ПОРОЖДЕНИЕ ИЕРАРХИЙ РЕКУРСИВНЫХ ФУНКЦИЙ
И РЕШЕНИЕ ПРОБЛЕМ "А" И "В" ЛЁБА-ВАЙНЕРА
МЕТОДОМ ИСПРАВЛЕНИЙ ФУНДАМЕНТАЛЬНЫХ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТЕЙ

П.Лорентс
Институт кибернетики АН ЭССР

I. Введение

Пусть ω - первый счетный и ω_1 - первый несчетный ординал. Если $W(\ldots, x, \ldots)$ - некоторое выражение, значение которого зависит от параметра x, то через $\{W(\ldots, x, \ldots)\}_x$ будем обозначать множество $\{W(\ldots, 0, \ldots), W(\ldots, 1, \ldots), \ldots\}$, а через $\langle W(\ldots, x, \ldots)\rangle_x$ будем обозначать упорядоченную по типу ω последовательность $\langle W(\ldots, 0, \ldots), W(\ldots, 1, \ldots), \ldots\rangle$. Если α - счетный предельный ординал, то через $\alpha|x|$ обозначим x-ый член из фундаментальной последовательности для α.

<u>Определение I</u>. Если β - предельный ординал и $\beta \leq \omega_1$, то проектом длиной β будем называть любое такое множество, элементами которого являются фундаментальные последовательности для предельных ординалов, меньших β, причем для каждого предельного ординала $\alpha < \beta$ оно включает в точности одну фундаментальную последовательность.

Если $\mathbb{F}$ - некоторый проект, то его длину будем обозначать через $\|\mathbb{F}\|$.

С каждым проектом $\mathbb{F}$ мы связываем т.н. функции Лёба-Вайнера $F_\alpha^n(x)$, которые определяются следующим образом:

<u>Определение 2</u>. ([3] стр. 35). Пусть $n < \omega$, $x < \omega$ и $\alpha < \|\mathbb{F}\|$, тогда

$$F_0^n(x) = (n+1)(x+1),$$

$$F_\alpha^{n+1}(x) = F_\alpha^0(F_\alpha^n(x)), \quad \text{если } \alpha > 0,$$

$$F_{\alpha+1}^0(x) = F_\alpha^x(x)$$

$$F_\alpha^0(x) = F_{\alpha|x|}^0(d_\alpha^{\mathbb{F}}(x)), \quad \text{если } \alpha \text{ - предельный}$$

ординал, где

$\langle \alpha|x| \rangle_x$ - фундаментальная последовательность из $\mathbb{F}$ для α и

$$d_\alpha^{\mathbb{F}}(0) = 0,$$

$$d_\alpha^{\mathbb{F}}(x+1) = \mu z (z > d_\alpha^{\mathbb{F}}(x) \;\&\; (\forall i \leq x)(F_{\alpha|x+1|}^0(z) > F_{\alpha|i|}^0(z))).$$

Функцию $\lambda x \cdot F^n_\alpha(x)$ будем обозначать через F^n_α.

Определение 3 ([3], стр. 40). Положим

$$[\mathbb{F}]_\alpha = E(\{\lambda x \cdot 0, \lambda xy \cdot x+y, \lambda x \cdot x_i\} \cup \{F^0_\beta \mid \beta \leqslant \alpha\})$$

где, если K - некоторая совокупность функций, то $E(K)$ - наименьший класс функций, содержащий K и замкнутый относительно суперпозиции и ограниченной рекурсии.

В своей работе [3] Лёб и Вайнер показали, что для всех проектов $\mathbb{F}$ и для $\alpha < \beta < \|\mathbb{F}\|$ имеет место строгое включение $[\mathbb{F}]_\alpha \subset [\mathbb{F}]_\beta$, при этом $\bigcup_{\alpha<\omega} [\mathbb{F}]_\alpha = \Phi_{prim}$, где Φ_{prim} - множество всех примитивнорекурсивных функций. В этой же работе был определен специальный проект длиной ε_0 (см. [3] стр. 47-48), которую мы здесь условно обозначим через $\mathbb{L}W$. Для этого проекта Лёб и Вайнер (см. [3] стр. 62) доказали, что $\bigcup_{\alpha<\omega^k} [\mathbb{L}W]_\alpha = \Phi_k$, где Φ_k - множество всех k-рекурсивных функций. Далее Вайнер показал (см. [2] стр. 77), что $\bigcup_{\alpha<\varepsilon_0} [\mathbb{L}W]_\alpha = \Phi_{ord} = P_{ror}R = PR^{(0,0)}$, где

- Φ_{ord} - множество всех ординально рекурсивных функций,
- $P_{ror}R$ - множество всех функций, рекурсивность которых доказуема в (классической) арифметике первого порядка,
- $PR^{(0,0)}$ - множество всех примитивно рекурсивных функционалов Гёделя типа (0,0).

