c_2^{(1)},\ \ldots c_2^{(p_2)},\ \ldots,\ c_n^{(0)},\ c_n^{(1)},\ \ldots c_n^{(p_n)},\ \ldots,$$

former une fonction entière $F(z)$ de sorte que l'on ait pour $z = a_n$

$$\left.\begin{aligned} F(a_n) &= c_n^{(0)} \\ F'(a_n) &= c_n^{(1)} \\ &\cdots\cdots\cdots \\ F^{(p_n)}(a_n) &= c_n^{(p_n)} \end{aligned}\right\} \quad (n = 1, 2, 3 \ldots),$$

c'est-à-dire que la fonction $F(z)$, elle-même, ainsi que ses p_n premières dérivées prennent pour $z = a_n$ respectivement les valeurs prescrites $c_n^{(0)},\ c_n^{(1)},\ \ldots\ c_n^{(p_n)}$, n étant un nombre entier positif quelconque.

Cela revient évidemment à résoudre le système suivant d'équations linéaires à une infinité d'inconnues:

$$(52)\quad \left\{\begin{array}{l} c_n^{(0)} = C_0 + C_1 a_n + C_2 a_n^2 + \ldots + \\ \qquad\qquad + C_{p_n} a_n^{p_n} + C_{p_n+1} a_n^{p_n+1} + \ldots \\ c_n^{(1)} = \quad 1!\, C_1 + \frac{2}{1!} C_2 a_n + \ldots + \\ \qquad + p_n C_{p_n} a_n^{p_n-1} + (p_n+1) C_{p_n+1} a_n^{p_n} + \ldots \\ c_n^{(2)} = \quad 2!\, C_2 + \ldots + \\ + p_n (p_n - 1) C_{p_n} a_n^{p_n-2} + (p_n+1) p_n C_{p_n+1} a_n^{p_n-1} + \ldots \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ c_n^{(p_n)} = \quad p_n!\, C_{p_n} + \frac{(p_n+1)!}{1!} C_{p_n+1} a_n + \ldots \end{array}\right. \quad (n = 1, 2, 3, 4, \ldots).$$

Appelons ces systèmes (52) systèmes du type VIII. Cela étant, il est clair que le problème généralisé de l'interpolation équivaut à la résolution du système correspondant du type VIII.

Remarquons que dans le cas particulier où

$$c_i^{(k)} = 0 \quad \text{pour } k = 0, 1, 2, \ldots p_i$$
$$(i = 1, 2, 3, \ldots),$$

ce problème a été résolu par Weierstrass; en effet, d'après son théorème célèbre, on peut construire une infinité de fonctions entières $F(z)$ telles que

$$\left\{\begin{array}{l} F(a_n) = 0 \\ F'(a_n) = 0 \\ \ldots\ldots \\ F^{(p_n)}(a_n) = 0 \end{array}\right. \quad (n = 1, 2, 3, \ldots).$$

En appliquant convenablement le principe des réduites, nous montrerons, dans ce Chapitre, que le même résultat peut être obtenu dans le cas général, les quantités données $c_i^{(k)}$ ayant des valeurs quelconques.

Ce beau résultat mettra bien en évidence, peut-être d'une façon plus frappante que le font les Chapitres précédents, le rôle

important que joue le principe des réduites dans la théorie des systèmes d'équations linéaires à une infinité d'inconnues.

62. Nous allons résoudre d'abord les systèmes du type VII sous l'hypothèse particulière suivante, relative à la suite des a_n:

$$(53) \qquad \begin{cases} |a_1| < |a_2| < |a_3| < \ldots < |a_n| < \ldots, \\ |a_n| \to \infty \quad \text{pour } n \to \infty. \end{cases}$$

Comme nous le verrons, cette hypothèse restrictive facilitera considérablement notre tâche de construction des solutions des systèmes du type VII, en permettant d'y appliquer une méthode particulièrement simple. Ensuite, nous en dégagerons aisément l'idée essentielle d'une méthode analogue, s'appliquant aux systèmes du type VII, ainsi qu'à ceux du type VIII sous l'hypothèse suivante plus générale:

$$(54) \qquad \begin{cases} |a_1| \leq |a_2| \leq |a_3| \leq \ldots \leq |a_n| \leq \ldots, \\ |a_n| \to \infty \quad \text{pour } n \to \infty. \end{cases}$$

Ajoutons que ces méthodes ont toutes les deux pour base commune le principe des réduites, n'étant, au fond, que des modes d'application distincts du même principe.

En modifiant convenablement la première d'elles, on en déduira aisément l'autre.

Au lieu de traiter séparément les systèmes du type VII et ceux du type VIII, sous l'hypothèse (54), nous nous bornerons, pour éviter des répétitions, à ne résoudre que les systèmes du type VIII, qui embrassent d'ailleurs aussi tous les systèmes du type VII, puisque chacun de ceux-ci peut être considéré évidemment comme un système du type VIII dont tous les p_n sont nuls:

$$p_n = 0 \qquad (n = 1, 2, 3, \ldots).$$

63. Remarquons enfin que chaque système du type VIII qui admet une solution, en admettra même une infinité.

En effet, soit

$$F(z) = C_0 + C_1 z + C_2 z^2 + \ldots + C_n z^n + \ldots$$

une fonction entière telle que

$$\left.\begin{aligned} F(a_n) &= c_n^{(0)} \\ F'(a_n) &= c_n^{(1)} \\ &\cdots\cdots\cdots \\ F^{(p_n)}(a_n) &= c_n^{(p_n)} \end{aligned}\right\} \quad (n = 1, 2, 3, \ldots).$$

D'autre part, d'après Weierstrass, il y a une infinité de fonctions entières $\Phi(z)$ admettant d'une façon générale a_n pour zéro d'ordre $p_n + 1$ $(n = 1, 2, 3, \ldots)$ et, par suite, telles que

$$\left.\begin{aligned} \Phi(a_n) &= 0 \\ \Phi'(a_n) &= 0 \\ &\cdots\cdots \\ \Phi^{(p_n)}(a_n) &= 0 \end{aligned}\right\} \quad (n = 1, 2, 3, \ldots);$$

il en résulte évidemment que la somme

$$F(z) + \Phi(z)$$

représente, elle-aussi, une fonction entière $F_1(z)$ telle que

$$\left.\begin{aligned} F_1(a_n) &= c_n^{(0)} \\ F_1'(a_n) &= c_n^{(1)} \\ &\cdots\cdots\cdots \\ F_1^{(p_n)}(a_n) &= c_n^{(p_n)} \end{aligned}\right\} \quad (n = 1, 2, 3, \ldots).$$

Donc, à une infinité de fonctions $\Phi(z)$ correspondra une infinité des fonctions $F_1(z) = F(z) + \Phi(z)$ dont les coefficients constituent une infinité de solutions du système correspondant du type VIII.

II. Sur la résolution du problème spécial de l'interpolation dans un cas particulier.

64. Proposons-nous, sous l'hypothèse restrictive (53), de résoudre le problème spécial de l'interpolation (n° **61**), ou, en d'autres termes, de construire une solution du système (51).

Remarquons tout d'abord qu'étant donné un système quelconque tel que (51), on peut le présenter toujours sous la forme

$$(55) \qquad b_i = A_1 a_i + A_2 a_i^2 + \ldots + A_n a_i^n + \ldots \Big\} \qquad (i = 1, 2, 3, \ldots),$$

où

$$a_1 \neq 0, \quad |a_n| \to \infty \text{ pour } n \to \infty,$$
$$|a_1| < |a_2| < |a_3| < \ldots < |a_n| < \ldots,$$

la suite indéfinie

$$b_1, \quad b_2, \quad b_3, \ldots b_n, \ldots$$

contenant au moins un élément différent de zéro et les inconnues y étant désignées par $A_1, \quad A_2, \quad A_3, \ldots A_n, \ldots$

En effet, il y a deux cas à distinguer:

$$1^0 \; a_1 \neq 0 \quad \text{et} \quad 2^0 \; a_1 = 0.$$

Dans le premier cas on choisira $C_0 = c$ de sorte qu'en désignant

$$c_i - c = b_i \qquad (i = 1, 2, 3, \ldots),$$

tous les b_i ne soient pas nuls; alors, en posant

$$A_n = C_n \qquad (n = 1, 2, 3, \ldots) \text{ et } a_i = a_i \qquad (i = 1, 2, 3, \ldots),$$

on obtiendra évidemment un système tel que (55).

Dans l'autre cas, où $a_1 = 0$, on aura $C_0 = c_1$; alors, s'il y a entre les différences $c_i - c_1 \quad (i = 1, 2, 3, \ldots)$ au moins une qui diffère de zéro, on n'aura qu'à poser

$$b_i = c_i - c_1, \quad a_i = a_{i+1} \qquad (i = 1, 2, 3, \ldots)$$

et

$$A_n = C_n \qquad (n = 1, 2, 3, \ldots).$$

Dans le cas contraire, étant

$$c_i - c_1 = 0 \text{ pour } i = 1, 2, 3 \ldots,$$

on peut présenter le système donné (51) sous la forme suivante:

$$-C_1 = C_2 a_i + C_3 a_i^2 + \ldots + C_n a_i^{n-1} + \ldots \Big\} \qquad (i = 2, 3, 4, \ldots),$$

d'où l'on déduit immédiatement qu'en choisissant C_1 de sorte que soit $-C_1 = c_0 \neq 0$, et en posant

$$a_i = a_{i+1}, \quad b_i = c_0 \quad \text{pour } i = 1, 2, 3, \ldots \quad \text{et } A_{n-1} = C_n$$

pour $n = 2, 3, 4. \ldots,$ on obtiendra encore un système tel que (55).

D'après cela, il est clair que, sans restreindre la généralité, on peut se borner à n'étudier dès lors que les systèmes (51) où $a_1 \neq 0$, $C_0 = 0$ et la suite indéfinie

$$c_1, \quad c_2, \quad c_3, \ldots c_n, \ldots$$

contient au moins un élément $c_j \neq 0$, tous les autres cas se ramenant aisément à celui-ci, comme nous venons de le voir tout à l'heure.

Donc, pour résoudre le problème spécial de l'interpolation, sous l'hypothèse (53), on n'aura qu'à montrer qu'on peut toujours construire une solution d'un système quelconque du type VII

$$c_i = \sum_{n=1}^{\infty} C_n a_i^n \qquad (i = 1, 2, 3, \ldots), \tag{56}$$

tel que

$$\begin{cases} 1^0 & a_1 \neq 0, \\ 2^0 & |a_n| \to \infty \text{ pour } n \to \infty, \\ 3^0 & |a_1| < |a_2| < |a_3| < \ldots < |a_n| < \ldots, \quad \text{et} \\ 4^0 & c_j \neq 0, \end{cases} \tag{57}$$

j étant d'ailleurs un nombre entier positif quelconque.

65. Nous verrons que chaque système (56) satisfaisant aux conditions (57) peut être résolu à l'aide des systèmes réduits généralisés dont le $k^{\text{ième}}$ s'écrira sous la forme suivante:

$$\gamma_i = \sum_{h=1}^{\infty} \lambda_i^{h-1} y_h \qquad (i = 1, 2, 3, \ldots) \tag{58}$$

où $\gamma_i = 0$ pour $i \neq k$, la suite indéfinie

$$\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \ldots \lambda_n, \ldots$$

étant telle que

$$\left| \frac{\lambda_{n+1}}{\lambda_n} \right| \geqq p \geqq 4 \qquad (n = 1, 2, 3, \ldots). \tag{27}$$

Il résulte évidemment de (27) que

$$|\lambda_n| \to \infty \text{ pour } n \to \infty,$$

et

$$\left|\frac{\lambda_n}{\lambda_m}\right| \geq p^{n-m} \text{ pour } n > m,$$

quels que soient les nombres entiers positifs n et m (n° **35**).

Quant aux systèmes tels que (58) dont les λ_n satisfont à la condition (27), nous allons montrer que chacun d'eux peut être résolu par la méthode de Fourier.

En effet, étant donné un système (58), désignons par

$$y_1^{(n)},\ y_2^{(n)},\ \ldots\ y_h^{(n)},\ \ldots\ y_n^{(n)}$$

les valeurs des inconnues du système réduit correspondant, ne contenant que n équations et autant d'inconnues ($n \geqq k$); cela étant, on aura évidemment

$$y_h^{(n)} = (-1)^{h+k} \gamma_k \frac{\Delta_{k,h}^{(n)}}{\Delta^{(n)}}$$

où

$$\Delta^{(n)} = \begin{vmatrix} 1 & \lambda_1 & \ldots & \lambda_1^{n-1} \\ 1 & \lambda_2 & \ldots & \lambda_2^{n-1} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 1 & \lambda_n, & \ldots & \lambda_n^{n-1} \end{vmatrix}$$

et

$$\Delta_{k,h}^{(n)} = \begin{vmatrix} 1 & \lambda_1 & \ldots & \lambda_1^{h-2} & \lambda_1^{h} & \ldots & \lambda_1^{n-1} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 1 & \lambda_{k-1} & \ldots & \lambda_{k-1}^{h-2} & \lambda_{k-1}^{h} & \ldots & \lambda_{k-1}^{n-1} \\ 1 & \lambda_{k+1} & \ldots & \lambda_{k+1}^{h-2} & \lambda_{k+1}^{h} & \ldots & \lambda_{k+1}^{n-1} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 1 & \lambda_n & \ldots & \lambda_n^{h-2} & \lambda_n^{h} & \ldots & \lambda_n^{n-1} \end{vmatrix}.$$

En comparant cette solution-ci avec celle du système réduit fini correspondant au système (22) (n° **30**), on s'aperçoit aisément de ce que celle-ci s'obtient de celle-là en y remplaçant

k par $h-1$, h par k et c_k par γ_k.

Donc, d'après (23) (n° **30**),

$$\left\{ y_h^{(n)} = \frac{(-1)^{h+k}\gamma_k \cdot \sum_{(\lambda_k,\lambda_1)}^{(n-1)} \frac{1}{\lambda_2\lambda_3\ldots\lambda_h}}{\left(\frac{\lambda_k}{\lambda_1}-1\right)\left(\frac{\lambda_k}{\lambda_2}-1\right)\cdots\left(\frac{\lambda_k}{\lambda_{k-1}}-1\right)\left(1-\frac{\lambda_k}{\lambda_{k+1}}\right)\left(1-\frac{\lambda_k}{\lambda_{k+2}}\right)\cdots\left(1-\frac{\lambda_k}{\lambda_n}\right)} \right.$$

$$(h = 1, 2, 3, \ldots n),$$

$$\sum_{(\lambda_k,\lambda_1)}^{(n-1)} \frac{1}{\lambda_2\lambda_3\ldots\lambda_h}$$

étant la fonction symétrique, entière et homogène d'ordre $h-1$ des $n-1$ quantités:

$$\frac{1}{\lambda_1}, \frac{1}{\lambda_2}, \ldots \frac{1}{\lambda_{k-1}}, \frac{1}{\lambda_{k+1}}, \ldots \frac{1}{\lambda_n} \quad (\text{n° } \mathbf{30}).$$

En tenant compte de la condition (27), ainsi que des considérations des numéros **33** et **37**, on pourra en conclure que les limites

$$y_h = \lim_{n\to\infty} y_h^{(n)}$$

existent, étant finies, bien déterminées et, pour $\gamma_k \neq 0$, différentes de zéro:

$$(59) \quad \left\{ y_h = (-1)^{h+k}\gamma_k \frac{\sum_{(\lambda_k,\lambda_1)} \frac{1}{\lambda_2\lambda_3\ldots\lambda_h}}{\left(\frac{\lambda_k}{\lambda_1}-1\right)\left(\frac{\lambda_k}{\lambda_2}-1\right)\cdots\left(\frac{\lambda_k}{\lambda_{k-1}}-1\right)\prod_{m=1}^{\infty}\left(1-\frac{\lambda_k}{\lambda_{k+m}}\right)} \right.$$

$$(h = 1, 2, 3, \ldots).$$

Les valeurs des y_h, qui viennent d'être obtenues, constituent une solution du système (58) en rendant absolument convergentes toutes ses séries.

En effet, prenons, pour fixer les idées, la série $i^{\text{ième}}$, i étant un nombre entier positif fixe choisi d'ailleurs arbitrairement, et désignons par

$$u_h = \lambda_i^{h-1} y_h \quad \text{et} \quad u_{h+1} = \lambda_i^h y_{h+1}$$

ses deux termes successifs; alors, d'après (59), on aura

$$\left|\frac{u_{h+1}}{u_h}\right| = \left| \lambda_i \frac{\sum\limits_{(\lambda_k, \lambda_1)} \frac{1}{\lambda_2 \lambda_3 \ldots \lambda_{h+1}}}{\sum\limits_{(\lambda_k, \lambda_1)} \frac{1}{\lambda_2 \lambda_3 \ldots \lambda_h}} \right|,$$

et, par suite, d'après les inégalités (29) ou (28) (n° **35**),

$$\left|\frac{u_{h+1}}{u_h}\right| < 15 \left|\frac{\lambda_i}{\lambda_{h+1}}\right|;$$

donc,

$$\left|\frac{u_{h+1}}{u_h}\right| \to 0 \quad \text{pour} \quad h \to \infty$$

et il en résulte immédiatement que la série $i^{\text{ième}}$ converge absolument.

Les parties droites des équations du système (58) s'obtiennent de la série

$$\sum_{h=1}^{\infty} y_h z^{h-1}$$

en y faisant parcourir à z les éléments de la suite indéfinie

$$\lambda_1, \quad \lambda_2, \quad \lambda_3, \ldots \lambda_n, \ldots$$

Or, remarquons que, si l'on entend, dans cette série, par y_h respectivement les valeurs bien déterminées des inconnues du système (58) fournies par les formules (59), cette série représentera une fonction entière $\psi(z)$.

En effet, comme nous venons de le voir, elle converge absolument pour $z = \lambda_i$, i étant un nombre entier positif quelconque; par suite, elle le fera évidemment aussi dans toute l'étendue du plan de z, puisque

$$|\lambda_i| \to \infty \quad \text{pour} \quad i \to \infty.$$

Nous en concluons donc que chaque système (58) où la suite des λ_n satisfait à la condition (27) nous fournira une fonction entière

$$\psi(z) = \sum_{h=1}^{\infty} y_h z^{h-1}.$$

66. L'idée essentielle de la méthode par laquelle nous allons résoudre le problème spécial de l'interpolation, énoncé ci-dessus (n° **64**), consiste en ce que nous allons former, d'après une certaine règle, une suite indéfinie de systèmes réduits généralisés

$$(S_1), \quad (S_2), \ \ldots \ (S_n), \ \ldots$$

analogues à (58); à l'aide de ceux-ci nous construirons respectivement une suite indéfinie de fonctions

$$\psi_1(z), \quad \psi_2(z), \ \ldots \ \psi_n(z), \ \ldots,$$

en choisissant les systèmes (S_n) de sorte que les fonctions correspondantes $\psi_n(z)$ satisfassent aux conditions suivantes:

(I) que $\psi_n(z)$ soit une fonction entière, représentée par une série entière de z convergente dans toute l'étendue du plan de z;

(II) que la série

$$\sum_{n=1}^{\infty} \psi_n(z)$$

soit uniformément convergente dans le même domaine;

et que l'on ait:

(III) $\psi_n(a_i) = 0$ pour $i = 1, 2, 3, \ldots n-1$,

(IV) $\psi_n(a_n) = c_n - \psi_1(a_n) - \psi_2(a_n) - \ldots - \psi_{n-1}(a_n)$

$(n = 1, 2, 3, \ldots)$.

