О ДЕЙСТВИИ ПОЛУГРУПП

У.Кальюлайд
Кафедра алгебры и геометрии

1. Подход к решению задач о терминале и пределе групп, развитый в [1] и [4], существенно опирается на известную теорему Л.А.Калужнина о том, что финитная (инвариантная) стабильность точного действия группы влечет ее нильпотентность. Названные задачи, однако, могут быть отнесены также к полугруппам. Поэтому представляет некоторый интерес обобщение теоремы Калужнина на полугруппы, что и является основной целью данной заметки.

2. Для конгруэнции $\mathfrak{A}$ на полугруппе Γ рассмотрим в кольце $R = \mathbb{Z}\Gamma$ правый идеал $I(\mathfrak{A})$, порожденный всеми разностями $\gamma - \sigma$, $\gamma, \sigma \in \Gamma$ и $\gamma \sim \sigma(\mathfrak{A})$. Ясно, что $I(\mathfrak{A})$ является двусторонним идеалом кольца R и естественно возникает как ядро гомоморфизма полугрупповых колец $\mathbb{Z}\Gamma \to \mathbb{Z}(\Gamma/\mathfrak{A})$, полученного $\mathbb{Z}$-линейным продолжением эпиморфизма $\Gamma \to \Gamma/\mathfrak{A}$. В случае, когда $\mathfrak{A}$ - единичная конгруэнция на Γ, т.е. $\mathfrak{A}$ определяется множеством $\Gamma \times \Gamma$ всех пар, идеал $I(\mathfrak{A})$ естественно называть фундаментальным идеалом для $\mathbb{Z}\Gamma$ и обозначать $\Delta(\Gamma, \mathbb{Z})$ или просто Δ. Далее, при всяком натуральном n определяем на Γ бинарное отношение ϑ_n,

$$\gamma \sim \sigma(\vartheta_n) \text{ на } \Gamma \iff \gamma - \sigma \in \Delta^n \text{ в } \mathbb{Z}\Gamma;$$

ясно, что ϑ_n - конгруэнция на Γ. Назовем ее n-той размерной конгруэнцией полугруппы Γ относительно $\mathbb{Z}$. В случае, когда Γ - моноид, содержащий единицу, ϑ_n-класс является подмоноидом; обозначим его $D_n(\Gamma, \mathbb{Z})$. Для группы Γ подмоноид $D_n(\Gamma, \mathbb{Z})$ - хорошо известная n-я размерная подгруппа, являющаяся объектом интенсивного внимания (см. [6] и указанную там литературу).

Нильпотентность полугрупп будет пониматься в смысле А.И. Мальцева. Пусть $x, y, u_1, u_2, \ldots, u_n, \ldots$ - произвольные переменные. Полагаем $X_0 = x$, $Y_0 = y$ и далее индуктивно определяем

$$\mathcal{X}_n = \mathcal{X}_{n-1}\, u_n\, \mathcal{Y}_{n-1}, \quad \mathcal{Y}_n = \mathcal{Y}_{n-1}\, u_n\, \mathcal{X}_{n-1}.$$

Согласно [2], полугруппа Γ, элементы которой удовлетворяют тождеству $\mathcal{X}_n = \mathcal{Y}_n$, называется n-ступенно нильпотентной. Для группы Γ получаем здесь обычное понятие n-ступенной нильпотентности группы ([2], теорема I). На любой полугруппе Γ можно рассматривать конгруэнцию $\tau_{n+1} = \mathcal{N}_n(\Gamma)$ по многообразию n-ступенно нильпотентных полугрупп – минимальную конгруэнцию α на Γ со свойством $\Gamma/\alpha \in \mathcal{N}_n$. Дополнительно полагаем, что τ_1 – единичное отношение на Γ. Возникает убывающий ряд конгруэнций на

$$\tau_1 \geqslant \tau_2 \geqslant \cdots \geqslant \tau_n \geqslant \tau_{n+1} \geqslant \cdots,$$

который назовем нижним центральным рядом полугруппы Γ. Заметим, что для группы Γ содержащие единицу τ_n-классы $(n \geqslant 1)$ совпадают с членами нижнего центрального ряда этой группы Γ. Выяснение взаимоотношения конгруэнций τ_n и ϑ_n кажется интересной задачей. Следует добавить, однако, что уже равенство $\tau_2 = \vartheta_2$ на полугруппе Γ требует (в отличие от группового случая) выполнения дополнительных условий типа сепаративности Γ.

Как и для групп (см. [I]) можно определить терминал $\tau(\Gamma)$ полугруппы Γ и ставить вопрос о выяснении поведения терминала на классе конечных полугрупп. В частности, можно высказать предположение, что $\tau(\Gamma, \mathbb{Z}) < \omega 2$ для всякого конечного моноида Γ. Далее, рассматривая предельную конгруэнцию $D_\omega(\Gamma)$ на полугруппе Γ, являющуюся ядром пары $(\mathbb{Z}\Gamma/\Delta^{\tau(\Gamma)}, \Gamma)$, можно ставить также задачу описания (в полугрупповых терминах) этой предельной конгруэнции на классе конечных полугрупп.