Кроме того, Лёбом и Вайнером было показано, что все классы $[\mathbb{L}W]$ являются конечно порожденными (см. [2] стр. 82) и что $d^{\mathbb{L}W}_\alpha = \lambda x \cdot x$ (см. [3] стр. 56). В связи с этим возникают весьма естественные проблемы, которые впервые были поставлены Лёбом и Вайнером в конце работы [3] и которые мы здесь приведем в слегка обобщенном виде:

A. Существуют ли такие проекты $\mathbb{F}$, что $\|\mathbb{F}\| > \varepsilon_0$ и все классы $[\mathbb{F}]_\alpha$ - конечно порожденные?

B. Существуют ли такие проекты $\mathbb{F}$, что $\|\mathbb{F}\| > \varepsilon_0$ и $d^{\mathbb{F}}_\alpha = \lambda x \cdot x$?

Замечание. Говоря о конечной порожденности классов $[\mathbb{L}W]_\alpha$, $[\mathbb{F}]_\alpha$, мы условимся "забыть" о бесконечности множества функций $\lambda x \cdot x_i$.

В настоящей статье мы определим относительно эффективно выбранные проекты и покажем, применяя т.н. метод исправлений фундаментальных последовательностей, что существуют такие проекты $\mathbb{F}$, что $\omega^2 \leqslant \mathbb{F} \leqslant \omega_{NC}$, где ω_{NC} - первый неконструктивный ординал и $\bigcup_{\alpha<\|\mathbb{F}\|} [\mathbb{F}]_\alpha = \Phi_{gen}$, где Φ_{gen} - множество всех общерекурсивных функций. Тем же методом будет доказано существование таких проектов $\mathbb{F}$, что $\|\mathbb{F}\| \leq \omega_{KC}$ и все классы $[\mathbb{F}]_\alpha$ конечно порожденные. И, наконец, что существуют такие проекты $\mathbb{F}$, что $\|\mathbb{F}\| = \omega_1$ и $d_\alpha^{\mathbb{F}} = \lambda x \cdot x$. В связи с этим отметим, что интересные проекты – т.н. стройные системы фундаментальных последовательностей – для которых положительно решается проблема "В", построил Шмит в статье [6]. Однако, как было показано в [7], нельзя выбрать стройную систему фундаментальных последовательностей одновременно для всех счетных предельных ординалов.

2. Относительно эффективно выбранные проекты

Пусть S – некоторая система обозначений для ординалов и $v_S(x)$ – ординал, имеющий обозначение x в системе S (см. [5] стр. 264).

<u>Определение 4</u>. Фундаментальную последовательность $\langle \alpha|n| \rangle_n$ будем называть вычислимой, если существует такая одноместная общерекурсивная функция φ, что $\alpha|n| = v_S(\varphi(n))$ для всех $n < \omega$.

<u>Определение 5</u>. Будем говорить, что проект $\mathbb{F}$ является относительно эффективно выбранным до ординала β, если существует такая одноместная частичнорекурсивная функция ξ и такое множество $B_\beta \subseteq \mathfrak{D}_1$, содержащее по крайней мере одно обозначение для каждого ординала $\alpha < \beta$, что

– если $x \in B_\beta$ и $v_S(x)$ – предельный ординал, то $\xi(x)$ определен и $\langle v_S(\varphi_{\xi(x)}(n)) \rangle_n$ есть фундаментальная последовательность из $\mathbb{F}$, имеющая $v_S(x)$ своим пределом, причем $\varphi_{\xi(x)}(n) \in B_\beta$ для всех $n < \omega$.

<u>Замечание</u>. Если $\beta = \|\mathbb{F}\|$, то будем вместо "$\mathbb{F}$ является относительно эффективно выбранным до β" говорить, что "$\mathbb{F}$ является относительно эффективно выбранным".

<u>Определение 5.I</u>. Будем говорить, что проект $\mathbb{F}$ является эффективно выбранным до ординала β, если $\mathbb{F}$ относительно эффективно выбран до β и при этом множество B_β является рекурсивно перечислимым.