Supposons, pour le moment, tout cela fait; alors, d'après (I) et (II), la série

$$\sum_{n=1}^{\infty} \psi_n(z)$$

représenterait évidemment une fonction $F(z)$ holomorphe dans toute l'étendue du plan de z, c'est-à-dire $F(z)$ serait une fonction entière ; de plus, en tenant compte de (III) et (IV), on aurait

$$F(a_n) = \psi_1(a_n) + \psi_2(a_n) + \ldots + \psi_n(a_n) = c_n,$$
$$(n = 1, 2, 3, \ldots);$$

donc, la fonction $F(z)$ serait bien une fonction entière exigée prenant,

$$\text{pour } z = a_1, \quad a_2, \quad a_3, \ldots a_m, \ldots,$$

respectivement les valeurs prescrites

$$c_1, \quad c_2, \quad c_3, \ldots c_m, \ldots$$

67. Quant à la règle d'après laquelle on formera les systèmes réduits généralisés (S_n), nous nous permettrons de faire à ce sujet quelques remarques générales, avant qu'elle soit fixée définitivement.

Remarquons tout d'abord que les parties droites des équations du système donné (56) s'obtiennent de la série entière

$$\sum_{m=1}^{\infty} C_m z^m$$

en y faisant parcourir à z les éléments de la suite donnée

$$(A) = a_1, \ a_2, \ a_3, \ldots a_m, \ldots$$

D'une façon tout analogue, nous formerons les parties droites des équations du système $n^{\text{ième}}$ (S_n), quel que soit n, en prenant une série partielle déduite d'une certaine façon de la série

$$\sum_{m=1}^{\infty} C_m z^m$$

et en y faisant parcourir à z les éléments d'une suite partielle (A_n) déduite d'une certaine façon de la suite donnée (A).

Les rangs des termes de la série

$$\sum_{m=1}^{\infty} C_m z^m$$

constituent la suite naturelle des nombres

$$(E) = 1, 2, 3, 4, \ldots m, \ldots;$$

or, d'après le n° **15**, celle-ci peut être décomposée en une infinité de suites partielles bien déterminées

$$(E) = (E_1) + (E_2) + \ldots + (E_m) + \ldots,$$

(E_m) étant

$$(E_m) = 1.2^{m-1},\ 3.2^{m-1},\ 5.2^{m-1},\ \ldots\ (2h-1)2^{m-1},\ \ldots,$$

quel que soit le nombre entier positif m.

Cela étant, convenons de former toujours la série partielle $\psi_n(z)$ de sorte qu'elle ne contienne que les termes de la série

$$\sum_{m=1}^{\infty} C_m z^m$$

dont les rangs constituent la suite partielle

$$(E_{m_n}) = 1.2^{m_n-1},\ 3.2^{m_n-1},\ \ldots\ (2h-1).2^{m_n-1},\ \ldots,$$

m_n étant un nombre entier positif que nous déterminerons ultérieurement.

On aura donc

$$\psi_n(z) = C_{1.2^{m_n-1}}\, z^{1.2^{m_n-1}} + C_{3.2^{m_n-1}}\, z^{3.2^{m_n-1}} + \ldots +$$

$$+ C_{(2h-1)2^{m_n-1}}\, z^{(2h-1)2^{m_n-1}} + \ldots$$

et il est aisé de voir que, quant à la forme de $\psi_n(z)$, celle-ci est complètement caractérisée par m_n; en tenant compte de cela, désignons dès lors cette série par $\psi_n(z, m_n)$.

Supposons, pour le moment, qu'on ait choisi d'une façon quelconque m_n, ainsi que

$$(A_n) = a_{n1},\ a_{n2},\ \ldots\ a_{nn},\ a_{n(n+1)},\ \ldots,$$

(A_n) étant une suite partielle de (A); alors, quel que soit le nombre entier positif i, nous exigerons que la partie droite de l'équation $i^{\text{ième}}$ du système (S_n) soit

$$\psi_n(a_{ni}, m_n).$$

Quant aux parties gauches des équations de ce système (S_n), égalons-les toutes à zéro, sauf celle de l'équation $n^{\text{ième}}$ que nous désignons par δ_n, en nous réservant de la déterminer ultérieurement.

D'après cela, il est clair que chaque système (S_n) sera complètement donné dès que l'on a fixé d'une façon quelconque ses trois éléments caractéristiques: m_n, (A_n) et δ_n; il en résulte donc que le procédé de construction des systèmes réduits généralisés (S_n) consiste, au fond, en ce que l'on fait, d'une certaine façon, choix de leurs éléments caractéristiques.

68. Comme nous venons de le constater tout à l'heure, les éléments caractéristiques m_n, (A_n) et δ_n déterminent un système (S_n) de la forme suivante:

$$\delta_i = \psi_n(a_{ni}, m_n) \qquad (i = 1, 2, 3, \ldots)$$

où, par définition, $\delta_i = 0$ pour $i \neq n$; explicitement celui-ci s'écrit

$$\delta_i = C_{1.2^{m_n-1}}\, a_{ni}^{1.2^{m_n-1}} + C_{3.2^{m_n-1}}\, a_{ni}^{3.2^{m_n-1}} + \ldots + \left. + C_{(2h-1)2^{m_n-1}}\, a_{ni}^{(2h-1)2^{m_n-1}} + \ldots \right\} \quad (i = 1, 2, \ldots)$$

ou, en tenant compte de ce que

$$(2h-1)2^{m_n-1} = (h-1)\,2^{m_n} + 2^{m_n-1},$$

$$\frac{\delta_i}{a_{ni}^{2^{m_n-1}}} = C_{1.2^{m_n-1}} + C_{3.2^{m_n-1}}\left(a_{ni}^{2^{m_n}}\right)^1 + \ldots + \left. + C_{(2h-1)2^{m_n-1}}\left(a_{ni}^{2^{m_n}}\right)^{h-1} + \ldots \right\} \quad (i = 1, 2, \ldots);$$

enfin, en désignant

$$(60)\qquad \begin{cases} \gamma_i = \dfrac{\delta_i}{a_{ni}^{2^{m_n-1}}} & (i = 1, 2, 3, \ldots), \\ \lambda_i = a_{ni}^{2^{m_n}} & \\ y_h = C_{(2h-1)2^{m_n-1}} & (h = 1, 2, 3, \ldots), \end{cases}$$

notre système se présentera sous la même forme que le système (58):

$$\gamma_i = \sum_{h=1}^{\infty} y_h \lambda_i^{h-1} \qquad (i = 1, 2, 3, \ldots)$$

où $\gamma_i = 0$ pour $i \neq n$, car, par définition, $\delta_i = 0$ pour $i \neq n$.

Donc, quel que soit le nombre entier positif n, chaque système réduit généralisé (S_n) formé à l'aide de ses éléments caractéristiques m_n, (A_n) et δ_n (n° 67) peut, en effet, être mis sous la forme d'un système tel que (58).

Il ne reste, par suite, qu'à déterminer les éléments caractéristiques, de sorte que les systèmes (S_n) puissent être résolus par la méthode de Fourier, et qu'ils nous fournissent une suite indéfinie de fonctions

$$\psi_1(z, m_1),\ \psi_2(z, m_2),\ \ldots\ \psi_n(z, m_n),\ \ldots$$

satisfaisant aux conditions (I), (II), (III) et (IV)' (n° 66), étant

$$\psi_n(z, m_n) = \sum_{h=1}^{\infty} C_{(2h-1)2^{m_n-1}}\ z^{(2h-1).2^{m_n-1}}$$

où l'on entend par $C_{(2h-1)2^{m_n-1}}$ les valeurs respectives des inconnues du système (S_n) obtenues en résolvant ce système par la méthode de Fourier.

69. Examinons maintenant de près les conditions auxquelles il suffit d'assujettir les éléments caractéristiques m_n, (A_n) et δ_n, pour que les fonctions correspondantes $\psi_n(z, m_n)$ satisfassent, en effet, à toutes les conditions énoncées au n° 66.

Comme nous venons de le voir, au n° **68**, chaque système (S_n) s'écrit sous la forme d'un système tel que (58), en y introduisant γ_i, λ_i, y_h à l'aide des formules (60).

D'autre part, d'après le n° **65**, chaque système (58) dont la suite correspondante des λ_m satisfait à la condition (27) détermine une fonction entière de z.

Nous en tirons donc immédiatement la conclusion suivante: pour qu'un système (S_n) nous fournisse une fonction entière $\psi_n(z, m_n)$, c'est-à-dire pour que la condition (I) (n° **66**) soit remplie, il suffit de choisir m_n et (A_n) de sorte que l'on ait

$$\left|\frac{a_{n(m+1)}}{a_{nm}}\right|^{2^{m_n}} \geq p \geq 4 \qquad (m = 1, 2, 3 \ldots). \tag{61}$$

De même, pour satisfaire à la condition (III) (n° **66**):

$$\psi_n(a_i, m_n) = 0 \quad \text{pour} \quad i = 1, 2, 3, \ldots n-1,$$

il suffit évidemment de choisir (A_n) en tenant compte non seulement de (61), mais en imposant encore cette autre condition:

$$a_{ni} = a_i \quad \text{pour} \quad i = 1, 2, 3, \ldots n-1. \tag{62}$$

En effet, étant $\delta_i = 0$ pour $i \neq n$ (n° **67**), il en résulte que

$$\psi_n(a_{ni}, m_n) = 0 \text{ pour } i \neq n;$$

par suite, lorsque $a_{ni} = a_i$ pour $i = 1, 2, 3, \ldots n-1$, on aurait bien

$$\psi_n(a_i, m_n) = 0$$

pour les mêmes valeurs de i.

Ensuite, pour satisfaire à la condition (IV) (n° **66**):

$$\psi_1(a_n, m_1) + \psi_2(a_n, m_2) + \ldots + \psi_n(a_n, m_n) = c_n,$$

il suffit de prendre, comme on s'en assurera aisément,

$$\begin{cases} a_{nn} = a_n \quad \text{et} \\ \delta_n = c_n - \psi_1(a_n, m_1) - \psi_2(a_n, m_2) - \ldots - \psi_{n-1}(a_n, m_{n-1}), \end{cases} \tag{63}$$

en supposant que les fonctions entières

$$\psi_1(z, m_1), \quad \psi_2(z, m_2), \quad \ldots \quad \psi_{n-1}(z, m_{n-1})$$

soient déjà déterminées par les n—1 premiers systèmes:

$$(S_1), \quad (S_2), \quad \ldots \quad (S_{n-1}).$$

Cela étant, δ_n aurait évidemment une valeur finie et bien déterminée.

Enfin, pour que la condition (II) (n° 66) soit remplie, elle-aussi, il suffit, comme nous le montrerons ultérieurement, d'imposer à m_n encore la condition suivante:

$$(64) \qquad |\gamma_n| = \left| \frac{\delta_n}{a_n^{2^{m_n-1}}} \right| < 1 \qquad \text{pour } n \geqq r,$$

r étant un nombre entier positif quelconque choisi de sorte que l'on ait

$$|a_m| > 1 \quad \text{pour} \quad m \geqq r.$$

Donc, il s'agit dès lors:

1° de montrer que l'on peut, en effet, satisfaire aux conditions simultanées (61), (62), (63) et (64) que nous venons d'imposer aux éléments caractéristiques m_n, (A_n) et δ_n;

2° de fixer définitivement ces éléments au moyen de règles précises, permettant de les choisir en tenant compte de toutes les conditions mentionnées ci-dessus, et

3° de démontrer la convergence uniforme de la série

$$\sum_{n=1}^{\infty} \psi_n(z, m_n)$$

dans toute l'étendue du plan de la variable z, les fonctions entières $\psi_n(z, m_n)$ étant construites à l'aide des systèmes (S_n) déterminés par leurs éléments caractéristiques.

70. Occupons-nous d'abord de la première de ces trois questions.

Supposons que l'on ait déjà construit les $n-1$ premières fonctions entières:

$$\psi_1(z, m_1),\ \psi_2(z, m_2),\ \ldots\ \psi_{n-1}(z, m_{n-1})$$

à l'aide des systèmes (S_1), (S_2), . . . (S_{n-1}); alors, d'après (63), δ_n sera une quantité finie est bien déterminée.

Cela étant, il est aisé de voir que l'on peut toujours supposer que soit

$$|\gamma_n| = \left| \frac{\delta_n}{a_n^{2^{m_n-1}}} \right| < 1$$

pour $n \geqq r$, r étant un nombre entier positif quelconque choisi de sorte que $|a_m| > 1$ pour $m \geqq r$.

En effet, étant $n \geqq r$ et, par suite, $|a_n| > 1$, il en résulte immédiatement que pour chaque valeur finie de δ_n on aura $|\gamma_n| < 1$, pourvu que m_n soit respectivement un nombre positif assez grand.

En particulier, lorsque $|a_n| > 1$, et δ_n a une valeur bien déterminée, il y a évidemment un nombre entier positif le plus petit $\varkappa_n \geqq 1$ satisfaisant à l'inégalité

$$\left| \frac{\delta_n}{a_n^{\varkappa_n}} \right| < 1,$$

c'est-à-dire tel que

$$\varkappa_n > \frac{\log|\delta_n|}{\log|a_n|};$$

$\varkappa_n$ une fois calculé, on peut dire que $|\gamma_n| < 1$ pour chaque valeur entière et positive de m_n satisfaisant à la condition

$$2^{m_n-1} \geqq \varkappa_n.$$

Reste enfin à examiner de près (61):

$$\left| \frac{a_{n(m+1)}}{a_{nm}} \right|^{2^{m_n}} \geqq p \geqq 4 \qquad (m = 1, 2, 3, \ldots),$$

a_{nm} y désignant $m^{\text{ième}}$ élément de la suite partielle (A_n) dont les

n premiers éléments doivent être les mêmes que ceux de la suite donnée (A):

$$a_{ni} = a_i \qquad (i = 1, 2, 3, \ldots n).$$

71. A cet effet démontrons tout d'abord la proposition suivante:

Étant donnée une suite indéfinie

$$(A) = a_1, \; a_2, \; a_3, \; \ldots \; a_m, \; \ldots$$

telle que

$$|a_1| < |a_2| < \ldots < |a_m| < \ldots, \quad |a_m| \to \infty \text{ pour } m \to \infty,$$

on peut toujours déterminer un nombre entier positif le plus petit $\mu_n \geqq 1$, de sorte que pour $\mu_n' \geqq \mu_n$ on ait

$$\left| \frac{a_{i+1}}{a_i} \right|^{\mu_n'} \geqq p \geqq 4 \qquad (i = 1, 2, 3, \ldots n),$$

n étant un nombre entier positif quelconque, et $p \geqq 4$ un nombre positif fixe.

En effet, par hypothèse,

$$\left| \frac{a_{i+1}}{a_i} \right| > 1 \qquad (i = 1, 2, 3, \ldots).$$

Or, désignons par ϱ celui des n nombres positifs:

$$\left| \frac{a_2}{a_1} \right|, \quad \left| \frac{a_3}{a_2} \right|, \quad \ldots \quad \left| \frac{a_n}{a_{n-1}} \right|, \quad \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right|$$

qui sera le plus petit, ou, au moins, pas plus grand que chacun des autres; d'après cela, $\varrho > 1$ et, par suite, étant donné $p \geqq 4$, on peut faire correspondre à ces deux nombres fixes: ϱ et p un nombre entier positif μ_n de sorte que soit

$$\varrho^{\mu_n} \geqq p.$$

Pour fixer les idées, entendons par μ_n le nombre entier positif le plus petit pour lequel est remplie la dernière condition.

Cela étant, on aura évidemment à fortiori

$$\varrho^{\mu_n'} > p \qquad (\mu_n' > \mu_n);$$

donc, en particulier,

$$\varrho^{2^{m_n}} \geq p$$

pour chaque valeur entière et positive de m_n satisfaisant à la condition

$$2^{m_n} \geq \mu_n.$$

En tenant compte enfin de ce que nous entendons par ϱ, il est aisé de voir que μ_n, qui vient d'être déterminé tout à l'heure, est bien le plus petit nombre entier positif pour lequel on aura

$$\left|\frac{a_{i+1}}{a_i}\right|^{\mu_n} \geq p \geq 4 \qquad (i = 1, 2, 3, \ldots n).$$

72. Montrons maintenant qu'il est bien possible de déduire de la suite donnée (A) une suite partielle

$$(A_n) = a_{n1},\ a_{n2},\ \ldots\ a_{nm},\ a_{n(m+1)},\ \ldots,$$

et de choisir un nombre entier positif m_n de la façon que l'on ait:

1^0 $\qquad a_{ni} = a_i \quad$ pour $\quad i = 1, 2, 3, \ldots n,$

2^0 $\qquad \left|\frac{a_{n(m+1)}}{a_{nm}}\right|^{2^{m_n}} \geq p \geq 4 \qquad (m = 1, 2, 3, \ldots).$

En effet, en posant

$$a_{ni} = a_i \quad \text{pour} \quad i = 1, 2, 3, \ldots n$$

et en calculant, d'après le numéro précédent, μ_n, on aura

$$\left|\frac{a_{n(m+1)}}{a_{nm}}\right|^{\mu_n} \geq p \geq 4 \quad \text{pour} \quad m = 1, 2, 3, \ldots n-1.$$

Quant à tous les autres éléments de la suite (A_n)

$$a_{n(n+1)}, \quad a_{n(n+2)}, \ \ldots \ a_{nm}, \ \ldots,$$

nous les choisirons de sorte que l'on ait

$$\left| \frac{a_{n(m+1)}}{a_{nm}} \right|^{\mu_n} \geqq p \geqq 4,$$

m étant un nombre entier positif quelconque. A cet effet on n'aura qu'à procéder de la manière suivante. Étant donné un élément quelconque a_{nm} $(m \geqq n)$ de la suite (A_n), prenons pour $a_{n(m+1)}$ un élément quelconque de la suite (A), soit a_s, tel que soit

$$\left| \frac{a_s}{a_{nm}} \right|^{\mu_n} \geqq p \geqq 4.$$

Or, cette dernière condition n'exigeant que ce que $|a_s|$ soit assez grand:

$$|a_s|^{\mu_n} \geqq p\,|a_{nm}|^{\mu_n},$$

elle peut être satisfaite évidemment d'une infinité de manières, puisque $|a_m| \to \infty$ pour $m \to \infty$ et, par suite, à partir d'un certain indice N assez grand tous les éléments de la suite (A) sont tels que chacun d'eux pourra être pris pour $a_{n(m+1)}$.

Donc, en imaginant notre procédé continué indéfiniment, on obtiendra une suite indéfinie

$$(A_n) = a_{n1}, \ a_{n2}, \ \ldots \ a_{nm}, \ a_{n(m+1)}, \ \ldots$$

satisfaisant aux conditions suivantes:

$$a_{ni} = a_i \quad \text{pour} \quad i = 1, 2, 3, \ldots n$$

et

$$\left| \frac{a_{n(m+1)}}{a_{nm}} \right|^{\mu_n} \geqq p \geqq 4 \qquad (m = 1, 2, 3, \ldots),$$

cette suite admettant d'ailleurs, comme il est aisé de le voir, une infinité de déterminations.

Cela étant, il est clair que

$$\left|\frac{a_{n(m+1)}}{a_{nm}}\right|^{2^{m_n}} \geq p \geq 4 \qquad (m = 1, 2, 3, \ldots)$$

pour chaque valeur entière et positive de m_n telle que

$$2^{m_n} \geq \mu \qquad (\text{n° } \mathbf{71}),$$

c'est-à-dire à partir d'une valeur assez grande de m_n.

Remarquons enfin que dans le cas où

$$n \geq r \qquad (\text{n° } \mathbf{70})$$

on aura de plus

$$|\gamma_n| < 1$$

pour chaque valeur entière et positive de m_n satisfaisant aux conditions simultanées et bien compatibles suivantes:

$$\left.\begin{aligned} & 2^{m_n} \geq \mu_n \\ \text{et} \quad & 2^{m_n - 1} \geq \varkappa_n \end{aligned}\right\} \qquad (\text{n° } \mathbf{70}).$$

Nous en tirons donc la conclusion que, si les éléments caractéristiques des systèmes

$$(S_1) \quad (S_2), \ldots (S_{n-1})$$

satisfont aux conditions (61), (62), (63) et (64) (n° **69**), ceux du système (S_n) peuvent être choisis toujours de sorte qu'ils satisfassent, eux-aussi, aux mêmes conditions, (A_n) et m_n admettant même une infinité de déterminations.

73. Pour fixer les idées, convenons de choisir (A_n) et m_n d'après certaines règles simples n'admettant pour eux qu'une seule détermination, quel que soit le nombre entier positif n.

A cet effet prenons pour (A_1) la suite indéfinie

$$(A_1) = a_{11}, \; a_{12}, \; a_{13}, \; \ldots \; a_{1m}, \; \ldots,$$

en déterminant ses éléments de la manière suivante: soit $a_{11} = a_1$ et, d'une façon générale, étant fixé un élément quelconque

$$a_{1m} \ (m \geqq 1), \text{ soit } a_{1(m+1)} = a_s$$

où l'on entend par a_s celui des éléments de la suite donnée (A) qui satisfera à la condition

$$\left| \frac{a_s}{a_{1m}} \right| \geqq p \geqq 4$$

et occupera le rang le plus petit possible.

Cela étant, prenons pour (A_n) la suite indéfinie

$$(A_n) = a_{n1}, \ a_{n2}, \ \ldots \ a_{nn}, \ a_{n(n+1)}, \ \ldots$$

dont les éléments soient:

$$1^0 \quad a_{ni} = a_i \quad \text{pour } i = 1, 2, 3, \ldots n \quad \text{et}$$

$$2^0 \quad a_{ni} = a_{1i} \quad \text{pour } i = n+1, \ n+2, \ \ldots$$

D'après cela, chaque suite (A_n) sera donc complètement déterminée, quel que soit le nombre entier positif n; en particulier, si les éléments de la suite donnée (A) sont tels que

$$\left| \frac{a_{m+1}}{a_m} \right| \geqq p \geqq 4 \qquad (m = 1, 2, 3, \ldots),$$

chaque suite (A_n) construite d'après la règle précédente deviendra évidemment identique à la suite (A).

Comme il est aisé de s'en assurer, les éléments de la suite (A_n), que nous venons de construire tout à l'heure, satisfont bien à la condition

$$\left| \frac{a_{n(m+1)}}{a_{nm}} \right|^{2^{m_n}} \geqq p \geqq 4 \qquad (m = 1, 2, 3, \ldots)$$

pour $2^{m_n} \geqq \mu_n$, quel que soit n; μ_n désigne ici, comme auparavant (n° 71), le nombre entier positif le plus petit pour lequel on a

$$\left| \frac{a_{i+1}}{a_i} \right|^{\mu_n} \geqq p \geqq 4 \qquad (i = 1, 2, 3, \ldots n).$$

Quant à m_n, déterminons-le de la façon suivante:

1° soit $m_1 = 1$,

2° pour $n \geq 2$ soit m_n le plus petit nombre entier positif satisfaisant aux conditions simultanées suivantes:

$$2^{m_n} \geq \mu_n,$$

$$m_n > m_{n-1},$$

$$2^{m_n - 1} > \varkappa_n,$$

la dernière d'elles n'étant d'ailleurs imposée que lorsque $n \geq r$; on y entend par r un nombre entier positif quelconque choisi de sorte que l'on ait

$$r > 1 \quad \text{et} \quad |a_m| > 1 \quad \text{pour} \quad m \geq r;$$

$\varkappa_n$ est, d'après le n° **70**, le plus petit nombre entier positif pour lequel on a

$$\left| \frac{\delta_n}{a_n^{\varkappa_n}} \right| < 1,$$

étant $n \geq r$ et

$$\delta_n = c_n - \psi_1(a_n, m_1) - \psi_2(a_n, m_2) - \ldots - \psi_{n-1}(a_n, m_{n-1}).$$

74. D'après les règles que nous venons de fixer au numéro précédent, il est aisé de déterminer successivement les éléments caractéristiques des systèmes réduits généralisés

$$(S_1), \quad (S_2), \quad (S_3) \ldots (S_n) \ldots$$

d'après l'ordre de grandeur de leurs indices (n); ce procédé nous fournira les éléments caractéristiques satisfaisant à toutes les conditions énoncées au n° **69**.

Tout d'abord on fixera p et r de sorte que l'on ait

$$p \geq 4, \quad r > 1 \quad \text{et} \quad |a_m| > 1 \quad \text{pour} \quad m \geq r;$$

ensuite on formera, d'après le numéro précédent, les suites partielles

$$(A_1), \quad (A_2), \ldots (A_n), \ldots$$

Le système (S_1) aura pour éléments caractéristiques

$$\delta_1 = c_1, \quad (A_1) \text{ et } m_1 = 1.$$

Les éléments de la suite (A_1) satisfaisant à la condition

$$\left|\frac{a_{1(m+1)}}{a_{1m}}\right| \geqq p \geqq 4,$$

le système (S_1) nous fournira, d'après les numéros **69** et **65**, une fonction entière bien déterminée $\psi_1(z, m_1)$ prenant pour $z = a_1$ la valeur $\delta_1 = c_1$.

Cela étant, le système (S_2) aura pour éléments caractéristiques

$$\delta_2 = c_2 - \psi_1(a_2, m_1), \ (A_2) \text{ et } m_2,$$

m_2 étant le plus petit nombre entier positif satisfaisant aux conditions

$$2^{m_2} \geqq \mu_2,$$

$$m_2 > m_1 = 1$$

lorsque $2 < r$, ou bien aux conditions

$$2^{m_2} \geqq \mu_2,$$

$$m_2 > m_1 = 1,$$

$$2^{m_2 - 1} \geqq \varkappa_2$$

lorsque $2 = r$ (n° **73**).

Les éléments caractéristiques du système (S_2) une fois déterminés, ce système nous fournira une fonction entière correspondante $\psi_2(z, m_2)$ prenant pour $z = a_1$, a_2 respectivement les valeurs 0 et δ_2.

D'une façon générale, après avoir déterminé les éléments caractéristiques des $n - 1$ premiers systèmes:

$$(S_1), \ (S_2), \ \ldots \ (S_{n-1})$$

et après avoir construit à l'aide de ces systèmes les fonctions entières correspondantes

$$\psi_1(z, m_1), \ \psi_2(z, m_2), \ \ldots \ \psi_{n-1}(z, m_{n-1}),$$

on calculera

$$\delta_n = c_n - \psi_1(a_n, m_1) - \psi_2(a_n, m_2) - \ldots - \psi_{n-1}(a_n, m_{n-1}).$$

D'autre part, d'après le n° 71, on calculera μ_n; alors, si $n<r$, on n'aura qu'à tenir compte de μ_n et m_{n-1} pour déterminer m_n, tandis que dans le cas contraire où $n \geqq r$ il faut encore calculer préalablement $\varkappa_n$ (n° 73).

Les éléments caractéristiques δ_n, (A_n) et m_n une fois obtenus, le système (S_n) nous fournira une fonction entière bien déterminée $\psi_n(z, m_n)$ prenant pour

$$z = a_1,\ a_2\ \ldots\ a_{n-1},\ a_n$$

respectivement les valeurs

$$0,\ 0,\ \ldots\ 0,\ \delta_n;$$

on s'en assurera aisément, car les conditions (61), (62), (63) et (64) sont, d'après le n° 73, bien remplies.

La fonction $\psi_n(z, m_n)$ s'écrit (n° 68)

$$\psi_n(z, m_n) = \sum_{h=1}^{\infty} x_{nh}\, z^{(2h-1)2^{m_n-1}}, \tag{65}$$

x_{nh} y désignant la valeur de l'inconnue

$$C_{(2h-1)2^{m_n-1}}$$

obtenue en résolvant le système (S_n) par la méthode de Fourier, c'est-à-dire :

$$x_{nh} = (-1)^{h+n}\gamma_n \cdot \frac{\sum_{(\lambda_{nn}, \lambda_{n1})} \frac{1}{\lambda_{n2}\lambda_{n3}\ldots\lambda_{nh}}}{\left(\frac{\lambda_{nn}}{\lambda_{n1}}-1\right)\left(\frac{\lambda_{nn}}{\lambda_{n2}}-1\right)\cdots\left(\frac{\lambda_{nn}}{\lambda_{n(n-1)}}-1\right)\prod_{m=n+1}^{\infty}\left(1-\frac{\lambda_{nn}}{\lambda_{nm}}\right)} \tag{66}$$

où

$$\gamma_n = \frac{\delta_n}{\alpha_{nn}^{2^{m_n-1}}} = \frac{\delta_n}{a_n^{2^{m_n-1}}}$$

et

$$\lambda_{ni} = \alpha_{ni}^{2^{m_n}} \qquad (i = 1, 2, 3, \ldots)\ \ (\text{n}^{\text{os}}\ \mathbf{65}\ \text{et}\ \mathbf{68}).$$

Étant

$$\left|\frac{\lambda_{n(i+1)}}{\lambda_{ni}}\right| = \left|\frac{a_{n(i+1)}}{a_{ni}}\right|^{2^{m_n}} \geqq p \geqq 4 \qquad (i = 1, 2, 3, \ldots),$$

il en résulte, d'après le n° **65**, que x_{nh} aura, en tout cas, une valeur finie et bien déterminée; celle-ci sera différente de zéro pour $\gamma_n \neq 0$, mais nulle pour $\gamma_n = 0$, quel que soit le nombre entier positif h.

Nous en concluons donc que la fonction entière $\psi_n(z, m_n)$ ne s'annule identiquement que si $\gamma_n = 0$, c'est-à-dire si

$$\delta_n = c_n - \psi_1(a_n, m_1) - \psi_2(a_n, m_2) - \ldots - \psi_{n-1}(a_n, m_{n-1}) = 0.$$

75. En imaginant le procédé de formation des fonctions entières, que nous venons de décrire, continué indéfiniment, on obtiendra ainsi une suite indéfinie

$$\psi_1(z, m_1),\ \psi_2(z, m_2), \ldots \psi_n(z, m_n), \ldots$$

Bien que quelques-unes de ces fonctions puissent s'annuler identiquement, il est aisé de voir qu'elles ne le font pas toutes.

En effet, sans restreindre la généralité, on peut supposer, d'après le n° **64**, que $c_j \neq 0$, j étant un certain entier positif.

Pour fixer les idées, supposons que c_j soit le premier élément de la suite indéfinie donnée

$$c_1,\ c_2,\ \ldots\ c_{j-1},\ c_j,\ \ldots\ c_m,\ \ldots$$

qui diffère de zéro:

$$c_1 = c_2 = \ldots = c_{j-1} = 0;\ \ c_j \neq 0;$$

alors les $j-1$ premières fonctions:

$$\psi_1(z, m_1),\ \psi_2(z, m_2),\ \ldots\ \psi_{j-1}(z, m_{j-1})$$

s'annulent identiquement, étant

$$\delta_1 = \delta_2 = \ldots = \delta_{j-1} = 0,$$

mais $\psi_j(z, m_j)$ ne le fait pas, puisque $\delta_j = c_j \neq 0$:

$$\psi_j(a_j, m_j) = \delta_j = c_j \neq 0.$$

Donc, en formant avec les éléments de la suite indéfinie

$$\psi_1(z, m_1),\ \psi_2(z, m_2),\ \ldots\ \psi_n(z, m_n),\ \ldots$$

la série

$$\sum_{n=1}^{\infty} \psi_n(z, m_n),$$

il est clair que tous ses termes ne s'annulent pas identiquement.

76. Reste enfin à démontrer la convergence uniforme de la série

$$\sum_{n=1}^{\infty} \psi_n(z, m_n)$$

dans toute l'étendue du plan de la variable z.

En tenant compte de (65) et en désignant

$$v_{nh}(z) = x_{nh}\, z^{(2h-1)\,2^{m_n-1}}, \tag{67}$$

on peut présenter la série

$$\sum_{n=1}^{\infty} \psi_n(z, m_n) \tag{68}$$

sous la forme de la série double

$$\sum_{n=1}^{\infty} \sum_{h=1}^{\infty} v_{nh}(z) \tag{69}$$

pour toutes les valeurs de la variable z qui rendent absolument convergente cette série double (69).

En effet, les séries (68) et (69) contiennent toutes les deux les mêmes termes $v_{nh}(z)$; d'autre part, la somme bien déterminée d'une série double absolument convergente ne dépend ni de l'ordre ni des différents modes de groupement de ses termes. Nous en tirons donc la conclusion suivante:

La série (68) peut être considérée comme déduite de (69) en y groupant, d'une certaine façon, ses termes $v_{nh}(z)$; elle sera, par suite, absolument convergente pour chaque valeur de la variable $z = z_0$ pour laquelle le sera la série double (69), toutes les deux ayant la même somme (σ):

$$\sum_{n=1}^{\infty} \sum_{h=1}^{\infty} v_{nh}(z_0) = \sigma = \sum_{n=1}^{\infty} \psi_n(z_0, m_n).$$

77. Démontrons d'abord que la série double (69) converge absolument pour $z = a_i$, a_i étant un élément quelconque de la suite donnée

$$(A) = a_1,\ a_2,\ a_3,\ \ldots,\ a_m,\ \ldots$$

Pour cela il suffit de démontrer que l'on peut trouver deux nombres entiers positifs: H et N tels que soit

$$U_{nh} < 1$$

pour $h \geq H$, indépendamment de n, ainsi que
pour $n \geq N$, indépendamment de h,

étant

$U_{nh} = |v_{nh}(a_i)|\,(2nh)^3$ ou, d'après (66) et (67),

$$(70)\qquad U_{nh} = \left| \frac{(2nh)^3 \; a_i^{(2h-1)2^{m_n-1}} \gamma_n \cdot \sum_{(\lambda_{nn},\lambda_{n1})} \frac{1}{\lambda_{n2}\lambda_{n3}\ldots\lambda_{nh}}}{\left(\frac{\lambda_{nn}}{\lambda_{n1}}-1\right)\left(\frac{\lambda_{nn}}{\lambda_{n2}}-1\right)\ldots\left(\frac{\lambda_{nn}}{\lambda_{n(n-1)}}-1\right)\prod_{m=n+1}^{\infty}\left(1-\frac{\lambda_{nn}}{\lambda_{nm}}\right)} \right|.$$

En effet, il en résulterait immédiatement que, pour les valeurs indiquées de n et h, on aurait

$$|v_{nh}(a_i)| < \frac{1}{(h+n)^{2+\varrho}} \qquad (0 < \varrho \leq 1);$$

donc, d'après le critère du numéro **23**, la série double (69) serait bien absolument convergente.

Cela étant, examinons de près U_{nh}.

En tenant compte de ce que

$$\left.\begin{array}{ll} \lambda_{nm} = a_{nm}^{2^{m_n}} & (\text{n}^\circ\ \mathbf{74}) \\ \text{et} \quad \left|\dfrac{\lambda_{n(m+1)}}{\lambda_{nm}}\right| = \left|\dfrac{a_{n(m+1)}}{a_{nm}}\right|^{2^{m_n}} \geq p > 4 & (\text{n}^\circ\ \mathbf{73}) \end{array}\right\} \quad (m = 1, 2, 3, \ldots),$$

on a, d'après le n° **35**,

$$\prod_{m=n+1}^{\infty}\left|\left(1-\frac{\lambda_{nn}}{\lambda_{nm}}\right)\right| \geq \prod_{m=1}^{\infty}\left(1-\frac{1}{p^m}\right) > 1-\frac{1}{p-1} > \frac{2}{3} \quad (n = 1, 2, 3, \ldots);$$

d'autre part,

$$(2h-1)2^{m_n-1} = (h-1)2^{m_n} + 2^{m_n-1};$$

par suite, d'après (70), on peut écrire

$$U_{nh} < Q(n) \,.\, P(n,h) \qquad \text{où} \tag{71}$$

$$Q(n) = \left| \frac{12n^3 \gamma_n \, a_i^{2^{m_n-1}}}{\left(\frac{\lambda_{nn}}{\lambda_{n1}}-1\right)\left(\frac{\lambda_{nn}}{\lambda_{n2}}-1\right)\cdots\left(\frac{\lambda_{nn}}{\lambda_{n(n-1)}}-1\right)} \right| \qquad \text{et} \tag{72}$$

$$P(n,h) = \left| h^3 \left(a_i^{2^{m_n}}\right)^{h-1} \cdot \sum_{(\lambda_{nn},\, \lambda_{n1})} \frac{1}{\lambda_{n2}\,\lambda_{n3}\cdots\lambda_{nh}} \right|. \tag{73}$$

78. Étudions, à leur tour, les expressions $Q(n)$ et $P(n,h)$. Occupons-nous d'abord de la première.