3. Ниже рассматриваются пары, областью действия которых является (произвольная) группа, а действующим объектом – полугруппа. Пусть (G, Γ) – некоторая такая пара. Для всякой Γ-допустимой инвариантной подгруппы H в G имеем пару (H, Γ), ядро которой обозначим k. Далее, рассмотрим подгруппу $\mathfrak{Z}(H) \leqslant G$,

$$\mathfrak{Z}(H) = \{ g \in G \mid \forall h \in H,\ gh = hg \}.$$

Лемма. Для произвольного $g \in G$ и таких элементов $\gamma_1, \gamma_2 \in \Gamma$, что $\gamma_1 \sim \gamma_2\,(k)$, имеет место соотношение

$$(g \circ \gamma_1)(g \circ \gamma_2)^{-1} \in \mathfrak{Z}(H \circ \gamma_1).$$

Доказательство. Для любых $x, y \in G$ и $\gamma \in \Gamma$ полагаем $x^y = y^{-1}xy$, $[x, \gamma] = x^{-1} \cdot (x \circ \gamma)^{\gamma}$ и $z = (g \circ \gamma_1)(g \circ \gamma_2)^{-1}$.

Очевидно, для пары (G,Γ) верно соотношение

$$\forall x,y\in G,\ \gamma\in\Gamma,\ [xy,\gamma]=[x,\gamma]^{y}\cdot[y,\gamma];$$

дважды пользуясь этим в вычислениях, для произвольного $h\in H$ имеем

$$\begin{aligned} h^{-1}zh &= (g^{-1}h)^{-1}\cdot[g,\gamma_1]\cdot[g,\gamma_2]^{-1}\cdot(g^{-1}h)= \\ &=[g,\gamma_1]^{g^{-1}h}\cdot([g,\gamma_2]^{g^{-1}h})^{-1}=[h,\gamma_1]\cdot[g^{-1}h,\gamma_1]^{-1}\cdot[g^{-1}h,\gamma_2]\cdot[h,\gamma_2]^{-1}= \\ &=[h,\gamma_1]\cdot([g^{-1}hg,\gamma_1]^{g^{-1}}\cdot[g^{-1},\gamma_1])^{-1}\cdot[g^{-1}hg,\gamma_2]^{g^{-1}}\cdot[g^{-1},\gamma_2]\cdot[h,\gamma_2]^{-1}= \\ &=[h,\gamma_1]\cdot[g^{-1},\gamma_1]^{-1}\cdot[g^{-1},\gamma_2]\cdot[h,\gamma_2]^{-1}=[h,\gamma_1]\cdot z\cdot[h,\gamma_1]^{-1}, \end{aligned}$$

откуда следует требуемое соотношение $z=(h\circ\gamma_1)\cdot z\cdot(h\circ\gamma_1)^{-1}$.

Класс всех пар (G,Γ) указанного в начале пункта типа, ядро которых является единичной конгруэнцией на Γ, является многообразием, которое обозначим $\mathfrak{J}$. Исходя из $\mathfrak{J}$, можно определить классы $\mathfrak{J}^n$, $n\geq 1$; по определению, $(G,\Gamma)\in\mathfrak{J}^n$, если в группе G существует такой возрастающий Γ-допустимый инвариантный ряд длины $\leq n$,

$$1=G_0<G_1<\dots<G_{i-1}<G_i\dots<G_m=G,\quad m\leq n, \qquad (*)$$

что все пары $(G_i/G_{i-1},\Gamma)$, $i=1,2,\dots,m$, лежат в $\mathfrak{J}$. Иными словами, элементы полугруппы Γ являются равнодействующими в факторах ряда (*) эндоморфизмами. Для группы Γ из $(G,\Gamma)\in\mathfrak{J}^n$ в случае точности пары (G,Γ) следует нильпотентность Γ. Примеры матричных полугрупп показывают, однако, что для полугруппы Γ подобный вывод не всегда имеет место. Для описания необходимых дополнительных условий оказывается полезным язык квазиколец [5]. Существенным здесь является следующий пример. Пусть G - группа, а Γ - полугруппа всех однозначных отображений группы G в себя. Для всех $\sigma,\tau\in\Gamma$ и $g\in G$ полагаем $g^{\sigma+\tau}=g^{\sigma}\cdot g^{\tau}$, что наделяет полугруппу Γ и сложением. Относительно этой новой операции Γ оказывается группой; добавим, что для каждого $\sigma\in\Gamma$ противоположный элемент $(-\sigma)$ определяется формулой $g^{-\sigma}=(g^{\sigma})^{-1}$. Рассматриваемые две операции на Γ связаны левой дистрибутивностью (что, вообще говоря, неверно для правого дистрибутивного закона) и поэтому Γ - почтикольцо. Выделим в Γ подгруппу относительно сложения $\mathcal{E}(G)$, порожденную всеми эндоморфизмами группы G; элементы из $\mathcal{E}(G)$ называются квазиэндоморфизмами группы G. Эта аддитивная подгруппа замкнута и относительно умножения, т.е. $\mathcal{E}(G)$ - квазикольцо. Заметим, что $\mathcal{E}(G)$ для абелевой группы G совпадает с кольцом End G.