Применяя т.н. лемму о рекурсии (см. [5] стр. 509) можно доказать следующую теорему:

<u>Теорема I</u>. Если проект $\mathbb{F}$ относительно эффективно выбран до β, то $\bigcup_{\alpha<\beta} [\mathbb{F}]_\alpha \subseteq \Phi_{gen}$. Если же $\mathbb{F}$ является эффективно выбранным до β, то $\bigcup_{\alpha<\beta} [\mathbb{F}]_\alpha^{(1)}$ является вычислимым семейством общерекурсивных функций (т.е. существует такая одноместная общерекурсивная функция ι, что

$\bigcup_{\alpha<\beta}[\mathbb{F}]_\alpha^{(1)} = \{\varphi_{f(x)}\}_x$. Теорема I, ход доказательства которой можно в общих чертах найти в [4], дает нам хороший способ для получения различных иерархий рекурсивных функций. Например:

Теорема 2. (Лёб-Вайнер [3] стр. 47). Пусть P - некоторый путь через O, где O - клиниевская система обозначений (см. [5] стр. 268), и пусть проект $\mathbb{P}$ определен следующим образом:

$$\mathbb{P} = \{\langle|\varphi_\alpha(n)|_O\rangle_n \mid 3\cdot 5^\alpha \in P\}.$$

Тогда, если ординал β имеет обозначение в P, то $\bigcup_{\alpha<\beta}[\mathbb{P}]_\alpha \subseteq \Phi_{qu}$.

Доказательство. Нетрудно проверить, что проект $\mathbb{P}$ является относительно эффективно выбранным для любого β, имеющего обозначение в пути P. Остается применить теорему I ∎ (знак ∎ обозначает конец доказательства).

Аналогичным образом доказывается

Теорема 3. Пусть M - некоторая унивалентная система обозначений и пусть

$$\mathbb{M} = \{\langle \nu_M(\varphi_{f_M(x)}(n))\rangle_n \mid x \in \mathfrak{D}_M \,\&\, \kappa_M(x) = 2\}.$$

В таком случае, если $\beta \leq \|M\|$, то $\bigcup_{\alpha<\beta}[\mathbb{M}]_\alpha \subseteq \Phi_{qu}$.

Эту теорему мы будем ниже использовать при решении проблемы "А".

3. Метод исправлений фундаментальных последовательностей

Постановка задачи. Решение многих вопросов об иерархии Лёба-Вайнера так или иначе сводимо к следующей проблеме: Пусть H - некоторая совокупность функций. Требуется определить такой проект $\mathbb{F}$, что для каждой $h \in H$ можно было бы указать такие $\alpha_h < \|\mathbb{F}\|$ и $f_h \in [\mathbb{F}]_{\alpha_h}$, при которых почти для всех значений $x_1, \ldots, x_n$ имело место неравенство

$$h(x_1, \ldots, x_n) < F^0_{\alpha_h}(f_h(x_1, \ldots, x_n)).$$

Или в более "сильном" варианте: требуется найти такой проект $\mathbb{F}$, чтобы для каждой $h \in H$ можно было бы указать такую примитивно рекурсивную функцию f_h, при которой для каждого $\omega \leq \alpha < \|\mathbb{F}\|$ и почти для всех $x_1, \ldots, x_n$ имело место неравенство

$$h(x_1, \ldots, x_n) < F^\omega_\alpha(f_h(x_1, \ldots, x_n)).$$

По существу именно таким способом были доказаны, например, теорема Лёба и Вайнера о том, что $\bigcup_{\alpha<\varepsilon_0}[W]_\alpha = \psi_\kappa$, теоремы

Вайнера о том, что $\bigcup_{\alpha<\varepsilon_0}[\mathbb{L}W]_\alpha = \Phi_{ord}$ и что все классы $[\mathbb{L}W]_\alpha$ конечно порожденные, а также теорема автора о том, что существует такой проект $\mathbb{F}$, что $\bigcup_{\alpha<\omega^2}[\mathbb{F}]_\alpha = \Phi_{gen}$ (см. [4] стр. 51-53).

В рамках настоящей работы нам достаточно изучать вышеуказанные проблемы в более узкой формулировке. А именно:

П.I. Пусть H – некоторая совокупность одноместных функций и пусть $\omega^2 \leq \delta \leq \omega_1$. Возможно ли определить такой проект $\mathbb{F}$, что $\|\mathbb{F}\| = \delta$ и для каждой $\hat{h} \in H$ можно было бы указать такое α, при котором $\hat{h} \prec F^{\circ}_{\alpha}$, где $\varphi \prec \psi \Longleftrightarrow (\exists m)(\forall n > m)[\varphi(n) < \psi(n)]$).

П.II. Пусть H – снова некоторая совокупность одноместных функций и пусть $\omega < \delta \leq \omega_1$. Возможно ли определить такой проект $\mathbb{F}$, что $\|\mathbb{F}\| = \delta$ и чтобы для каждой $h \in H$ и для всех $\omega \leq \alpha < \|\mathbb{F}\|$ имело место $\hat{h} \prec H$.