Étant

$$|\gamma_n| < 1 \text{ pour } n \geqq r \quad (\text{n}^\circ \textbf{69}) \quad \text{et}$$

$$\lambda_{nm} = a_m^{2^{m_n}} \text{ pour } m = 1, 2, 3, \ldots n \quad (\text{n}^{\text{os}} \textbf{77 et 73}),$$

on a

$$\left| \left(\frac{\lambda_{nn}}{\lambda_{n1}}-1\right)\left(\frac{\lambda_{nn}}{\lambda_{n2}}-1\right)\cdots\left(\frac{\lambda_{nn}}{\lambda_{n(n-1)}}-1\right) \right| \geqq$$

$$\geqq \left| \frac{a_n}{a_1} \cdot \frac{a_n}{a_2} \cdots \frac{a_n}{a_{n-1}} \right|^{2^{m_n}} \left(1-\frac{1}{p}\right)\left(1-\frac{1}{p^2}\right)\cdots\left(1-\frac{1}{p^{n-1}}\right) >$$

$$> \frac{2}{3} \left| \frac{a_n}{a_1} \cdot \frac{a_n}{a_2} \cdots \frac{a_n}{a_{n-1}} \right|^{2^{m_n}};$$

donc,

$$\left\{ \begin{aligned} Q(n) &< 18n^3 |a_i|^{2^{m_n-1}} \cdot \left| \frac{a_1}{a_n} \cdot \frac{a_2}{a_n} \cdots \frac{a_{n-1}}{a_n} \right|^{2^{m_n}} = \\ &= 18n^3 \left| \frac{a_1}{a_n} \cdot \frac{a_2}{a_n} \cdots \frac{a_{n-1}}{a_n} \right|^{2^{m_n-1}} \cdot \left| a_i \cdot \frac{a_1}{a_n} \cdot \frac{a_2}{a_n} \cdots \frac{a_{n-1}}{a_n} \right|^{2^{m_n-1}} \quad (k \geqq r). \end{aligned} \right. \tag{74}$$

Or, remarquons que

$$2^{m_n-1} \geqq 1 \qquad (n = 1, 2, 3, \ldots),$$

m_n étant, d'après le n° **73**, un nombre entier positif.

D'autre part, on a évidemment

$$\left|\frac{a_j}{a_n}\right| < 1 \quad \text{pour } j = 1, 2, 3, \ldots n-1 \quad (\text{n° } \mathbf{64})$$

et

$$\left|\frac{a_1}{a_n}\right| \to 0 \quad \text{pour } n \to \infty, \text{ car } |a_n| \to \infty \text{ pour } n \to \infty;$$

il en résulte donc que, i étant fixe,

$$\left|a_i \frac{a_1}{a_n} \cdot \frac{a_2}{a_n} \cdots \frac{a_{n-1}}{a_n}\right|^{2^{m_n-1}} \to 0 \quad \text{pour } n \to \infty. \tag{75}$$

De même, il est aisé de voir que

$$18n^3 \cdot \left|\frac{a_1}{a_n} \cdot \frac{a_2}{a_n} \cdots \frac{a_{n-1}}{a_n}\right|^{2^{m_n-1}} \to 0 \quad \text{pour } n \to \infty. \tag{76}$$

En effet,

$$18n^3 \cdot \left|\frac{a_1}{a_n} \cdot \frac{a_2}{a_n} \cdots \frac{a_{n-1}}{a_n}\right|^{2^{m_n-1}} = 18n^3 \left\{\left|\frac{a_1}{a_n} \cdot \frac{a_2}{a_n} \cdots \frac{a_{n-1}}{a_n}\right|^{2^{m_n}}\right\}^{\frac{1}{2}} \leqq$$

$$\leqq 18n^3 \left(\frac{1}{4^{n-1}} \cdot \frac{1}{4^{n-2}} \cdots \frac{1}{4^2} \cdot \frac{1}{4^1}\right)^{\frac{1}{2}} = \frac{18n^3}{2^{\frac{n(n-1)}{2}}} = v_n.$$

Or, la série à termes positifs dont le terme $n^{\text{ième}}$ est v_n converge évidemment, puisque

$$\frac{v_{n+1}}{v_n} = \left(\frac{n+1}{n}\right)^3 \cdot \frac{1}{2^n} \leqq \frac{27}{32} \qquad \text{pour } n \geqq 2;$$

donc, $v_n \to 0$ pour $n \to \infty$ et, par suite, à fortiori

$$18n^3 \cdot \left|\frac{a_1}{a_n} \cdot \frac{a_2}{a_n} \cdots \frac{a_{n-1}}{a_n}\right|^{2^{m_n-1}} \to 0 \quad \text{pour } n \to \infty.$$

En tenant compte de (74), (75) et (76), il est clair que

$$Q(n) \to 0 \quad \text{pour } n \to \infty. \tag{77}$$

Nous en concluons qu'il est bien possible d'indiquer un nombre positif Q tel que

$$Q(n) \leqq Q \quad \text{pour } n = 1, 2, 3, \ldots,$$

car, quelle que soit la valeur entière et positive de n, $Q(n)$ est, d'après (72), toujours fini et bien déterminé, et ses valeurs tendent vers zéro lorsque n tend vers ∞. Donc,

$$U_{nh} < Q \,.\, P(n,h), \text{ quel que soit } n. \tag{78}$$

79. Examinons maintenant $P(n,h)$. Étant

$$\left| \frac{\lambda_{n(m+1)}}{\lambda_{nm}} \right| \geq p \geq 4 \quad (m = 1, 2, 3, \ldots),$$

on peut écrire, d'après (28) et (29) (n° **35**),

$$\left| \sum_{(\lambda_{nm}, \lambda_{n1})} \frac{1}{\lambda_{n2}\lambda_{n3} \ldots \lambda_{nh}} \right| < \frac{15}{8} \left| \frac{1}{\lambda_{n1}\lambda_{n2} \ldots \lambda_{n(h-1)}} \right|,$$

ainsi que

$$\left| \sum \frac{1}{\lambda_{n2}\lambda_{n3} \ldots \lambda_{nh}} \right| < \frac{15}{8} \left| \frac{1}{\lambda_{n1}\lambda_{n2} \ldots \lambda_{n(h-1)}} \right|;$$

aussi, en tenant compte de ce que

$$\lambda_{nm} = a_{nm}^{2^{m_n}} \qquad (m = 1, 2, 3, \ldots),$$

$$a_{nm} = a_m \quad \text{pour } m = 1, 2, 3 \ldots n, \quad \text{et}$$

$$|a_{nm}| \geq |a_m| \quad \text{pour } m \geq n+1,$$

a-t-on, d'après (73),

$$(Pn, h) < \frac{15\,h^3}{8} \cdot \left| \frac{a_i}{a_1} \cdot \frac{a_i}{a_2} \cdots \frac{a_i}{a_{h-1}} \right|^{2^{m_n}},$$

quelle que soit la valeur entière et positive de n. Or, il est clair que

$$\left|\frac{a_i}{a_1}\cdot\frac{a_i}{a_2}\cdots\frac{a_i}{a_{h-1}}\right| \to 0 \text{ pour } h \to \infty,$$

puisque

$$\left|\frac{a_i}{a_j}\right| < 1 \text{ pour } j \geq i+1, \text{ et } \left|\frac{a_i}{a_{h-1}}\right| \to 0 \text{ pour } h \to \infty.$$

Il en résulte donc que l'on peut assigner un nombre entier positif h_0 tel que

$$\left|\frac{a_i}{a_1}\cdot\frac{a_i}{a_2}\cdots\frac{a_i}{a_{h-1}}\right| < 1 \quad \text{pour } h \geq h_0;$$

par suite, étant $m_n \geq 1$ $(n = 1, 2, 3, \ldots)$ (n° **73**), on a

$$P(n,h) < \frac{15\,h^3}{8}\cdot\left|\frac{a_i}{a_1}\cdot\frac{a_i}{a_2}\cdots\frac{a_i}{a_{h-1}}\right|^2$$

pour $h \geq h_0$, quel que soit n.

Cela étant, remarquons que la série

$$\sum_{h=2}^{\infty} u_h$$

dont le terme général est

$$u_h = \frac{15\,h^3}{8}\cdot\left|\frac{a_i}{a_1}\cdot\frac{a_i}{a_2}\cdots\frac{a_i}{a_{h-1}}\right|^2,$$

converge évidemment, puisque

$$\frac{u_{h+1}}{u_h} = \left(\frac{h+1}{h}\right)^3\cdot\left|\frac{a_i}{a_h}\right|^2,$$

$$\left(\frac{h+1}{h}\right)^3 \to 1 \text{ pour } h \to \infty \text{ et}$$

$$\left|\frac{a_i}{a_h}\right| \to 0 \text{ pour } h \to \infty;$$

par suite, $u_h \to 0$ pour $h \to \infty$ et, à fortiori,

(79) $$P(n,h) \to 0 \text{ pour } h \to \infty,$$

quel que soit n.

Nous en concluons, tout comme dans le cas de $Q(n)$ (n° **78**), que l'on peut trouver un nombre positif P tel que

$$P(n,h) \leqq P,$$

quels que soient n et h. Donc,

(80) $$U_{nh} < P \,.\, Q(n),$$

quel que soit h.

80. En tenant compte, d'une part, de (78) et (79) et, d'autre part, de (77) et (80), il en résulte immédiatement que l'on peut assigner, en effet, deux nombres entiers positifs: H et N tels que

$$U_{nh} < 1$$

pour $h \geqq H$, indépendamment de n, ainsi que pour $n \geqq N$, indépendamment de h.

Donc, d'après le n° **77**, la série double (69)

$$\sum_{n=1}^{\infty} \sum_{h=1}^{\infty} v_{nh}(z)$$

est, en effet, absolument convergente pour $z = a_i$, a_i étant un élément quelconque de la suite donnée

$$(A) = a_1,\ a_2,\ a_3,\ \ldots\ a_m,\ \ldots$$

De plus, étant

$$|v_{nh}(z)| \leqq |v_{nh}(a_i)| \quad \text{pour } |z| \leqq |a_i|,$$

la série double (69) converge absolument et uniformément dans tout le cercle ayant pour centre l'origine et pour rayon $|a_i|$.

En remarquant enfin que $|a_i|$ augmente indéfiniment avec i:

$$|a_i| \to \infty \quad \text{pour } i \to \infty,$$

on en conclura donc que notre série double (69) sera absolument et uniformément convergente dans

toute l'étendue du plan de z, ainsi que le sera, par conséquent, d'après les considérations du n° **76**, la série (68)

$$\sum_{n=1}^{\infty} \psi_n(z, m_n).$$

81. Comme nous venons de le voir plus haut, chacun des termes $\psi_n(z, m_n)$ de la série (68) est une fonction entière (n° **74**); d'autre part, la série

$$\sum_{n=1}^{\infty} \psi_n(z, m_n)$$

est uniformément convergente dans toute l'étendue du plan de la variable z (n° **80**).

Nous en concluons donc, d'après Weierstrass, que la fonction

$$F(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \psi_n(z, m_n)$$

est holomorphe dans le même domaine, c'est-à-dire que $F(z)$ est une fonction entière, elle-aussi.

De plus, étant

$$\psi_n(a_i, m_n) = 0 \quad \text{pour } i = 1, 2, 3, \ldots n-1,$$

et

$$\psi_n(a_n, m_n) = c_n - \psi_1(a_n, m_1) - \psi_2(a_n, m_2) - \ldots - \psi_{n-1}(a_n, m_{n-1}),$$

quel que soit n (n° **74**), il en résulte que

$$F(a_m) = \sum_{n=1}^{\infty} \psi_n(a_m, m_n) =$$

$$= \psi_1(a_m, m_1) + \psi_2(a_m, m_2) + \ldots + \psi_m(a_m, m_m) = c_m,$$

m étant un nombre entier positif quelconque.

Donc, la fonction $F(z)$, que nous venons de construire, est une fonction entière prenant pour

$$z = a_1, \ a_2, \ a_3, \ \ldots \ a_m, \ \ldots$$

respectivement les valeurs prescrites

$$c_1, \quad c_2, \quad c_3, \quad \ldots \quad c_m, \quad \ldots$$

Aussi, en la présentant sous la forme d'une série entière

$$F(z) = C_1 z + C_2 z^2 + C_3 z^3 + \ldots + C_m z^m + \ldots,$$

les valeurs des coefficients (C_m) ainsi obtenues constituent-elles évidemment une solution du système (56) d'équations linéaires à une infinité d'inconnues (n° **64**); par suite, il est clair que le problème spécial de l'interpolation, sous l'hypothèse restrictive (53), peut être considéré comme résolu, car, d'après le n° **64**, pour le résoudre, on n'a qu'à construire une solution du système correspondant (56).

82. Quant aux valeurs des coefficients (C_s), elles s'obtiennent aisément, puisque $C_s z^s$ n'est évidemment que la somme de tous les termes des séries entières

$$\psi_1(z, m_1), \quad \psi_2(z, m_2), \quad \ldots \quad \psi_n(z, m_n), \quad \ldots$$

ayant pour facteur z^s.

Elles s'obtiennent d'une façon particulièrement simple lorsque $m_i \neq m_j$ pour $i \neq j$, par exemple, lorsque les éléments caractéristiques (m_n) sont choisis, comme au n° **73**, de sorte que

$$m_1 < m_2 < m_3 < \ldots < m_n < \ldots \tag{81}$$

En effet, d'après le n° **68**, $\psi_n(z, m_n)$ ne contient que les puissances de z dont les exposants sont $(2h-1)2^{m_n-1}$ $(h = 1, 2, 3, \ldots)$. Cela étant, il est aisé de voir que, dans l'hypothèse (81), une puissance quelconque de z, par exemple, z^s, n'est contenue que dans une seule série $\psi_n(z, m_n)$ au plus, car s ne peut être présenté sous la forme

$$s = (2p-1)2^{q-1}$$

que d'une seule manière, p et q étant des nombres entiers positifs.

Aussi, pour que z^s soit contenu effectivement dans l'une de ces séries $\psi_n(z, m_n)$, faut-il qu'il y ait dans la suite indéfinie

$$m_1, \quad m_2, \quad m_3, \quad \ldots \quad m_n, \quad \ldots$$

un élément m_n égal à q: $m_n = q$; cette condition nécessaire sera évidemment aussi suffisante lorsque $\psi_n(z, m_n)$ ne s'annule pas identiquement, c'est-à-dire lorsque $\delta_n \neq 0$.

D'après cela, dans l'hypothèse (81), on n'aura qu'à présenter s sous la forme

$$s = (2p-1)\,2^{q-1},$$

et à prendre

$$C_s = x_{np} \text{ si } q = m_n,$$

tandis que

$$C_s = 0 \text{ si } q \neq m_n \quad (n = 1, 2, 3, \ldots),$$

la valeur de x_{np} étant donnée par (66) (n° **74**) en y remplaçant h par p; on aura donc

$$x_{np} \neq 0 \text{ pour } \delta_n \neq 0, \text{ mais } x_{np} = 0 \text{ pour } \delta_n = 0.$$

83. Nous venons de construire une fonction entière prenant pour $z = a_1, a_2, \ldots a_m, \ldots$ respectivement les valeurs prescrites $c_1, c_2, \ldots c_m, \ldots$; c'est la fonction

$$F(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \psi_n(z, m_n).$$

Chacun des termes $\psi_n(z, m_n)$ de cette série est fourni par un système réduit généralisé (S_n); celui-ci est déterminé par ses éléments caractéristiques δ_n, (A_n) et m_n qui satisfont, d'une part, aux conditions générales (61), (62), (63) et (64) (n° **69**), et, d'autre part, aux conditions particulières imposées au n° **73**.

Comme nous l'avons déjà constaté, au n° **72**, (A_n) et m_n admettent même une infinité de déterminations, chacune d'elles satisfaisant aux conditions générales mentionnées tout à l'heure.

Ce n'était que pour fixer les idées que nous avons fait usage du mode de détermination particulier décrit au n° **73**. Comme celui-ci, tout autre mode de détermination des éléments caractéristiques (A_n) et m_n qui satisfait aux conditions générales (n° **69**) nous conduira évidemment au même résultat: il fournira, d'une façon tout analogue, des fonctions entières telles que $\psi_n(z, m_n)$, et en formant avec elles des séries analogues à

$$\sum_{n=1}^{\infty} \psi_n(z, m_n),$$

chacune de ces séries sera uniformément convergente, elle-aussi, dans toute l'étendue du plan de la variable z.

On s'en rendra aisément compte, en remarquant que la démonstration de la convergence uniforme de la série

$$\sum_{n=1}^{\infty} \psi_n(z, m_n),$$

que nous venons de donner plus haut, n'est fondée que sur l'hypothèse que les conditions générales (n° **69**) soient remplies; quant aux conventions spéciales faites au n° **73** pour préciser (A_n) et m_n, nous n'y en avons tiré aucun parti.

84. Nous allons montrer que l'on peut même construire une suite indéfinie de fonctions entières

$$F_1(z), \quad F_2(z), \quad \ldots, \quad F_m(z), \quad \ldots,$$

chacune d'elles prenant pour $z = a_1, a_2, \ldots, a_m, \ldots$ respectivement les mêmes valeurs prescrites

$$c_1, \quad c_2, \quad \ldots, \quad c_m, \quad \ldots$$

En effet, prenons $F_1(z) = F(z)$ où

$$F(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \psi_n(z, m_n) \quad (\text{n° } \mathbf{81});$$

alors, par l'intermédiaire des fonctions entières

$$\psi_1(z, m_1), \quad \psi_2(z, m_2), \ldots \psi_n(z, m_n), \ldots,$$

à $F_1(z)$ correspondra la suite indéfinie bien déterminée

$$(M_1) = m_1, \; m_2, \; m_3, \; \ldots \; m_n, \; \ldots$$

Cela étant, construisons $F_2(z)$, $F_3(z) \ldots F_m(z), \ldots$ par le même procédé que $F(z)$, en choisissant δ_n et (A_n) toujours d'après les règles précédentes (n° **73**), mais en remplaçant la suite (M_1) successivement par des suites (M_2), (M_3), $\ldots$ (M_m), $\ldots$ dont la loi de formation sera fixée ci-dessous.

A cet effet désignons les éléments de la suite (M_m) par

$$m_{m1}, \quad m_{m2}, \quad m_{m3}, \ldots m_{mm}, \ldots \qquad \text{pour } m = 2, 3, 4, \ldots;$$

d'autre part, supposons que c_j (n° 64) soit le premier élément différent de zéro dans la suite donnée

$$c_1, \quad c_2, \quad c_3, \quad \ldots \quad c_m, \quad \ldots,$$

c'est-à-dire

$$c_1 = c_2 = \ldots = c_{j-1} = 0, \quad c_j \neq 0;$$

alors, quel que soit le nombre entier positif $m \geq 2$, convenons de prendre

$$m_{mi} = m_i \quad \text{pour } i = 1, 2, 3, \ldots j-1,$$

$$m_{mj} = m_{m+j}$$

et choisissons tous les autres éléments de la suite (M_m), à partir du $(j+1)^{\text{ième}}$, d'après la même règle que ceux de la suite (M_1) (n° 73).

Cela posé, il est aisé de voir que chaque suite (M_m) sera bien déterminée; de même, lorsque $h \neq m$, les suites (M_h) et (M_m) différeront certainement, h et m étant d'ailleurs des nombres entiers positifs quelconques.

En effet, pour fixer les idées, soit $h < m$; alors, d'après la convention faite,

$$m_{hj} = \begin{cases} m_j & \text{pour } h = 1, \\ m_{h+j} & \text{pour } h \geq 2 \end{cases}$$

et $$m_{mj} = m_{m+j};$$

or, étant $h < m$ et, d'autre part,

$$m_1 < m_2 < m_3 < \ldots < m_n < \ldots \quad (\text{n° 73}),$$

il en résulte que

$$h + j < m + j,$$

$$m_{h+j} < m_{m+j},$$

et, par suite, $$m_{hj} < m_{mj}.$$

On en déduit aisément, en tenant compte de la loi de formation des suites (M_1), (M_h) et (M_m), que

$$m_{hj} < m_{mj} < m_{mn} \quad \text{pour } n \geq j+1,$$

ainsi que

$$m_{mn} = m_n < m_j \leqq m_{hj} \qquad \text{pour } n = 1, 2, \ldots j-1.$$

Donc, d'après cela, il est clair que la suite (M_m) ne contient pas m_{hj}, qui est l'élément $j^{\text{ième}}$ de la suite (M_h).

D'autre part, étant $m \geqq 2$, convenons de construire $F_m(z)$ par le même procédé que $F(z)$.

Désignons les systèmes réduits généralisés correspondants par

$$(S_{m1}), \quad (S_{m2}), \quad \ldots \quad (S_{mn}), \quad \ldots,$$

et les éléments caractéristiques de (S_{mn}) par

$$(A_{mn}), \quad \delta_{mn}, \quad m_{mn} \qquad (n = 1, 2, 3, \ldots).$$

Choisissons (A_{mn}) et δ_{mn} d'après les mêmes règles que (A_n) et δ_n (n° **73**), tandis que m_{mn} d'après celle que nous venons de fixer tout à l'heure.

Alors, les éléments caractéristiques (A_{mn}), δ_{mn} et m_{mn} satisferont bien aux conditions générales (61—64) (n° **69**), comme on s'en assurera aisément; par suite, le système (S_{mn}) nous fournira une fonction entière $\psi_{mn}(z, m_{mn})$ tout analogue à $\psi_n(z, m_n)$. Elle ne s'annulera identiquement que lorsque $\delta_{mn} = 0$ (n° **74**).

D'après la remarque faite au n° **83**, on peut dire que la série

$$\sum_{n=1}^{\infty} \psi_{mn}(z, m_{mn})$$

convergera uniformément dans toute l'étendue du plan de z, et nous fournira ainsi une fonction entière $F_m(z)$ prenant

$$\text{pour} \quad z = a_1, \; a_2, \; a_3, \; \ldots \; a_m, \; \ldots$$

respectivement les valeurs prescrites $c_1, \; c_2, \; c_3, \ldots c_m, \ldots,$ étant

$$F_m(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \psi_{mn}(z, m_{mn}).$$

Par l'intermédiaire des $\psi_{mn}(z, m_{mn})$, à $F_m(z)$ correspondra la suite (M_m). Étant

$$c_1 = c_2 = \ldots = c_{j-1} = 0, \quad c_j \neq 0,$$

il en résulte que les fonctions

$$\psi_{m1}(z, m_{m1}), \quad \psi_{m2}(z, m_{m2}), \quad \ldots \quad \psi_{m(j-1)}(z, m_{m(j-1)})$$

s'annulent identiquement, tandis que $\psi_{mj}(z, m_{mj})$ ne le fait pas, car

$$\delta_{mj} = c_j \neq 0 \quad (\text{n}^\circ\ \mathbf{75}).$$

En présentant la fonction entière $F_m(z)$ sous la forme d'une série entière, celle-ci contiendra donc effectivement les puissances de z dont les exposants sont

$$(2h-1)2^{m_{mj}-1} \qquad (h = 1, 2, 3, \ldots),$$

mais elle n'en contiendra aucune qui aurait pour exposant

$$(2p-1)2^{q-1}$$

si q n'est pas un élément de la suite (M_m) (n° **82**).

Or, comme nous venons de le voir ci-dessus, étant $h < m$, il n'y a dans la suite (M_m) aucun élément égal à m_{hj}, c'est-à-dire au $j^{\text{ième}}$ élément de la suite (M_h); par suite, en construisant les fonctions entières $F_h(z)$ et $F_m(z)$, correspondant respectivement aux suites (M_h) et (M_m), on obtiendra ainsi deux fonctions bien distinctes, puisque la première d'elles $F_h(z)$ se présentera sous la forme d'une série entière contenant effectivement les puissances suivantes de z:

$$z^{(2h-1)2^{m_{hj}-1}} \qquad (h = 1, 2, 3, \ldots),$$

tandis que la série entière de $F_m(z)$ n'en contiendra aucune.

Ce résultat restant valable, quelles que soient les valeurs entières et positives de h et m, $h < m$, on peut en conclure que la suite indéfinie

$$F_1(z), \quad F_2(z), \quad \ldots \quad F_h(z), \quad \ldots \quad F_m(z), \quad \ldots$$

ne contiendra que des fonctions distinctes, chacune d'elles prenant d'ailleurs

$$\text{pour } z = a_1, \quad a_2, \quad \ldots \quad a_m, \quad \ldots$$

respectivement les mêmes valeurs prescrites $c_1, c_2, \ldots c_m, \ldots$

Ainsi, nous venons de démontrer directement, sans avoir tiré aucun parti de la remarque faite au n° **63**, que le problème spécial de l'interpolation posé au n° **64** admet une infinité de solutions.

III. Sur la résolution du problème généralisé de l'interpolation.

85. Soient données trois suites indéfinies:

1) une suite des (a_n) satisfaisant aux conditions suivantes:

$$(82)\quad \begin{cases} \text{a)}\ a_i \neq a_j \text{ pour } i \neq j, \\ \text{b)}\ |a_1| \leqq |a_2| \leqq \ldots \leqq |a_n| \leqq \ldots, \\ \text{c)}\ |a_n| \to \infty \text{ pour } n \to \infty, \end{cases}$$

2) une suite de nombres entiers positifs ou zéros

$$p_1,\ p_2,\ p_3,\ \ldots\ p_n,\ \ldots,\ \text{et}$$

3) une suite de quantités quelconques

$$c_1^{(0)},\ c_1^{(1)},\ \ldots\ c_1^{(p_1)},\ c_2^{(0)},\ c_2^{(1)},\ \ldots\ c_2^{(p_2)},\ \ldots,\ c_n^{(0)},\ c_n^{(1)},\ \ldots\ c_n^{(p_n)},\ \ldots;$$

cela étant, proposons-nous de construire une fonction entière $F(z)$ telle que l'on ait pour $z = a_n$

$$\left.\begin{aligned} F(a_n) &= c_n^{(0)} \\ F'(a_n) &= c_n^{(1)} \\ &\cdots\cdots\cdots \\ F^{(p_n)}(a_n) &= c_n^{(p_n)} \end{aligned}\right\} \quad n = 1, 2, 3, \ldots),$$

en entendant sous $F^{(i)}(z)$ la dérivée d'ordre $i^{\text{ième}}$ de $F(z)$ et sous $F^{(0)}(z)$ la fonction $F(z)$ elle-même.

Remarquons que, sans restreindre la généralité, on peut toujours supposer qu'il y ait dans la suite donnée des $(c_n^{(i)})$ des éléments différents de zéro.

En effet, lorsque tous ses éléments sont nuls, on n'aura qu'à remplacer la suite donnée par cette autre:

$$c_n^{(0)} = c \neq 0 \quad (n = 1, 2, 3, \ldots);\quad c_n^{(i)} = 0,\ i \geqq 1 \quad \text{et} \quad n \geqq 1,$$

en y entendant sous c une quantité quelconque, mais différente de zéro, et à construire une fonction entière $F_1(z)$ telle que l'on ait

$$\left.\begin{aligned} F_1(a_n) &= c \\ F_1'(a_n) &= 0 \\ &\cdots\cdots\cdots \\ F_1^{(p_n)}(a_n) &= 0 \end{aligned}\right\} (n = 1, 2, 3, \ldots).$$

En la supposant construite et en prenant

$$F(z) = F_1(z) - c,$$

on obtiendra évidemment une fonction entière exigée $F(z)$, jouissant de toutes les propriétés énoncées ci-dessus.

86. Nous allons résoudre ce problème d'interpolation généralisé par une méthode dont l'idée essentielle est la même que celle de la méthode que nous venons d'appliquer dans le cas précédent, en étudiant le problème spécial de l'interpolation sous l'hypothèse restrictive (53).

Nous déterminerons la fonction $F(z)$ exigée sous la forme d'une série de séries

$$F(z) = \sum_{\nu=1}^{\infty} F_\nu(z),$$

$F_\nu(z)$ étant un produit de deux facteurs

$$F_\nu(z) = \varphi_\nu(z) \cdot \psi_\nu(z)$$

dont le premier $\varphi_\nu(z)$ sera, en général, un certain polynôme entier de z, tandis que $\psi_\nu(z)$ sera une série entière fournie par un système d'équations linéaires à une infinité d'inconnues (système réduit généralisé).

A chacun des éléments de la suite indéfinie des $(c_n^{(i)})$ nous ferons correspondre une fonction $F_\nu(z)$:

$$\begin{array}{cccc} c_1^{(0)}, & c_1^{(1)}, & \ldots & c_n^{(i)}, \quad \ldots \\ F_1(z), & F_2(z), & \ldots & F_\nu(z), \quad \ldots \end{array}$$

En numérotant les éléments de cette suite dans l'ordre indiqué, on obtiendra évidemment pour rang ν de $c_n^{(i)}$

$$(83) \quad \begin{cases} \nu = (p_1 + 1) + (p_2 + 1) + \ldots + (p_{n-1} + 1) + (i + 1) = \\ \quad = p_1 + p_2 + \ldots + p_{n-1} + n + i. \end{cases}$$

Quant aux fonctions $F_\nu(z)$, nous les construirons successivement d'après l'ordre de grandeur de leurs indices, en choisissant les polynômes $\varphi_\nu(z)$ et les séries entières $\psi_\nu(z)$ de la manière suivante:

(I) que les fonctions $F_\nu(z)$ soient holomorphes dans toute l'étendue du plan de z;

(II) que la série

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} F_\nu(z)$$

soit uniformément convergente dans le même domaine; et que l'on ait:

(III) $F_\nu^{(i)}(a_n) = c_n^{(i)} - F_1^{(i)}(a_n) - F_2^{(i)}(a_n) - \ldots - F_{\nu-1}^{(i)}(a_n)$,

(IV) $F_\nu^{(m)}(a_n) = 0 \quad (m = 0, 1, 2, \ldots i-1)$,

(V) $F_\nu^{(m)}(a_k) = 0 \quad \begin{pmatrix} k = 1, 2, 3, \ldots n-1 \\ m = 0, 1, 2, \ldots p_k \end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix} n = 1, 2, 3, \ldots, \\ i = 0, 1, 2, \ldots p_n, \\ \nu = p_1 + p_2 + \ldots + p_{n-1} + n + i \end{pmatrix}.$$

Comme on s'en assurerait aisément, en supposant les conditions (I) et (II) remplies, la fonction

$$F(z) = \sum_{\nu=1}^{\infty} F_\nu(z)$$

serait holomorphe dans toute l'étendue du plan de z et l'on aurait

$$F^{(p)}(z) = \sum_{\nu=1}^{\infty} F_\nu^{(p)}(z),$$

p étant un entier positif quelconque; de plus, étant remplies les conditions (III), (IV) et (V), elles-aussi, on aurait

$$F^{(i)}(a_n) = F_1^{(i)}(a_n) + F_2^{(i)}(a_n) + \ldots + F_\nu^{(i)}(a_n) = c_n^{(i)}$$

$$\begin{pmatrix} n = 1, 2, 3, \ldots, \\ i = 1, 2, 3, \ldots p_n, \\ \nu = p_1 + p_2 + \ldots + p_{n-1} + n + i \end{pmatrix}.$$

En effet, soit $\nu_1 > \nu$, ν_1 étant le rang du terme $c_{n_1}^{(i_1)}$:

$$\nu_1 = p_1 + p_2 + \ldots + p_{n_1-1} + n_1 + i_1 \qquad (i_1 \leqq p_{n_1});$$

alors on aura évidemment:

1) ou bien $n_1 > n$ et, par suite, $n \leqq n_1 - 1$,

2) ou bien $n_1 = n$, mais $i_1 > i$ et, par suite, $i \leqq i_1 - 1$.

Or, étant $n \leqq n_1 - 1$, il en résulte que

$$F_{\nu_1}^{(i)}(a_n) = 0 \qquad (i \leqq p_n),$$

car, d'après la condition (V),

$$F_{\nu_1}^{(m)}(a_k) = 0 \quad \begin{pmatrix} k = 1, 2, \ldots n_1 - 1 \\ m = 0, 1, 2, \ldots p_k \end{pmatrix}.$$

De même, étant $n_1 = n$, $i \leqq i_1 - 1$, on aura aussi

$$F_{\nu_1}^{(i)}(a_n) = 0,$$

puisque, d'après la condition (IV),

$$F_{\nu_1}^{(m)}(a_n) = 0 \qquad (m = 0, 1, 2, \ldots i_1 - 1).$$

Nous en concluons donc que

$$F_{\nu_1}^{(i)}(a_n) = 0 \qquad \text{pour } \nu_1 \geqq \nu + 1,$$

étant

$$\nu = p_1 + p_2 + \ldots + p_{n-1} + n + i.$$

Enfin, en remarquant que, d'après la condition (III),

$$F_{\nu}^{(i)}(a_n) = c_n^{(i)} - F_1^{(i)}(a_n) - F_2^{(i)}(a_n) - \ldots - F_{\nu-1}^{(i)}(a_n),$$

on déduirait aisément de ce que nous venons de constater tout à l'heure que

$$F^{(i)}(a_n) = c_n^{(i)}.$$

D'après cela, il est clair que $F(z)$ serait bien une fonction entière telle que nous l'exigeons.

87. Après avoir esquissé ainsi la voie à suivre, pour construire la fonction $F(z)$, il s'agit dès lors de préciser les fonctions $F_\nu(z)$, c'est-à-dire les polynômes $\varphi_\nu(z)$, ainsi que les séries entières $\psi_\nu(z)$.

Nous allons le faire, en supposant d'abord que a_1 soit différent de zéro: $a_1 \neq 0$.

Cette hypothèse faite, soit

$$(84)\quad \varphi_\nu(z)=(-1)^i\frac{a_n^i}{i!}\frac{\left(1-\frac{z}{a_1}\right)^{p_1+1}\left(1-\frac{z}{a_2}\right)^{p_2+1}\cdots\left(1-\frac{z}{a_{n-1}}\right)^{p_{n-1}+1}\left(1-\frac{z}{a_n}\right)^{i}}{\left(1-\frac{a_n}{a_1}\right)^{p_1+1}\left(1-\frac{a_n}{a_2}\right)^{p_2+1}\cdots\left(1-\frac{a_n}{a_{n-1}}\right)^{p_{n-1}+1}},$$

où

$$\nu = p_1 + p_2 + \ldots + p_{n-1} + n + i \qquad (\text{n}^\circ\ 86).$$

Comme il est aisé de voir, c'est évidemment un polynôme de degré $(\nu-1)$ satisfaisant aux conditions suivantes:

$$(85)\qquad \varphi_\nu^{(i)}(a_n) = 1,$$

$$(86)\qquad \varphi_\nu^{(m)}(a_n) = 0 \qquad (m = 0, 1, 2, \ldots i-1) \qquad \text{et}$$

$$(87)\qquad \varphi_\nu^{(m)}(a_k) = 0 \qquad \begin{pmatrix} k = 1, 2, 3, \ldots n-1 \\ m = 0, 1, 2, \ldots p_k \end{pmatrix}.$$

En désignant par $\gamma_{\nu q}$ le coefficient de son terme général, on aura

$$(88)\qquad \varphi_\nu(z) = \sum_{q=0}^{\nu-1} \gamma_{\nu q}\, z^q.$$

Enfin, si l'on entend par M_ν un nombre positif tel que

$$(89)\qquad M_\nu \geq |\gamma_{\nu q}| \qquad (q = 0, 1, 2, \ldots \nu-1),$$

on aura

$$|\gamma_{\nu q}\, z^q| \leqq M_\nu\, |z|^{\nu-1}$$

pour $|z| \geq 1$ et $q = 0, 1, 2, \ldots \nu-1$.

Pour fixer les idées, soit M_ν le nombre le plus petit satisfaisant à la condition (89).

Il est clair que ce nombre M_ν existe certainement, étant fini et bien déterminé, car, d'après (82) et (84), tous les $|\gamma_{\nu q}|$ sont finis et bien déterminés, eux-aussi.

88. Reste à préciser les séries entières $\psi_\nu(z)$. A cet effet faisons d'abord quelques remarques sur la suite indéfinie

$$(A) = a_1,\ a_2,\ a_3,\ \ldots\ a_n,\ \ldots$$

et proposons-nous d'en déduire, d'une certaine façon, des suites partielles, en nombre infini.

D'après (82), la suite donnée (A) renferme, en général, plusieurs éléments $a_n,\ a_{n+1},\ a_{n+2},\ \ldots,\ a_{n+j}$ ayant le même module ϱ:

$$|a_n| = |a_{n+1}| = \ldots = |a_{n+j}| = \varrho\,;$$

donc, en les représentant dans le plan des quantités imaginaires par les points correspondants, ceux-ci sont tous situés sur le même cercle de rayon ϱ ayant pour centre l'origine.

Or, convenons de dire qu'un élément a_i appartient au cercle C, ayant pour centre l'origine, si le point correspondant ayant pour affixe la quantité a_i est situé sur C.

Cela étant, il est clair que chacun des éléments (a_n) de la suite donnée (A) appartient à l'un des cercles C_m et qu'il n'appartient qu'à un seul.

