

VERALLGEMEINERUNG DES BEGRIFFES DER DIRICHLETSCHEN REIHEN

VON

K. VÄISÄLÄ

DORPAT 1921

Druck von C. Mattiesen, Dorpat

1. Der Konvergenzbereich der sog. allgemeinen Dirichletschen Reihen

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n e^{-\lambda_n s},$$

wo die λ reell sind und

$$\lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \lambda_3 \leq \dots, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \lambda_n = \infty,$$

ist bekanntlich eine Halbebene, die links durch eine Parallele zur Achse des Imaginären begrenzt ist. Es ist nun natürlich zu fragen, wie es sich mit dem Konvergenzbereiche solcher noch allgemeinerer Dirichletscher Reihen verhält, in denen die λ komplex sind. Diese Frage wollen wir im folgenden erörtern.

Wir stellen folgende Definition auf:

Definition: Die Reihe

$$(1) \quad \sum_{n=1}^{\infty} a_n e^{-\lambda_n s},$$

wo

$$\lambda_n = r_n e^{i\varphi_n}$$

und

$$\lim_{n \rightarrow \infty} r_n = \infty$$

ist, nennen wir eine Dirichletsche Reihe¹⁾.

Im ersten Kapitel behandeln wir hauptsächlich die absolute Konvergenz, wobei wir auch eine hinreichende Bedingung dafür

1) Die Dirichletschen Reihen mit reellen λ enthalten bekanntlich die Potenzreihen ($\lambda_n = n$) und die sog. einfachen Dirichletschen Reihen $\sum \frac{a_n}{n^s}$ ($\lambda_n = \log n$). Die Reihen (1) enthalten ausserdem noch die trigonometrischen Reihen, denn es ist ja

$$\sum (a_n \cos n s + \beta_n \sin n s) = \sum \left(\frac{a_n - i \beta_n}{2} e^{i n s} + \frac{a_n + i \beta_n}{2} e^{-i n s} \right).$$

aufstellen, dass die Reihe (1) höchstens am Rande des absoluten Konvergenzbereiches bedingt konvergiert. Im zweiten Kapitel setzen wir voraus, dass die φ_n einen Limes haben. Unter gewissen einschränkenden Bedingungen wird der Konvergenzbereich dieser Reihen aus einer Halbebene bestehen, und die Lage der Grenzgeraden wird in ähnlicher Weise bestimmt, wie im Falle der reellen λ_n . Sind insbesondere alle φ_n gleich 0, mit anderen Worten, sind die λ_n reell, so ist z. B.

$$\lambda_{n+1} - \lambda_n > -\frac{c}{n^{1+\varepsilon}} \quad (c > 0, \varepsilon > 0)$$

eine solche hinreichende einschränkende Bedingung. Diese Bedingung ist von grösserer Tragweite als die obenerwähnte gewöhnliche

$$\lambda_{n+1} - \lambda_n \geq 0.$$

Im letzten Artikel wird eine Dirichletsche Reihe behandelt, bei der $\lim \varphi_n$ existiert und die r_n monoton zunehmen, deren Konvergenzbereich aber aus einer Halbebene und einem isolierten Punkte besteht.

I.

2. Satz I: Falls

$$(2) \quad \limsup_{n \rightarrow \infty} \varphi_n - \liminf_{n \rightarrow \infty} \varphi_n < \pi$$

ist, ist der absolute Konvergenzbereich der Reihe (1) durch eine offene konvexe Kurve, sog. Konvergenzkurve, begrenzt. Jede Gerade, deren Richtungswinkel α im Intervall

$$(3) \quad -\frac{\pi}{2} - \liminf_{n \rightarrow \infty} \varphi_n < \alpha < \frac{\pi}{2} - \limsup_{n \rightarrow \infty} \varphi_n$$

liegt, schneidet die Konvergenzkurve in einem und nur in einem Punkt.

Die Konvergenzkurve kann auch im Unendlichen liegen, in welchem Falle die Reihe entweder überall oder nirgends konvergiert.

Liegen die Richtungswinkel der Schenkel eines Winkels in dem Intervall (3) und konvergiert die Reihe (1) absolut in dem Scheitel des Winkels, so konvergiert sie in diesem Winkel gleichmässig.

Ohne Beschränkung der Allgemeinheit, können wir bei der Beweisführung annehmen, dass

$$(4) \quad \begin{aligned} \limsup \varphi_n &= \varphi', \\ \liminf \varphi_n &= -\varphi' \end{aligned}$$

ist, wo nach (2)

$$\varphi' < \frac{\pi}{2}$$

ist.

Um unseren Satz zu beweisen, abgesehen von der Konvexitätseigenschaft der Konvergenzkurve, brauchen wir offenbar nur zu zeigen, dass, sobald die Reihe (1) für $s = s_0$ absolut konvergiert; sie absolut und zwar gleichmässig in einem Winkelraum konvergiert, wo

$$-\left(\frac{\pi}{2} - \varphi' - \delta\right) < \arg(s - s_0) < \frac{\pi}{2} - \varphi' - \delta \quad \left(0 < \delta < \frac{\pi}{2} - \varphi'\right)$$

ist. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit können wir bei der Beweisführung annehmen, dass $s_0^1 = 0$ ist, d. h. dass die Reihe

$$(5) \quad \sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$$

konvergiert. Setzt man noch

$$s = Re^{i\Phi},$$

so findet man in dem betreffenden Winkelraum

$$-\left(\frac{\pi}{2} - \varphi' - \delta\right) < \Phi < \frac{\pi}{2} - \varphi' - \delta.$$

Andererseits ist infolge von (4) für hinreichend grosse n ($n > n_0$)

$$-(\varphi' + \delta) < \varphi_n < \varphi' + \delta,$$

so dass

$$-\frac{\pi}{2} < \varphi_n + \Phi < \frac{\pi}{2}$$

ist. Hieraus folgt, dass in dem betreffenden Winkelraum für $n > n_0$

$$|a_n e^{-\lambda_n s}| = |a_n| e^{-r_n R \cos(\varphi_n + \Phi)} \leq |a_n|$$

ist. Wegen der Konvergenz von (5), konvergiert also die Reihe (1) absolut und gleichmässig in dem genannten Winkel.

(7) und die Konvergenzkurve der Reihe (1) besteht infolgedessen aus Teilen der Konvergenzkurven der Reihen (7). Wir bezeichnen mit B_ν denjenigen Teil der Konvergenzkurve der Reihe Σ_ν , der gleichzeitig einen Teil der Konvergenzkurve der Reihe (1) bildet. Da kein Punkt der Konvergenzkurve der Reihe (1) ausserhalb des Konvergenzbereiches von Σ_ν liegt, ist offenbar in jedem Punkt auf B_ν $\gamma \geq \gamma'_\nu$. Durchläuft ν die Werte $1, 2, \dots, p$, so bilden die B_ν die ganze Konvergenzkurve der Reihe (1), und wir ersehen somit, dass in jedem Punkt auf dieser Konvergenzkurve $\gamma \geq \text{Min } \gamma'_\nu$ und folglich $\gamma' \geq \text{Min } \gamma'_\nu$ ist. Nach (8) ergibt sich also

$$\gamma' \geq \pi - \frac{2\varphi'}{p}.$$

Da die rechte Seite gegen π strebt, wenn p wächst, muss $\gamma' \geq \pi$ sein, wo offenbar nur das Gleichheitszeichen eintreten kann. Die Konvergenzkurve ist mithin konvex.

Dass die beiden extremen Fälle, in denen die Reihe (1) entweder überall oder nirgends konvergiert, vorkommen können, darüber haben wir schon in der Theorie der Dirichletschen Reihen mit reellen λ zahlreiche Beispiele.