На первый взгляд может показаться, что решение этих проблем – задача безнадежная, ибо, не располагая ни малейшей информацией о поведении функций из множества H, трудно даже представить, как все-таки определить требуемые проекты. Однако ниже мы описываем т.н. метод исправлений фундаментальных последовательностей, при помощи которого решаются положительно как проблема ПI так и ПII. Суть метода исправлений фундаментальных последовательностей можно кратко и в самых общих чертах изложить в следующей форме:

Вместо того, чтобы сразу "de facto" построить нужный нам проект, берем сначала произвольный проект $\mathbb{F}$ с длиной δ, который, быть может, и не удовлетворяет нашим требованиям. Теперь мы "исправляем" проект $\mathbb{F}$, прибавляя справа по всем членам некоторых фундаментальных последовательностей из $\dot{\mathbb{F}}$ подходящие натуральные числа и докажем, что полученный таким способом новый проект $\mathbb{F}$ обладает требуемыми свойствами.

Более конкретную картину о вышеуказанном мы получим из доказательств следующих теорем. Итак,

<u>Теорема 4</u>. Пусть H – некоторая счетная совокупность одноместных функций и пусть $\omega^2 \leq \delta \leq \omega_1$. Существует такой проект $\mathbb{F}$, что $\|\mathbb{F}\| = \delta$ и для каждой $h \in H$ найдется такое α, что $h \prec F^{\circ}_{\alpha}$.

<u>Доказательство.</u> Берем произвольный проект $\dot{\mathbb{F}}$ с длиной δ, где $\omega^2 \leq \delta \leq \omega_1$. Образуем некоторую счетную совокупность B из предельных ординалов, меньших δ и установим

взаимно-однозначное соответствие между элементами H и B. Символом β_h будем обозначать предельный ординал из B, который соответствует функции h из H. Фундаментальную последовательность из $\dot{F}$ для некоторого предельного ординала α обозначим через $\langle \dot{\alpha} | x | \rangle_x$.

Теперь определим новый проект $\mathbb{F}$, полагая, что для предельных $\alpha \notin B$ $\mathbb{F}$ содержит $\langle \dot{\alpha} | x | \rangle_x$, а для β_h проект $\mathbb{F}$ содержит последовательность

$\langle \beta_h | x | \rangle_x = \langle \dot{\beta}_h | x | + \dagger h(x) \rangle_x$, где

$$\begin{cases} \dagger h(0) = h(0) \\ \dagger h(x+1) = \begin{cases} h(x+1), & \text{если } h(x+1) > \dagger h(x) \\ \dagger h(x)+1, & \text{если } h(x+1) \leq \dagger h(x). \end{cases} \end{cases}$$

Если теперь $x > 0$, то на основе леммы 2 из [4] имеем, что

$$F^{\circ}_{\beta_h}(x) = F^{\circ}_{\beta_h|x|}(d^{\mathbb{F}}_{\beta_h}(x)) = F^{\circ}_{\dot{\beta}_h|x|+\dagger h(x)}(d^{\mathbb{F}}_{\beta_h}(x)) > \dagger h(x) \geq h(x) \blacksquare$$

Теорема 5. Пусть H – некоторая совокупность одноместных функций и пусть $\omega < \delta \leq \omega_1$. Существует такой проект $\mathbb{F}$ с длиной δ, что для каждой $h \in H$ и для всех $\omega \leq \alpha < \delta$ имеет место $h < F^{\circ}_{\alpha}$.

Доказательство. Возьмем произвольный проект $\dot{\mathbb{F}}$ с длиной δ, где $\omega < \delta \leq \omega_1$. Пронумеруем натуральными числами все функции из H, полагая, что $H = \{h_0, h_1, \dots\}$. Теперь определим новый проект

$\mathbb{F} = \{\langle \dot{\beta} | x | + \dagger(\sum_{n=0}^{x} h_n(x)) \rangle_x \mid$ где β – предельный ординал меньше δ и $\langle \beta | x | \rangle_x$ – фундаментальная последовательность из $\dot{\mathbb{F}}$ для $\beta \}$.

Нетрудно показать, что если $f = \lambda x \cdot \dagger(\sum_{n=0}^{x} h_n(x))$, то $h < f$ для всех $h \in H$. Из этого на основе леммы 2 из [4] и леммы 2.4 из [3], легко следует, что $h < F^{\circ}_{\alpha}$ для всех $h \in H$ и для каждого $\omega \leq \alpha < \delta$ $\blacksquare$ "Практическую" пользу от вышеуказанных теорем 4 и 5 мы будем иметь лишь после того, когда мы сумеем ответить на следующие вопросы:

При каких условиях метод исправлений сохраняет

1° вычислимость фундаментальных последовательностей;

2° эффективную выбранность проектов;

3° рекурсивность функций Лёба-Вайнера?

Определение 6. Пусть S – некоторая система обозначений для ординалов. Будем говорить, что S имеет эффективную операцию сложения натуральных чисел справа (слово "справа" мы в дальнейшем будем опускать), если существует такая двухместная частичнорекурсивная функция $\#_S$, что $x \#_S n$ определено для всех $x \in \mathcal{D}_S$ и $n < \omega$ и $v_S(x \#_S n) = v_S(x) + n$.

<u>Лемма I</u>. Если система S имеет эффективную операцию сложения натуральных чисел, все фундаментальные последовательности из проекта $\mathbb{F}$ являются вычислимыми, $H \subseteq \Phi_{q\varepsilon n}$ и $\mathbb{F}$ получается из $\mathbb{F}$ методом исправлений, который изложен в доказательстве теоремы 4, то все последовательности из $\mathbb{F}$ являются вычислимыми.

<u>Лемма 2</u>. Если система S имеет эффективную операцию сложения натуральных чисел, проект $\dot{\mathbb{F}}$ относительно эффективно выбран до δ, причем множество $\dot{B}_S$ (см. опр. 5) содержит в точности одно обозначение для каждого предельного ординала $\beta < \delta$, существует такая одноместная общерекурсивная функция q, что $H = \{\varphi_{q(x)}\}_x$ и все функции из H являются неубывающими и если наконец

$$\mathbb{F} = \{ \langle v_S(\varphi_{\xi(x)}(n)) + \varphi_{q(x)}(n) \rangle_n \mid \langle v_S(\varphi_{\xi(x)}(n)) \rangle_n \in \dot{\mathbb{F}} \},$$

то проект $\mathbb{F}$ является относительно эффективно выбранным до δ, причем $F^{\circ}_{\alpha} \in \Phi_{q\varepsilon n}$ для всех $\alpha < \delta$.

Доказательства лемм I и 2 можно без особых трудностей получить, опираясь на определения 4, 5 и 6.

<u>Лемма 3</u>. Если система S имеет эффективную операцию сложения натуральных чисел, проект $\dot{\mathbb{F}}$, где $\|\dot{\mathbb{F}}\| \geq \omega^2$, относительно эффективно выбран до некоторого $\delta \geq \omega^2$, причем множество B_δ содержит в точности одно обозначение для всех предельных $\beta < \delta$ и существует такая фундаментальная последовательность $\langle \beta_m \rangle_m$ для δ, элементы которой все суть предельные ординалы и если наконец $\{h_m\}_m = H \subseteq \Phi_{q\varepsilon n}$ и

$$\mathbb{F} = \{ \langle \beta_m[n] + h_m(n) \rangle_n \mid \langle \beta_m[n] \rangle_n \in \dot{\mathbb{F}} \} \cup$$
$$\cup \{ \langle \alpha[n] \rangle_n \mid \langle \alpha[n] \rangle_n \in \dot{\mathbb{F}} \,\&\, \alpha \notin \langle \beta_m \rangle_m \},$$

то $\bigcup\limits_{\alpha < \delta} [\mathbb{F}]_\alpha \subseteq \Phi_{q\varepsilon n}$.

<u>Доказательство</u>. Пусть

a – фиксированный гёделевский номер константы 0,

c_m – фиксированный гёделевский номер функции h_m,

b_m – обозначение из B_δ для ординала β_m,

$$g_m(x) = \begin{cases} c_i \text{ если } x = b_i \text{ для некоторого } i = c, \ldots, m \\ x \text{ для остальных значений } x. \end{cases}$$

Определяем проекты $\mathbb{F}_0, \mathbb{F}_1, \ldots, \mathbb{F}_m, \ldots$ полагая, что

$$\mathbb{F}_m = \{ \langle \nu_S(\varphi_{\xi(x)}(n)) + \varphi_{g_m(x)}(n) \rangle_n \mid \langle \nu_S(\varphi_{\xi(x)}(n)) \rangle \in \mathbb{F} \,\&\, \nu_S(x) < A_{m+1} \}.$$

Легко видеть, что для каждого m, $\mathbb{F}_m$ - относительно эффективно выбрано до β_{m+1}, причем $\mathbb{F}_0 \subset \mathbb{F}_1 \subset \ldots \subset \mathbb{F}_m \subset \ldots$ и $\bigcup_m \mathbb{F}_m = \mathbb{F}$. Следовательно, $\bigcup_{\alpha<\delta} [\mathbb{F}]_\alpha \subseteq \Phi_{gen}$ ∎

Нет сомнений, что читатель сам легко сможет формулировать и доказать аналогичные леммы и для той "версии" метода исправлений, который содержится в доказательстве теоремы 5.

4. Получение иерархий всех общерекурсивных функций при помощи метода исправлений фундаментальных последовательностей

Теорема 6. Для любого предельного δ, такого, что δ имеет фундаментальную последовательность из предельных ординалов и $\omega^2 \leq \delta \leq \omega_{NC}$, существует такой проект $\mathbb{F}$, что $\|\mathbb{F}\| \geq \delta$ и $\bigcup_{\alpha<\delta} [\mathbb{F}]_\alpha = \Phi_{gen}$.

Доказательство. Пусть S - некоторая максимальная унивалентная система обозначений, имеющая эффективную операцию сложения натуральных чисел. (Такую систему можно легко получить, например из системы Клини О.). Определяем "исходный" проект $\mathbb{F}$, полагая, что

$$\mathbb{F} = \{ \langle \nu_S(\varphi_{k_S(x)}(n)) \rangle_n \mid x \in \mathfrak{D}_S \,\&\, K_S(x) = 2 \}.$$

Легко видель, что $\mathbb{F}$ является относительно эффективно выбранным. Пусть теперь $\langle \nu_S(z_m) \rangle_m$ - некоторая фиксированная фундаментальная последовательность для δ, все элементы которой суть предельные ординалы и пусть $\{f_m\}_m$ - множество всех одноместных общерекурсивных функций. Полагая, что для всех $m < \omega$

$h_m = \lambda x \cdot \mu y [g_m(x,y) = 0]$, где $f_m = \lambda x \cdot l(\mu y [g_m(x,y) = 0])$, $g_m \in \Psi_{prim}$ и l - "левая" функция из канторовской нумерации пар, определим новый проект $\mathbb{F}$:

$$\mathbb{F} = \{ \langle \nu_S(\varphi_{q_S(z_m)}(n)) + f h_m(n) \rangle_n \}_m \cup$$

$$\cup \{ \langle \nu_S(\varphi_{q_S(x)}(n)) \rangle_n \mid x \in \mathfrak{D}_S \,\&\, K_S(x) = 2 \,\&\, x \notin \{z_m\}_m \}.$$

В силу леммы 3 имеем $\bigcup_{\alpha<\delta} [\mathbb{F}]_\alpha \subseteq \Phi_{gen}$. В то же время, из леммы 2 из [4] следует, что $h_m < F^{0}_{\nu_S(z_m)}$ для всех $m < \omega$. Но из этого вытекает, что при всех $m < \omega$ имеет место $f_m \in [\mathbb{F}]_{\nu_S(z_m)}$, откуда $\Phi_{gen} \subseteq \bigcup_{\alpha<\delta} [\mathbb{F}]_\alpha$.

Действительно, согласно лемме 5 из [4] и определнию 3, все классы $[F]_\alpha$ замкнуты относительно операций ограниченного минимума и суперпозиции. Кроме того, на основе теоремы 2.18 из [3], $\bigcup_{\alpha<\omega} [F]_\alpha = \Phi_{prim}$ ■

Замечание. Легко показать, (используя, например, теорему 1 из [4]), что при любом проекте $\mathbb{F}$ из $\delta < \omega^2$ следует $\bigcup_{\alpha<\delta} [\mathbb{F}]_\alpha \neq \Phi_{gen}$.

5. Решение проблемы "А" Лёба-Вайнера

Лемма 4. Пусть $\mathbb{F}$ - проект. Тогда, если $\omega \leq \alpha < \|\mathbb{F}\|$, то класс $E(\lambda x \cdot 0, \lambda xy \cdot x+y, \lambda x \cdot x_i, \lambda x \cdot F_\alpha^0(x))$ содержит все примитивно рекурсивные функции и является замкнутым относительно ограниченного минимума.

Доказательство легко получается из определений, теоремы 2.18 из [3] и из следствия 2.1 [1].

Теорема 7. Для любого предельного $\rho \leq \omega_{NC}$ существует такой проект $\mathbb{F}$, что $\|\mathbb{F}\| \geqslant \beta$ и если $\alpha < \beta$ конструктивный предельный ординал и $n < \omega$, то

$$[\mathbb{F}]_\alpha = E(\lambda x \cdot 0, \lambda xy \cdot x+y, \lambda x \cdot x_i, \lambda x \cdot F_\alpha^0(x))$$ и

$$[\mathbb{F}]_{\alpha+n} = E(\lambda x \cdot 0, \lambda xy \cdot x+y, \lambda x \cdot x_i, \lambda x \cdot F_\alpha^0(x), \lambda x \cdot F_{\alpha+n}^0(x)).$$

Доказательство. Пусть S - такая максимальная унивалентная система, которая имеет эффективную операцию сложения натуральных чисел и для которой существует такая двухместная частичнорекурсивная функция $f_S(w, v)$, что для всех $w \in \mathfrak{D}_S$

$$Val\ \lambda v \cdot f_S(w, v) = \{x \mid x \in \mathfrak{D}_S \ \&\ v_S(x) < v_S(w)\}.$$

Положим, что g - одноместная общерекурсивная функция, удовлетворяющая условию

$\varphi_n = \lambda x \cdot l(\mu t[\varphi^{(2)}_{g(n)}(x,t)=0])$ и $\varphi^{(2)}_{g(n)} \in \Phi_{prim}$ для всех φ_n.

Теперь определим функции $A(w, z, x)$, $B(w, z, x)$, $R(w, z, x)$ и $H(w, z)$.

$$A(w, z, x) = \sum_{i=0}^{x} \mu t[\varphi^{(2)}_{g(\varphi_z(f_S(w,i)))}(x, t)=0],$$

$$B(w, z, x) = \varphi_z(\varphi_{q_S(w)}(x) \#_S A_{w,z}(x)),\ \text{где}\ A_{w,z} = \lambda x \cdot A(w, z, x),$$

$$R(w, z, 0) = 0,$$

$$R(w, z, x+1) = \mu y[y > R(w, z, x) \ \&\ (\forall i \leq x)(\varphi_{B(w,z,x+1)}(y) > \varphi_{B(w,z,i)}(y))],$$

$$H(w,z)=\begin{cases} \text{геделевский номер функции } \lambda x\cdot x+1, & \text{если } k_5(w)=0, \\ \text{геделевский номер функции } \lambda x\cdot (x+1)^2, & \text{если } k_5(w)=1 \\ \text{и } k_4(p_5(w))=0, & \\ \text{геделевский номер функции } \lambda x\cdot \varphi_{\underbrace{\varphi_{z(p_5(w))}(\ldots\varphi_{z(p_5(w))}}_{x+1}(x)\ldots)}, & \\ \text{если } k_5(w)=1 \text{ и } k_4(p_5(w))\neq 0, & \\ \text{геделевский номер функции } \lambda x\cdot \varphi_{g(w,z,x)}(R(w,z,x)), & \\ \text{если } k_5(w)=2. & \end{cases}$$

Ясно, что все вышеопределенные функции частичнорекурсивные, и при этом существует еще такая одноместная частичнорекурсивная функция h, что $\varphi_{h(z)}=\lambda w\cdot H(w,z)$ для всех $z\in \mathrm{Arg}\ H$. Применяя теорему о рекурсии, найдем такое z_0, что $\varphi_{h(z_0)}=\varphi_{z_0}$ и обозначим φ_{z_0} через ψ. Теперь определим

$$\mathbb{F}=\{<v_5(\varphi_{q_5(w)}(x))+A_{w,z_0}(x))>_x \mid k_5(w)=2\ \&\ w\in \mathcal{D}_5\}.$$

(Очевидно, что $\mathbb{F}$ является "исправлением" проекта

$$\dot{\mathbb{F}}=\{<v_5(\varphi_{q_5(w)}(x))>_x \mid w\in \mathcal{D}_5\ \&\ k_5(w)=2\}).$$

Легко доказать, что $F^0_{v_5(v)}=\varphi_{\psi(v)}$ для всех $v\in \mathcal{D}_5$.

Если $v_5(w)$ – предельный ординал, то на основе леммы 2 из [4]

$$F^0_{v_5(w)}(x)=F^0_{v_5(\varphi_{q_5(w)}(x))+A_{w,z_0}(x))}(\alpha^{\mathbb{F}}_{v_5(w)}(x))=$$
$$=F^0_{v_5(\varphi_{q_5(w)}(x))+A_{w,z_0}(x)}(\alpha^{\mathbb{F}}_{v_5(w)}(x))+A_{w,z_0}(x)\geqslant$$
$$\geqslant \sum_{i=0}^{x}\mu t[\varphi^{(2)}_{g(\psi(f_5(w,c)))}(x,t)=0],$$

где нетрудно заметить, что $F^0_{v_5(v)}=\lambda x\cdot \ell(\mu t[\varphi^{(2)}_{g(\psi(f_5(v,c)))}(x,t)=0])$

для всех $v_5(v)<v_5(w)$. Но тогда на основе леммы 4 получаем, что для всех $v_5(v)<v_5(w)$ имеет место включение $F_{v_5(v)}\in E(\lambda x\cdot 0,\ \lambda xy\cdot x+y,\ \lambda x\cdot x_i,\ \lambda x\cdot F^0_{v_5(w)}(x))$, откуда сразу вытекает

$$[\mathbb{F}]_{v_5(w)}=E(\lambda x\cdot 0,\ \lambda xy\cdot x+y,\ \lambda x\cdot x_i,\ \lambda x\cdot F^0_{v_5(w)}(x))$$ и

$$[\mathbb{F}]_{v_5(w)+n}=E(\lambda x\cdot 0,\ \lambda xy\cdot x+y,\ \lambda x\cdot x_i,\ \lambda x\cdot F^0_{v_5(w)}(x),\ \lambda x\cdot F_{v_5(w)+n}(x)).$$

6. Решение проблемы "В" Лёба-Вайнера

Теорема 8. Для любого $\beta<\omega_1$ существует такой проект $\mathbb{F}$, что $\|\mathbb{F}\|=\beta$ и $\alpha^{\mathbb{F}}_{\alpha}=\lambda x\cdot x$ при всех предельных $\alpha<\beta$.

Доказательство. Возьмем произвольный такой проект $\dot{\mathbb{F}}$, что $\|\dot{\mathbb{F}}\|=\beta$. Если $\alpha<\beta$ – предельный ординал, то

$\langle \dot\alpha |x| \rangle_x \in \dot{F}$. Теперь определим новый проект $\mathbb{F}$ полагая, что если $\langle \alpha |x| \rangle_x \in F$, то

$$\alpha|0| = \dot\alpha|0|$$

$$\alpha|x+1| = \max(\alpha|x|, \dot\alpha|x+1|) + \max(F^0_{\alpha|0|}(x+1), F^0_{\alpha|1|}(x+1), \ldots, F^0_{\alpha|x|}(x+1))$$

В таком случае

$d^F_\alpha(0) = 0$ и если $d^F_\alpha(x) = x$, то на основе леммы 2 из [4]

$$d^F_\alpha(x+1) = \mu z(z > x \,\&\, (\forall i \leq x)(F^0_{\alpha|x+1|}(z) > F^0_{\alpha|i|}(z))) = x+1 \blacksquare$$

Литература

1. Г ж е г о р ч и к А., Некоторые классы рекурсивных функций. БКС, Проблемы математической логики, М., 1970.
2. В а й н е р С. С., Классификация ординально рекурсивных функций.—БКС., Сложность вычислений и алгоритмов. М., 1974.
3. Л ё б М.Х., В а й н е р С.С., Иерархия теоретико-числовых функций. БКС, Сложность вычислений и алгоритмов - М., 1974.
4. Л о р е н т с П. Иерархия Лёба-Вайнера и общерекурсивные функции.— Рекурсивные функции. Межвузовский сборник научных трудов, Иваново, Ив.ГУ, 1978.
5. Р о д ж е р с Х., Теория рекурсивных функций и эффективная вычислимость. М., 1972.
6. S c h m i d t, D. Built-up systems of fundamental sequences and hierarchies of number-theoretic functions. Arch. math. Logik und Grundl., 18 (1976).
7. S c h m i d t, D. Postscript to "Built-up systems of fund. seq. and hier. of numb.-theor. funct., Arch. math. Logik und Grundl., 18 (1977).

Поступило
10.X 1979

REKURSIIVSETE FUNKTSIOONIDE HIERARHIATE GENEREERIMINE NING LÖB-WEINERI PROBLEEMIDE "A" JA "B" LAHENDAMINE FUNDAMENTAALJADADE PARANDAMISE MEETODIL

P.Lorents

R e s ü m e e

Artiklis kirjeldatakse fundamentaaljadade parandamise meetodit ning kasutatakse seda 1970. aastal Löbi ja Weineri poolt sõnastatud probleemide "A ja "B" positiivseks lahendamiseks.

GENERATING OF HIERARCHIES OF GENERAL RECURSIVE FUNCTIONS AND SOLVING THE PROBLEMS "A" AND "B" OF LÖB AND WEINER USING CORRECTION METHOD OF FUNDAMENTAL SEQUENCES

P. Lorents

S u m m a r y

A method of correcting of fundamental sequences is described. The method is based on the fact that given an arbitrary set of fundamental sequences it is possible to find such natural numbers for adding to the elements of sequences which give the desired properties to the Löb-Weiner Hierarchies. The method enables to prove the existence of such hierarchies of Löb and Weiner, which represent the set of all general recursive functions. The same method enables also to get positive answers to the problems "A" and "B" stated by Löb and Weiner in 1970.