D'autre part, comme nous venons de le constater tout à l'heure, à un même cercle peuvent appartenir, en général, plusieurs éléments de la suite (A); bien que leur nombre varie, en général, avec le rayon du cercle, et qu'il puisse dépasser même tout nombre entier et positif fixe N, il est clair qu'il n'y a qu'un nombre fini d'éléments de (A) qui appartiennent au même cercle C_m, quel que soit m, car

$$|a_n| \to \infty \text{ pour } n \to \infty \quad (\text{n° 85}).$$

Il en résulte immédiatement qu'à la suite indéfinie (A) correspond une suite indéfinie de cercles

$$C_1,\ C_2,\ C_3,\ \ldots\ C_m,\ \ldots$$

dont les rayons respectifs vont constamment en croissant:

$$\varrho_1 < \varrho_2 < \varrho_3 < \ldots < \varrho_m < \ldots$$

De même, il est bien clair que parmi les éléments de la suite (A) appartenant au même cercle C_m, quel que soit m, il y a toujours un dont l'indice est le plus petit; désignons-le par a_{τ_m}; donc, en particulier, $a_{\tau_1} = a_1$.

La suite des cercles (C_m) étant indéfinie, la suite

$$(A_\tau) = a_{\tau_1},\quad a_{\tau_2},\quad a_{\tau_3},\quad \ldots\quad a_{\tau_m},\quad \ldots$$

le sera, elle-aussi; de plus, étant $|a_{\tau_m}| = \varrho_m$, il est clair que

$$|a_{\tau_1}| < |a_{\tau_2}| < |a_{\tau_3}| < \ldots < |a_{\tau_m}| < \ldots$$

et que

$$|a_{\tau_m}| \to \infty \quad \text{pour } m \to \infty.$$

Donc, la suite (A_τ) satisfait aux mêmes conditions que la suite (A), au n° **64**; par suite, tous les résultats obtenus pour cette dernière aux numéros **71**, **72** et **73** s'étendent immédiatement à la suite (A_τ).

Ainsi, en appliquant cette fois la même règle qu'au n° **73**, on formera avec les éléments de (A_τ) des suites partielles bien déterminées, en nombre infini,

$$(A_{\tau 1}),\quad (A_{\tau 2}),\quad \ldots\quad (A_{\tau m}),\quad \ldots$$

tout analogues aux suites

$$(A_1),\quad (A_2),\quad \ldots\ldots\quad (A_m),\quad \ldots\quad (\text{n° } \mathbf{73})$$

et jouissant des mêmes propriétés que ces dernières.

Désignons, en général, par a_{mi} l'élément $i^{\text{ième}}$ de la suite $(A_{\tau m})$; d'après cela,

$$(A_{\tau m}) = a_{m1},\quad a_{m2},\quad a_{m3},\quad \ldots\quad a_{mi},\quad \ldots \qquad (m = 1, 2, 3, \ldots).$$

De même, désignons par μ_m le nombre entier positif le plus petit pour lequel on a

$$\left|\frac{a_{m(i+1)}}{a_{mi}}\right|^{\mu_m} \geqq p \geqq 4 \qquad (i = 1, 2, 3, \ldots); \tag{90}$$

il est clair que ce nombre μ_m se calculera toujours d'après le n° **71**, en y remplaçant la suite (A) par (A_τ).

Quel que soit m, on aura, d'après ce que nous venons de dire,

(91) $$a_{mi} = a_{\tau_i} \qquad (i = 1, 2, 3, \ldots m) \qquad \text{et}$$

(92) $$\left|\frac{a_{m(i+1)}}{a_{mi}}\right|^{m_\nu} \geqq p \geqq 4 \qquad \text{pour } m_\nu \geqq \mu_m$$

$$(i = 1, 2, 3 \ldots).$$

89. Allons maintenant déterminer les fonctions entières $\psi_\nu(z)$, à l'aide de systèmes d'équations linéaires à une infinité d'inconnues (S_ν), en procédant, au fond, d'une façon tout analogue comme nous l'avons fait dans le cas précédent où il s'agissait du problème spécial de l'interpolation.

A chacun des éléments de la suite indéfinie

$$c_1^{(0)},\ c_1^{(1)},\ \ldots\ c_1^{(p_1)},\ c_2^{(0)},\ c_2^{(1)},\ \ldots\ c_2^{(p_2)},\ \ldots\ c_n^{(0)},\ c_n^{(1)},\ \ldots\ c_n^{(p_n)},\ \ldots$$

nous ferons correspondre, dans l'ordre indiqué, une fonction entière $\psi_\nu(z)$.

Remarquons que, si $\nu = p_1 + p_2 + \ldots + p_{n-1} + n + i$, $\psi_\nu(z)$ correspondra évidemment à $c_n^{(i)}$, puisque le rang de $c_n^{(i)}$ est justement

$$\nu = p_1 + p_2 + \ldots + p_{n-1} + n + i \quad (\text{n° } \mathbf{86}).$$

Or, quelle que soit la valeur entière et positive de ν, nous nous proposerons de former $\psi_\nu(z)$ à l'aide d'un système (S_ν) de la forme (58).

Le système (S_ν) sera déterminé par ses trois éléments caractéristiques, tout comme on l'a fait au n° **67**. Quant aux éléments caractéristiques, on aura à fixer les règles d'après lesquelles on les choisira.

A cet effet convenons de procéder de la manière suivante. Déterminons tout d'abord le rang m du cercle C_m auquel appartient a_n, dont l'indice a la même valeur que l'indice inférieur de $c_n^{(i)}$. Il est aisé de voir qu'on peut toujours trouver la valeur de m correspondant à a_n: pour cela on n'aura qu'à tenir compte des modules des n premiers éléments de la suite (A).

Cela étant, prenons pour l'un des éléments caractéristiques du système (S_ν), ayant pour indice (ν) le rang de $c_n^{(i)}$, la suite indéfinie

(93) $$(\bar{A}_{\tau m}) = a_{m1},\ a_{m2},\ \ldots\ a_{m(m-1)},\ a_n,\ a_{m(m+1)},\ a_{m(m+2)},\ \ldots;$$

celle-ci sera donc identique à la suite (A_{τ_m}) (n° **88**) lorsque $a_n = a_{\tau_m}$, c'est-à-dire où $n = \tau_m$, tandis qu'elle ne différera de (A_{τ_m}) que par son $m^{\text{ième}}$ élément lorsque $a_n \neq a_{\tau_m}$.

Bien que l'on ait parfois $a_n \neq a_{\tau_m}$, on aura en tout cas

$$(94) \qquad |a_n| = |a_{\tau_m}| \text{ et, par suite, } |a_{\tau_{m-1}}| < |a_n| < |a_{\tau_{m+1}}|,$$

car a_n et a_{τ_m} appartiennent tous les deux au même cercle C_m.

Nous pouvons en tirer immédiatement la conclusion suivante: μ_m étant, d'après le n° **88**, le plus petit nombre entier positif pour lequel on a

$$\left|\frac{a_{m(i+1)}}{a_{mi}}\right|^{\mu_m} \geq p \geq 4 \qquad (i = 1, 2, 3, \ldots),$$

on aura de même

$$(95) \qquad \left|\frac{a_n}{a_{m(m-1)}}\right|^{\mu_m} \geq p \geq 4 \qquad \text{et} \qquad \left|\frac{a_{m(m+1)}}{a_n}\right|^{\mu_m} \geq p \geq 4.$$

90. Reste à déterminer les deux autres éléments caractéristiques que nous désignons par $\delta_{\nu m}$ et m_ν.

Supposons que l'on ait déjà construit, à l'aide des systèmes

$$(S_1), \quad (S_2), \quad \ldots \quad (S_{\nu-1}),$$

les fonctions

$$F_1(z), \quad F_2(z), \quad \ldots \quad F_{\nu-1}(z),$$

de sorte que chacune d'elles satisfasse aux conditions (I), (III), (IV) et (V) (n° **86**).

Cela étant, soit

$$(96) \qquad \delta_{\nu m} = c_n^{(i)} - F_1^{(i)}(a_n) - F_2^{(i)}(a_n) - \ldots - F_{\nu-1}^{(i)}(a_n);$$

alors, d'après l'hypothèse faite, $\delta_{\nu m}$ sera évidemment une quantité finie et bien déterminée.

Quant à m_ν, remarquons préalablement que, pour n assez grand: $n \geq N$, on aura

$$(97) \qquad |a_n| > 1 \quad \text{et} \quad m \geq 2,$$

N désignant ici un nombre entier positif suffisamment grand et m étant le rang du cercle auquel appartient a_n.

En effet, on s'en assurera aisément en tenant compte de ce que, d'une part, $|a_n| \to \infty$ pour $n \to \infty$ et que, d'autre part, à chacun des cercles n'appartient qu'un nombre fini d'éléments de la suite donnée (A).

Pour fixer les idées, soit N le nombre entier positif le plus petit qui satisfait aux conditions que nous venons d'imposer tout à l'heure.

Cela étant, déterminons m_ν de sorte qu'il satisfasse aux conditions suivantes:

1) lorsque $n < N$, nous entendons par m_ν un nombre entier positif tel que

$$m_\nu \geqq \mu_m \quad (\text{n}^\circ\ 88); \tag{98}$$

2) lorsque $n \geqq N$, soit m_ν un nombre entier positif satisfaisant aux deux conditions suivantes:

$$m_\nu \leq \mu_m \qquad \text{et}$$

$$|\delta_{\nu m} M_\nu a_n^{\nu-1} r_\nu^s| < \left|\frac{a_n}{a_1}\right|^{m_\nu}, \tag{99}$$

étant $$r_\nu = \frac{\nu(\nu+1)}{2}.$$

Quant à ν, M_ν, m, μ_m et $\delta_{\nu m}$, ce sont les quantités bien déterminées introduites précédemment.

En effet, ν est le rang de $c_n^{(i)}$ dans la suite donnée

$$c_1^{(0)},\ c_1^{(1)},\ \ldots\ c_1^{(p_1)},\ \ldots\ c_n^{(0)},\ c_n^{(1)},\ \ldots\ c_n^{(p_n)},\ \ldots:$$

$$\nu = p_1 + p_2 + \ldots + p_{n-1} + n + i \quad (\text{n}^\circ\ 86);$$

M_ν est le plus petit nombre positif tel que

$$M_\nu \geqq |\gamma_{\nu q}| \quad (q = 0, 1, 2, \ldots \nu - 1),$$

$\gamma_{\nu q}$ désignant le coefficient du terme général du polynôme

$$\varphi_\nu(z) = \sum_{q=0}^{\nu-1} \gamma_{\nu q} z^q \quad (\text{n}^\circ\ 87);$$

m est le rang du cercle C_m de rayon $|a_n|$ auquel appartient a_n (n° 88); μ_m est le plus petit nombre entier et positif pour lequel on a

$$\left|\frac{a_{m(i+1)}}{a_{mi}}\right|^{\mu_m} \geqq p \geqq 4 \qquad (i = 1, 2, 3, \ldots),$$

$a_{m1}, a_{m2}, \ldots a_{mi}, \ldots$ étant les éléments de la suite partielle $(A_{\tau m})$ n° 88); enfin, $\delta_{\nu m}$ est déterminé ci-dessus par la formule (96).

Les conditions qui viennent d'être imposées à m_ν n'exigent, au fond, comme il est aisé de s'en apercevoir, que ce que m_ν soit un nombre positif assez grand; par suite, on peut faire assumer à lui-même une infinité de valeurs entières et positives dont chacune sera compatible avec les conditions imposées.

Pour fixer les idées, convenons d'entendre par m_ν le nombre entier positif le plus petit satisfaisant aux conditions mentionnées tout à l'heure.

D'après cela, les trois éléments caractéristiques du système (S_ν): $(\bar{A}_{\tau m})$, $\delta_{\nu m}$ et m_ν viennent d'être déterminés complètement.

91. Entendons par le système (S_ν), ayant pour éléments caractéristiques $(\bar{A}_{\tau m})$, $\delta_{\nu m}$ et m_ν, le système suivant de la forme (58):

$$\delta_{\nu k} = \sum_{h=1}^{\infty} \lambda_{mk}^{h-1} y_h \qquad (k = 1, 2, 3, \ldots) \tag{100}$$

où, par définition, $\delta_{\nu k} = 0$ pour $k \neq m$, tandis que $\delta_{\nu m}$ est donné par (96),

$$\lambda_{mm} = a_n^{m_\nu} \quad \text{et} \quad \lambda_{mk} = a_{mk}^{m_\nu} \quad (k = 1, 2, \ldots m-1, m+1, m+2, \ldots). \tag{101}$$

D'après cela, quel que soit le nombre entier positif k, λ_{mk} n'est que la puissance $m_\nu^{\text{ième}}$ de l'élément $k^{\text{ième}}$ de la suite $(\bar{A}_{\tau m})$.

Par conséquent, en tenant compte:

1° de ce que m_ν vient d'être déterminé de sorte que l'on aura toujours $m_\nu \geqq \mu_m$ (n° 90), et

2° des formules (90), (95) et (92), on en déduit immédiatement que

$$\left|\frac{\lambda_{m(k+1)}}{\lambda_{mk}}\right| \geqq p \geqq 4 \qquad (k = 1, 2, 3, \ldots); \tag{102}$$

par suite, d'après le n° **65**, on obtient une solution du système (S_ν) par la méthode de Fourier, les inconnues du système (y_h) se calculant à l'aide des formules (59) si l'on y remplace les λ_i respectivement par les λ_{mi} (101), k par m et γ_k par $\delta_{\nu m}$.

Donc, en désignant par $x_{\nu 1}, x_{\nu 2}, \ldots x_{\nu h}, \ldots$ les valeurs des inconnues fournies par ces formules, on obtiendra

$$(103)\qquad \left\{ x_{\nu h} = \frac{(-1)^{h+m}\delta_{\nu m} \cdot \sum_{(\lambda_{mm},\lambda_{m1})} \frac{1}{\lambda_{m2}\lambda_{m3}\ldots\lambda_{mh}}}{\left(\frac{\lambda_{mm}}{\lambda_{m1}}-1\right)\left(\frac{\lambda_{mm}}{\lambda_{m2}}-1\right)\ldots\left(\frac{\lambda_{mm}}{\lambda_{m(m-1)}}-1\right)\prod_{j=m+1}^{\infty}\left(1-\frac{\lambda_{mm}}{\lambda_{mj}}\right)} \right.$$
$$(h = 1, 2, 3, \ldots);$$

ces valeurs sont, d'après le n° **65**, des quantités finies et bien déterminées, ne s'annulant que lorsque $\delta_{\nu m} = 0$ et rendant absolument convergentes toutes les séries du système (S_ν).

Les parties droites des équations du système (S_ν) s'obtiennent évidemment de la série

$$y_1 + y_2 z^{m_\nu} + y_3 (z^{m_\nu})^2 + \ldots + y_h (z^{m_\nu})^{h-1} + \ldots$$

en y faisant parcourir à la variable z les éléments de la suite indéfinie $(\bar{A}_{\tau m})$.

Aussi, en y prenant

$$y_h = x_{\nu h} \qquad (h = 1, 2, 3, \ldots),$$

obtient-on une série entière bien déterminée

$$\psi_\nu(z) = x_{\nu 1} + x_{\nu 2} z^{m_\nu} + x_{\nu 3}(z^{m_\nu})^2 + \ldots + x_{\nu h}(z^{m_\nu})^{h-1} + \ldots$$

jouissant des propriétés suivantes:

1° Elle converge absolument pour $z = a_n$, ainsi que pour

$$z = a_{mk} \qquad (k = 1, 2, \ldots m-1, m+1, \ldots),$$

puisque $\psi_\nu(a_n)$ et $\psi_\nu(a_{mk})$ représentent respectivement les parties droites des équations $m^{\text{ième}}$ et $k^{\text{ième}}$ du système (S_ν) où les inconnues (y_h) sont remplacées par les valeurs bien déterminées $(x_{\nu h})$ (103), qui rendent absolument convergente chaque série de ce système.

2° Elle est uniformément convergente dans toute l'étendue du plan de la variable z.

En effet, étant absolument convergente pour $z = a_{mk}$, elle est uniformément convergente dans tout le cercle de rayon $|a_{mk}|$ ayant pour centre l'origine. Or,

$$|a_{mk}| \to \infty \text{ pour } k \to \infty;$$

aussi, quelque grand que soit un nombre positif ϱ, y a-t-il toujours des a_{mk} dont les modules sont supérieurs à ϱ; par suite, la série $\psi_\nu(z)$ sera uniformément convergente dans chaque cercle ayant pour centre l'origine et pour rayon une valeur positive quelconque ϱ; elle représente donc une fonction entière.

3° $\psi_\nu(a_n) = \delta_{\nu m} = c_n^{(i)} - F_1^{(i)}(a_n) - F_2^{(i)}(a_n) - \ldots - F_{\nu-1}^{(i)}(a_n)$,

car le $m^{\text{ième}}$ élément de la suite $(\bar{A}_{\tau m})$ est, d'après la construction, a_n (93).

4° $\psi_\nu(a_{mk}) = 0$ pour $k \neq m$, puisque $\delta_{\nu k} = 0$ pour $k \neq m$ (100).

5° $\psi_\nu(z)$ ne s'annule identiquement que lorsque $\delta_{\nu m} = 0$.

6° Comme fonction entière, $\psi_\nu(z)$ admet les dérivées de tous les ordres, celles-ci étant finies et bien déterminées dans toute l'étendue du plan de z.

92. Après avoir construit $\psi_\nu(z)$, ainsi que $\varphi_\nu(z)$, posons

$$F_\nu(z) = \varphi_\nu(z) . \psi_\nu(z). \tag{104}$$

Il est clair que la fonction obtenue $F_\nu(z)$ est holomorphe dans tout le plan de la variable z, puisque les facteurs $\varphi_\nu(z)$ et $\psi_\nu(z)$ le sont tous les deux; elle satisfait donc à la condition (I) (n 86).

La dérivée $p^{\text{ième}}$ s'écrivant sous la forme

$$F_\nu^{(p)}(z) = \psi_\nu(z)\varphi_\nu^{(p)}(z) + \frac{p}{1!}\psi_\nu'(z)\varphi_\nu^{(p-1)}(z) + \tag{105}$$

$$+ \frac{p(p-1)}{2!}\psi_\nu''(z)\varphi_\nu^{(p-2)}(z) + \ldots + \psi_\nu^{(p)}(z)\varphi_\nu(z),$$

il en résulte immédiatement que, pour $p = i$,

$$F_\nu^{(i)}(a_n) = c_n^{(i)} - F_1^{(i)}(a_n) - F_2^{(i)}(a_n) - \ldots - F_{\nu-1}^{(i)}(a_n),$$

comme l'exige la condition (III) (n° **86**), puisque, d'après le n° **87**, on a

$$0 = \varphi_\nu^{(i-1)}(a_n) = \varphi_\nu^{(i-2)}(a_n) = \ldots = \varphi_\nu'(a_n) = \varphi_\nu(a_n) \quad \text{(voir 86)},$$

$$1 = \varphi_\nu^{(i)}(a_n) \quad \text{(voir 85)},$$

tandis que, d'après le n° **91**,

$$\psi_\nu(a_n) = c_n^{(i)} - F_1^{(i)}(a_n) - F_2^{(i)}(a_n) - \ldots - F_{\nu-1}^{(i)}(a_n).$$

De même, en tenant compte de (86) et (87), on déduira aisément de (105) que

$$F_\nu^{(m)}(a_n) = 0 \qquad (m = 0, 1, 2, \ldots i-1), \qquad \text{et}$$

$$F_\nu^{(m)}(a_k) = 0 \qquad \begin{pmatrix} k = 1, 2, 3, \ldots n-1 \\ m = 0, 1, 2, \ldots p_k \end{pmatrix},$$

c'est-à-dire que la fonction

$$F_\nu(z) = \varphi_\nu(z) \cdot \psi_\nu(z)$$

satisfera aussi aux conditions (IV) et (V) (n° **86**).

Donc, des considérations précédentes nous tirerons la conclusion suivante:

Quel que soit le nombre entier et positif ν, en supposant que l'on ait déjà construit les $(\nu-1)$ premières fonctions:

$$F_1(z), \quad F_2(z), \quad \ldots \quad F_{\nu-1}(z)$$

satisfaisant aux conditions (I), (III), (IV) et (V) (n° **86**), on peut toujours construire la fonction $\nu^{\text{ième}}$ $F_\nu(z)$ satisfaisant aux mêmes conditions.

Donc, il est clair que notre procédé de formation des fonctions $F_\nu(z)$ est tel qu'il nous en fournira même une suite indéfinie

$$F_1(z), \quad F_2(z), \quad \ldots, \quad F_n(z), \quad \ldots,$$

pourvu que la première d'elles $F_1(z)$ soit construite effectivement.

93. Construisons $F_1(z)$.

D'après le n° **86**, $F_1(z)$ doit être une fonction holomorphe dans toute l'étendue du plan de z, prenant pour $z = a_1$ la valeur $c_1^{(0)}$:

$$F_1(a_1) = c_1^{(0)}.$$

Nous l'obtenons en construisant la fonction entière $\psi_1(z)$, à l'aide du système (S_1) dont les éléments caractéristiques sont

$$(\bar{A}_{\tau 1}) = (A_{\tau 1}), \quad \delta_{11} = c_1^{(0)}, \quad m_1 = 1.$$

En effet, la fonction

$$\psi_1(z) = \sum_{h=1}^{\infty} x_{1h} z^{h-1}$$

ainsi construite, où

$$x_{11} = c_1^{(0)} \cdot \frac{1}{\prod_{j=2}^{\infty} \left(1 - \frac{\lambda_{11}}{\lambda_{1j}}\right)}$$

et, d'une façon générale,

$$x_{1h} = (-1)^{h+1} c_1^{(0)} \cdot \frac{\sum \frac{1}{\lambda_{12}\lambda_{13}\ldots\lambda_{1h}}}{\prod_{j=2}^{\infty} \left(1 - \frac{\lambda_{11}}{\lambda_{1j}}\right)} \qquad (h = 2, 3, \ldots),$$

étant

$$\lambda_{1k} = a_{1k}, \quad (k = 1, 2, 3, \ldots) \quad \text{(voir 103)},$$

sera bien, d'après le n° **91**, une fonction entière prenant pour $z = a_1$ la valeur $c_1^{(0)}$:

$$\psi_1(a_1) = c_1^{(0)}.$$

On n'aura donc qu'à poser $F_1(z) = \psi_1(z)$ pour obtenir la fonction exigée.

Ajoutons que $F_1(z)$ ne s'annule identiquement que lorsque $c_1^{(0)} = 0$ (n° **91**).

La fonction $F_1(z)$ une fois formée, on peut construire,

comme nous venons de le voir, $F_2(z)$, ensuite $F_3(z)$, et ainsi de suite, ad infinitum.

Bien que quelques-unes de ces fonctions puissent s'annuler identiquement, il est clair qu'elles ne le feront pas toutes.

En effet, sans restreindre la généralité, on peut supposer, d'après le n° 85, qu'il y ait dans la suite indéfinie

$$c_1^{(0)},\ c_1^{(1)},\ \ldots\ c_1^{(p_1)},\ \ldots\ c_n^{(0)},\ c_n^{(1)},\ \ldots\ c_n^{(p_n)},\ \ldots$$

des éléments différents de zéro.

Or, supposons que le premier élément différent de zéro y soit $c_s^{(r)}$ et que son rang soit t; alors les $t-1$ premières fonctions:

$$F_1(z),\ F_2(z),\ \ldots\ F_{t-1}(z)$$

s'annulent identiquement, tandis que $F_t(z)$ ne le fait pas, puisqu'en désignant par q le rang du cercle auquel appartient a_s, il est évident qu'on aura

$$F_t^{(r)}(a_s) = \delta_{tq} = c_s^{(r)} \neq 0.$$

94. Allons maintenant démontrer que la série

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} F_\nu(z)$$

est uniformément convergente dans toute l'étendue du plan de la variable z.

A cet effet remarquons d'abord qu'en tenant compte de ce que

$$\varphi_\nu(z) = \sum_{q=0}^{\nu-1} \gamma_{\nu q}\, z^q \quad (\text{n° } 87)$$

et

$$\psi_\nu(z) = \sum_{h=1}^{\infty} x_{\nu h} (z^{\nu_m})^{h-1} \quad (\text{n° } 91),$$

on peut présenter la fonction $F_\nu(z)$ sous la forme d'une somme de ν séries entières

$$F_\nu(z) = \varphi_\nu(z) \cdot \psi_\nu(z) =$$

$$= \gamma_{\nu 0} \sum_{h=1}^{\infty} x_{\nu h} (z^{m_\nu})^{h-1} + \gamma_{\nu 1} z \sum_{h=1}^{\infty} x_{\nu h} (z^{m_\nu})^{h-1} + \ldots +$$

$$+ \gamma_{\nu(\nu-1)} z^{\nu-1} \sum_{h=1}^{\infty} x_{\nu h} (z^{m_\nu})^{h-1} =$$

$$= \sum_{q=0}^{\nu-1} \gamma_{\nu q} z^q \sum_{h=1}^{\infty} x_{\nu h} (z^{m_\nu})^{h-1}.$$

Numérotons-les toutes en procédant de la manière suivante: tout d'abord numérotons celles qui correspondent à $F_1(\nu)$, ensuite celles qui correspondent à $F_2(\nu)$, ensuite celles qui correspondent à $F_3(\nu)$; et ainsi de suite.

De plus, en numérotant les séries entières

$$\gamma_{\nu q} z^q \sum_{h=1}^{\infty} x_{\nu h} (z^{m_\nu})^{h-1} \quad (q = 0, 1, 2, \ldots \nu - 1),$$

correspondant à la même fonction $F_\nu(z)$, suivons ici l'ordre croissant du second indice du facteur $\gamma_{\nu q}$, quel que soit ν.

D'après cela, il est clair que la série

$$\gamma_{\nu q} z^q \sum_{h=1}^{\infty} x_{\nu h} (z^{m_\nu})^{h-1}$$

aura pour rang

$$(106) \qquad \begin{cases} k = 1 + 2 + 3 + \ldots + (\nu-2) + (\nu-1) + q + 1 = \\ = \dfrac{(\nu-1)\nu}{2} + q + 1; \end{cases}$$

en y prenant, en particulier, $q = \nu - 1$, on obtiendra le rang r_ν de la dernière série correspondant à $F_\nu(z)$

$$r_\nu = \frac{\nu(\nu+1)}{2};$$

c'est cette quantité dont nous avons fait déjà usage pour déterminer, d'après (99), m_ν.

95. Désignons

$$v_{kh}(z) = \gamma_{rq} z^q \, x_{\nu h}(z^{m_\nu})^{h-1} \tag{107}$$

et examinons de près la série double

$$\sum_{k=1}^{\infty} \sum_{h=1}^{\infty} v_{kh}(z) \tag{108}$$

à l'aide de laquelle nous allons démontrer la convergence uniforme de la série

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} F_\nu(z). \tag{109}$$

Remarquons que, si la série double est absolument convergente pour une valeur quelconque de la variable $z = z_0$, elle est uniformément convergente dans tout le cercle de rayon $|z_0|$ ayant pour centre l'origine, puisque, pour $|z| \leq |z_0|$, on aura évidemment

$$| v_{kh}(z) | \leq | v_{kh}(z_0) | \quad \text{(voir 107)}.$$

De même, il est clair que la série (109) peut être considérée comme déduite de la série double (108) par un certain groupement de ses termes $[v_{kh}(z)]$.

Or, en supposant que la série double soit absolument convergente pour $z = z_0$, elle aurait une somme bien déterminée pour $|z| \leq |z_0|$ ne dépendant ni de l'ordre ni des différents modes de groupement de ses termes.

Il en résulterait donc que, pour chaque valeur de la variable telle que $|z| \leq |z_0|$, les deux séries (108 et (109) auraient certainement les mêmes sommes bien déterminées, étant toutes les deux uniformément convergentes dans le cercle de rayon $|z_0|$.

D'après cela, pour démontrer la convergence uniforme de la série (109), dans toute l'étendue du plan de z, il suffit de démontrer que la série double (108) est absolument convergente pour $z = a_s$, a_s étant un élément quelconque de la suite donnée

$$(A) = a_1, \; a_2, \ldots a_s, \ldots,$$

où

$$|a_s| \to \infty \quad \text{pour } s \to \infty.$$

Démontrons donc qu'en désignant

$$U_{kh} = |v_{kh}(a_s)|\,(2kh)^3, \tag{110}$$

on peut assigner deux nombres entiers et positifs: H et K tels que

$$U_{kh} < 1$$

pour $h \geqq H$, indépendamment de k, ainsi que
pour $k \geqq K$, indépendamment de h.

Il en résulterait immédiatement que, pour ces valeurs de h et k, on aurait

$$|v_{kh}(a_s)| < \frac{1}{(k+h)^{2+\varrho}} \qquad (0 < \varrho \leqq 1)$$

et, par suite, d'après le critère du n° **23**, la série double (108) serait bien absolument convergente pour $z = a_s$.

Remarquons que, sans restreindre la généralité, on peut supposer

$$|a_s| > 1,$$

puisqu'il est clair que, si la série double converge absolument pour une valeur de z dont le module est supérieur à un, elle le fera à fortiori pour toutes les valeurs de z dont les modules sont $\leqq 1$.

96. Étudions préalablement ce que font ν, n et m lorsque k parcourt la suite naturelle des nombres en tendant vers ∞.

Remarquons à cet effet qu'étant

$$k = \frac{(\nu-1)\nu}{2} + q + 1, \; q + 1 \leqq \nu \quad \text{(voir 106)},$$

et, d'après cela,

$$k \leqq \frac{\nu(\nu+1)}{2} = r_\nu,$$

il en résulte qu'à chaque valeur entière et positive de k correspond une valeur entière et positive bien déterminée de ν; celle-ci est évidemment

$$\frac{-1+\sqrt{1+8k}}{2}.$$

lorsque cette dernière quantité a une valeur entière ; dans le cas contraire c'est le plus grand nombre entier positif contenu dans

$$\frac{+1+\sqrt{1+8k}}{2}.$$

Par exemple, soit $k=10$; alors

$$\frac{-1+\sqrt{1+8.10}}{2}=4$$

et, par suite, à $k=10$ correspond $\nu=4$:

$$10=\frac{4.5}{2} \qquad (q=0).$$

D'autre part, soit, par exemple, $k=17$; alors $11<\sqrt{1+8.17}<12$; d'après cela, le plus grand nombre entier positif contenu dans

$$\frac{1+\sqrt{1+8.17}}{2} \text{ est } 6; \text{ donc, } \nu=6 \text{ et } q=1:$$

$$17=\frac{5.6}{2}+1+1.$$

D'après ce que nous venons de constater, il est clair qu'en faisant parcourir à k la suite naturelle des nombres, la valeur correspondante de ν augmentera indéfiniment en tendant avec k vers ∞.

De même, étant, d'après (83),

$$\nu=(p_1+1)+(p_2+1)+\ldots+(p_{n-1}+1)+(i+1) \quad (i\leqq p_n),$$

où les éléments de la suite indéfinie donnée

$$p_1,\ p_2,\ \cdots\ p_n,\ \cdots$$

sont des nombres entiers positifs fixes ou zéros, il en résulte immédiatement qu'à chaque valeur entière et positive de ν correspond une valeur entière et positive bien déterminée de n.

En effet, désignons

$$s_0=0,$$
$$s_j=(p_1+1)+(p_2+1)+\ldots+(p_j+1) \quad (j=1,2,3,\ldots);$$

cela étant, il est clair que

$$s_0 < s_1 < s_2 < \ldots < s_j < \ldots$$

et que

$$s_j \to \infty \text{ pour } j \to \infty.$$

Donc, étant donnée une valeur quelconque $\nu = \nu_0$, il est évident qu'on pourra indiquer deux valeurs successives de l'indice j: j_0 es j_0+1 de sorte que l'on ait

$$s_{j_0} \leqq \nu_0 < s_{j_0+1} \qquad (j_0 \geqq 0);$$

alors, comme on s'en assurera aisément,

$$\text{à } \nu = \nu_0 \text{ correspondra } n = j_0 + 1.$$

De même, il est aisé de voir qu'en faisant parcourir à ν la suite naturelle des nombres, la valeur correspondante de n augmentera indéfiniment en tendant avec ν vers ∞.

Enfin, rappelons-nous de ce que, d'après le n° **88**, à chaque valeur entière et positive de n correspond une valeur entière et positive bien déterminée de m, m étant le rang du cercle C_m auquel appartient a_n.

De plus, il est clair qu'en faisant parcourir à n la suite naturelle des nombres, la valeur correspondante de m augmentera indéfiniment en tendant avec n vers ∞.

Des considérations précédentes nous tirons donc la conclusion suivante:

A chaque valeur entière et positive de k correspondent les valeurs bien déterminées de ν, n et m, augmentant indéfiniment avec k et tendant avec lui vers ∞.

Il en résulte, en particulier, qu'étant donné un nombre entier positif quelconque s, on peut assigner un autre nombre entier positif k_0 tel que

$$n \geqq s \quad \text{et} \quad m \geqq 2 \quad \text{pour} \quad k \geqq k_0,$$

n et m correspondant à k.

97. Examinons maintenant de près U_{kh}. D'après (110), (107) et (103), U_{kh} s'écrit

$$U_{kh} = \left| \frac{(2kh)^3 \gamma_{\nu q}\, a_s^q \cdot a_s^{m_\nu (h-1)}\, \delta_{\nu m} \cdot \sum\limits_{(\lambda_{mm},\, \lambda_{m1})} \frac{1}{\lambda_{m2} \lambda_{m3} \ldots \lambda_{mh}}}{\left(\frac{\lambda_{mm}}{\lambda_{m1}} - 1\right)\left(\frac{\lambda_{mm}}{\lambda_{m2}} - 1\right) \ldots \left(\frac{\lambda_{mm}}{\lambda_{m(m-1)}} - 1\right) \prod\limits_{j=m+1}^{\infty} \left(1 - \frac{\lambda_{mm}}{\lambda_{mj}}\right)} \right|.$$

Donc, en désignant

$$(111) \quad P(k) = \left| \frac{8k^3 \gamma_{\nu q}\, \delta_{\nu m}\, a_s^q}{\left(\frac{\lambda_{mm}}{\lambda_{m1}} - 1\right)\left(\frac{\lambda_{mm}}{\lambda_{m2}} - 1\right) \ldots \left(\frac{\lambda_{mm}}{\lambda_{m(m-1)}} - 1\right) \prod\limits_{j=m+1}^{\infty} \left(-1 \frac{\lambda_{mm}}{\lambda_{mj}}\right)} \right|$$

et

$$(112) \qquad Q(k,h) = \left| h^3\, a_s^{m_\nu (h-1)} \cdot \sum_{(\lambda_{mm},\, \lambda_{m1})} \frac{1}{\lambda_{m2} \lambda_{m3} \ldots \lambda_{mh}} \right|,$$

on aura

$$(113) \qquad U_{kh} = P(k) \cdot Q(k,h).$$

Or, rappelons-nous que

$$\left.\begin{aligned} &\lambda_{mi} = a_{mi}^{m_\nu} = a_{\tau_i}^{m_\nu} \quad (i = 1, 2, 3, \ldots m-1), \\ &\lambda_{m1} = a_{m1}^{m_\nu} = a_{\tau_1}^{m_\nu} = a_1^{m_\nu}, \\ &\lambda_{mm} = a_n^{m_\nu}, \\ &\text{et} \quad \left| \frac{\lambda_{m(i+1)}}{\lambda_{mi}} \right| \geqq p \geqq 4 \end{aligned}\right\} \text{(n}^{\text{os}}\text{ 91 et 88)};$$

de même,

$$k \leqq r_\nu = \frac{\nu(\nu+1)}{2} \quad (\text{n}^\circ\ 94),$$

$$|\gamma_{\nu q}| \leqq M_\nu,\ q \leqq \nu - 1 \quad (\text{n}^\circ\ 87),$$

$$|a_s| > 1 \quad (\text{n}^\circ\ 95)$$

et

$$\prod_{i=1}^{\infty} \left(1 - \frac{1}{p^i}\right) > \frac{2}{3} \quad \text{pour } p \geqq 4 \quad (\text{n}^\circ\ 35).$$

Cela étant, on aura évidemment

$$\left| \prod_{j=m+1}^{\infty} \left(1-\frac{\lambda_{mm}}{\lambda_{mj}}\right) \right| \geqq \prod_{i=1}^{\infty} \left(1-\frac{1}{4^i}\right) > \frac{2}{3},$$

ainsi que

$$\left| \left(\frac{\lambda_{mm}}{\lambda_{m1}}-1\right)\left(\frac{\lambda_{mm}}{\lambda_{m2}}-1\right)\cdots\left(\frac{\lambda_{mm}}{\lambda_{m(m-1)}}-1\right) \right| >$$

$$> \left| \frac{\lambda_{mm}}{\lambda_{m1}} \cdot \frac{\lambda_{mm}}{\lambda_{m2}} \cdots \frac{\lambda_{mm}}{\lambda_{m(m-1)}} \right| \prod_{i=1}^{\infty} \left(1-\frac{1}{4^i}\right) >$$

$$> \frac{2}{3} \left| \frac{\lambda_{mm}}{\lambda_{m1}} \right| \cdot p^{m-2} \cdot p^{m-3} \cdots p^2 \cdot p^1 = \frac{2}{3} \left| \frac{a_n}{a_1} \right|^{m_\nu} p^{\frac{(m-1)(m-2)}{2}};$$

par suite, d'après (111),

$$P(k) < \left| r_\nu^3 M_\nu \delta_{\nu m} a_s^{\nu-1} \left(\frac{a_1}{a_n}\right)^{m_\nu} 18 \left(\frac{1}{p}\right)^{\frac{(m-1)(m-2)}{2}} \right|. \tag{114}$$

La partie droite de la dernière inégalité ayant une valeur finie et bien déterminée, il en résulte que la valeur de $P(k)$ sera finie, elle-aussi, quel que soit le nombre entier positif k.

Examinons maintenant $P(k)$, pour $k \geqq k_0$, k_0 étant le nombre entier positif que nous venons de déterminer au numéro précédent, de sorte que n et m correspondant à k satisfassent aux conditions

$$n \geqq s \quad \text{et} \quad m \geqq 2 \quad \text{pour} \quad k \geqq k_0.$$

Pour toutes ces valeurs de k on aura

$$|a_s|^{\nu-1} \leqq |a_n|^{\nu-1},$$

ainsi que

$$|a_n| > |a_1|,$$

car a_n appartient au cercle ayant pour rang $m \geqq 2$; par suite, d'après (114) et (99)

$$P(k) < 18 \left(\frac{1}{p}\right)^{\frac{(m-1)(m-2)}{2}} \qquad \text{pour} \quad k \geqq k_0,$$

et il en résulte immédiatement que $P(k)$ tend vers zéro lorsque k tend vers ∞.

En effet, k tendant vers ∞, m le fera, lui-aussi (n° 96); or

$$\lim_{m\to\infty} 18\left(\frac{1}{p}\right)^{\frac{(m-1)(m-2)}{2}} = 0.$$

Donc, il est clair que

$$P(k) \to 0 \quad \text{pour} \quad k \to \infty. \tag{115}$$

Ainsi, nous venons de voir qu'en faisant parcourir à k la suite naturelle des nombres, $P(k)$ parcourt respectivement les valeurs (111), restant toujours finies et tendant vers zéro lorsque k tend vers ∞.

Nous en concluons que l'on pourra indiquer un nombre positif P tel que $P(k) \leqq P$, et, par suite, d'après (113),

$$U_{kh} \leqq P \,.\, Q(k,h), \tag{116}$$

quelle que soit la valeur entière et positive de k.

98. Quant à $Q(k,h)$, proposons-nous de l'étudier d'une façon tout analogue.

En tenant compte de (102), (28) et (29), on peut écrire

$$\left| \sum_{(\lambda_{mm},\lambda_{m1})} \frac{1}{\lambda_{m2}\,\lambda_{m3}\ldots\lambda_{mh}} \right| < \frac{15}{8} \left| \frac{1}{\lambda_{m1}\,\lambda_{m2}\ldots\lambda_{m(h-1)}} \right|,$$

ainsi que

$$\left| \Sigma \frac{1}{\lambda_{m2}\,\lambda_{m3}\ldots\lambda_{mh}} \right| < \frac{15}{8} \left| \frac{1}{\lambda_{m1}\,\lambda_{m2}\ldots\lambda_{m(h-1)}} \right|.$$

Dautre part, étant, d'après (101) et (91),

$$\lambda_{mi} = a_{mi}^{m_\nu} = a_{\tau_i}^{m_\nu} \qquad (i = 1, 2, 3, \ldots m-1),$$

$$|\,\lambda_{mm}\,| = |\,a_n\,|^{m_\nu} = |\,a_{\tau_m}\,|^{m_\nu},$$

$$|\,\lambda_{mi}\,| = |\,a_{mi}\,|^{m_\nu} \geqq |\,a_{\tau_i}\,|^{m_\nu} \quad \text{pour } i \geqq m+1,$$

on aura

$$\frac{15}{8}\left|\frac{1}{\lambda_{m1}\lambda_{m2}\ldots\lambda_{m(h-1)}}\right| \leq \frac{15}{8}\left|\frac{1}{a_{\tau_1}a_{\tau_2}\ldots a_{\tau_{h-1}}}\right|^{m_\nu}$$

et, par suite, d'après (112),

$$Q(k,h) < \frac{15}{8}h^3\left|\frac{a_s^{h-1}}{a_{\tau_1}a_{\tau_2}\ldots a_{\tau_{h-1}}}\right|^{m_\nu}. \tag{117}$$

La partie droite de cette inégalité (117) ayant une valeur finie et bien déterminée, nous en concluons que celle de $Q(k,h)$ reste finie, elle-aussi, quels que soient les nombres entiers positifs k et h.

De même, il est aisé de voir que la série

$$\sum_{h=2}^{\infty} u_h$$

dont le terme général est

$$u_h = \left|\frac{a_s^{h-1}}{a_{\tau_1}a_{\tau_2}\ldots a_{\tau_{h-1}}}\right|$$

convergera, car

$$\left|\frac{u_{h+1}}{u_h}\right| = \left|\frac{a_s}{a_{\tau_h}}\right| \to 0 \quad \text{lorsque } h \to \infty;$$

pour s'en assurer, il suffit de rappeler que, d'après le n° 88,

$$|a_{\tau_h}| \to \infty \text{ lorsque } h \to \infty.$$

Il en résulte donc que $u_h \to 0$ pour $h \to \infty$, et nous en concluons, en particulier, que l'on pourra indiquer un nombre entier positif h_0 tel que

$$u_h < 1 \text{ pour } h \geq h_0.$$

Par suite, d'après (117),

$$Q(k,h) < \frac{15}{8}h^3\left|\frac{a_s^{h-1}}{a_{\tau_1}a_{\tau_2}\ldots a_{\tau_{h-1}}}\right| \quad \text{pour } h \geq h_0, \tag{118}$$

quel que soit le nombre entier positif k, ainsi que la valeur correspondante de ν, car on entend par m_ν toujours un nombre entier positif (n° 90): $m_\nu \geqq 1$.

Or, en considérant la partie droite de l'inégalité (118) comme terme général de la série

$$\sum_{h=2}^{\infty} w_h,$$

on constatera, tout comme plus haut, que cette série convergera,

$$\left| \frac{w_{h+1}}{w_h} \right| \text{ tendant vers zéro lorsque } h \to \infty;$$

par suite, $w_h \to 0$ pour $h \to \infty$, et, à fortiori,

$$Q(k,h) \to 0 \quad \text{pour } h \to \infty, \tag{119}$$

quel que soit k.

Nous en concluons donc, tout comme au numéro précédent, que l'on pourra bien assigner un nombre positif Q tel que $Q(k,h) \leqq Q$, et, par suite, d'après (113),

$$U_{kh} \leqq P(k) \cdot Q, \tag{120}$$

quels que soient les nombres entiers positifs k et h.

Enfin, en tenant compte, d'une part, de (115) et (120) et, d'autre part, de (116) et (119), il en résulte immédiatement que l'on peut assigner, en effet, deux nombres entiers positifs: K et H tels que

$$U_{kh} < 1$$

pour $k \geqq K$, indépendamment de h, ainsi que
pour $h \geqq H$, indépendamment de k.

D'après le n° 95, on peut donc dire que la série double

$$\sum_{k=1}^{\infty} \sum_{h=1}^{\infty} v_{kh}(a_s)$$

est absolument convergente; or, a_s y désignant un élément de la suite donnée (A) tel que $|a_s| > 1$, choisi d'ailleurs tout

arbitrairement, on en déduit, d'après le même numéro, la convergence absolue et uniforme de la série double

$$\sum_{k=1}^{\infty} \sum_{h=1}^{\infty} v_{kh}(z),$$

ainsi que de la série

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} F_\nu(z),$$

dans toute l'étendue du plan de la variable z.

En tenant compte enfin de ce que chacun des termes $F_\nu(z)$ de la dernière série est construit de sorte qu'il représente une fonction holomorphe dans le même domaine, on en conclut, d'après Weierstrass, que la fonction

$$F(z) = \sum_{\nu=1}^{\infty} F_\nu(z)$$

est holomorphe, elle-aussi, dans toute l'étendue du plan de z, la dérivée $p^{\text{ième}}$ étant

$$F^{(p)}(z) = \sum_{\nu=1}^{\infty} F_\nu^{(p)}(z) \qquad (p = 1, 2, 3, \ldots).$$

C'est donc évidemment une fonction entière; de plus, d'après le n° **86**, c'est une fonction entière telle que

$$\left.\begin{aligned} F(a_n) &= c_n^{(0)} \\ F'(a_n) &= c_n^{(1)} \\ &\cdots\cdots\cdots \\ F^{(p_n)}(a_n) &= c_n^{(p_n)} \end{aligned}\right\} \quad (n = 1, 2, 3, \ldots),$$

puisque les fonctions $F_\nu(z)$ satisfont aux conditions (I), (III), (IV) et (V) (n° **86**), comme nous l'avons vu au n° **92**.

Donc, le problème généralisé de l'interpolation (n° **85**) vient d'être résolu dans le cas où $a_1 \neq 0$ (n° **87**).

99. Reste à montrer que ce problème peut être résolu aussi dans le cas où $a_1 = 0$.

Comme il est aisé de s'en assurer, on n'aura, au fond, qu'à répéter à cet effet les raisonnements précédents, et à modifier légèrement le procédé de formation des fonctions

$$F_1(z), \quad F_2(z), \quad \ldots \quad F_\nu(z), \quad \ldots$$

Les modifications à introduire sont les suivantes:

1° Prenons, en particulier,

$$\varphi_1(z) = 1, \quad \varphi_2(z) = \frac{z}{1!}, \quad \varphi_3(z) = \frac{z^2}{2!}, \quad \ldots \quad \varphi_{p_1+1}(z) = \frac{z^{p_1}}{p_1!},$$

tandis qu'en général, lorsque $\nu \geqq p_1+2$, soit

$$\varphi_\nu(z) = (-1)^i \frac{a_n^i}{i!} \cdot \frac{z^{p_1+1}\left(1-\frac{z}{a_2}\right)^{p_2+1} \ldots \left(1-\frac{z}{a_{n-1}}\right)^{p_{n-1}+1}\left(1-\frac{z}{a_n}\right)^i}{a_n^{p_1+1}\left(1-\frac{a_n}{a_2}\right)^{p_2+1} \ldots \left(1-\frac{a_n}{a_{n-1}}\right)^{p_{n-1}+1}}.$$

2° Entendons par (A_τ) la même suite indéfinie que plus haut, au n° **88**, avec cette seule différence que cette fois soit $a_{\tau_1} = a_2$, tandis que dans le cas précédent on avait $a_{\tau_1} = a_1$.

3° Lorsque $\nu \geqq p_1+2$, construisons les séries entières $\psi_\nu(z)$ d'après les mêmes règles que dans le cas précédent; quant aux fonctions

$$\psi_1(z), \quad \psi_2(z), \quad \ldots \quad \psi_{p_1+1}(z),$$

remplaçons-les respectivement par les constantes

$$c_1^{(0)}, \quad c_1^{(1)}, \quad \ldots \quad c_1^{(p_1)}.$$

Cela posé, prenons, comme auparavant,

$$F_\nu(z) = \varphi_\nu(z).\psi_\nu(z);$$

on obtiendra ainsi une suite indéfinie de fonctions $F_\nu(z)$ dont chacune satisfera aux mêmes conditions essentielles que plus haut (n° **86**); en particulier, on aura

$$F_1(z) = c_1^{(0)}, \quad F_2(z) = \frac{c_1^{(1)}}{1!} z, \quad F_3(z) = \frac{c_1^{(2)}}{2!} z^2, \quad \ldots \quad F_{p_1+1}(z) = \frac{c_1^{(p_1)}}{p_1!} z^{p_1}.$$

En répétant les raisonnements précédents, on démontrera, cette fois aussi, la convergence uniforme de la série

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} F_\nu(z)$$

dans toute l'étendue du plan de la variable z; enfin, on en tirera la conclusion que la fonction

$$F(z) = \sum_{\nu=1}^{\infty} F_\nu(z)$$

sera bien une fonction entière fournissant une solution du problème généralisé de l'interpolation dans le cas où $a_1 = 0$.

Donc, d'après le n° **63**, on déduit des considérations précédentes immédiatement le théorème général suivant:

Étant données trois suites indéfinies:

1° celle des (a_n) satisfaisant aux conditions suivantes:

$$a_i \neq a_j \text{ pour } i \neq j,$$
$$|a_1| \leqq |a_2| \leqq \ldots \leqq |a_n| \leqq \ldots, \text{ et}$$
$$|a_n| \to \infty \text{ pour } n \to \infty;$$

2° celle des nombres entiers positifs quelconques ou zéros

$$p_1, p_2, \ldots p_n, \ldots;$$

3° et celle des quantités quelconques

$$c_1^{(0)}, c_1^{(1)}, \ldots c_1^{(p_1)}, \ldots c_n^{(0)}, c_n^{(1)}, \ldots c_n^{(p_n)}, \ldots;$$

on peut construire une infinité de fonctions entières $F(z)$ telles que pour $z = a_n$ l'on ait

$$\left.\begin{aligned} F_1(a_n) &= c_n^{(0)} \\ F'(a_n) &= c_n^{(1)} \\ &\cdots\cdots \\ F^{(p_n)}(a_n) &= c_n^{(p_n)} \end{aligned}\right\} (n = 1, 2, 3, \ldots),$$

$F^{(p_n)}(z)$ étant la dérivée d'ordre p_n de la fonction $F(z)$ et

$$F^{(0)}(z) = F(z).$$

100. Corollaire.

Étant données les mêmes trois suites indéfinies que dans l'énoncé précédent, on peut construire une infinité de fonctions $\Phi(z-z_0)$ représentées par des séries de Laurent et telles que pour $z=a_n$ l'on ait

$$(121) \qquad \left\{ \begin{array}{l} \Phi(a_n-z_0) = c_n^{(0)} \\ \Phi'(a_n-z_0) = c_n^{(1)} \\ \cdots\cdots\cdots \\ \Phi^{(p_n)}(a_n-z_0) = c_n^{(p_n)} \end{array} \right\} (n = 1, 2, 3, \ldots),$$

z_0 étant un nombre fixe quelconque différent des éléments de la suite

$$a_1, a_2, a_3, \ldots a_n, \ldots$$

En effet, examinons d'abord le cas particulier où

$$z_0 = 0, \quad \text{étant } a_1 \neq 0.$$

Nous aurons à montrer que l'on peut construire une infinité de fonctions

$$\Phi(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} C_n z^n$$

de sorte que chacune d'elles satisfasse aux conditions (121), en y prenant $z_0 = 0$.

A cet effet présentons $\Phi(z)$ sous la forme

$$\Phi(z) = P(z) + G\left(\frac{1}{z}\right),$$

$P(z)$ étant une fonction entière de z et

$G\left(\frac{1}{z}\right)$ une fonction entière de $\frac{1}{z}$:

$$P(z) = \bar{C}_0 + C_1 z + C_2 z^2 + \ldots + C_n z^n + \ldots,$$

$$G\left(\frac{1}{z}\right) = \bar{\bar{C}}_0 + C_{-1} \cdot \frac{1}{z} + C_{-2}\left(\frac{1}{z}\right)^2 + \ldots + C_{-n}\left(\frac{1}{z}\right)^n + \ldots$$

Tout revient à déterminer convenablement les coefficients (C_i) de ces deux séries entières.

Or, prenons pour

$G\left(\frac{1}{z}\right)$ une fonction entière bien déterminée de $\frac{1}{z}$;

par exemple,

$$G\left(\frac{1}{z}\right) = e^{\frac{1}{z}} = 1 + \frac{1}{1!}\left(\frac{1}{z}\right) + \frac{1}{2!}\left(\frac{1}{z}\right)^2 + \ldots + \frac{1}{n!}\left(\frac{1}{z}\right)^n + \ldots$$

Cela posé, il ne nous reste qu'à déterminer $P(z)$ de sorte que l'on ait

$$(122) \qquad \left\{ \begin{array}{l} P(a_n) = c_n^{(0)} - G\left(\frac{1}{a_n}\right) \\ P'(a_n) = c_n^{(1)} - G'\left(\frac{1}{a_n}\right) \\ \cdots\cdots\cdots \\ P^{(p_n)}(a_n) = c^{(p_n)} - G^{(p_n)}\left(\frac{1}{a_n}\right) \end{array} \right\} \quad (n = 1, 2, 3, \ldots).$$

Or, d'après le théorème général que nous venons de démontrer, on peut construire une infinité de fonctions entières $P(z)$ satisfaisant aux conditions (122).

Donc, en entendant par $G\left(\frac{1}{z}\right)$ une fonction entière quelconque de $\frac{1}{z}$ et par $P(z)$ une infinité de fonctions entières de z déterminées conformément aux conditions (122), on obtiendra, en effet, une infinité de fonctions

$$\Phi(z) = P(z) + G\left(\frac{1}{z}\right)$$

satisfaisant aux conditions imposées (121).

Dans le cas général, où $z_0 \neq 0$, nous allons procéder d'une façon tout analogue.

Prenons

$$\Phi(z-z_0) = P(z-z_0) + G\left(\frac{1}{z-z_0}\right)$$

et entendons par $G\left(\frac{1}{z-z_0}\right)$ une fonction entière bien déterminée de $\frac{1}{z-z_0}$, par exemple,

$$G\left(\frac{1}{z-z_0}\right) = e^{\frac{1}{z-z_0}} = 1 + \frac{1}{1!}\left(\frac{1}{z-z_0}\right) + \ldots + \frac{1}{n!}\left(\frac{1}{z-z_0}\right)^n + \ldots$$

Cela posé, nous aurons à déterminer la fonction entière $P(z-z_0)$ de sorte que pour $z = a_n$ l'on ait

$$\left.\begin{aligned} P(a_n - z_0) &= c_n^{(0)} - G\left(\frac{1}{a_n - z_0}\right) \\ P'(a_n - z_0) &= c_n^{(1)} - G'\left(\frac{1}{a_n - z_0}\right) \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots \\ P^{(p_n)}(a_n - z_0) &= c_n^{(p_n)} - G^{(p_n)}\left(\frac{1}{a_n - z_0}\right) \end{aligned}\right\} \quad (n = 1, 2, 3, \ldots).$$

En posant $z - z_0 = x$, ainsi que

$$a_n - z_0 = a_n' \qquad (n = 1, 2, 3, \ldots),$$

tout revient à déterminer une fonction entière de x, $P(x)$, de sorte que pour $x = a_n'$ l'on ait

$$(123) \qquad \left.\begin{aligned} P(a_n') &= c_n^{(0)} - G\left(\frac{1}{a_n'}\right) \\ P'(a_n') &= c_n^{(1)} - G'\left(\frac{1}{a_n'}\right) \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots \\ P^{(p_n)}(a_n') &= c_n^{(p_n)} - G^{(p_n)}\left(\frac{1}{a_n'}\right) \end{aligned}\right\} \quad n = 1, 2, 3, \ldots).$$