3. Jetzt wollen wir folgenden allgemeinen Satz über die absolute Konvergenz der Reihe (1) beweisen, wobei wir keine einschränkenden Voraussetzungen über die Reihe machen.

Satz II: *Der absolute Konvergenzbereich der Reihe (1) ist durch eine geschlossene oder nicht geschlossene konvexe Kurve begrenzt.*

Die Konvergenzkurve kann auch im Unendlichen liegen, in welchem Falle die Reihe entweder überall oder nirgends konvergiert. Es kann auch eintreten, dass der Konvergenzbereich aus einer endlichen oder unendlichen Menge von Punkten besteht, die auf einer und derselben Geraden liegen.

Die Reihe konvergiert gleichmässig in jedem endlichen abgeschlossenen Bereiche, der nebst seiner Begrenzung aus inneren Punkten des absoluten Konvergenzbereiches besteht, und stellt also in ihrem absoluten Konvergenzbereich eine reguläre analytische Funktion dar.

Um den Satz zu beweisen, zerlegen wir die Reihe (1) in drei Teile

$$\begin{aligned}
 (9) \quad & \sum' a_n e^{-\lambda_n s} \quad \left(0 \leq \varphi_n < \frac{2\pi}{3} \right), \\
 & \sum'' a_n e^{-\lambda_n s} \quad \left(\frac{2\pi}{3} \leq \varphi_n < \frac{4\pi}{3} \right), \\
 & \sum''' a_n e^{-\lambda_n s} \quad \left(\frac{4\pi}{3} \leq \varphi_n < 2\pi \right),
 \end{aligned}$$

wo die Indizes der Summenzeichen bedeuten, dass jede Reihe diejenigen Glieder der Reihe (1) enthält, bei denen die φ_n in dem in den Klammern angegebenen Intervalle liegen. Der absolute Konvergenzbereich der Reihe (1) besteht aus dem gemeinschaftlichen Teile der absoluten Konvergenzbereiche der Reihen (9). Auf jede der Reihen (9) lässt sich der Satz I anwenden, und der absolute Konvergenzbereich jeder von ihnen ist folglich entweder von einer konvexen Kurve begrenzt oder die Reihe konvergiert überall oder nirgends. Dieselbe Eigenschaft hat dann natürlich auch der gemeinschaftliche Teil dieser Bereiche, d. h. der absolute Konvergenzbereich der Reihe (1).

Wenn zwei von den Konvergenzbereichen der Reihen (9) keine gemeinsamen inneren Punkte besitzen, sondern nur gemeinsame Randpunkte, die wegen der Konvexitätseigenschaft auf einer und derselben Geraden liegen, und zwar eine Anzahl gemeinsamer Randpunkte von der Beschaffenheit, dass die beiden Reihen sowie auch die dritte in ihnen konvergieren, so besteht der absolute Konvergenzbereich von (1) aus den letztgenannten Punkten. Dass dieser sowie die übrigen extremen Fälle des Satzes wirklich eintreten, bestätigt man leicht durch einfache Beispiele.

Aus Satz I folgt, dass jede der Reihen (9) in einem abgeschlossenen Bereiche, der nebst seiner Begrenzung ausschliesslich aus inneren Punkten des absoluten Konvergenzbereiches der betreffenden Reihe besteht, gleichmässig konvergiert. Nach dem obigen ist also auch in bezug auf die Reihe (1) dasselbe der Fall. Da ferner die Glieder dieser Reihe in der ganzen Ebene regulär sind, stellt sie in ihrem absoluten Konvergenzbereiche eine reguläre analytische Funktion dar.

4. Satz III: *Es gibt unendlich viele Dirichletsche Reihen, deren absoluter Konvergenzbereich ein beliebig gegebener, durch eine konvexe Kurve begrenzter Bereich ist.*

Um den Satz zu beweisen, bilden wir eine unendliche Dirichletsche Reihenschar, deren jeder Repräsentant den gegebenen Bereich zu seinem absoluten Konvergenzbereich hat. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit können wir annehmen, dass der Punkt Null innerhalb des Bereiches liegt. Falls die gegebene Kurve nicht eine geschlossene ist, bezeichnen wir mit ψ' und ψ'' die Richtungswinkel des linken bzw. des rechten Schenkels des Winkels, dessen Scheitel im Punkt 0 liegt und dessen Schenkel durch die ins Unendliche entfernten Punkte der Kurve gehen. Dann ist

$$\psi' - \psi'' < \pi.$$

Wir setzen weiter

$$(10) \quad \begin{aligned} \varphi' &= \frac{\pi}{2} - \psi', \\ \varphi'' &= -\frac{\pi}{2} - \psi''. \end{aligned}$$

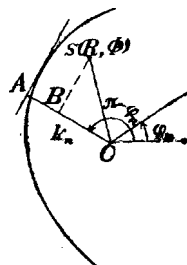


Fig. 1.

Wir bestimmen jetzt in dem Intervalle (φ'', φ') , wenn die gegebene Kurve nicht eine geschlossene ist, und in dem Intervalle $(0, 2\pi)$, falls die genannte Kurve eine geschlossene ist, eine beliebige unendliche Zahlenmenge

$$\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n, \dots$$

von der wir nur annehmen, dass sie das betreffende Intervall überall dicht bedeckt. Hierauf fällen wir auf den Radiusvektor, dessen Argument $\pi - \varphi_n$ ($n=1, 2, \dots$) ist, ein Lot, das die gegebene Kurve trifft ohne sie zu schneiden, und bezeichnen mit k_n seinen Abstand von dem Punkte 0. Wir behaupten dann, dass der absolute Konvergenzbereich der Reihenschar

$$(11) \quad \sum_{n=1}^{\infty} e^{-n k_n} e^{-n e^{i \varphi_n} s}$$

der gegebene Bereich ist.

Um dieses zu beweisen, setzen wir $s = R e^{i \Phi}$, wodurch der absolute Betrag des n^{ten} Gliedes unserer Reihe

$$(12) \quad e^{-n(k_n + R \cos(\varphi_n + \Phi))}$$

wird.

Wir nehmen zunächst an, dass s im Inneren unseres Bereiches liegt. Dann ergibt sich (Fig. 1)

$$k_n + R \cos(\varphi_n + \Phi) = \overline{AB} \geq c,$$

wo c den kürzesten Abstand des Punktes s von der Begrenzungskurve bezeichnet. Folglich ist für jedes n der Ausdruck (12) $\leq e^{-nc}$, und wegen der Konvergenz der Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} e^{-nc}$$

konvergiert mithin die Reihe (11) absolut in dem betreffenden Punkte s .

Wir nehmen jetzt an, dass s ausserhalb unseres Bereiches liegt. Wir ziehen durch s die zwei Geraden, die die Begrenzungskurve treffen ohne sie zu schneiden. Wie aus der Fig. 2 hervorgeht, ist

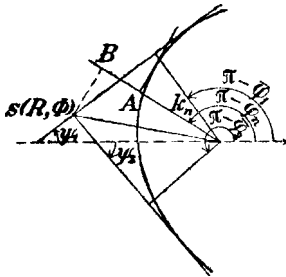


Fig. 2.

$$\psi_1 \geq \psi', \quad \psi_2 \leq \psi'',$$

woraus nach (10)

$$\varphi'' \leq \varphi_2 < \varphi_1 \leq \varphi'$$

folgt. Da die Zahlen φ_n das Intervall (φ'', φ') überall dicht bedecken, liegen in dem Intervall (φ_2, φ_1) unendlich viele φ_n . Für alle diese φ_n ist

$$k_n + R \cos(\varphi_n + \Phi) = -\overline{AB} \leq 0;$$

und folglich sind die zugehörigen Ausdrücke (12) ≥ 1 . Dies besagt aber, dass die Reihe (11) in dem betreffenden Punkte s divergiert. Unser Satz ist hiermit vollständig bewiesen.

5. Bisher haben wir nur die absolute Konvergenz der Dirichletschen Reihe (1) behandelt. Jetzt wollen wir die Konvergenz auch im gewöhnlichen Sinne betrachten, indem wir zunächst folgenden Satz beweisen:

Satz IV: Falls

$$(13) \quad \log n = o(r_n)$$

ist, konvergiert die Reihe (1) nur in dem absoluten Konvergenzbereich, von den Punkten der Konvergenzkurve eventuell abgesehen. Hierbei

bestehen alle vorstehenden Sätze auch in bezug auf die Konvergenz im gewöhnlichen Sinne.¹⁾

Wir bemerken sofort, dass, sobald der erste Teil des Satzes nachgewiesen ist, daraus die Richtigkeit des zweiten Teiles unmittelbar folgt. Der erste Teil wieder ist eine direkte Folgerung aus dem

Hilfssatz: *Ist die Bedingung (13) erfüllt und konvergiert die Reihe (1) in den Spitzen eines Dreiecks, so konvergiert sie und zwar absolut in jedem Punkt innerhalb des Dreiecks.*

Den Beweis dieses Hilfssatzes führen wir indirekt und nehmen somit an, dass es innerhalb des Dreiecks einen Punkt O gibt, wo die Reihe (1) nicht absolut konvergiert. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit können wir annehmen, dass O der Punkt Null ist. Bezeichnen wir mit (R_1, Φ_1) , (R_2, Φ_2) , (R_3, Φ_3) die Polarkoordinaten der Spitzen des Dreiecks, so wissen wir also nach unserer Annahme, dass

$$(14) \quad \sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$$

divergiert, während die Reihen

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n e^{-r_n R_\nu e^{i(\varphi_n + \Phi_\nu)}} \quad (\nu = 1, 2, 3)$$

konvergieren. Die absoluten Beträge der Glieder der letztgenannten Reihen haben somit den Limes 0, d. h.

$$(15) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} |a_n| e^{-r_n R_\nu \cos(\varphi_n + \Phi_\nu)} = 0 \quad (\nu = 1, 2, 3).$$

Weil nun die Reihe (14) divergiert, ist $\limsup_{n \rightarrow \infty} |a_n| n^2 > 1$, so dass für unendlich viele n

$$(16) \quad |a_n| > \frac{1}{n^2}$$

1) Schon die Beispiele aus der Theorie der Dirichletschen Reihen mit reellen λ lehren uns, dass (13) sich durch die Bedingung

$$(13') \quad \log n = O(r_n),$$

die von grösserer Tragweite ist, nicht ersetzen lässt. Im letzten Art. geben wir ein Beispiel, wo der Konvergenzbereich sogar einen isolierten Punkt enthält, obwohl die Bedingung (13') erfüllt ist.

ist. Wie leicht ersichtlich, gibt es eine positive Zahl ε von der Beschaffenheit, dass für alle Werte von φ_n wenigstens eine der Grössen

$$\cos(\varphi_n + \Phi_1), \cos(\varphi_n + \Phi_2), \cos(\varphi_n + \Phi_3)$$

$< -\varepsilon$ ist. Wenigstens eine von diesen, etwa die erste, erfüllt diese Bedingung für unendlich viele von denjenigen Werten von n , für die auch (16) besteht. Die unendliche Menge dieser n ziehen wir jetzt in Betracht. Für sie gelten also die Ungleichungen (16) und

$$(17) \quad \cos(\varphi_n + \Phi_1) < -\varepsilon$$

und es ist folglich

$$|a_n| e^{-r_n R_1 \cos(\varphi_n + \Phi_1)} > \frac{1}{n^2} e^{r_n R_1 \varepsilon}.$$

Für hinreichend grosse n ist aber infolge von (13) $r_n R_1 \varepsilon > 3 \log n$, so dass die rechte Seite der vorigen Ungleichung $> n$ ist und folglich

$$\lim_{n \rightarrow \infty} |a_n| e^{-r_n R_1 \cos(\varphi_n + \Phi_1)} = \infty,$$

wenn n die durch (16) und (17) bestimmten Werte durchläuft. Das gewonnene Resultat steht aber im Widerspruch mit (15), und unsere Antithese ist somit falsch, mit anderen Worten, die Reihe konvergiert absolut in jedem Punkt innerhalb des Dreiecks, w. z. b. w.

II.

6. **Satz V:** Wenn

$$(18) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \varphi_n = 0$$

ist, so besteht der absolute Konvergenzbereich der Reihe (1) aus einer Halbebene, welche links durch eine Parallele zur Achse des Imaginären begrenzt ist¹⁾.

Damit der Bereich der Konvergenz im gewöhnlichen Sinne auch von derselben Beschaffenheit wäre, ist es hinreichend, dass ausser (18) die Bedingung

1) Die Konvergenzgerade kann auch im Unendlichen liegen, und die Reihe konvergiert dann entweder überall oder nirgends.

$$(a) \quad \log n = o(r_n)$$

erfüllt sei oder für alle n eine von den Bedingungen ($\varepsilon > 0$)

$$(b) \quad r_{n+1} - r_n > -\frac{c}{n^{1+\varepsilon}},$$

$$(c) \quad \begin{cases} \log n = O(r_n) \\ r_{n+1} - r_n > -c \frac{\log^q n}{n} \end{cases},$$

gleichzeitig mit einer von den Bedingungen

$$(b') \quad \varphi_{n+1} - \varphi_n = O\left(\frac{1}{n^{1+\varepsilon}}\right),$$

$$(c') \quad \begin{cases} \log n = O(r_n) \\ \varphi_{n+1} - \varphi_n = O\left(\frac{\log^q n}{n}\right) \end{cases},$$

(d') die φ_n ändern sich von einer Stelle an monoton bestehe.

In jedem endlichen abgeschlossenen Bereiche, der nebst seinem Rande nur aus inneren Punkten des Konvergenzbereiches besteht, konvergiert die Reihe (1) in den genannten Fällen gleichmässig und stellt folglich eine reguläre analytische Funktion dar.

Der erste Teil des Satzes folgt unmittelbar aus Satz I. Aus Satz IV folgt auch der letztere Teil des Satzes in bezug auf die Bedingung (a). Im folgenden wird ein direkter Beweis auch hinsichtlich dieser Bedingung gegeben. Um den übrig bleibenden Teil unseres Satzes zu beweisen, nehmen wir an, dass die Reihe (1) im Punkte $s = s_0$ konvergiert. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit können wir annehmen, dass $s_0 = 0$ ist, und wir setzen dann

$$(19) \quad s = R e^{i\Phi}.$$

Es handelt sich offenbar lediglich um den Nachweis der gleichmässigen Konvergenz der Reihe (1) in einem Bereiche, der durch die Ungleichungen

$$(20) \quad -\frac{\pi}{2} + 2\delta < \Phi < \frac{\pi}{2} - 2\delta \quad \left(0 < 2\delta < \frac{\pi}{2}\right), \\ R_0 < R < R_1 \quad (R_0 > 0, R_1 \text{ endlich})$$

bestimmt ist.

Wir bezeichnen

$$(21) \quad A(\nu) = \sum_{n=1}^{\nu} a_n,$$

so dass wegen der Konvergenz der Reihe (1) für $s=0$ für alle ν

$$|A(\nu)| < A$$

ist, wo A eine Konstante bedeutet. Mit Hilfe der partiellen Summation bekommt man

$$(22) \quad \left| \sum_{n=v}^w a_n e^{-\lambda_n s} \right| = \sum_{n=v}^w (A(n) - A(n-1)) e^{-\lambda_n s} \\ = \sum_{n=v}^w A(n) (e^{-\lambda_n s} - e^{-\lambda_{n+1} s}) - A(v-1) e^{-\lambda_v s} \\ + A(w) e^{-\lambda_{w+1} s},$$

woraus

$$(23) \quad \left| \sum_{n=v}^w a_n e^{-\lambda_n s} \right| < A \sum_{n=v}^w |M_n| + |P_v|$$

folgt. Hierbei ist

$$M_n = e^{-\lambda_n s} - e^{-\lambda_{n+1} s} = s \int_{\lambda_n}^{\lambda_{n+1}} e^{-u s} du,$$

$$(24) \quad P_v = A(v-1) e^{-\lambda_v s} - A(w) e^{-\lambda_{w+1} s}.$$

Mit Rücksicht auf (19) ergibt sich weiter

$$M_n = N_n + N'_n,$$

wo

$$(25) \quad N_n = i r_n R e^{i\Phi} \int_{\varphi_n}^{\varphi_{n+1}} e^{-r_n R e^{i(\varphi + \Phi)}} e^{i\varphi} d\varphi,$$

$$(26) \quad N'_n = R e^{i(\varphi_{n+1} + \Phi)} \int_{r_n}^{r_{n+1}} e^{-r R e^{i(\varphi_{n+1} + \Phi)}} dr.$$

Folglich ist

$$(27) \quad \sum_{n=v}^w |M_n| \leq \sum_{n=v}^w |N_n| + \sum_{n=v}^w |N'_n|.$$

Um nachzuweisen, dass die linke Seite von (23) gleichmässig zu 0 strebt, wenn s in dem Bereich (20) liegt und v zunimmt, brauchen wir infolge von (27) nur zu zeigen, dass dann

$$(28) \quad P_v, \sum_{n=v}^w |N_n|, \sum_{n=v}^w |N'_n|$$

gleichmässig gegen 0 konvergieren.

Aus der Voraussetzung (18) folgt, dass für hinreichend grosse n ($n > n_0$)

$$-\delta < \varphi_n < \delta$$

ist, so dass für alle s im Gebiete (20)

$$-\frac{\pi}{2} + \delta < \varphi_n + \Phi < \frac{\pi}{2} - \delta$$

und daher

$$\cos(\varphi_n + \Phi) > \sin \delta$$

ist. (24) liefert nun zunächst für $v > n_0$

$$\begin{aligned} |P_v| &< A(e^{-r_v R \cos(\varphi_v + \Phi)} + e^{-r_{w+1} R \cos(\varphi_{w+1} + \Phi)}) \\ &< A(e^{-r_v R_0 \sin \delta} + e^{-r_{w+1} R_0 \sin \delta}), \end{aligned}$$

woraus folgt, dass $|P_v|$ gleichmässig zu 0 strebt.

Aus (25) findet man weiter für $n > n_0$

$$\begin{aligned} |N_n| &\leq r_n R \left| \int_{\varphi_n}^{\varphi_{n+1}} e^{-r_n R \cos(\varphi + \Phi)} d\varphi \right| \\ &\leq r_n R_1 |\varphi_{n+1} - \varphi_n| e^{-r_n R_0 \sin \delta} \end{aligned}$$

und daher für hinreichend grosse n

$$|N_n| \leq |\varphi_{n+1} - \varphi_n| e^{-r_n \eta},$$

wo η eine positive Konstante bedeutet. Der Beweis unserer Behauptung hinsichtlich des zweiten der Ausdrücke (28) ist hiermit zum Nachweis von

$$(29) \quad \lim_{v \rightarrow \infty} \sum_{n=v}^v |\varphi_{n+1} - \varphi_n| e^{-r_n \eta} = 0$$

zurückgeführt.

Ist erstens die Bedingung (a) erfüllt, so ist für hinreichend grosse n

$$|\varphi_{n+1} - \varphi_n| e^{-r_n \eta} < e^{-2 \log n} = \frac{1}{n^2},$$

woraus wegen der Konvergenz von $\sum \frac{1}{n^2}$ sogleich das Bestehen von (29) folgt. Wenn zweitens (b') erfüllt ist, so ist das allgemeine Glied der Summe (29), wenn n hinreichend gross ist, $< \frac{1}{n^{1+\varepsilon}}$, woraus wegen der Konvergenz von $\sum \frac{1}{n^{1+\varepsilon}}$ wieder (29) folgt. Ist drittens (c') erfüllt, so ergibt sich für hinreichend grosse n

$$|\varphi_{n+1} - \varphi_n| e^{-r_n \eta} < \frac{k \log^q n}{n} e^{-\eta_1 \log n} < \frac{1}{n^{1+\eta_2}},$$

wo η_2 sowie k und η_1 positive Konstanten bezeichnen. Hieraus folgt, wie im vorigen Falle, die Richtigkeit von (29). Wenn schliesslich die Bedingung (d') z. B. derart erfüllt ist, dass die φ_n von einem gewissen n an niemals abnehmen, so ist das allgemeine Glied von (29), wenn n hinreichend gross ist ($n > n_1$), $\leq \varphi_{n+1} - \varphi_n$, und daher ist für $v > n_1$

$$\sum_{n=v}^v |\varphi_{n+1} - \varphi_n| e^{-r_n \eta} < \varphi_{v+1} - \varphi_v,$$

woraus wieder wegen (18) das Bestehen von (29) folgt. In derselben Weise führt man den Beweis auch im Falle, wenn die φ_n von einer gewissen Stelle an niemals zunehmen.

Aus (26) ergibt sich ferner für $n > n_0$

$$|N'_n| \leq R \left| \int_{r_n}^{r_{n+1}} e^{-r} R \cos(\varphi_{n+1} + \Phi) dr \right| \leq R_1 \left| \int_{r_n}^{r_{n+1}} e^{-r} R_0 \sin \delta dr \right|.$$

Um zu beweisen, dass der dritte der Ausdrücke (28) gleichmässig gegen 0 konvergiert, brauchen wir also nur zu zeigen, dass, wenn η eine positive Konstante ist,

$$(30) \quad \lim_{\substack{w \rightarrow \infty \\ n=v}} \sum_{n=v}^w \left| \int_{r_n}^{r_{n+1}} e^{-r \eta} dr \right| = 0$$

ist.

Ist nun zunächst die Bedingung (a) erfüllt, so findet man für hinreichend grosse n

$$\left| \int_{r_n}^{r_{n+1}} e^{-r \eta} dr \right| = \frac{1}{\eta} |e^{-r_n \eta} - e^{-r_{n+1} \eta}| < e^{-2 \log n} = \frac{1}{n^2},$$

woraus wegen der Konvergenz der Reihe $\sum \frac{1}{n^2}$ die Richtigkeit von (30) folgt.

Falls (b) oder (c) erfüllt ist, führen wir den Beweis folgendermassen. Wie leicht ersichtlich, ist zunächst

$$\begin{aligned} \sum_{n=v}^w \left| \int_{r_n}^{r_{n+1}} e^{-r \eta} dr \right| &= \int_{r_v}^{r_{w+1}} e^{-r \eta} dr + 2 \sum_{\substack{n=v \\ r_{n+1} < r_n}}^w \int_{r_{n+1}}^{r_n} e^{-r \eta} dr \\ &\leq \frac{1}{\eta} (e^{-r_v \eta} - e^{-r_{w+1} \eta}) + 2 \sum_{\substack{n=v \\ r_{n+1} < r_n}}^w (r_n - r_{n+1}) e^{-r_{n+1} \eta} \end{aligned}$$

Weil das erste Glied rechts den Limes 0 hat, ist unser Beweis hiermit zum Nachweis von

$$(31) \quad \lim_{\substack{w \rightarrow \infty \\ n=v \\ r_{n+1} < r_n}} \sum_{n=v}^w (r_n - r_{n+1}) e^{-r_{n+1} \eta} = 0$$

zurückgeführt.

Ist nun erstens (b) erfüllt, so ist das allgemeine Glied von (31), wenn n hinreichend gross ist, $< \frac{c}{n^{1+\epsilon}}$ und aus der Konvergenz der Reihe $\sum \frac{c}{n^{1+\epsilon}}$ folgt das Bestehen von (30). Wenn zweitens (c) erfüllt ist, so ist für hinreichend grosse n

$$|r_{n+1} - r_n| e^{-r_{n+1} \eta} < \frac{c \log^2 n}{n} e^{-\eta_1 \log n} < \frac{1}{n^{1+\eta_2}},$$

wo η_1 und η_2 positive Konstanten bezeichnen. Hieraus folgt (30) wie im vorigen Falle.

Wir haben mithin nachgewiesen, dass die Ausdrücke (28) gleichmässig gegen Null konvergieren, womit, wie oben angedeutet, unser Satz bewiesen ist.

Da hinsichtlich der Dirichletschen Reihen mit reellen λ_n , d. h. mit $\varphi_n = 0$, die Bedingung (18) und z. B. (b') des vorigen Satzes erfüllt sind, so können wir folgenden Satz aussprechen:

Satz VI: *Der absolute Konvergenzbereich der Dirichletschen Reihen mit reellen r_n*

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n e^{-r_n s} \quad (\lim_{n \rightarrow \infty} r_n = \infty)$$

besteht aus einer Halbebene, die links durch eine Parallele zur Achse des Imaginären begrenzt ist.

Damit der Bereich der Konvergenz im gewöhnlichen Sinne von derselben Beschaffenheit wäre, ist es hinreichend, dass eine der folgenden Bedingungen erfüllt sei:

- (a) $\log n = o(r_n),$
- (b) $r_{n+1} - r_n > -\frac{c}{n^{1+\varepsilon}} \quad (\varepsilon > 0),$
- (c) $\begin{cases} \log n = O(r_n), \\ r_{n+1} - r_n > -c \frac{\log^2 n}{n}. \end{cases}$

In jedem endlichen abgeschlossenen Bereiche, der nebst seinem Rande nur aus inneren Punkten des Konvergenzbereiches besteht, konvergiert die Reihe in den genannten Fällen gleichmässig und stellt folglich eine reguläre analytische Funktion dar.

7. Hinsichtlich der Lage der Konvergenzgeraden in den Sätzen V und VI beweisen wir folgenden Satz, der eine Verallgemeinerung des entsprechenden Satzes in der Theorie der Dirichletschen Reihen mit reellen λ_n darstellt.

Satz VII: Falls

$$(32) \quad \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{r_{n-h}}{r_n} \leq 1 \quad (h = 1, 2, \dots, n-1)^1)$$

ist, so sind die Konvergenzabszisse²⁾ α und die Abszisse β der absoluten Konvergenz der Sätze V und VI durch die Formeln *

$$(33) \quad \alpha = \limsup_{\nu \rightarrow \infty} \frac{\log \left| \sum_{n=1}^{\nu} a_n \right|}{r_{\nu}},$$

$$(34) \quad \beta = \limsup_{\nu \rightarrow \infty} \frac{\log \sum_{n=1}^{\nu} |a_n|}{r_{\nu}}$$

bestimmt, vorausgesetzt dass α bzw. β positiv ist.

Den Beweis der ersteren Formel führen wir in zwei Teilen. Zuerst nehmen wir an, dass (vgl. (21))

$$\limsup_{\nu \rightarrow \infty} \frac{\log |A(\nu)|}{r_{\nu}} = \omega$$

ist, und zeigen, dass die Reihe (1) für $s = \omega + 2\delta$ ($\delta > 0$) konvergiert.

Für hinreichend grosse n ($n > n_0$) ist nach der Annahme

$$\frac{\log |A(\nu)|}{r_{\nu}} < \omega + \delta$$

und mithin

$$|A(\nu)| < e^{r_{\nu}(\omega + \delta)}.$$

Aus (22) folgt also für $\nu > n_0$

$$(35) \quad \left| \sum_{n=\nu}^w a_n e^{-\lambda_n(\omega + 2\delta)} \right| < \sum_{n=\nu}^w |M_n| + |Q_{\nu-1}| + |Q_w|,$$

1) Falls die Bedingung (b) des Satzes V bzw. VI erfüllt ist, fällt (32) aus, denn (b) liefert zunächst

$$r_{n-h} - r_n = \sum_{v=n-h}^{n-1} (r_v - r_{v+1}) < \sum_{v=n-h}^{n-1} \frac{c}{v^{1+\varepsilon}} < \sum_{n=1}^{\infty} \frac{c}{n^{1+\varepsilon}},$$

woraus wegen der Konvergenz der letzten Reihe (32) folgt.

2) Unter der Konvergenzabszisse versteht man den Abstand der Konvergenzgeraden von der Achse des Imaginären.

wo zur Abkürzung

$$M_n = g_n \int_{\lambda_n}^{\lambda_{n+1}} e^{-u(\omega + 2\delta)} du,$$

$$Q_n = e^{-h_n(r_{n+1}, \varphi_{n+1})}$$

und hierbei wieder

$$(36) \quad \begin{aligned} g_n &= (\omega + 2\delta) e^{r_n(\omega + \delta)}, \\ h_n(r, \varphi) &= r(\omega + 2\delta) \cos \varphi - r_n(\omega + \delta) \end{aligned}$$

gesetzt ist. Weil infolge von (18) und (32), wenn r im Intervalle (r_n, r_{n+1}) und φ im Intervalle $(\varphi_n, \varphi_{n+1})$ liegt, für hinreichend grosse n

$$(37) \quad \frac{h_n(r, \varphi)}{r} > \eta \quad (0 < \eta < \delta)$$

ist, so ist

$$\lim_{n \rightarrow \infty} Q_n = 0.$$

Um unsere Behauptung, die tatsächlich nichts anderes aussagt, als dass die linke Seite von (35) für $v = \infty$ den Limes 0 hat, zu beweisen, haben wir somit lediglich den Nachweis des Bestehens von

$$(38) \quad \lim_{v \rightarrow \infty} \sum_{n=v}^{\omega} |M_n| = 0$$

zu erbringen.

Es lässt sich

$$M_n = g_n(N_n + N'_n)$$

schreiben, wo

$$(39) \quad N_n = i r_n \int_{\varphi_n}^{\varphi_{n+1}} e^{-r_n(\omega + 2\delta)} e^{i\varphi} e^{i\varphi} d\varphi,$$

$$(40) \quad N'_n = e^{i\varphi_{n+1}} \int_{r_n}^{r_{n+1}} e^{-r(\omega + 2\delta)} e^{i\varphi_{n+1}} dr$$

gesetzt ist. Daher ist

$$(41) \quad \sum_{n=v}^w |M_n| \leq \sum_{n=v}^w g_n |N_n| + \sum_{n=v}^w g_n |N'_n|.$$

Wir zeigen nun, dass

$$(42) \quad \lim_{v=\infty} \sum_{n=v}^w g_n |N_n| = 0,$$

$$(43) \quad \lim_{v=\infty} \sum_{n=v}^w g_n |N'_n| = 0$$

ist.

Nach (39) und (36) finden wir zunächst

$$g_n |N_n| \leq r_n (\omega + 2\delta) \left| \int_{\varphi_n}^{\varphi_{n+1}} e^{-h_n(r_n, \varphi)} d\varphi \right|,$$

woraus wegen (37) für hinreichend grosse n

$$g_n |N_n| < r_n (\omega + 2\delta) |\varphi_{n+1} - \varphi_n| e^{-r_n \eta}$$

$$< |\varphi_{n+1} - \varphi_n| e^{-r_n \eta_1} \quad (\eta > \eta_1 > 0)$$

folgt. Aus (29) folgt nun unmittelbar das Bestehen von (42).

(40) und (36) liefern ferner

$$g_n |N'_n| \leq (\omega + 2\delta) \left| \int_{r_n}^{r_{n+1}} e^{-h_n(r, \varphi_{n+1})} dr \right|.$$

Wegen (37) ist also für hinreichend grosse n

$$g_n |N'_n| < (\omega + 2\delta) \left| \int_{r_n}^{r_{n+1}} e^{-r \eta} dr \right|,$$

woraus mit Rücksicht auf (30) das Bestehen von (43) folgt.

Aus (41) folgt jetzt wegen (42) und (43) das Bestehen von

(38) und hieraus schliesslich, wie schon angedeutet, die Richtigkeit der ursprünglichen Behauptung.

8. Jetzt nehmen wir umgekehrt an, dass die Reihe (1) für $s = \sigma > 0$ konvergiert. Wir haben also zu beweisen, dass die rechte Seite von (33), $\equiv \sigma$ ist, mit anderen Worten, wir behaupten, dass, wie klein die positive Zahl δ auch sein mag, für hinreichend grosse n

$$\frac{\log |A(\nu)|}{r_\nu} < \sigma + 3\delta$$

d. h.

$$(44) \quad |A(\nu)| < e^{r_\nu(\sigma + 3\delta)}$$

ist.

Wir setzen

$$B(\nu) = \sum_{n=1}^{\nu} a_n e^{-\lambda_n \sigma}$$

und bestimmen eine positive Zahl B derart, dass für alle ν

$$|B(\nu)| < B$$

ist, was infolge der Annahme möglich ist. Mit Hilfe der partiellen Summation findet man dann

$$\begin{aligned} A(\nu) &= \sum_{n=1}^{\nu} a_n e^{-\lambda_n \sigma} \cdot e^{\lambda_n \sigma} = \sum_{n=1}^{\nu} (B(n) - B(n-1)) e^{\lambda_n \sigma} \\ &= \sum_{n=1}^{\nu-1} B(n) (e^{\lambda_n \sigma} - e^{\lambda_{n+1} \sigma}) + B(\nu) e^{\lambda_\nu \sigma}, \end{aligned}$$

und daher ist

$$(45) \quad |A(\nu)| < B \sum_{n=1}^{\nu-1} |M_n| + B e^{r_\nu \sigma},$$

wo

$$M_n = \sigma \int_{\lambda_n}^{\lambda_{n+1}} e^{u \sigma} du$$

ist. Setzt man weiter der Kürze wegen

$$N_n = i r_n \sigma \int_{\varphi_n}^{\varphi_{n+1}} e^{r_n \sigma e^{i\varphi}} e^{i\varphi} d\varphi,$$

$$N'_n = \sigma e^{i\varphi_{n+1}} \int_{r_n}^{r_{n+1}} e^{r \sigma e^{i\varphi_{n+1}}} dr,$$

so ist

$$M_n = N_n + N'_n$$

und folglich

$$(46) \quad \sum_{n=1}^{\nu-1} |M_n| \leq \sum_{n=1}^{\nu-1} |N_n| + \sum_{n=1}^{\nu-1} |N'_n|.$$

Aus

$$\begin{aligned} |N_n| &\leq r_n \sigma \left| \int_{\varphi_n}^{\varphi_{n+1}} e^{r_n \sigma \cos \varphi} d\varphi \right| \\ &\leq r_n \sigma |\varphi_{n+1} - \varphi_n| e^{r_n \sigma} \end{aligned}$$

ergibt sich für hinreichend grosse n ($n > n_0$)

$$\begin{aligned} |N_n| &\leq |\varphi_{n+1} - \varphi_n| e^{r_n(\sigma + \delta)} \\ &= |\varphi_{n+1} - \varphi_n| e^{-r_n \delta} e^{r_n(\sigma + 2\delta)}, \end{aligned}$$

so dass, wenn $r_{\nu-p}$ die grösste der Zahlen $r_1, r_2, \dots, r_{\nu-1}$ bedeutet, für $\nu > n_0$

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\nu-1} |N_n| &= \sum_{n=1}^{n_0} |N_n| + \sum_{n=n_0+1}^{\nu-1} |N_n| \\ &\leq \sum_{n=1}^{n_0} |N_n| + e^{r_{\nu-p}(\sigma + 2\delta)} \sum_{n=n_0+1}^{\nu-1} |\varphi_{n+1} - \varphi_n| e^{-r_n \delta} \end{aligned}$$

ist. Da nun der Wert der ersten Summe rechts endlich ist und die zweite Summe wegen (29) ($\eta = \delta$) für $\nu = \infty$ einen Limes hat, so findet man

$$(47) \quad \sum_{n=1}^{\nu-1} |N_n| < K e^{r_{\nu-p}(\sigma+2\delta)},$$

wo K , wie im folgenden K_1 und K_2 , eine Konstante bedeutet.

Ferner finden wir

$$|N'_n| \leq \sigma \left| \int_{r_n}^{r_{n+1}} e^{r \sigma \cos \varphi_{n+1}} dr \right| \leq \sigma \left| \int_{r_n}^{r_{n+1}} e^{r \sigma} dr \right| \leq \sigma e^{r_{\nu-p}(\sigma+\delta)} \left| \int_{r_n}^{r_{n+1}} e^{-r \delta} dr \right|$$

und daher ist

$$\sum_{n=1}^{\nu-1} |N'_n| \leq \sigma e^{r_{\nu-p}(\sigma+\delta)} \sum_{n=1}^{\nu-1} \left| \int_{r_n}^{r_{n+1}} e^{-r \delta} dr \right|.$$

Wegen (30) ist die Summe rechts immer unterhalb einer endlichen Schranke, d. h.

$$(48) \quad \sum_{n=1}^{\nu-1} |N'_n| < K_1 e^{r_{\nu-p}(\sigma+\delta)}.$$

Die Ungleichung (45) in Verbindung mit (46), (47) und (48) liefert nun

$$|A(\nu)| < K_2 e^{r_{\nu-p}(\sigma+2\delta)},$$

woraus sich, mit Rücksicht auf (32), für hinreichend grosse ν die Ungleichung (44) ergibt.

Damit ist die Formel (33) vollständig bewiesen.

9. Um die Formel (34) zu beweisen, betrachten wir die Reihe

$$(49) \quad \sum_{n=1}^{\infty} |a_n| e^{-(r_n \cos \varphi_n) s},$$

deren Glieder die absoluten Beträge der Glieder der Reihe (1) sind, angenommen, dass s reell ist. Wir haben offenbar nur zu zeigen, dass die Abszisse der absoluten Konvergenz dieser Dirichletschen Reihe durch die Formel (34) bestimmt wird. Ordnet man die Glieder von (49) nach wachsenden $r_n \cos \varphi_n$, so entsteht eine Dirichletsche Reihe mit reellen λ_n

$$(50) \quad \sum'_{\infty} |a_n| e^{-(r_n \cos \varphi_n) s},$$

deren Konvergenzhalbebene und absolute Konvergenzhalbebene zusammenfallen und mit dem absoluten Konvergenzbereich von (49) übereinstimmen. Da die Bedingung (b) des Satzes VI und (32) hinsichtlich der Reihe (50) erfüllt sind, so liefert die Formel (33) die genannte gemeinsame Konvergenzabszisse und daher ist

$$\beta = \limsup_{\nu=\infty} \frac{\log \sum'_{\nu} |a_n|}{r_{\nu} \cos \varphi_{\nu}},$$

wo $\sum'_{\nu} |a_n|$ die nacheinander folgenden Koeffizienten der Reihe (50) bis zum $|a_{\nu}|$ enthält. Der Beweis von (34) ist hiermit zum Nachweis von

$$(51) \quad \limsup_{\nu=\infty} \frac{\log \sum'_{\nu} |a_n|}{r_{\nu} \cos \varphi_{\nu}} = \limsup_{\nu=\infty} \frac{\log \sum'_{\nu} |a_n|}{r_{\nu} \cos \varphi_{\nu}}$$

zurückgeführt.

Es sei h die kleinste Zahl, für welche die Summe im Zähler von

$$(52) \quad \frac{\log \sum'_{\nu+h} |a_n|}{r_{\nu+h} \cos \varphi_{\nu+h}}$$

alle Glieder der entsprechenden Summe in

$$(53) \quad \frac{\log \sum'_{\nu} |a_n|}{r_{\nu} \cos \varphi_{\nu}}$$

enthält. Dann ist

$$r_{\nu+h} \cos \varphi_{\nu+h} \leq r_{\nu} \cos \varphi_{\nu},$$

$$\log \sum'_{\nu+h} |a_n| \geq \log \sum'_{\nu} |a_n|$$

und folglich (53) $\leq$ (52). Da aber dieses für alle ν gilt, so besteht diese Relation auch in bezug auf die Limes superiores der betreffenden Ausdrücke, mit anderen Worten, die rechte Seite von (51) ist nicht grösser als die linke. Dass der erstere

Ausdruck auch nicht kleiner als der letztere ist, zeigt man folgendermassen.

Wie ohne weiteres klar, gibt es eine nicht negative ganze Zahl k von der Beschaffenheit, dass die Summe im Zähler von

$$(54) \quad \frac{\log \sum' |a_n|^{v-k}}{r_{v-k} \cos \varphi_{v-k}} \bullet$$

alle Glieder der entsprechenden Summe in

$$(55) \quad \frac{\log \sum^v |a_n|}{r_v \cos \varphi_v}$$

enthält. Weil der Zähler in (54) gleich oder grösser als der Zähler in (55) ist und wegen (18) und (32)

$$\limsup_{v=\infty} \frac{r_{v-k} \cos \varphi_{v-k}}{r_v \cos \varphi_v} \leq 1$$

ist, so ist

$$\limsup_{v=\infty} (55) \leq \limsup_{v=\infty} (54)$$

d. h. die rechte Seite von (51) ist nicht kleiner als die linke.

Hiermit ist das Bestehen von (51) und somit die Richtigkeit der Formel (34) nachgewiesen.

10. Als ein Beispiel betrachten wir die Dirichletsche Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\varrho_n^s} = \sum_{n=1}^{\infty} e^{-s(\log |\varrho_n| + i \arg \varrho_n)},$$

wo die Zahlen $\varrho_n = \beta_n + i\gamma_n$ die nach wachsenden γ_n geordneten komplexen Nullstellen mit $\gamma_n > 0$ der Riemannschen Zetafunktion sind. Wir wollen zeigen, dass der Konvergenzbereich dieser Reihe aus derjenigen Halbebene besteht, die links durch die Gerade $\Re(s) = 1$ begrenzt ist.

Bei unserer Reihe ist

$$r_n = \sqrt{(\log |\varrho_n|)^2 + (\arg \varrho_n)^2},$$

$$\varphi_n = \arctg \frac{\arg \varrho_n}{\log |\varrho_n|}.$$

Hinsichtlich der β_n wissen wir, dass

$$0 < \beta_n < 1$$

ist, und aus der bekannten v. Mangoldtschen Formel ergibt sich

$$\gamma_n = 2\pi \frac{n}{\log n} (1 + o(n)).$$

Hieraus folgt nun leicht

$$\log |\varrho_n| = \log \gamma_n + O\left(\frac{1}{\gamma_n^2}\right),$$

$$\arg \varrho_n = \frac{\pi}{2} + O\left(\frac{1}{\gamma_n}\right).$$

Die Bedingung (18) des Satzes V ist also erfüllt. Wir zeigen ferner, dass die Bedingungen (c) und (c') desselben Satzes auch bestehen. Mit Rücksicht auf $\frac{1}{\gamma_n} = O\left(\frac{\log n}{n}\right)$ findet man zunächst

$$r_n = \sqrt{\log^2 \gamma_n + \frac{\pi^2}{4}} + O\left(\frac{\log n}{n}\right)$$

und weiter, da $\gamma_{n+1} \geq \gamma_n$ ist,

$$r_{n+1} - r_n > -c \frac{\log n}{n}.$$

Da ausserdem

$$\log n = O(\log \gamma_n) = O(r_n)$$

ist, so ist hiermit das Bestehen von (c) nachgewiesen. Ferner ergibt sich

$$\varphi_n = \arctg \left(\frac{\pi}{2 \log \gamma_n} + O\left(\frac{1}{\gamma_n}\right) \right),$$

woraus leicht

$$\varphi_{n+1} - \varphi_n = O\left(\frac{1}{\log \gamma_n} - \frac{1}{\log \gamma_{n+1}}\right) + O\left(\frac{1}{\gamma_n}\right) = O\left(\frac{\log n}{n}\right)$$

hergeleitet wird. Die Bedingung (c') ist somit gleichfalls erfüllt und der Konvergenzbereich ist daher nach Satz V eine Halbebene.

Da offenbar

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{r_{n-h}}{r_n} = 1$$

ist, so lässt sich die Konvergenzabszisse durch die Formel (33) bestimmen, und man erhält

$$\alpha = \limsup_{\nu \rightarrow \infty} \frac{\log \nu}{r_\nu} = \lim_{\nu \rightarrow \infty} \frac{\log \nu}{\log r_\nu} = 1.$$

Aus (34) folgt ebenso, dass auch $\beta = 1$ ist.

11. Zum Schluss wollen wir eine Dirichletsche Reihe behandeln, die uns u. a. lehrt, dass die Bedingung (18) des Satzes V allein dafür nicht hinreichend ist, dass der Konvergenzbereich eine Halbebene ist, auch dann nicht, wenn die r_n monoton zunehmen.

Wie leicht ersichtlich sind in bezug auf die Dirichletschen Reihen

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n)^{1-\theta}} e^{-\theta(\log 2n - i)s},$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{-1}{(2n+1)^{1-\theta}} e^{-\theta(\log(2n+1) + i)s} \quad (0 < \theta < 1)$$

die Bedingungen (18), (b) und (d') des Satzes V erfüllt, und folglich ist der Konvergenzbereich der beiden Reihen eine Halbebene. Da weiter die Bedingung (32) des Satzes VII ebenfalls erfüllt ist, so lassen sich die Konvergenzabszissen α und β durch die Formeln (33) und (34) bestimmen, und wir finden durch einfache Rechnung, dass bei den beiden Reihen $\alpha = \beta = 1$ ist.

Bei der Dirichletschen Reihe

$$(57) \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^{1-\theta}} e^{-\theta(\log n - (-1)^n i)s},$$

die die Summe der obigen Reihen ist, wachsen die r_n monoton und

$$\varphi_n = -(-1)^n \arctg \left(\frac{1}{\log n} \right),$$

so dass die Bedingung (18) des Satzes V erfüllt ist. Der absolute Konvergenzbereich ist somit eine Halbebene und die Formel (34) liefert $\beta = 1$. Alles dieses folgt natürlich schon aus den obigen Resultaten. Da aber keine der Bedingungen (a), (b'),

(c'), (d') des genannten Satzes erfüllt ist, sagt der Satz nichts weiteres über die Konvergenz der Reihe (57) aus. Wir wollen nun direkt beweisen, dass sie tatsächlich nur im Punkt $s=0$ bedingt konvergiert.

Setzt man $s=\sigma+it$ und bezeichnet man mit U und $-iV$ den reellen bezw. imaginären Teil der Reihe (57), so ergibt sich

$$(58) \quad U = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^{1-\theta(1-\sigma)}} e^{-(-1)^n \theta t} \cos(\theta t \log n - (-1)^n \theta \sigma),$$

$$(59) \quad V = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^{1-\theta(1-\sigma)}} e^{-(-1)^n \theta t} \sin(\theta t \log n - (-1)^n \theta \sigma).$$

1°. $\sigma > 1$. Wie schon oben bewiesen und wie auch direkt aus (58) und (59) hervorgeht, konvergiert dann die Reihe (57) und zwar absolut.

2°. $\sigma=0$ und $t=0$. In diesem Falle ist $V=0$ und

$$U = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^{1-\theta}},$$

und wegen der Konvergenz dieser Reihe konvergiert auch die Reihe (57).

3°. $\sigma \leq 1$, $\sigma \neq 0$ und $t=0$. Dann ist

$$(60) \quad V = -\sin \theta \sigma \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{1-\theta(1-\sigma)}}$$

und daher

$$|V| \geq \sin \theta |\sigma| \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}.$$

Da die Reihe rechts divergiert, so divergiert auch (60) und folglich (57).

4°. $\sigma=0$ und $t \neq 0$. In diesem Falle geht (59) in

$$(61) \quad V = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^{1-\theta}} e^{-(-1)^n \theta t} \sin(\theta t \log n)$$

über. Wir nehmen zuerst an, dass $t > 0$ ist. Es sei dann k eine positive ganze Zahl und A_k die Summe derjenigen Glieder der Reihe (61), bei denen

$$(62) \quad 2k\pi + \frac{\pi}{2} < \theta t \log n < 2k\pi + \frac{3\pi}{4}$$

d. h.

$$(63) \quad \alpha < n < \beta$$

ist, wenn

$$\alpha = e^{\frac{2k\pi + \frac{\pi}{2}}{\theta t}},$$

$$\beta = e^{\frac{2k\pi + \frac{3\pi}{4}}{\theta t}}.$$

gesetzt wird. Falls das kleinste n in diesem Intervalle eine gerade Zahl ist, wird sie jedoch von A_k ausgeschlossen. Weil nun $\frac{1}{n^{1-\theta}}$ und $\sin(\theta t \log n)$ im betreffenden Intervalle abnehmen, so ist offenbar

$$(64) \quad |A_k| > (e^{\theta t} - e^{-\theta t}) \sum'_{\alpha < n < \beta} \frac{\sin(\theta t \log n)}{n^{1-\theta}},$$

wo der Strich andeutet, dass n nur die ungeraden Zahlen des Intervalls (63) durchläuft. Wegen (62) ist ferner

$$(65) \quad \sum'_{\alpha < n < \beta} \frac{\sin(\theta t \log n)}{n^{1-\theta}} > \frac{1}{\sqrt{2}} \sum'_{\alpha < n < \beta} \frac{1}{n^{1-\theta}} > \frac{1}{2\sqrt{2}} \int_{\alpha+2}^{\beta} \frac{dx}{x^{1-\theta}}$$

$$= \frac{1}{2\theta\sqrt{2}} (\beta^\theta - (\alpha+2)^\theta).$$

Für hinreichend grosse k ist

$$\alpha + 2 < e^{\frac{2k\pi + \frac{5\pi}{8}}{\theta t}}$$

und daher

$$\beta^\theta - (\alpha+2)^\theta > e^{\frac{2k\pi}{t}} \left(e^{\frac{3\pi}{4t}} - e^{\frac{5\pi}{8t}} \right).$$

Da hier die rechte Seite für $k = \infty$ über alle Grenzen wächst, so ist wegen (64) und (65) auch in bezug auf $|A_k|$ dasselbe der Fall,

und folglich divergiert die Reihe (59), woraus schliesslich die Divergenz von (57) folgt. In ähnlicher Weise gelangt man zu demselben Resultate auch im Falle $t < 0$.

5⁰. $-\frac{\pi}{2\theta} < \sigma \leq 1$, $\sigma \neq 0$ und $t \neq 0$. Wir nehmen zuerst an, dass $\sigma > 0$ und $t > 0$ ist. Es sei dann k eine positive ganze Zahl und A_k die Summe derjenigen Glieder von (59), für welche gleichzeitig

$$(2k+1)\pi - \frac{\theta\sigma}{2} > \theta t \log n + \theta\sigma > 2k\pi + \frac{\theta\sigma}{2},$$

$$(2k-1)\pi + \frac{\theta\sigma}{2} < \theta t \log n - \theta\sigma < 2k\pi - \frac{\theta\sigma}{2}$$

d. h.

$$\alpha < n < \beta$$

ist, wenn

$$\alpha = e^{\frac{2k\pi - \frac{\theta\sigma}{2}}{\theta t}},$$

$$\beta = e^{\frac{2k\pi + \frac{\theta\sigma}{2}}{\theta t}}$$

gesetzt wird. Dann ist

$$\begin{aligned} |A_k| &> e^{-\theta t} \sin \frac{\theta\sigma}{2} \sum_{\alpha < n < \beta} \frac{1}{n} > e^{-\theta t} \sin \frac{\theta\sigma}{2} \int_{\alpha+1}^{\beta} \frac{dx}{x} \\ &= e^{-\theta t} \sin \frac{\theta\sigma}{2} \log \frac{\beta}{\alpha+1} = \frac{\sigma}{t} e^{-\theta t} \sin \frac{\theta\sigma}{2} + o(1) \end{aligned}$$

und folglich für hinreichend grosse k

$$|A_k| > \frac{\sigma}{2t} e^{-\theta t} \sin \frac{\theta\sigma}{2}.$$

Es gibt also, wie gross auch n_0 sein mag, in der Reihe (59) eine endliche Anzahl aufeinander folgender Glieder, die alle weiter vom Anfang als das n_0 te Glied liegen und deren Summe absolut genommen grösser als die konstante positive rechte Seite der letzten Ungleichung ist. Hieraus folgt, dass die genannte

Reihe und somit auch die Reihe (57) divergiert. In ähnlicher Weise gelangt man zu demselben Resultate auch in den übrigen betreffenden Fällen.

6°. $\sigma \leq -\frac{\pi}{2\theta}$. Die Glieder der Reihe (57) wachsen dann über alle Grenzen und die Reihe divergiert also.

Das endgültige Resultat ist also:

Der Konvergenzbereich der Dirichletschen Reihe (57) besteht aus der Halbebene $\Re(s) > 1$ und dem isolierten Punkte $s=0$, und die Reihe konvergiert bedingt nur in dem letztgenannten Punkte.