Пусть f – сопровождающий пару (G, Γ) гомоморфизм представления. Пару (G, Γ) назовем n-стабильной, если $(G, \Gamma) \in \mathfrak{Y}^n$ и в дистрибутивно порожденном почтикольце $\mathfrak{b}(G)$ квазиэндоморфизмов группы G существует такой элемент θ, который перестановочен в $\mathfrak{b}(G)$ со всеми разностями $\alpha^f - \beta^f$, $\alpha, \beta \in \Gamma$, ряд $(*)$ θ-инвариантен, а в факторах этого ряда элементы из Γ равнодействуют с θ.

4. Оказывается, верна

Теорема. Если точная пара является n-стабильной, то действующая полугруппа $(\leq (n-1)$-ступенно) нильпотентна по Мальцеву.

Доказательство проведем индукцией по n.

Для $n = 1$ утверждение теоремы тривиально. Рассмотрим случай $n = 2$. Точность пары (G, Γ) позволяет считать Γ подмножеством квазикольца $\mathfrak{b}(G)$, причем элементы из Γ являются в $\mathfrak{b}(G)$ дистрибутивными элементами. Фиксируем любые α, β и γ из Γ, g из G, и пусть θ – сопровождающий 2-стабильную пару (G, Γ) квазиендоморфизм из $\mathfrak{b}(G)$. Обозначим $g^\theta = h$; тогда существует $g_1 \in G_1$, что $g^{\gamma\beta} = g_1 h$. Имеем также $g^{\alpha-\gamma} \in G_1$. Пользуясь доказанной выше леммой, видим, что верны следующие выкладки:

$$
\begin{aligned}
g^{\alpha\beta\gamma-\gamma\beta\alpha} &= g^{(\alpha\beta\gamma-\gamma\beta\gamma)+(\gamma\beta\gamma-\gamma\beta\alpha)} = g^{(\alpha-\gamma)\beta\gamma}\cdot g^{\gamma\beta(\gamma-\alpha)} = \\
&= g^{(\alpha-\gamma)\theta}\cdot g^{\gamma\beta(\gamma-\alpha)} = g^{\theta(\alpha-\gamma)}\cdot g^{\gamma\beta(\gamma-\alpha)} = \\
&= h^{\alpha-\gamma}\cdot(g_1 h)^{\gamma-\alpha} = h^{\alpha}h^{-\gamma}(g_1^{\gamma}h^{\gamma}h^{-\alpha}g_1^{-\alpha}) = \\
&= h^{\alpha}h^{-\gamma}(g_1^{\gamma}h^{\gamma}h^{-\alpha}g_1^{-\gamma}) = h^{\alpha}h^{-\gamma}(h^{\gamma}h^{-\alpha}) = 1,
\end{aligned}
$$

откуда, в силу точности пары (G, Γ), вытекает $\alpha\beta\gamma = \gamma\beta\alpha$. Следовательно, в полугруппе Γ выполнено тождество $X_1 = Y_1$ и тем самым она 1-нильпотентна.

Считаем утверждение теоремы верным для всех точных m-стабильных пар, $m < n$.

Далее, пусть (G, Γ) – любая точная n-стабильная пара. Согласно определению, в группе G имеется ряд $(*)$, относительно которого полугруппа Γ действует стабильно. Введем на Γ конгруэнции $k_1 = \mathrm{Ker}(G_{n-1}, \Gamma)$ и $k_2 = \mathrm{Ker}(G/G_1, \Gamma)$. В силу предположения индукции фактор-полугруппы Γ/k_1 и Γ/k_2 лежат в классе $\mathfrak{N}_{n-2}$, откуда следует $\Gamma/k_1 \cap k_2 \in \mathfrak{N}_{n-2}$, ибо $\Gamma/k_1 \cap k_2$ является подполугруппой в $\Gamma/k_1 \times \Gamma/k_2$.

В определяющем $(n-2)$-нильпотентность полугрупп тождестве $X_{n-2} = Y_{n-2}$ придедим встречающимся в левой и правой части переменным $x, y, u_1, u_2, \ldots, u_{n-2}$ (произвольно) фиксированные значения на элементах полугруппы Γ. Пусть σ и τ – соответствующие значения для X_{n-2} и Y_{n-2}. