ÜBER MINIMALEIGENSCHAFTEN DER KUGEL IN DREI UND MEHR DIMENSIONEN

VON

EDGAR KRAHN

TARTU-DORPAT 1926

Druck von C. Mattiesen, Dorpat.

Inhalt.

Bei der Frage nach dem kleinsten Werte eines mehrfachen Integrales bei einer oder mehreren Nebenbedingungen kommt man zu einer Problemstellung, die bei einfachen Integralen nicht auftritt. Es ist die Frage nach der Form des Gebietes, über das die Integration zu erstrecken ist, damit das Integral den kleinsten Wert annehme. Die Lösung gestaltet sich am einfachsten, falls unter dem Integral keine Ableitungen der unbekannten Funktion vorkommen oder falls es gelingt durch eine Variablentransformation dieses zu erreichen. Der Beweis der isoperimetrischen Eigenschaft der Kugel beruht darauf, dass solch eine Zurückführung auf ein Variationsproblem ohne Ableitungen der unbekannten Funktion möglich ist. In der vorliegenden Arbeit soll gezeigt werden, wie sich die Art der Lösung dieses für Doppelintegrale behandelten Problemes einerseits auf mehrfache Integrale und andrerseits auf ein verwandtes Problem übertragen lässt. Dabei wird ein teilweise neuer Beweis für die isoperimetrische Eigenschaft der Kugel gegeben, der sich eng an die Beweise von H. A. Schwarz und L. Tonelli[1]) anlehnt und unter denselben Voraussetzungen ausgeführt wird, wie derjenige von Schwarz. Der Beweis wird dann auf den Fall einer beliebigen Anzahl von Dimensionen verallgemeinert. Mit Hilfe des gefundenen Satzes wird sodann gezeigt, dass das Gebiet, für welches der erste Eigenwert der Differentialgleichung

$$\triangle u + \lambda u = 0 \qquad \triangle \equiv \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} + \cdots + \frac{\partial^2}{\partial x_n^2}$$

bei der Randbedingung $u = 0$ den kleinsten Wert annimmt, wenn zum Vergleich nur inhaltsgleiche n-dimensionale Gebiete zugelassen werden, die n-dimensionale Sphäre ist. Dieser Satz, zu-

---

1) H. A. Schwarz. Beweis des Satzes, dass die Kugel kleinere Oberfläche besitzt, als jeder andere Körper gleichen Volumens. Göttinger Nachrichten 1884.

L. Tonelli. Sulla proprietà di minimo della sfera. Rendiconti del Circ. Mat. di Palermo. Bd. 39 (1915).

sammen mit dem Satze, der das Gebiet angibt, für welches der zweite Eigenwert derselben Differentialgleichung am kleinsten ist, bildet das eigentliche Ziel dieser Arbeit[1]).

Ich möchte nicht unterlassen Herrn Prof. R. Courant für die reiche Anregung und das Interesse, das er dieser Arbeit entgegengebracht hat, meinen Dank auszusprechen[2]).

§ 1.

In diesem Paragraphen soll der Satz bewiesen werden, dass die Kugel eine kleinere Oberfläche hat, als jeder andere Körper gleichen Volumens, der ganz im Endlichen liegt und von endlich vielen Stücken analytischer Flächen (analytisch mit Einschluss des Randes) begrenzt ist, die längs analytischer Kurven aneinander stossen.

Es sei eine beliebige geschlossene Fläche F gegeben, die diesen Voraussetzungen genügt.

Diese Fläche soll in einem rechtwinkligen Koordinatensystem xyz so hingestellt sein, dass für alle ihre Punkte $z > 0$ ist, dass kein ebenes Stück dieser Fläche parallel der xy-Ebene ist und kein der Fläche angehörendes Stück einer Geraden parallel der z-Achse ist.

Dieses lässt sich immer durch eine geeignete Drehung erreichen, wie man sich durch folgende Überlegung leicht überzeugt.

Man betrachte in einer Kugel alle diejenigen Radien, die parallel den Normalen der ebenen Flächenstücke der Fläche F sind, und ausserdem alle diejenigen Radien, die parallel den auf F liegenden Geraden oder endlichen Stücken von Geraden sind. Da die Endpunkte dieser Radien nicht die ganze Kugeloberfläche ausfüllen können, so können wir immer eine Richtung wählen, die mit keinem dieser Radien zusammenfällt, und legen in diese die z-Achse.

Nun zerlegen wir die Flächenstücke, aus denen F besteht, folgendermassen in Teile:

---

1) Es sei hier erwähnt, dass der eben angeführte Satz betreffend den ersten Eigenwert der Gleichung $\Delta u + \lambda u = 0$ für den Fall zweier unabhängiger Variablen bereits bewiesen ist, und zwar von G. Faber. Sitzungsberichte der Bay. Akad. d. Wiss. 1923 S. 169 und unabhängig davon vom Verfasser: Math. Annalen Bd. 94 S 97.

2) Die vorliegende Abhandlung stellt einen Abdruck einer von der mathematisch-naturwissenschaftlichen Fakultät der Universität Göttingen angenommenen Inauguraldissertation dar.

1) nehmen wir eine Zerlegung vor, nach der z auf jedem Flächenstück eine eindeutige Funktion von x,y wird. Von der Möglichkeit solch einer Zerlegung überzeugen wir uns durch nachstehende Betrachtung. Die Projektion eines analytischen Flächenstückes erfülle ein Gebiet S der xy-Ebene. In einem Teilgebiete T von S sei die Koordinate z der Flächenpunkte eine zweideutige Funktion von x,y, im übrigen Teile von S eine eindeutige Funktion. Hat in T die Differenz zwischen beiden Werten z, die ein und demselben Wertepaare x,y entsprechen, eine von Null verschiedene untere Grenze, so sind die beiden Flächenstücke, deren Projektion T ist, durch ein in $S—T$ liegendes Flächenstück verbunden, auf dem z als Funktion von x,y eindeutig ist. Dieses letztere Flächenstück teilen wir dann durch eine analytische Kurve in zwei Teile, von denen der eine mit dem einen, der andere mit dem anderen über T liegenden Blatt verbunden ist. Durch diese Kurve ist dann die gewünschte Zerlegung des gegebenen Flächenstückes erfolgt.

Hat aber in T die Differenz beider Werte z, die einem Wertepaare x,y entsprechen, als untere Grenze Null, so hat das Flächenstück längs derjenigen Kurven, die den Randkurven von T entsprechen, Tangentialebenen, die senkrecht auf der xy-Ebene stehen (Stützebenen). Wir brauchen in diesem Falle nur diejenigen Kurven auf dem Flächenstück aufzusuchen, längs denen es von den Stützebenen berührt wird, und längs diesen Kurven die Fläche zu zerlegen.

Im Falle, wenn das Flächenstück so beschaffen ist, dass z eine mehr als zweideutige Funktion von xy ist, kann die Zerlegung ganz ähnlich geschehen, indem man die Anzahl der Mehrdeutigkeit schrittweise um eins vermindert.

2) Nun zerlegt man die erhaltenen Teile noch so, dass in jedem von ihnen nicht nur z eine eindeutige Funktion von x und y ist, sondern ausserdem entweder x als Funktion von y und z eindeutig oder aber y als Funktion von x und z eindeutig ist.

3) Man zerlegt die Fläche mit den Ebenen z-const., die durch folgende Punkte gehen: a) durch alle Ecken der Fläche F; b) durch die Punkte, in denen die Tangentialebene parallel der xy-Ebene ist; c) durch die Punkte, in denen die Kanten der Flächenstücke Tangenten besitzen, die parallel der xy-Ebene sind; d) durch die singulären Punkte der Kanten.

4) Auf jedem der nun erhaltenen Flächenstücke lässt sich

z als eindeutige Funktion von x und y darstellen. Jedes dieser Flächenstücke zerlegen wir längs denjenigen Kurven, längs denen $\frac{\partial z}{\partial x}$ oder $\frac{\partial z}{\partial y}$ unendlich wird.

Jetzt ist die Fläche F in endlich viele Teile F_i zerlegt, deren jedes sich in der Form

$$z = f_i(x,y)$$

darstellen lässt, wo f_i eindeutig ist.

Auf jedem Flächenstück F_i führen wir zwei unabhängige Koordinaten ein, deren eine die Koordinate z ist und die andere die Bogenlänge s_i der Kurve, die dem Schnitt von F_i mit einer Ebene z-const. entspricht. s_i soll dabei vom Rande des Flächenstückes F_i gezählt werden. Falls kein Rand vorhanden, von dem aus man s_i messen kann, so verlegt man die Anfangspunkte dieser Koordinate auf eine längs der Fläche verlaufende analytische Kurve. Längs einer Kurve des Flächenstückes F_i, die z-const. entspricht, durchläuft dabei s_i alle Werte von Null bis zu einem Werte $L_i(z)$.

Mit Hilfe der unabhängigen Koordinaten z und s_i lässt sich das Flächenstück F_i nun durch die Gleichungen

$$\begin{aligned} x &= x_i(z,s_i) \\ y &= y_i(z,s_i) \\ z &\equiv z \end{aligned}$$

darstellen, wobei die Funktionen x_i und y_i analytisch sind.

Nun führen wir eine Grösse D_i ein, deren Betrag

$$|D_i| = \begin{vmatrix} \frac{\partial x_i}{\partial z} & \frac{\partial x_i}{\partial s_i} \\ \frac{\partial y_i}{\partial z} & \frac{\partial y_i}{\partial s_i} \end{vmatrix}$$

ist, und bestimmen das Vorzeichen von D_i so, dass es übereinstimmt mit demjenigen des cos des Winkels Z, den die äussere Flächennormale mit der z-Achse bildet. Zu dieser Festsetzung genügt die Betrachtung eines einzigen Flächenpunktes, da, bei Benutzung der üblichen Bezeichnungen

$$E = \left(\frac{\partial x_i}{\partial z}\right)^2 + \left(\frac{\partial y_i}{\partial z}\right)^2 + \left(\frac{\partial z_i}{\partial z}\right)^2; \quad G = \left(\frac{\partial x_i}{\partial s_i}\right)^2 + \left(\frac{\partial y_i}{\partial s_i}\right)^2 + \left(\frac{\partial z_i}{\partial s_i}\right)^2$$

$$F = \frac{\partial x_i}{\partial z} \cdot \frac{\partial x_i}{\partial s_i} + \frac{\partial y_i}{\partial z} \cdot \frac{\partial y}{\partial s_i} + \frac{\partial z_i}{\partial z} \cdot \frac{\partial z_i}{\partial s_i}$$

der genannte cos gleich

$$\cos Z = \frac{\begin{vmatrix} \frac{\partial x_i}{\partial z} & \frac{\partial x_i}{\partial s_i} \\ \frac{\partial y_i}{\partial z} & \frac{\partial y_i}{\partial s_i} \end{vmatrix}}{\sqrt{EG-F^2}} \quad \text{oder} = \frac{-\begin{vmatrix} \frac{\partial x_i}{\partial z} & \frac{\partial x_i}{\partial s_i} \\ \frac{\partial y_i}{\partial z} & \frac{\partial y_i}{\partial s_i} \end{vmatrix}}{\sqrt{EG-F^2}}$$

ist, und das Vorzeichen nur von der Wahl der Fortschreitungsrichtung von s_i abhängt.

Drückt man in

$$z = f_i(x,y)$$

x und y durch z und s_i aus, so findet man durch Differentiation

$$\frac{\partial f_i}{\partial x} \cdot \frac{\partial x_i}{\partial z} + \frac{\partial f_i}{\partial y} \cdot \frac{\partial y_i}{\partial z} = 1$$

$$\frac{\partial f_i}{\partial x} \cdot \frac{\partial x_i}{\partial s_i} + \frac{\partial f_i}{\partial y} \cdot \frac{\partial y_i}{\partial s_i} = 0.$$

Aus diesen Gleichungen findet man unter Beachtung von

$$\left(\frac{\partial x_i}{\partial s_i}\right)^2 + \left(\frac{\partial y_i}{\partial s_i}\right)^2 = 1$$

die Beziehung

$$\left(\frac{\partial f_i}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f_i}{\partial y}\right)^2 = \frac{1}{D_i^2}.$$

Da die linke Seite dieser Gleichung stetig ist und höchstens in isolierten Punkten oder am Rande von F_i unendlich wird, so verschwindet D_i höchstens in isolierten Punkten oder am Rande von F_i.

Versteht man unter einer das Flächenstück F_i approximierenden Polyederfläche solch eine, deren Punkte sich umkehrbar eindeutig und stetig den Punkten von F_i so zuordnen lassen, dass der Abstand zweier entsprechender Punkte kleiner als eine beliebig vorgegebene Zahl ε ist, so soll als Flächeninhalt J_i von F_i die untere Grenze der Oberflächeninhalte aller F_i approximierenden Polyederflächen definiert werden, die man erhält, wenn man ε gegen Null streben lässt[1]).

Für die in diesem Paragraphen betrachteten Flächenstücke

1) Vgl. H. Lebesgue. Intégrale, longueur, aire. Annali di matematica 1902.
„ Sur la déf. de l'aire des surfaces. L'enseignement math. 1908. — L. Tonelli. l. c.

F_i ist der so definierte Inhalt J_i gleich dem wohlbekannten Integral

$$J_i = \iint\limits_{F_i} \sqrt{1 + \left(\frac{\partial f_i}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f_i}{\partial y}\right)^2}\; dx\, dy.$$

Da D_i allen Anforderungen genügt, die bei der Transformation eines Integrales von den Variablen xy auf die Variablen z und s_i an die Funktionaldeterminante gestellt werden, so kann die Transformation ausgeführt werden und man erhält

$$J_i = \iint\limits_{F_i} \sqrt{1 + D_i^2}\; dz\, ds.$$

Da wir die Fläche mit dem kleinsten Inhalte suchen, brauchen wir nur solche mit endlichem Flächeninhalt zu berücksichtigen, und für diese existiert J_i sicherlich. Nötigenfalls, wenn D_i am Rande von F_i unendlich wird, ist J_i als uneigentliches Integral aufzufassen.

Bezeichnet man mit k die Anzahl der Flächenstücke F_i, mit a_i und b_i den kleinsten und grössten Wert von z auf F_i, mit J den Flächeninhalt der Fläche F, mit a und b den kleinsten und grössten Wert von z auf F, so ist

$$J = \sum_{i=1}^{k} J_i = \sum_{i=1}^{k} \int_{a_i}^{b_i} dz \int_0^{L_i(z)} \sqrt{1 + D_i^2}\; ds_i = \int_a^b \left\{ \sum_{i=1}^{k} \int_0^{L_i(z)} \sqrt{1 + D_i^2}\; ds_i \right\} dz.$$

Das Volumen V des ganzen, von der Fläche F begrenzten Körpers lässt sich zusammensetzen aus den Volumina $V_1, V_2, \ldots V_k$ derjenigen Körper, von denen jeder durch ein Flächenstück F_i, dessen Projektion in der xy-Ebene und ein zylindrisches Flächenstück begrenzt ist. Das Volumen eines solchen Körpers ist

$$V_i = \iint\limits_{F_i} f_i(x,y)\, dx\, dy.$$

Nach Einführung der Variablen z und s_i transformiert es sich in

$$V_i = \iint\limits_{F_i} z\, |D_i|\, dz\, ds_i.$$

Um das Volumen des ganzen Körpers zu erhalten, muss man die Summe aller V_i bilden, wobei sie mit dem Zeichen $+$ oder $-$ versehen werden müssen, je nachdem, ob die äussere Flächennormale mit der positive nz-Achse einen Winkel bildet, der kleiner oder grösser als $\frac{\pi}{2}$ ist. Da D_i immer dieses Vorzeichen hat, so kann man bei D_i im Integral das Zeichen des absoluten Betrages fortlassen und alle Integrale mit dem Zeichen $+$ versehen. Das Volumen des von F begrenzten Körpers ist dann

$$V = \sum_{i=1}^{k} \int_{a_i}^{b_i} z\,dz \int_0^{L_i(z)} D_i\,ds_i = \int_a^b \left\{ \sum_{i=1}^{k} \int_0^{L_i(z)} D_i\,ds_i \right\} z\,dz.$$

Die Fläche F werde mit einer Ebene z=const. geschnitten und derjenige Teil dieser Ebene, der innerhalb der Fläche F liegt, mit $P(z)$ bezeichnet, sein Inhalt mit $Q(z)$. Es ist dann

$$\iint_{P(z)} dx\,dy = Q(z)$$

wobei man das Integral, anstatt es einfach über die Projektion von $P(z)$ zu erstrecken, auch über die Projektion desjenigen Teiles der Fläche F erstrecken kann, der zwischen $z = a$ und dem gegebenen Werte von z liegt, wobei die Integrale über die einzelnen Stücke entsprechend der Richtung der äusseren Flächennormale mit dem Zeichen $+$ oder $-$ zu versehen sind. Führt man jetzt im Integral $Q(z)$ die Variablen z und s_i ein, so transformiert es sich in

$$-Q(z) = \sum_{i=1}^{k} \int_a^z dz \int_0^{L_i(z)} D_i\,ds_i = \int_a^z \left\{ \sum_{i=1}^{k} \int_0^{L_i(z)} D_i\,ds_i \right\} dz.$$

Unter dem Integral steht D_i, und nicht der absolute Betrag davon, aus demselben Grunde, wie bei dem Integral V.

Nun soll gezeigt werden, dass $Q(z)$ eine stückweise analytische Funktion von z ist. Es sollen von der Betrachtung die Werte z ausgeschlossen werden, durch die anfangs Ebenen z-const. gelegt wurden, um die Fläche F in die Stücke F_i zu zerlegen.

Die Berandung von $P(z)$ besteht aus endlich vielen analytischen Kurvenstücken, die sich in der Form $y = \varphi(x,z)$ oder

$x = \psi(y,z)$ darstellen lassen, wo φ und ψ eindeutige analytische Funktionen sind. Die Eckpunkte der begrenzenden Kurvenstücke bewegen sich bei Änderung von z auf analytischen Kurven. Der Flächeninhalt $Q(z)$ setzt sich aus endlich vielen Integralen der Form

$$\int\limits_{\alpha(z)}^{\beta(z)} \varphi(x,z)\, dx \quad \text{und} \quad \int\limits_{\gamma(z)}^{\delta(z)} \psi(y,z)\, dy$$

zusammen, wo α, β, γ, δ wieder analytische Funktionen von z sind.

Mit Ausnahme endlich vieler Werte z gilt somit die Beziehung

$$\sum_{i=1}^{k} \int\limits_{0}^{L_i(z)} D_i\, ds_i = -Q'(z).$$

Nun soll folgendes Minimalproblem gelöst werden

$$\sum_{i=1}^{k} \int\limits_{0}^{L_i(z)} \sqrt{1+D_i^2}\, ds_i = \min.$$

bei der Nebenbedingung

$$\sum_{i=1}^{k} \int\limits_{0}^{L_i(z)} D_i\, ds_i = -Q'(z).$$

Wir bestimmen einen Mittelwert $C(z)$ von $D_i(z,s_i)$ durch folgende Gleichung

$$C(z) \sum_{i=1}^{k} L_i(z) = -Q'(z).$$

$$\sum_{i=1}^{k} L_i(z)$$

ist die Gesamtlänge der Kurve, die auf der Fläche F entsteht, wenn wir letztere mit der Ebene z-const. schneiden. (Diese Kurve kann auch aus mehreren getrennten Stücken bestehen). Wir wollen sie mit $L(z)$ bezeichnen

$$\sum_{i=1}^{k} L_i(z) = L(z).$$

$C(z)$ ist somit für alle Werte z, mit Ausnahme endlich vieler, definiert als

$$C(z) = -\frac{Q'(z)}{L(z)}.$$

Wir setzen nun

$$D_i(z,s_i) = C(z) + w_i(z,s_i)$$

und entwickeln $\sqrt{1+D_i^2}$ nach dem Maclaurinschen Satz, indem wir w_i als Variable ansehen. Das gibt

$$\sqrt{1+D_i^2} = \sqrt{1+C^2} + \frac{C\,w_i}{\sqrt{1+C^2}} + \frac{w_i^2}{2(\sqrt{1+(C+\theta w_i)^2})^3};\ 0<\theta<1.$$

Integriert man diese Gleichung nach s_i von 0 bis $L_i(z)$ und summiert über alle i, so fällt das zweite Glied auf der rechten Seite fort, da wegen

$$\sum_{i=1}^{k}\int_0^{L_i(z)} D_i\,ds_i = \sum_{=1}^{k}\int_0^{L_i(z)} C\,ds_i$$

$$\sum_{i=1}^{k}\int_0^{L_i(z)} w_i\,ds_i = 0 \text{ ist,}$$

und es bleibt übrig

$$\sum_{i=1}^{k}\int_0^{L_i(z)} \sqrt{1+D_i^2}\,ds_i = L(z)\sqrt{1+C^2} + \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{k}\int_0^{L_i(z)} \frac{w_i^2\,ds_i}{(\sqrt{1+(C+\theta w_i)^2})^3}.$$

Da w_i eine stetige Funktion von s_i ist, so verschwindet die rechts stehende Summe nur dann, wenn w_i identisch gleich Null ist, während sie in jedem anderen Falle einen positiven Wert hat. Es besteht somit die Beziehung

$$\sum_{i=1}^{k}\int_0^{L_i(z)} \sqrt{1+D_i^2}\,ds_i \geqq L(z)\sqrt{1+C^2}$$

in der das Gleichheitszeichen nur in dem Falle gilt, wenn $D_i = C$ ist, mit anderen Worten, wenn D_i von s_i unabhängig ist.

Wegen der isoperimetrischen Eigenschaft des Kreises ist immer

$$L(z)^2 \geqq 4\pi Q(z)$$

und daher

$$\sum_{i=1}^{k} \int_0^{L_i(z)} \sqrt{1+D_i^2}\, ds_i \geqq \sqrt{4\pi Q(z) + Q'(z)^2}.$$

Integriert man diese Ungleichung nach z von a bis b, so findet man

$$J \geqq \int_a^b \sqrt{4\pi Q(z) + Q'(z)^2}\, dz.$$

Das Gleichheitszeichen tritt hier nur dann in Kraft, wenn D_i von s_i unabhängig ist und $P(z)$ ein Kreis ist.

Beides tritt bei Rotationsflächen, deren Achse parallel der z-Achse ist, und nur bei diesen ein. Um einzusehen, dass bei solch einer Rotationsfläche D_i von s_i unabhängig ist, braucht man sich nur an die schon angeführte Formel

$$\cos Z = \frac{D_i}{\sqrt{EG-F^2}}$$

zu erinnern. Wie man sich durch eine einfache Rechnung überzeugt, ist

$$EG - F^2 = 1 + D_i^2$$

und daher

$$\cos Z = \frac{D_i}{\sqrt{1+D_i^2}}$$

Aus dieser Formel liest man die Behauptung unmittelbar ab.

Nun bilden wir eine Rotationsfläche R_1 um die z-Achse, deren Querschnitte mit den Ebenen $z = \text{const.}$ den Inhalt $Q(z)$ haben.

Die Meridiankurve dieser Fläche ist

$$r = \sqrt{\frac{Q(z)}{\pi}} \qquad \text{wo } r = \sqrt{x^2+y^2} \text{ ist,}$$

und ihr Oberflächeninhalt

$$J_{R_1} = \int_a^b \sqrt{4\pi Q(z) + Q'(z)^2}\, dz.$$

Falls F und R_1 nicht identisch sind, hat R_1 kleinere Oberfläche als F und umschliesst gleiches Volumen (denn V lässt sich auch in der Form

$$V = -\int_a^b z\, Q'(z)\, dz \text{ darstellen).}$$

Die Differenz der Oberflächeninhalte von F und R_1 bezeichnen wir mit τ.

Da $Q(z)$ eine stückweise analytische Funktion von z ist, so gilt dasselbe von r. Die Gleichung der Fläche R_1 ist

$$x = \pm\sqrt{r(z)^2 - y^2}$$

und man sieht daraus, dass sie aus analytischen Flächenstücken besteht. Eine Ausnahme bilden die Punkte der Fläche R_1, die dem grössten und kleinsten Werte von z entsprechen. Der Grenzkreis, der sonst einem Eckpunkte der Meridiankurve entspricht, hat sich hier auf einen Punkt zusammengezogen. Die Fläche wird in diesen Punkten nur dann analytisch bleiben, wenn die Meridiankurve in diesem Punkte senkrecht auf der Rotationsachse steht und ihre analytische Fortsetzung mit ihrem Spiegelbild zusammenfällt. Im Allgemeinen wird das nicht der Fall sein. Wir schneiden daher beide Spitzen der Fläche R_1 mit Ebenen senkrecht zur z-Achse ab und ersetzen sie durch analytische Rotationsflächenstücke, die gleiches Volumen umschliessen und deren Oberfläche in Summa kleiner als $\frac{\tau}{8}$ ist. Die Meridiankurven der aufgesetzten Flächenstücke wählen wir so, dass auf jedem r eine monotone Funktion von z ist. Die so erhaltene veränderte Fläche besteht aus analytischen Flächenstücken, von denen wir aber nicht wissen, ob sie auch noch am Rande analytisch sind, da $r(z)$ eine stückweise analytische Funktion ist, deren Ableitungen aber in den Eckpunkten unendlich werden können. Um diesem Übelstande abzuhelfen, schneiden wir aus dem Körper, der durch R_1 begrenzt wird, in der Umgebung jedes Randkreises durch Ebenen $z = \text{const}$ (gleich Eckpunktskoordinate von $r(z)$ plus oder minus ε) Schichten aus und ersetzen die Meridiankurven dieser Schichten durch analytische Kurvenstücke (analytisch mit Einschluss der Randpunkte) so, dass das

Volumen jeder Schicht unverändert bleibt, die eingesetzten Kurvenstücke sich stetig der Meridiankurve anschliessen und r wieder eine monotone Funktion von z ist. Über ε verfügen wir so, dass die Inhalte der Rotationsflächen, die die eingesetzten Schichten begrenzen, in Summa kleiner als $\frac{\tau}{8}$ sind. Die nun erhaltene Fläche R_1^* genügt den am Anfang des Paragraphen genannten Bedingungen und hat einen Oberflächeninhalt, der sich um weniger als $\frac{\tau}{4}$ von dem Inhalt der Fläche R_1 unterscheidet.

Nun lässt sich auf R_1^* dasselbe Verfahren anwenden wie auf die Fläche F. Bildet man eine Rotationsfläche R_2 um die x-Achse, deren Querschnitte mit den Ebenen x=const. inhaltsgleich mit denjenigen der Rotationsfläche R_1^* sind, so hat man eine Fläche, die gleiches Volumen wie R_1^* umschliesst und eine gleichgrosse oder kleinere Oberfläche als R_1^* besitzt; inhaltsgleich sind die Oberflächen von R_2 und R_1^* nur in dem Falle, wenn alle Querschnitte von R_1^*, die senkrecht zur x-Achse sind, Kreise sind. In diesem Falle muss auch die Meridiankurve ein Kreis sein, folglich R_1^* eine Kugel.

Falls die Fläche R_2 in den Punkten, die den extremen Werten von x entsprechen, nicht analytisch ist, bilden wir sie zu einer Fläche R_2^* um, so wie wir R_1 zu R_1^* umbildeten, nur mit dem Unterschiede, dass wir jetzt analytische Flächenstücke aufsetzen, deren Oberfläche in Summa kleiner als $\frac{\tau}{8}$ ist.

Weiter bilden wir einen Rotationskörper R_3 um die z-Achse, dessen Querschnitte, die senkrecht zu dieser Achse sind, inhaltsgleich den Querschnitten von R_2^* sind, und bilden zu jenem wieder, falls es notwendig ist, den entsprechenden Körper R_3^*, wobei wir Flächenstücke einsetzen, deren Oberfläche zusammengenommen kleiner als $\frac{\tau}{16}$ ist.

Nun fahren wir so fort, Rotationskörper abwechselnd um die x- und um die z-Achse zu bilden.

Man stösst dabei entweder nach endlich vielen Schritten auf die Kugel und hat dann gezeigt, dass diese bei gleichem Volumen eine kleinere Oberfläche als F besitzt, oder man erhält eine unendliche Folge von Rotationskörpern R_i^*, die alle gleiches

Volumen haben und von denen jeder eine höchstens um $\frac{\tau}{2^{i+1}}$ grössere Oberfläche hat als der vorangehende.

Durch das Ersetzen der eventuell auftretenden nicht analytischen Flächenstücke durch analytische werden die Oberflächen der Rotationskörper insgesamt um weniger als

$$\sum_{i=1}^{\infty} \frac{\tau}{2^{i+1}} = \frac{\tau}{2}$$

vergrössert, so dass die Oberfläche eines beliebigen unter ihnen kleiner ist als $J - \frac{\tau}{2}$.

Nun soll gezeigt werden, dass die Folge der Rotationsflächen R_i^* einer Grenzfläche zustrebt und dass diese Grenzfläche eine Kugel ist.

Zu diesem Zwecke betrachten wir die in der xz-Ebene liegenden Meridiankurven der Rotationsflächen R_i^*. Wie leicht zu sehen, ist jede dieser Kurven, angefangen von der zweiten, symmetrisch zur x-Achse und zur z-Achse. Angefangen von der zweiten sind sie auch monoton in jedem Quadranten der Koordinatenebene, d. h. mit wachsendem x nimmt z ab und umgekehrt. Zum Beweise genügt es, zwei aufeinanderfolgende Rotationsflächen R_i^* und R_{i+1} zu betrachten. Die Achse von R_i^* liege in Richtung der x-Achse. Legen wir durch den Rotationskörper R_i^* Schnitte, die parallel der xy-Ebene sind, so werden die Flächeninhalte der Schnitte mit wachsendem z abnehmen, wenn wir Schnitte oberhalb der xy-Ebene betrachten. Da die Querschnitte $z = \text{const.}$ von R_{i+1} Kreise sind, deren Inhalte gleich den Inhalten der entsprechenden Querschnitte von R_i^* sind, so nehmen auch die Radien dieser Kreise mit wachsendem z ab und die Meridiankurve ist in jedem Quadranten der xz-Ebene eine monotone Funktion. Ausserdem liegen alle Meridiankurven in einem beschränkten Gebiete der xz-Ebene. Um das zu beweisen, denken wir uns eine Kugel, die die Fläche F ganz in ihrem Inneren enthält. Es kann dann auch R_1 ganz im Inneren dieser Kugel untergebracht werden, denn der grösste Durchmesser eines Querschnittes $P(z)$ von F ist sicherlich nicht kleiner als der Durchmesser des inhaltsgleichen Kreises, der den entsprechenden Querschnitt von R_1 bildet. Es lässt sich auch R_1^* und ebenso alle anderen Flächen

R_i^* im Inneren dieser Kugel unterbringen und ihre Meridiankurven im Inneren eines Kreises, dessen Radius ϱ durch die Abmessungen der Fläche F bestimmt ist.

Wir betrachten nun die Meridiankurven der Rotationsflächen R_i^* mit geradem Index. Diese sind monotone, stückweise analytische Kurven, die im Inneren eines Kreises mit dem Radius ϱ in der xz-Ebene liegen. Da die Meridiankurven symmetrisch zu den Koordinatenachsen sind, genügt die Betrachtung desjenigen Teiles, der im ersten Quadranten der Koordinatenebene liegt. Dieser Teil hat wegen der vorhin aufgezählten Eigenschaften eine Länge, die kleiner als 2ϱ ist.

Aus der Folge dieser Kurven lässt sich nun eine Teilfolge auswählen, die gegen eine Grenzkurve konvergiert[1)].

Die Fläche, die durch Rotation dieser Kurve um die x-Achse entsteht, umschliesst gleiches Volumen wie die Flächen R_i^* der Folge und hat einen Flächeninhalt, der höchstens gleich der unteren Grenze der Inhalte der Flächen der Folge ist, denn aus der benutzten Definition folgt, dass der Flächeninhalt gleich der unteren Grenze der Inhalte aller Flächen ist, die gegen die gegebene konvergieren[2)].

Es bleibt noch übrig zu zeigen, dass die gefundene Grenzfläche eine Kugel ist. Wenn die Grenzfläche — eine Rotationsfläche mit der Drehachse in der x-Achse — keine Kugel ist, so gibt es sicher einen zur z-Achse senkrechten Querschnitt, der kein Kreis ist.

Ist für diesen Querschnitt $z = \bar{z}$ und bezeichnen wir den Querschnittsumfang und seinen Inhalt mit $\bar{L}$ und $\bar{Q}$, so ist wegen der isoperimetrischen Eigenschaft des Kreises

$$\bar{L}(\bar{z}) = \delta + \sqrt{4\pi\bar{Q}(z)} \qquad \delta > 0.$$

Da die Flächen R_i^* der Folge alle stetig sind und gegen die Grenzfläche konvergieren, so gibt es zu einer beliebig vorgegebenen Grösse σ zwei Grössen $\bar{n}$ und h, so dass für $n > \bar{n}$ und $\bar{z} - h < z < \bar{z}$ die Ungleichungen gelten

1) Vgl. D. Hilbert. Über das Dirichletsche Prinzip. Jahresbericht der d. Math. Ver. Bd. 8. — C. Carathéodory. Über die starken Maxima und Minima. Math. Annalen Bd. 62. — L. Tonelli. Fondamenti di calcolo delle variazioni. Bd. I. S. 87.

2) Vgl. Lebesgue l. c.

$$L_n(z) > L(\bar{z}) - \sigma \qquad Q_n(z) < \bar{Q}(\bar{z}) + \sigma$$

wo L_n und Q_n die Länge der Schnittkurve und der Flächeninhalt des Querschnittes der n'ten Fläche der Folge sind.

In diesen Ungleichungen kann aber σ so gewählt werden, dass

$$L_n(z) > \frac{\delta}{2} + \sqrt{4\pi Q_n(z)}$$

wird. Daher vermindert sich beim Übergang von der n'ten zur $n+1$'ten Fläche der Inhalt des zwischen $\bar{z}-h$ und $\bar{z}$ gelegenen Stückes der Oberfläche um mehr als

$$\lambda - \frac{\tau}{2^{n+2}} = \int_{\bar{z}-h}^{\bar{z}} \sqrt{\left(\frac{\delta}{2} + \sqrt{4\pi Q_n(z)}\right)^2 + Q_n'(z)^2}\, dz -$$
$$- \int_{\bar{z}-h}^{\bar{z}} \sqrt{4\pi Q_n(z) + Q_n'(z)^2}\, dz - \frac{\tau}{2^{n+2}}.$$

Diese Differenz ist von einem gewissen n an grösser als eine positive Zahl d. Um das einzusehen, multiplizieren und dividieren wir die rechte Seite der Ungleichung

$$\lambda > \int_{\bar{z}-h}^{\bar{z}} \sqrt{4\pi Q_n(z) + Q_n'(z)^2 + \frac{\delta^2}{4}}\, dz - \int_{\bar{z}-h}^{\bar{z}} \sqrt{4\pi Q_n(z) + Q_n'(z)^2}\, dz$$

mit der Summe derselben Integrale und finden, indem wir den Nenner durch einen grösseren ersetzen,

$$\lambda > \frac{\left\{\int_{\bar{z}-h}^{\bar{z}} \sqrt{4\pi Q_n(z) + Q_n'(z)^2 + \frac{\delta^2}{4}}\, dz\right\}^2 - \left\{\int_{\bar{z}-h}^{\bar{z}} \sqrt{4\pi Q_n(z) + Q_n'(z)^2}\, dz\right\}^2}{2\int_{\bar{z}-h}^{\bar{z}} \sqrt{4\pi Q_n(z) + Q_n'(z)^2}\, dz + \frac{\delta}{2}\cdot h}.$$

Nun wenden wir auf den Zähler folgende Abschätzung an.

Es ist

$$\left\{\int_a^b \sqrt{s(a)^2 + t(a)^2}\, da\right\}^2 \geq \left\{\int_a^b s(a)\, da\right\}^2 + \left\{\int_a^b t(a)\, da\right\}^2$$

wie man sofort einsieht, wenn man $s(a)$ und $t(a)$ als Ableitungen zweier Funktionen $s(a) = S'(a)$, $t(a) = T'(a)$ auffasst, und die Länge der durch die Gleichungen $x = S(a)$ und $y = T(a)$ dargestellten Kurve betrachtet.

Nach Anwendung dieser Ungleichung ergiebt sich, wenn wir beachten, dass

$$\int_{\bar{z}-h}^{\bar{z}} \sqrt{4\pi Q_n(z) + Q_n'(z)^2}\, dz < J \quad \text{ist,}$$

$$\lambda > \frac{\frac{\delta^2}{4} \cdot h^2}{2J + \frac{\delta}{2} \cdot h} = 2d.$$

Wählen wir ein n so, dass $d > \frac{\tau}{2^{n+2}}$ ist, so ist von diesem Werte n an für alle weiteren n

$$\lambda - \frac{\tau}{2^{n+2}} > d.$$

Somit wird beim Übergange von einer Fläche der Folge zur nächsten der Oberflächeninhalt jedesmal um mehr als d verringert, und man kann danach eine zur Folge gehörende Fläche angeben, deren Inhalt um mehr als eine beliebig grosse Zahl geringer ist, als der Inhalt der gegebenen Fläche F. Das ist aber widersinnig, da die Inhaltszahlen der Flächen jedenfalls nicht negativ sein können.

Folglich war die Voraussetzung falsch und der Grenzkörper kann kein anderer als die Kugel sein.

Damit ist gezeigt, dass die Kugel kleinere Oberfläche hat als jeder von einer anderen Fläche F begrenzte Körper, der gleiches Volumen besitzt.

§ 2.

Der Satz des vorigen Paragraphen soll nun auf eine beliebige Anzahl von Dimensionen verallgemeinert und in folgender Fassung bewiesen werden:

Von allen $n+1$ dimensionalen Körpern gleichen $n+1$ dimensionalen Volumens, die ganz im Endlichen liegen und von endlich vielen Stücken analytischer n-dimensionaler Hyperflächen (analytisch mit Einschluss des Randes) begrenzt werden, welche längs analytischer $n-1$ dimensionaler Gebilde aneinanderstossen, hat die $n+1$ dimensionale Kugel den kleinsten n dimensionalen Begrenzungsinhalt.

Es sei eine beliebige Hyperfläche H gegeben, die einen Körper umschliesst, der den genannten Bedingungen genügt.

Die rechtwinkligen Koordinaten im $n+1$ dimensionalen Raume seien $x_1 x_2 \ldots x_n u$. In diesem Koordinatensystem stellen wir H so hin, dass erstens für alle ihre Punkte $u > 0$ ist, zweitens kein n-dimensionales Stück von H mit einer Hyperebene $u = \text{const.}$ zusammenfällt, und drittens kein Stück einer Geraden, das auf der Hyperfläche H liegt, parallel der u-Achse ist. Dieses lässt sich immer durch eine Drehung erreichen, wie man folgendermassen leicht einsieht. Wir betrachten im $n+1$ dimensionalen Raume eine Sphäre und ziehen in dieser alle Radien, die parallel den Normalen der zu H gehörigen Stücke von Hyperebenen sind, und ausserdem alle Radien, die parallel den auf H liegenden Geraden sind. Da die Endpunkte dieser Radien die Oberfläche der $n+1$ dimensionalen Sphäre nicht ausfüllen können, so legen wir die u-Achse in eine Richtung, in der keiner der genannten Radien liegt.

Nun zerlegen wir die Hyperflächenstücke, aus denen sich H zusammensetzt, folgendermassen:

1) Wir führen solch eine Zerlegung aus, dass nach der Zerlegung u in jedem Hyperflächenstück eine eindeutige Funktion von $x_1 x_2 \ldots x_n$ wird. Dazu betrachten wir zuerst folgenden Fall. Die Projektion eines gegebenen Hyperflächenstückes auf den $x_1 x_2 \ldots x_n$ Raum erfülle ein Gebiet S. In einem Teilgebiet T davon sei die Koordinate u als Funktion von $x_1 x_2 \ldots x$ zweideutig, in $S-T$ eindeutig. Hat nun in T die Differenz beider Werte u, die einem Wertekomplex $x_1 x_2 \ldots x_n$ entsprechen, eine positive untere Grenze, so sind beide Blätter der Hyperebene, die über T liegen, miteinander durch ein Hyperebenenstück verbunden, das ausserhalb T liegt, auf dem also u eindeutig ist. Dieses n-dimensionale Hyperflächenstück teilen wir durch eine $n-1$ dimensionale analytische Fläche in zwei Teile, so dass der eine Teil mit dem einen über T liegenden Blatt, der andere mit

dem anderen Blatt verbunden ist, und haben in diesem Falle die gewünschte Zerlegung erreicht.

Hat aber in T die Differenz beider Werte u, die einem Wertekomplex $x_1 x_2 \ldots x_n$ entsprechen, Null zur unteren Grenze, so entsprechen den n—1 dimensionalen Begrenzungsflächen von T n—1 dimensionale Gebilde des gegebenen Hyperflächenstückes, längs denen die n-dimensionale Tangentialhyperebene parallel der u-Achse ist. Wir brauchen also in diesem Falle nur diese n—1 dimensionalen Hyperflächenstücke auf H aufzusuchen und durch dieselben H zu zerlegen.

Falls wir es mit einem Hyperflächenstück zu tun haben, auf dem u eine mehr als zweideutige Funktion von $x_1 x_2 \ldots x_n$ ist, nehmen wir die Zerlegung schrittweise vor, indem wir die Blätter der Hyperfläche einzeln abtrennen.

2) Weiter zerlegen wir die erhaltenen Hyperflächenstücke so, dass in jedem von ihnen nicht nur u eine eindeutige Funktion von $x_1 x_2 \ldots x_n$ ist, sondern ausserdem eine der Variablen $x_1 x_2 \ldots x_n$ eine eindeutige Funktion der übrigen x_i und u ist.

3) Wir zerlegen H mit Hilfe der Hyperebenen $u = \text{const}$, die durch folgende Punkte zu legen sind:

a) alle Ecken von H, d. h. die Punkte, in denen drei oder mehr analytische Stücke zusammenstossen;

b) alle Punkte, in denen die n-dimensionalen Tangentialebenen zur Schar $u = \text{const}$ gehören;

c) alle Punkte, in denen die n—1 dimensionalen Flächen, die die Grenze zweier n-dimensionaler Stücke von H bilden, n—1 dimensionale Tangentialebenen besitzen, die in den Hyperebenen $u = \text{const}$ liegen.

4) Auf jedem Hyperflächenstück betrachten wir u als Funktion von $x_1, x_2, \ldots x_n$ und zerlegen es längs denjenigen $n-1$ dimensionalen Gebilden, längs denen eine der Ableitungen

$$\frac{\partial u}{\partial x_1}, \frac{\partial u}{\partial x_2}, \ldots \frac{\partial u}{\partial x_n} \text{ unendlich wird.}$$

Jetzt ist H in endlich viele Stücke H_i zerlegt, die sich so darstellen lassen

$$u = f_i(x_1, x_2, \ldots x_n)$$

wo f_i eine eindeutige Funktion ist.

Auf jedem der H_i führen wir nun n unabhängige Koordinaten ein, von denen eine mit u identisch ist und die anderen $v_{i1}, v_{i2}, \dots v_{i\,n-1}$ so gewählt sind, dass die Gleichungen

$$\begin{aligned}
x_1 &= x_{i1}(u, v_{i1}, v_{i2}, \dots v_{i\,n-1}) \\
x_2 &= x_{i2}(u, v_{i1}, v_{i2}, \dots v_{i\,n-1}) \\
&\dots\dots\dots\dots \\
&\dots\dots\dots\dots \\
x_n &= x_{in}(u, v_{i1}, v_{i2}, \dots v_{i\,n-1}) \\
u &\equiv u
\end{aligned}$$

durch die H_i nun dargestellt ist, alle analytisch sind.

Wir führen eine grösse D_i ein, deren Betrag

$$| D_i | = \begin{vmatrix}
\frac{\partial x_{i1}}{\partial u} & \frac{\partial x_{i2}}{\partial u} & \dots & \frac{\partial x_{in}}{\partial u} \\
\frac{\partial x_{i1}}{\partial v_{i1}} & \frac{\partial x_{i2}}{\partial v_{i1}} & \dots & \frac{\partial x_{in}}{\partial v_{i1}} \\
\dots & \dots & \dots & \dots \\
\dots & \dots & \dots & \dots \\
\frac{\partial x_{i1}}{\partial v_{i\,n-1}} & \frac{\partial x_{i2}}{\partial v_{i\,n-1}} & \dots & \frac{\partial x_{in}}{\partial v_{i\,n-1}}
\end{vmatrix}$$

ist, und bestimmen das Vorzeichen von D_i folgendermassen: in den Punkten von H_i, in deren Umgebung den ausserhalb des von H begrenzten Körpers liegenden Punkten ein grösserer Wert u entspricht, als den innerhalb von H liegenden Punkten der Umgebung, soll D_i positiv sein, in den Punkten, in denen das Umgekehrte der Fall ist — negativ.

Führt man in $u = f_i(x_1, x_2, \dots x_n)$ die Variablen $u, v_{i1}, v_{i2}, \dots v_{in-1}$ ein und differentiiert die so erhaltene Identität, so findet man

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial f_i}{\partial x_1} \cdot \frac{\partial x_{i1}}{\partial u} + \frac{\partial f_i}{\partial x_2} \cdot \frac{\partial x_{i2}}{\partial u} + \dots + \frac{\partial f_i}{\partial x_n} \cdot \frac{\partial x_{in}}{\partial u} = 1 \\
&\frac{\partial f_i}{\partial x_1} \cdot \frac{\partial x_{i1}}{\partial v_{i1}} + \frac{\partial f_i}{\partial x_2} \cdot \frac{\partial x_{i2}}{\partial v_{i1}} + \dots + \frac{\partial f_i}{\partial x_n} \cdot \frac{\partial x_{in}}{\partial v_{i1}} = 0 \\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\
&\frac{\partial f_i}{\partial x_1} \cdot \frac{\partial x_{i1}}{\partial v_{in-1}} + \frac{\partial f_i}{\partial x_2} \cdot \frac{\partial x_{i2}}{\partial v_{in-1}} + \dots + \frac{\partial f_i}{\partial x_n} \cdot \frac{\partial x_{in}}{\partial v_{in-1}} = 0
\end{aligned}$$

Bezeichnen wir die den Gliedern

$$\frac{\partial x_{i1}}{\partial u}, \frac{\partial x_{i2}}{\partial u}, \dots \frac{\partial x_{in}}{\partial u}$$

entsprechenden Unterdeterminanten mit $M_{i1}, M_{i2}, \dots M_{in}$ und ihre Quadratsumme mit M_i^2

$$M_{i1}^2 + M_{i2}^2 + \dots + M_{in}^2 = M_i^2$$

so ergibt sich aus dem angeführten Gleichungssystem

$$\left(\frac{\partial f_i}{\partial x_1}\right)^2 + \left(\frac{\partial f_i}{\partial x_2}\right)^2 + \dots + \left(\frac{\partial f_i}{\partial x_n}\right)^2 = \frac{M_i^2}{D_i^2}.$$

Da die linke Seite dieser Gleichung auf keinem $n-1$ dimensionalen Gebilde im Inneren von H_i unendlich wird und da $M_i \neq 0$ ist (weil $x_{i1}, x_{i2}, \dots x_{in}$ analytische Funktionen sind), so folgt, dass D_i auf keinem $n-1$ dimensionalen Gebilde im Inneren von H_i verschwindet. Also hat die Determinante, deren Betrag mit dem Betrage von D_i übereinstimmt, auf H_i immer einerlei Vorzeichen.

Wir verstehen unter einem die Hyperfläche H_i approximierenden Polytope ein solches, dessen Punkte sich umkehrbar eindeutig und stetig den Punkten von H_i so zuordnen lassen, dass der Abstand zweier entsprechender Punkte kleiner als eine beliebig vorgegebene Zahl ε ist, und definieren als Inhalt von H_i die untere Grenze der Begrenzungsinhalte der H_i approximierenden Polytope, die man erhält, wenn man ε gegen Null streben lässt.

Ähnlich wie bei Lebesgue im dreidimensionalen Falle, lässt sich zeigen, dass für die von uns betrachteten Hyperflächen das n-fache Integral

$$J_i = \int\limits_{H_i}^{(n)} \sqrt{1 + \left(\frac{\partial f_i}{\partial x_1}\right)^2 + \left(\frac{\partial f_i}{\partial x_2}\right)^2 + \dots + \left(\frac{\partial f_i}{\partial x_n}\right)^2} \; dx_1\, dx_2 \dots dx_n$$

den Inhalt von H_i gemäss der gegebenen Definition darstellt.

Da D_i allen Anforderungen genügt, die bei der Transformation des n-fachen Integrales von den Variablen $x_1, x_2, \dots x_n$ auf die Variablen $u, v_{i1}, v_{i2}, \dots v_{in-1}$ gestellt werden, so kann man die Transformation ausführen und erhält

$$J_i = \int\limits_{H_i}^{(n)} \sqrt{D_i^2 + M_i^2} \; du\, dv_{i1}\, dv_{i2} \dots dv_{i\,n-1}.$$

Da wir nur Hyperflächen mit endlichem Inhalt betrachten, existiert dieses Integral immer, ist aber nötigenfalls als uneigentliches aufzufassen.

Bezeichnet man mit k die Anzahl der Hyperflächenstücke H_i, mit a_i und b_i den kleinsten und grössten Wert von u auf H_i, mit J den n-dimensionalen Begrenzungsinhalt von H, mit a und b den kleinsten und grössten Wert von u auf H, so ist

$$J = \sum_{i=1}^{k} J_i = \sum_{i=1}^{k} \int_{a_i}^{b_i} du \int\limits_{B_i(u)}^{(n-1)} \sqrt{D_i^2 + M_i^2}\, dv_{i1}\, dv_{i2} \ldots dv_{in-1} =$$

$$= \int_a^b \left\{ \sum_{i=1}^{k} \int\limits_{B_i(u)}^{(n-1)} \sqrt{D_i^2 + M_i^2}\, dv_{i1}\, dv_{i2} \ldots dv_{in-1} \right\} du$$

wo $B_i(u)$ der $n-1$ dimensionale Schnitt von H_i mit der Hyperebene $u = \text{const.}$ ist.

Das $n+1$ dimensionale Volumen V des ganzen durch H begrenzten Körpers lässt sich zusammensetzen aus den $n+1$ dimensionalen Volumina V_i derjenigen Körper, von denen jeder durch ein Hyperflächenstück H_i, dessen Projektion im $x_1\, x_2 \ldots x_n$ Raum und das zylindrische Hyperflächenstück, das die beiden verbindet, begrenzt ist.

Das Volumen V_i eines solchen Körpers ist gleich

$$V_i = \int\limits_{H_i}^{(n)} f_i(x_1, x_2, \ldots x_n)\, dx_1\, dx_2 \ldots dx_n.$$

Indem man hier die Variablen u, v_{i1}, $v_{i2}, \ldots v_{in-1}$ einführt, erhält man

$$V_i = \int\limits_{H_i}^{(n)} u \,|\, D_i \,|\, du\, dv_{i1}\, dv_{i2} \ldots dv_{in-1}\,.$$

Das Volumen V ist die Summe aller V_i, wobei diese mit dem Vorzeichen $+$ oder $-$ nach derselben Regel zu versehen sind, nach der die Festsetzung des Vorzeichens von D_i getroffen wurde. Man kann also bei der Summation D_i statt $|\, D_i \,|$ schreiben und dafür alle Integrale V_i mit dem positiven Vorzeichen versehen. Es ist also

$$V = \sum_{i=1}^{k} \int_{a_i}^{b_i} u\, du \int_{B_i(u)}^{(n-1)} D_i\, dv_{i1}\, dv_{i2} \ldots dv_{in-1} =$$

$$= \int_a^b \left\{ \sum_{i=1}^{k} \int_{B_i(u)}^{(n-1)} D_i\, dv_{i1}\, dv_{i2} \ldots dv_{in-1} \right\} u du.$$

Jetzt soll der Inhalt $Q(u)$ eines n-dimensionalen Querschnittes $P(u)$ des von H begrenzten $n+1$ dimensionalen Körpers berechnet werden, der einem Werte $u = c$ entspricht. Es ist

$$Q(u) = \int_{P(u)}^{(n)} dx_1\, dx_2 \ldots dx_n$$

wobei wir das Integral, anstatt es einfach über $P(u)$ zu erstrecken, auch über die Projektion desjenigen Teiles von H_i erstrecken können, der zwischen $u = a$ und dem gegebenen Werte u liegt. Integrale über mehrfach überdeckte Teile des $x_1\, x_2 \ldots x_n$ Raumes müssen dabei positiv oder negativ in Rechnung gesetzt werden je nach dem ob in der Umgebung der Punkte des Hyperflächenstückes, über dessen Projektion das Integral zu erstrecken ist, die grösseren Werte von u ausserhalb oder innerhalb des Körpers liegen, der durch H begrenzt wird.

Das Integral $Q(u)$ können wir in ein Aggregat von Integralen zerlegen, von denen jedes über die Projektion eines Hyperflächenstückes H_i oder eines Teiles davon zu erstrecken ist. In jedem dieser Integrale können wir eine Transformation von den Variablen $x_1 x_2 \ldots x_n$ auf die Variablen $u, v_{i1}, v_{i2}, \ldots v_{i\,n-1}$ vornehmen und erhalten Integrale der Form

$$Q_i(u) = \int_{P_i(u)}^{(n)} | D_i |\, du\, dv_{i1}\, dv_{i2} \ldots dv_{i\,n-1}$$

wo $P_i(u)$ mit einem Hyperflächenstücke H_i oder einem Teil davon identisch ist.

Indem wir uns an die Festsetzung des Vorzeichens von D_i erinnern, können wir schreiben

$$Q(u) = -\sum_{i=1}^{k} \int\limits_{P_i(u)}^{(n)} D_i \, du \, dv_{i1} \, dv_{i2} \ldots dv_{i\,n-1} =$$

$$= -\sum_{i=1}^{k} \int\limits_{a_i}^{u} du \int\limits_{B_i(u)}^{(n-1)} D_i \, dv_{i1} \, dv_{i2} \ldots dv_{i\,n-1} =$$

$$= -\int\limits_{a}^{u} \left\{ \sum_{i=1}^{k} \int\limits_{B_i(u)}^{(n-1)} D_i \, dv_{i1} \, dv_{i2} \ldots dv_{i\,n-1} \right\} du.$$

$Q(u)$ ist eine stückweise analytische Funktion von u, denn sie lässt sich, auf Grund der unter 2) erwähnten Zerlegung der Hyperfläche H, zusammensetzen aus endlich vielen Integralen der Form

$$\int\limits_{A}^{(n-1)} \varphi\,(u, x_1, x_2, \ldots x_{j-1}, x_{j+1}, \ldots x_n)\, dx_1 \, dx_2 \ldots dx_{j-1} \, dx_{j+1} \ldots dx_n$$

wobei φ eine stückweise analytische Funktion seiner Argumente ist und A auch eine stückweise analytische Funktion von u ist, da ja die n—1 dimensionalen Gebilde, durch welche die Hyperflächenstücke H_i begrenzt werden, auch stückweise analytisch sind.

Mit Ausnahme endlich vieler Werte u gilt also

$$Q'(u) = -\sum_{i=1}^{k} \int\limits_{B_i(u)}^{(n-1)} D_i \, dv_{i1} \, dv_{i2} \ldots dv_{i\,n-1}.$$

Nun soll der Inhalt von $B_i(u)$ berechnet werden.

$B_i(u)$ lässt sich in solche Stücke $B_{ij}(u)$ zerlegen, dass in jedem von ihnen eine der Variablen $x_1, x_2 \ldots x_n$ als analytische Funktion der anderen gegeben ist.

Wir betrachten ein Stück $B_{ij}(u)$, in dem x_p als Funktion von $x_1, x_2, \ldots x_{p-1}, x_{p+1}, \ldots x$ gegeben ist. Der n—1 dimensionale Inhalt $b_{ij}(u)$ dieses Stückes ist

$$b_{ij}(u) =$$

$$= \int\limits_{B_{ij}(u)}^{(n-1)} \sqrt{1+\left(\frac{\partial x_p}{\partial x_1}\right)^2+\left(\frac{\partial x_p}{\partial x_2}\right)^2+\dots+\left(\frac{\partial x_p}{\partial x_{p-1}}\right)^2+\left(\frac{\partial x_p}{\partial x_{p+1}}\right)^2+\dots\left(\frac{\partial x_p}{\partial x_n}\right)^2}\, dx_1\, dx_2 \dots dx_{p-1}\, dx_{p+1} \dots dx_n$$

Wir wollen dieses Integral auf die Variablen $v_{i1}, v_{i2} \dots v_{i\,n-1}$ transformieren. Wir finden aus den Gleichungen

$$\frac{\partial x_p}{\partial x_1}\frac{\partial x_1}{\partial v_{i1}}+\frac{\partial x_p}{\partial x_2}\frac{\partial x_2}{\partial v_{i1}}+\dots+\frac{\partial x_p}{\partial x_{p-1}}\frac{\partial x_{p-1}}{\partial v_{i1}}+\frac{\partial x_p}{\partial x_{p+1}}\frac{\partial x_{p+1}}{\partial v_{i1}}+\dots+\frac{\partial x_p}{\partial x_n}\frac{\partial x_n}{\partial v_{i1}}=\frac{\partial x_p}{\partial v_{i1}}$$

$$\frac{\partial x_p}{\partial x_1}\frac{\partial x_1}{\partial v_{i2}}+\frac{\partial x_p}{\partial x_2}\frac{\partial x_2}{\partial v_{i2}}+\dots+\frac{\partial x_p}{\partial x_{p-1}}\frac{\partial x_{p-1}}{\partial v_{i2}}+\frac{\partial x_p}{\partial x_{p+1}}\frac{\partial x_{p+1}}{\partial v_{i2}}+\dots+\frac{\partial x_p}{\partial x_n}\frac{\partial x_n}{\partial v_{i2}}=\frac{\partial x_p}{\partial v_{i2}}$$

. . . .

. . . .

$$\frac{\partial x_p}{\partial x_1}\frac{\partial x_1}{\partial v_{i\,n-1}}+\frac{\partial x_p}{\partial x_2}\frac{\partial x_2}{\partial v_{i\,n-1}}+\dots+\frac{\partial x_p}{\partial x_{p-1}}\frac{\partial x_{p-1}}{\partial v_{i\,n-1}}+\frac{\partial x_p}{\partial x_{p+1}}\frac{\partial x_{p+1}}{\partial v_{i\,n-1}}+\dots+\frac{\partial x_p}{\partial x_n}\frac{\partial x_n}{\partial v_{i\,n-1}}=\frac{\partial x_p}{\partial v_{i\,n-1}}$$

bei Beibehaltung der früheren Bezeichnungen

$$\left(\frac{\partial x_p}{\partial x_1}\right)^2=\left(\frac{M_{i1}}{M_{ip}}\right)^2;\ \left(\frac{\partial x_p}{\partial x_2}\right)^2=\left(\frac{M_{i2}}{M_{ip}}\right)^2;\dots;\left(\frac{\partial x_p}{\partial x_n}\right)^2=\left(\frac{M_{in}}{M_{ip}}\right)^2.$$

Es wird jetzt

$$1+\left(\frac{\partial x_p}{\partial x_1}\right)^2+\dots+\left(\frac{\partial x_p}{\partial x_{p-1}}\right)^2+\left(\frac{\partial x_p}{\partial x_{p+1}}\right)^2+\dots+\left(\frac{\partial x_p}{\partial x_n}\right)^2=\frac{M_i^2}{M_{ip}^2}$$

und das Integral $b_{ij}(u)$ wird transformiert in

$$b_{ij}(u)=\int\limits_{B_{ij}(u)}^{(n-1)} \sqrt{\frac{M_i^2}{M_{ip}^2}}\,|\,M_{ip}\,|\,dv_{i1}\,dv_{i2}\dots dv_{i\,n-1}=$$

$$=\int\limits_{B_{ij}(u)}^{(n-1)} |\,M_i\,|\,dv_{i1}\,dv_{i2}\dots dv_{i\,n-1}.$$

Der Inhalt $b_i(u)$ von $B_i(u)$ wird

$$b_i(u) = \int\limits_{B_i(u)}^{(n-1)} |M_i|\, dv_{i1}\, dv_{i2} \ldots dv_{i\,n-1}$$

und der Inhalt $b(u)$ des ganzen Schnittes

$$b(u) = \sum_{i=1}^{k} \int\limits_{B_i(u)}^{(n-1)} |M_i|\, dv_{i1}\, dv_{i2} \ldots dv_{i\,n-1}.$$

Nun soll folgendes Minimalproblem gelöst werden

$$\sum_{i=1}^{k} \int\limits_{B_i(u)}^{(n-1)} \sqrt{D_i^2 + M_i^2}\, dv_{i1}\, dv_{i2} \ldots dv_{i\,n-1} = \min$$

bei den Nebenbedingungen

$$\sum_{i=1}^{k} \int\limits_{B_i(u)}^{(n-1)} D_i\, dv_{i1}\, dv_{i2} \ldots dv_{i\,n-1} = -Q'(u)$$

und

$$\sum_{i=1}^{k} \int\limits_{B_i(u)}^{(n-1)} |M_i|\, dv_{i1}\, dv_{i2} \ldots dv_{i\,n-1} = b(u).$$

Wir bestimmen Mittelwerte D_0 und M_0 von D_i und M_i durch folgende Gleichungen

$$D_0(u) \sum_{i=1}^{k} \int\limits_{B_i(u)}^{(n-1)} dv_{i1}\, dv_{i2} \ldots dv_{i\,n-1} = -Q'(u)$$

$$M_0(u) \sum_{i=1}^{k} \int\limits_{B_i(u)}^{(n-1)} dv_{i1}\, dv_{i2} \ldots dv_{i\,n-1} = b(u)$$

und setzen

$$D_i(u, v_{i1}, v_{i2}, \ldots v_{i\,n-1}) = D_0(u) + \delta_i(u, v_{i1}, v_{i2}, \ldots v_{i\,n-1})$$

$$|M_i(u, v_{i1}, v_{i2}, \ldots v_{i\,n-1})| = M_0(u) + \mu_i(u, v_{i1}, v_{i2}, \ldots v_{i\,n-1}).$$

Es gelten dann die Gleichungen

$$\sum_{i=1}^{k} \overset{(n-1)}{\int\limits_{B_i(u)}} \delta_i \, dv_{i1}\, dv_{i2} \ldots dv_{i\,n-1} = 0$$

und

$$\sum_{i=1}^{k} \overset{(n-1)}{\int\limits_{B_i(u)}} \mu_i \, dv_{i1}\, dv_{i2} \ldots dv_{i\,n-1} = 0.$$

Wir entwickeln nun

$$\sqrt{D_i^2 + M_i^2}$$

nach dem Maclaurinschen Satze, indem wir δ_i und μ_i als Variable betrachten:

$$\sqrt{D_i^2 + M_i^2} = \sqrt{D_0^2 + M_0^2} + \frac{D_0\,\delta_i}{\sqrt{D_0^2 + M_0^2}} + \frac{M_0\,\mu_i}{\sqrt{D_0^2 + M_0^2}} +$$

$$+ \frac{(M_0\,\delta_i - D_0\,\mu_i)^2}{2\sqrt{(D_0 + \Theta\,\delta_i)^2 + (M_0 + \Theta\,\mu_i)^2}^{\,3}}; \qquad 0 < \Theta < 1.$$

Integrieren wir diese Gleichung über $B_i(u)$ und summieren über alle i, so fallen das zweite und dritte Glied rechts fort und wir finden, da das letzte Glied immer grösser oder gleich Null ist,

$$\sum_{i=1}^{k} \overset{(n-1)}{\int\limits_{B_i(u)}} \sqrt{D_i^2 + M_i^2}\, dv_{i1}\, dv_{i2} \ldots dv_{i\,n-1} \geq$$

$$\geq \sqrt{D_0^2 + M_0^2} \sum_{i=1}^{k} \overset{(n-1)}{\int\limits_{B_i(u)}} dv_{i1}\, dv_{i2} \ldots dv_{i\,n-1}$$

oder, indem wir uns der Bedeutung von D_0 und M_0 erinnern,

$$\sum_{i=1}^{k} \overset{(n-1)}{\int\limits_{B_i(u)}} \sqrt{D_i^2 + M_i^2}\, dv_{i1}\, dv_{i2} \ldots dv_{i\,n-1} \geq \sqrt{b(u)^2 + Q'(u)^2},$$

wobei das Gleichheitszeichen nur dann in Kraft tritt, wenn

$$M_0 \delta_i = D_0 \mu_i$$

ist. Diese Bedingung lässt sich aber auch so

$$\frac{|M_i|}{\mu_i} = \frac{D_i}{\delta_i}$$

oder

$$\frac{|M_i|}{D_i} = \frac{M_0(u)}{D_0(u)}$$

schreiben. Das Gleichheitszeichen gilt also nur dann, wenn

$$\frac{|M_i|}{D_i} \text{ von } v_{i1}, v_{i2}, \ldots v_{i\,n-1}$$

unabhängig ist.

Nimmt man den Satz, der in $n+1$ Dimensionen bewiesen werden soll, für n Dimensionen als bewiesen an, so kann man die Ungleichung

$$b(u) \geqq \varkappa \sqrt[n]{Q(u)^{n-1}}$$

als gültig ansehen, wo $\varkappa$ die numerische Konstante des Verhältnisses der Oberfläche und der $\frac{n-1}{n}$-ten Potenz des Volumens der n-dimensionalen Einheitssphäre ist, und das Gleichheitszeichen nur dann gilt, wenn $Q(u)$ eine Sphäre ist.

Mit Hilfe dieser Ungleichung findet man nun

$$\sum_{i=1}^{k} \overset{(n-1)}{\int\limits_{B_i(u)}} \sqrt{D_i^2 + M_i^2}\, dv_{i1}\, dv_{i2} \ldots dv_{i\,n-1} \geqq \sqrt{\varkappa^2 \sqrt[n]{Q(u)^{2(n-1)}} + Q'(u)^2}.$$

Integriert man diese Ungleichung nach u von a bis b, so erhält man

$$J \geqq \int_b^a \sqrt{\varkappa^2 \sqrt[n]{Q(u)^{2(n-1)}} + Q'(u)^2}\, du.$$

Das Gleichheitszeichen gilt hier nur in dem Falle, wenn alle Querschnitte $Q(u)$ von H n-dimensionale Sphären sind und

$$\frac{|M_i|}{D_i} \text{ von } v_{i1}, v_{i2}, \ldots v_{i\,n-1}$$

unabhängig ist.

Beides ist bei einer Rotationshyperfläche, deren Achse in Richtung der u-Achse liegt, der Fall. Um das einzusehen, denke man sich die Rotationshyperfläche durch die Gleichung

$$r = \Phi(u) \qquad r = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2}$$

gegeben. $\Phi(u)$ sei eine differentiierbare Funktion. Differentiation von $r = \Phi(u)$ nach $v_{i1}, v_{i2}, \ldots v_{i\,n-1}$ gibt

$$\frac{x_1}{r}\frac{\partial x_1}{\partial u} + \frac{x_2}{r}\frac{\partial x_2}{\partial u} + \ldots + \frac{x_n}{r}\frac{\partial x_n}{\partial u} = \Phi'(u)$$

$$\frac{x_1}{r}\frac{\partial x_1}{\partial v_{i1}} + \frac{x_2}{r}\frac{\partial x_2}{\partial v_{i1}} + \ldots + \frac{x_n}{r}\frac{\partial x_n}{\partial v_{i1}} = 0$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$\frac{x_1}{r}\frac{\partial x_1}{\partial v_{i\,n-1}} + \frac{x_2}{r}\frac{\partial x_2}{\partial v_{i\,n-1}} + \ldots + \frac{x_n}{r}\frac{\partial x_n}{\partial v_{i\,n-1}} = 0.$$

Aus diesen Gleichungen findet man

$$\frac{x_1}{r} = \frac{M_{i1}}{D_i}\Phi'(u);\ \frac{x_2}{r} = \frac{M_{i2}}{D_i}\Phi'(u);\ \ldots\ \frac{x_n}{r} = \frac{M_{in}}{D_i}\Phi'(u)$$

und daraus nach Quadrierung und Summation

$$1 = \frac{M_i^2}{D_i^2}\Phi'(u)^2.$$

$\frac{M_i}{D_i}$ ist somit eine Funktion von u allein.

Wir bilden nun eine Rotationshyperfläche R_1 mit der Achse in der u-Achse, deren Querschnitte mit den Hyperebenen $u = \text{const.}$ den Inhalt $Q(u)$ haben. Die Meridiankurve dieser Fläche ist, wenn mit g der Inhalt der n-dimensionalen Einheitssphäre bezeichnet wird,

$$r = \sqrt[n]{\frac{Q(u)}{g}} \qquad r = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2}$$

und ihr Oberflächeninhalt

$$J_{R_1} = \int_a^b \sqrt{x^2 \sqrt[n]{Q(u)^{2(n-1)}} + Q'(u)^2}\, du.$$

Falls H und R_1 nicht identisch sind, hat R_1 kleinere n-dimensionale Oberfläche und umschliesst gleiches $n+1$ dimensionales Volumen (denn das Volumen V lässt sich auch so darstellen

$$V = -\int_a^b u\, Q'(u)\, du).$$

Wir führen der Kürze halber die Bezeichnung

$$J - J_{R_1} = \tau$$

ein. — Da $Q(u)$ eine stückweise analytische Funktion von u ist, so gilt dasselbe auch von r. Die Gleichung der Rotationshyperfläche lässt sich nach einer beliebigen der Variablen $x_1 x_2 \dots x_n$ z. B. x_1 auflösen, und man sieht aus der Gleichung

$$x_1 = \pm \sqrt{r(u)^2 - x_2^2 - x_3^2 - \dots - x_n^2}$$

dass R_1 aus analytischen Flächenstücken besteht. Eine Ausnahme bilden die Punkte, die den extremen Werten von u entsprechen. Wenn die analytische Fortsetzung der Meridiankurve in diesen Punkten nicht mit ihrem an der u-Achse gespiegelten Bilde zusammenfällt, so wird R_1 in diesen Punkten keine analytische Fläche sein. Wir schneiden in diesem Falle die Umgebung dieser Punkte mit Hyperebenen $u = \text{const.}$ ab und ersetzen sie durch analytische Rotationshyperflächenstücke, die ein gleich grosses $n+1$ dimensionales Volumen umschliessen, deren n-dimensionale Oberfläche in Summa kleiner als $\frac{\tau}{8}$ ist und deren Meridiankurven so beschaffen sind, dass auf jeder von ihnen r eine monotone Funktion von u ist. Desgleichen ersetzen wir die Meridiankurve in den Umgebungen derjenigen Eckpunkte, in denen ihre Tangente senkrecht zu der u-Achse ist, durch Kurvenstücke, längs denen x_1 eine monotone analytische Funktion von u ist, in der Weise, dass das $n+1$ dimensionale Volumen jeder Körperschicht, die durch solch ein eingefügtes Stück einer Rotationshyperfläche und die Hyperebenen $u = \text{const.}$ begrenzt wird, unverändert bleibt und der n-dimensionale Oberflächeninhalt der eingefügten Rotationshyperflächenstücke in Summa kleiner als $\frac{\tau}{8}$ ist. Die so veränderte Fläche R_1^* genügt den am Anfang des Paragraphen angeführten Bedingungen, umschliesst ein $n+1$ dimensionales Volumen, das gleich V ist, und für ihre Oberfläche $J_{R_1^*}$ gilt

$$J_{R_1^*} < J_R + \frac{\tau}{4}.$$

Auf R_1^* wenden wir dasselbe Verfahren an, wie auf H, nur dass wir jetzt statt der u-Achse die x_1-Achse auszeichnen.

Wir bilden eine Rotationshyperfläche R_2 um die x_1-Achse, deren Querschnitte mit den Hyperebenen $x_1 = \text{const.}$ inhaltsgleich den entsprechenden Querschnitten von R_1^* sind. R_2 umschliesst wieder ein Volumen V und ihr Oberflächeninhalt J_{R_2} ist

$$J_{R_2} \leqq J_{R_1^*}.$$

Das Gleichheitszeichen gilt nur in dem Falle, wenn R_1^* ausser der u-Achse auch die x_1-Achse zur Rotationsachse hat. In diesem Falle ist aber R_1^* eine Hypersphäre. Um das zu beweisen, betrachten wir zwei beliebige Punkte A und B der Hyperfläche R_1^* und zeigen, dass ihre Entfernungen vom Koordinatenursprung gleich gross sind. Wir schneiden dazu R_1^* mit zwei Hyperebenen $u = \text{const.}$, von denen die eine durch den Punkt A, die andere durch B geht. Jede dieser Schnittflächen ist eine Hypersphäre, deren Punkte dieselbe Entfernung vom Ursprung haben wie A bez. B. Auf jeder dieser Hypersphären wählen wir einen Punkt A_1 bez. B_1, für den $x_1 = 0$ ist. A_1 und B_1 liegen aber beide auf der Hypersphäre, die als Schnitt von R_1^* mit $x_1 = 0$ entsteht, haben also gleiche Entfernung vom Ursprung. Folglich gilt dasselbe auch von A und B.

Falls R_2 keine Hypersphäre ist, ersetzen wir nötigenfalls diejenigen Hyperflächenteile, die den Umgebungen von Eckpunkten der Meridiankurve entsprechen, durch analytische Flächenstücke, ähnlich wie wir es bei R_1 taten, nur mit dem Unterschiede, dass wir jetzt verlangen, die Oberflächen der ersetzten Teile sollen in Summa kleiner als $\frac{\tau}{8}$ sein. Der Inhalt $J_{R_2^*}$ der erhaltenen Hyperfläche R_2 ist

$$J_{R_2^*} < J_{R_2} + \frac{\tau}{8}.$$

Weiter bilden wir nach demselben Verfahren eine Rotationshyperfläche R_3 um die u-Achse, dazu die stückweise analytische Hyperfläche R_3^*, indem wir nötigenfalls einige Hyperflächenstücke durch analytische mit einem Inhalt kleiner als $\frac{\tau}{16}$ ersetzen, und fahren so fort Rotationshyperflächen abwechselnd um die u- und die x_1-Achse zu bilden, wobei wir die nichtanalytischen Flächenstücke jedesmal durch analytische ersetzen und dafür sorgen, dass bei der i'ten Fläche der Oberflächeninhalt der eingesetzten Stücke kleiner als $\frac{\tau}{2^{i+1}}$ ist.

Die $n+1$ dimensionalen Volumina, die durch diese Flächen begrenzt werden, sind alle gleich V, und für ihre n-dimensionalen Oberflächen gilt die Beziehung

$$J-\frac{\tau}{2}=J_{R_1}+\frac{\tau}{2}>J_{R_1^*}+\frac{\tau}{4}>J_{R_2^*}+\frac{\tau}{8}>J_{R_3^*}+\frac{\tau}{16}>\cdots>$$

$$>J_{R_i^*}+\frac{\tau}{2^{i+1}}>\cdots$$

und daher für jedes beliebige p

$$J-J_{R_p^*}>\frac{\tau}{2}.$$

Entweder stossen wir bei diesem Verfahren nach endlich vielen Schritten auf die Hypersphäre und haben damit gezeigt, dass diese bei gleichem Volumen V kleinere Oberfläche hat, als die Hyperfläche H, oder wir erhalten eine unendliche Folge von Rotationshyperflächen R_i^*, deren Oberflächeninhalte den angegebenen Ungleichungen genügen.

Es soll nun gezeigt werden, dass diese Folge der Rotationshyperflächen R_i^* einer Grenzfläche zustrebt und dass diese eine Hypersphäre ist.

Zu dem Zwecke betrachten wir die in der ux_1-Ebene liegenden Meridiankurven der Rotationshyperflächen R_i^*.

Diese sind, angefangen von der zweiten, alle stückweise analytische, zentralsymmetrische Kurven, die in jedem Quadranten der Koordinatenebene ux_1 monoton verlaufen und alle in einem beschränkten Gebiete der ux_1-Ebene liegen.

Um diese Eigenschaften nachzuweisen, betrachten wir die Meridiankurven zweier aufeinanderfolgender Rotationshyperflächen R_p^* und R_{p+1}. Die Gleichung von R_p^* sei

$$x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2 = F(u).$$

Diese hat zur Achse die u-Achse. Beim Übergang zu R_{p+1} verwandelt sich jeder Querschnitt $Q_p^*(x_1)$ von R_p^*, der einem Werte $x_1 = \text{const.}$ entspricht, in eine n-dimensionale Sphäre mit gleichem Volumen. Um den Inhalt von $Q_p^*(x_1)$ zu berechnen, berechnen wir erst den $n-1$ dimensionalen Querschnitt $Q_p^*(x_1, u)$ von $Q_p^*(x_1)$, der einem Werte $u = \text{const.}$ entspricht, und integrieren dann nach u. $Q_p^*(x_1, u)$ ist aber eine Sphäre des $x_2 x_3 \ldots x_n$ Raumes mit dem Radius $\sqrt{F(u) - x_1^2}$. Deren Inhalt ist $g_1 \left(\sqrt{F(u) - x_1^2}\right)^{n-1}$, wo g_1 eine nur von n abhängige Konstante ist. Der Inhalt von $Q_p^*(x_1)$ ist daher

$$Q_p^*(x_1) = g_1 \int_{-u_0}^{u_0} \left(\sqrt{F(u) - x_1^2}\right)^{n-1} du$$

wobei über diejenigen Werte von u zu integrieren ist, für die die Wurzel reell ist. Beim Übergang zu R_{p+1} verwandelt sich dieser Querschnitt $Q_p^*(x_1)$ in eine inhaltsgleiche Sphäre des Schnittraumes $x_1 = \text{const.}$ Deren Radius ϱ bestimmt man aus der Gleichung

$$g\,\varrho^n = g_1 \int_{-u_0}^{u_0} \left(\sqrt{F(u) - x_1^2}\right)^{n-1} du$$

wo g eine von n abhängige Zahl ist und

$$\varrho^2 = u^2 + x_2^2 + x_3^2 + \ldots + x_n^2 \text{ bedeutet.}$$

Um die Gleichung der Meridiankurve von R_{p+1} (deren Koordinaten durch Striche bezeichnet werden sollen) zu finden, braucht man nur $\varrho = u^1$ und $x_1 = x_1^1$ zu setzen und hat

$$g\,u^{1^n} = g_1 \int_{-u_0}^{u_0} \left(\sqrt{F(u) - x_1^{1^2}}\right)^{n-1} du.$$

Aus dieser Gleichung folgt aber, dass die Meridiankurve von R_{p+1} zentralsymmetrisch und in jedem Quadranten monoton ist. Diese Eigenschaften bleiben auch erhalten beim Übergang zur Fläche R_{p+1}^*.

Nun wollen wir noch zeigen, dass der grösste Abstand eines Punktes der Hyperfläche R_{p+1} vom Ursprung nicht grösser als der grösste Abstand eines auf R_p^* liegenden Punktes vom Ursprung ist. Zu dem Zwecke beachten wir folgendes: der grösste Abstand eines auf $Q_p^*(x_1)$ liegenden Punktes von der x_1-Achse ist sicher nicht kleiner als der grösste Abstand von der x_1^1-Achse eines Punktes des entsprechenden Querschnitts von R_{p+1}. Denn würde das nicht der Fall sein, so würde eine Sphäre einen volumengleichen Körper ganz in ihrem Inneren enthalten, was unmöglich ist. Von zwei Punkten, die in einem zur x_1-Achse senkrechten Schnitt liegen, ist aber derjenige vom Nullpunkt weiter entfernt, der weiter von der x_1-Achse liegt, denn aus

$$m^2 > l^2 \text{ folgt } m^2 + x_1^2 > l^2 + x_1^2$$

wo m und l die Entfernungen der beiden Punkte von der x_1-Achse sind.

Da diese Überlegung für alle Querschnitte gilt, so kann beim Übergang von R_p^* zu R_{p+1} der grösste Durchmesser nur verkleinert werden, und daraus folgt die Behauptung.

Beim Übergang von R_{p+1} zu R_{p+1}^* können wir die Abmessungen der anzusetzenden Stücke genügend klein wählen, so dass die Meridiankurve von R_{p+1}^* nicht aus dem Kreise, der durch den grössten Durchmesser von R_p^* gegeben ist, hinaustritt. Wir betrachten nun die Meridiankurven der Rotationshyperflächen R_p^* mit geradem Index. Diese sind monotone, stückweise analytische Kurven, die im Inneren eines Kreises mit dem Radius R in der x_1u-Ebene liegen. R ist dabei der Radius einer Kugel, in deren Innerem sich die Hyperfläche H unterbringen lässt.

Da die Meridiankurven symmetrisch zu den Koordinatenachsen sind, genügt die Betrachtung derjenigen Teile, die im ersten Quadranten der Koordinatenebene liegen. Dieser Teil einer jeden Meridiankurve hat wegen der vorhin aufgezählten Eigenschaften eine Länge, die kleiner als 2 R ist.

Aus der Folge dieser Kurven lässt sich nun eine Teilfolge auswählen, die gegen eine Grenzkurve konvergiert. Bildet man die dieser Grenzkurve als Meridiankurve entsprechende Rotationshyperfläche um die x_1-Achse, so wird diese gleichen $n+1$ dimensionalen Inhalt umschliessen, wie jede Hyperfläche der Folge, und einen n-dimensionalen Begrenzungsinhalt haben, der höchstens gleich der unteren Grenze der n-dimensionalen Inhalte der Hyperflächen der Folge ist, denn aus der Definition des Inhaltes folgt, dass er gleich der unteren Grenze der Inhalte aller Hyperflächen ist, die gegen die gegebene konvergieren.

Es bleibt übrig zu zeigen, dass diese Grenzhyperfläche nur die Sphäre sein kann.

Wenn die Grenzhyperfläche — eine Rotationshyperfläche mit der Drehachse in der x_1-Achse — keine Sphäre ist, so gibt es sicherlich einen zur u-Achse senkrechten Schnitt, der keine n-dimensionale Sphäre ist. Dieser Wert von u soll mit $\bar{u}$ bezeichnet werden. Dann gilt

$$\bar{b}(\bar{u}) = \delta + \varkappa \sqrt[n]{\bar{Q}(\bar{u})^{n-1}}$$

wo $\delta > 0$ ist und $\bar{b}(u)$ und $\bar{Q}(u)$ sich auf die Grenzfläche beziehen und dieselbe Bedeutung haben, wie $b(u)$ und $Q(u)$ bei H.

Da alle Hyperflächen R_p^* der Folge stetig sind und gegen die Grenzhyperfläche konvergieren, so gibt es (wieder ganz analog dem dreidimensionalen Falle) zu einer beliebig vorgegebenen Grösse σ zwei Grössen $\bar{p}$ und h, so dass für

$$p > \bar{p} \text{ und } \bar{u} - h < u < \bar{u}$$

die Ungleichungen gelten

$$b_p(u) > \bar{b}(\bar{u}) - \sigma \qquad Q_p(u) < \bar{Q}(\bar{u}) + \sigma$$

wo $b_p(u)$ und $Q_p(u)$ die $b(u)$ und $Q(u)$ entsprechenden Grössen der p'ten Hyperfläche unserer Folge sind.

Wenden wir diese Ungleichungen auf die zuletzt angeschriebene Gleichung an, so kommen wir zu der Ungleichung

$$b_p(u) > \delta - \sigma + \varkappa \sqrt[n]{[Q_p(u) - \sigma]^{n-1}}.$$

Nun können wir σ so wählen, dass

$$b_p(u) > \frac{\delta}{2} + \varkappa \sqrt[n]{Q_p(u)^{n-1}} \quad \text{wird.}$$

Beim Übergang von der p'ten Hyperfläche der Folge zur nächsten vermindert sich der n-dimensionale Inhalt des im Intervall $\bar{u} - h < u < \bar{u}$ gelegenen Stückes der Hyperfläche um mehr als

$$\lambda = \int\limits_{\bar{u}-h}^{\bar{u}} \sqrt{\left(\frac{\delta}{2} + \varkappa \sqrt[n]{Q_p(u)^{n-1}}\right)^2 + Q_p'(u)^2}\, du -$$

$$- \int\limits_{\bar{u}-1}^{\bar{u}} \sqrt{\left(\varkappa \sqrt[n]{Q_p(u)^{n-1}}\right)^2 + Q_p'(u)^2}\, du - \frac{\tau}{2^{p+2}}.$$

λ ist grösser als eine von p unabhängige Zahl d. Das folgt aus dem an der entsprechenden Stelle in § 1 angeführten Beweise.

Somit wird beim Übergang von einer Hyperfläche der Folge R_p^* zur nächsten der Oberflächeninhalt jedesmal um mehr als d verringert, und wir können nun in der Folge Hyperflächen angeben, deren n-dimensionaler Inhalt um mehr als eine beliebige Grösse geringer ist, als der Inhalt der gegebenen Hyperfläche H, was aber zu einem Widerspruch führt, da der Inhalt eine wesentlich positive Grösse ist. Unsere Voraussetzung war also falsch und die Grenzfläche der Folge kann demnach nur eine Sphäre sein.

Der Satz ist damit bewiesen, da gezeigt worden ist, dass die $n+1$ dimensionale Sphäre kleineren n-dimensionalen Begrenzungsinhalt hat, als eine beliebige Hyperfläche H, die den am Anfang angeführten Bedingungen genügt und gleiches $n+1$ dimensionales Volumen umschliesst.

§ 3.

Die Methode des vorigen Paragraphen soll zum Beweise folgenden Satzes angewandt werden:

Bei der Randbedingung $u = 0$ ist der erste Eigenwert der Differentialgleichung

$$\triangle u + \lambda u = 0 \qquad \triangle \equiv \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} + \cdots + \frac{\partial^2}{\partial x_n^2}$$

am kleinsten für die n-dimensionale Sphäre, wenn wir alle Gebiete betrachten, die gleiches n-dimensionales Volumen haben und von stückweise analytischen $n-1$ dimensionalen Gebilden begrenzt werden.

Diesen Satz kann man auch, da die Eigenwerte als Minima gewisser Integrale bestimmt werden können, so fassen:

Unter allen Gebieten G des n-dimensionalen Raumes (der durch die rechtwinkligen geradlinigen Koordinaten $x_1\ x_2 \ldots x_n$ bestimmt ist), die von stückweise analytischen $n-1$ dimensionalen Mannigfaltigkeiten begrenzt werden, ist es die n-dimensionale Sphäre, für die das Minimum des Integrales

$$E[\psi] = \int\limits_G^{(n)} \left\{ \left(\frac{\partial \psi}{\partial x_1}\right)^2 + \left(\frac{\partial \psi}{\partial x_2}\right)^2 + \ldots + \left(\frac{\partial \psi}{\partial x_n}\right)^2 \right\} dx_1\, dx_2 \ldots dx_n$$

unter den Nebenbedingungen

$$\int\limits_G^{(n)} \psi^2\, dx_1\, dx_2 \ldots dx_n = 1\,; \qquad \int\limits_G^{(n)} dx_1\, dx_2 \ldots dx_n = 1$$

und $\psi = 0$ am Rande von G

den kleinsten Wert annimmt, wobei von den Funktionen ψ, die zum Vergleich im Minimalproblem zugelassen sind, vorausgesetzt wird, dass sie in G mit Einschluss des Randes stetig sind, in G stetige erste Ableitungen besitzen und dass für sie das Integral E einen Sinn hat.

Als bekannt soll vorausgesetzt werden, dass jedem Gebiete G eine und nur eine Funktion u entspricht, die den ersten Eigenwert $E[u]$ bestimmt. Diese Funktion u ist analytisch bis auf den Rand und verschwindet nirgends im Inneren des Gebietes. Folglich ist sie im Inneren des Gebietes stets positiv oder stets negativ. Es soll vorausgesetzt werden, was keine Einschränkung bedeutet, dass sie negativer Werte nicht fähig ist.

Jetzt soll ein beliebiges Gebiet G betrachtet werden, das den angeführten Voraussetzungen genügt und keine Sphäre ist. Die Funktion $u = f(x_1, x_2 \ldots x_n)$, für die in diesem Gebiete $E[u]$ zum Minimum wird, soll als n-dimensionale Hyperfläche des $n+1$ dimensionalen Raumes $x_1\, x_2 \ldots x_n u$ aufgefasst werden. Trotzdem wir die Hyperfläche nicht beliebig im Koordinatensystem anordnen können, ist auch hier die Bedingung erfüllt, dass

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x_1}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial x_2}\right)^2 + \ldots + \left(\frac{\partial f}{\partial x_n}\right)^2$$

in keinem n-dimensionalen Gebiete der Hyperfläche unendlich wird oder verschwindet, denn wir haben es hier nicht mehr mit einer aus analytischen Stücken zusammengesetzten Hyperfläche zu tun, sondern mit einer solchen, die durch eine analytische Funktion gegeben ist. Auch kein Stück einer Geraden, die parallel der u-Achse ist, kann der Fläche angehören (auch nicht am Rande von G).

Wir zerlegen die Hyperfläche wie im vorigen Paragraphen in Stücke und führen in jedem Stück die unabhängigen Variablen $u, v_{i1}, v_{i2}, \ldots v_{in-1}$ ein. Dass die Funktion f am Rande von G eventuell nicht analytisch ist, stört weiter nicht, da das nur die $u = 0$ entsprechenden Werte betrifft; für alle übrigen Werte bleiben die Funktionen $x_{i1}, x_{i2}, \ldots x_{in}$ und ebenfalls Q analytisch. Indem wir die Transformation der Integrale wie im vorigen Paragraphen durchführen und sie dann summieren, erhalten wir, unter Beachtung des Umstandes, dass D_i im gegebenen Falle immer positiv ist,

$$E[u] = \int_0^b \left\{ \sum_{i=1}^k \int_{B_i(u)}^{(n-1)} \frac{M_i^2}{D_i} dv_{i1}\, dv_{i2} \ldots dv_{i\,n-1} \right\} du\,;$$

$$\int_0^b \left\{ \sum_{i=1}^k \int_{B_i(u)}^{(n-1)} D_i\, dv_{i1}\, dv_{i2} \ldots dv_{i\,n-1} \right\} u^2 du = 1\,;$$

$$\int_0^b \left\{ \sum_{i=1}^k \int_{B_i(u)}^{(n-1)} D_i\, dv_{i1}\, dv_{i2} \ldots dv_{i\,n-1} \right\} du = 1.$$

Genau wie früher, sind auch diese Integrale nötigenfalls als uneigentliche Integrale aufzufassen.

Beachten wir, dass die Nebenbedingungen auch so geschrieben werden können

$$\int_0^b u^2 Q'(u)\, du = -1\,; \qquad \int_0^b Q'(u)\, du = -1.$$

Unter Benutzung der im vorigen Paragraphen berechneten Grössen $Q(u)$ und $b(u)$ machen wir uns zur Aufgabe, das Minimumproblem

$$\sum_{i=1}^k \int_{B_i(u)}^{(n-1)} \frac{M_i^2}{D_i} dv_{i1}\, dv_{i2} \ldots dv_{i\,n-1} = min$$

unter den Nebenbedingungen

$$\sum_{i=1}^{k} \int\limits_{B_i(u)}^{(n-1)} D_i \, dv_{i1} \, dv_{i2} \ldots dv_{i\,n-1} = - Q'(u)\,;$$

$$\sum_{i=1}^{k} \int\limits_{B_i(u)}^{(n-1)} | M_i | \, dv_{i1} \, dv_{i2} \ldots dv_{i\,n-1} = b(u)$$

zu lösen.

Wir entwickeln $\frac{M_i^2}{D_i}$ nach dem Maclaurinschen Satze und erhalten, unter Benutzung der im vorigen Paragraphen eingeführten Bezeichnungen,

$$\frac{M_i^2}{D_i} = \frac{M_0^2}{D_0} + \mu_i \frac{2\,M_0}{D_0} - \delta_i \frac{M_0^2}{D_0^2} + \frac{(\mu_i D_0 - \delta_i M_0)^2}{(D_0 + \Theta\,\delta_i)^3}\,; \; 0 < \Theta < 1.$$

Da D_i und folglich auch $D_0 + \Theta\,\delta_i$ immer positiv ist, ist das letzte Glied in dieser Gleichung immer grösser oder gleich Null. Integration und Summation ergibt, da das zweite und dritte Glied rechts fortfällt und

$$\frac{M_0}{D_0} = - \frac{b(u)}{Q'(u)} \text{ ist,}$$

$$\sum_{i=1}^{k} \int\limits_{B_i(u)}^{(n-1)} \frac{M_i^2}{D_i} \, dv_{i1} \, dv_{i2} \ldots dv_{i\,n-1} \geqq - \frac{b(u)^2}{Q'(u)}$$

wobei das Gleichheitszeichen nur in dem Falle gilt, wenn

$$\mu_i D_0 - \delta_i M_0 = 0$$

oder, was damit gleichbedeutend ist, wenn

$$\frac{M_i}{D_i} \quad \text{von} \quad v_{i1}, \, v_{i2}, \ldots v_{i\,n-1}$$

unabhängig ist.

Da auf Grund des im vorigen Paragraphen bewiesenen Satzes stets gilt

$$b(u) \geqq \varkappa \sqrt[n]{Q(u)^{n-1}}$$

wo $\varkappa$ eine nur von n abhängige Zahl ist und das Zeichen $=$

nur für eine Sphäre richtig ist, so können wir schreiben

$$\sum_{i=1}^{k} \int\limits_{B_i(u)}^{(n-1)} \frac{M_i^2}{D_i} dv_{i1}\, dv_{i2} \ldots dv_{i\,n-1} \geqq - \frac{\varkappa^2 \sqrt[n]{Q(u)^{2(n-1)}}}{Q'(u)}.$$

Indem wir die Ungleichung nach u von 0 bis b integrieren, finden wir

$$E[u] \geqq -\varkappa^2 \int\limits_0^b \frac{\sqrt[n]{Q(u)^{2(n-1)}}}{Q'(u)}\, du.$$

Das Gleichheitszeichen kann hier nur in dem Falle in Kraft treten, wenn alle $Q(u)$ Sphären sind und $\frac{M_i}{D_i}$ eine Funktion nur von u ist. Es müsste also f eine Rotationshyperfläche sein, was aber nicht der Fall ist, da $Q(0)$ keine Sphäre ist.

Nun ordnen wir der Hyperfläche f eine Rotationshyperfläche $u = \varphi(x_1, x_2, \cdot\cdot\cdot x_n)$ zu, deren alle $Q(u)$ dieselben Werte haben wie die entsprechenden der Hyperfläche f. Diese Rotationshyperfläche befriedigt die Nebenbedingungen und erteilt dem Integral E einen kleineren Wert, als es f tut. Das Integral ist in diesem Falle über die n-dimensionale Sphäre zu erstrecken und soll zum Unterschiede mit E^* bezeichnet werden. φ ist eine im Minimumproblem $E^*[\psi]$ zum Vergleich zugelassene Funktion, und das Integral $E^*[\varphi]$ ist daher grösser oder gleich dem ersten Eigenwerte der Sphäre. Dieser letztere ist daher kleiner (unter Ausschluss der Gleichheit) als $E[f]$. Da G ein beliebiges nicht sphärisches Gebiet war, das den Bedingungen des Satzes genügte, so ist der Beweis des angekündigten Satzes erbracht.

§ 4.

Nun soll gezeigt werden, dass der zweite Eigenwert bei der im vorigen Paragraphen behandelten Aufgabe für dasjenige Gebiet den kleinsten Wert hat, welches aus zwei inhaltsgleichen Sphären besteht (im Falle $n = 2$ entsprechend aus zwei inhaltsgleichen Kreisen).

Es seien folgende bekannte Tatsachen vorausgeschickt:

Der zweite Eigenwert existiert für jedes Gebiet G und ist sicherlich nicht kleiner, als der erste.

Die Nullstellen der zweiten Eigenfunktion teilen das Gebiet in zwei Teile, da die zweite Eigenfunktion wegen der Bedingung

$$\int_G^{(n)} f\psi \, dx_1 \, dx_2 \ldots dx_n = 0$$

wo f die erste Eigenfunktion ist, nicht überall dasselbe Vorzeichen haben kann, denn f hat bekanntlich stets einerlei Vorzeichen. Die zweite Eigenfunktion muss also in einem Teile des Gebietes positiv, im anderen negativ sein. Die Grenze der Teilgebiete bilden die Nullstellen der Eigenfunktion. In mehr als zwei Teile können die Nullstellen der zweiten Eigenfunktion das Gebiet aber auch nicht teilen[1]).

Der zweite Eigenwert des ganzen Gebietes kann nun aber als erster Eigenwert eines jeden der Teilgebiete aufgefasst werden.

Wir betrachten nun dasjenige Teilgebiet, dessen Inhalt kleiner oder gleich dem halben Inhalt des ganzen Gebietes ist. Sein erster Eigenwert ist sicherlich grösser als der erste Eigenwert der inhaltsgleichen Sphäre, und erst recht grösser als der erste Eigenwert der Sphäre, deren Inhalt genau gleich der Hälfte des Inhaltes des gegebenen Gebietes G ist.

Den kleinsten zweiten Eigenwert erhält man also, wenn jedes der Teilgebiete eine Sphäre mit dem halben Inhalt des Gebietes G ist, d. h. wenn das ganze Gebiet aus zwei inhaltsgleichen Sphären besteht.

Es liegt die Vermutung nahe, dass der k'te Eigenwert am kleinsten ist für ein Gebiet, das aus k inhaltsgleichen Sphären besteht.

Mit denselben Mitteln, wie im Falle $k = 2$, lässt sich dieser Satz aber nicht beweisen, denn es ist wohl richtig, dass die Nullstellen des k'ten Eigenwertes das Gebiet in höchstens k Teile teilen, dass es aber auch wenigstens k sein müssen, trifft sicherlich nicht zu.

1) Vgl. Courant. Ein allgemeiner Satz zur Theorie der Eigenfunktionen selbstadjungierter Differentialausdrücke. Göttinger Nachrichten 1923.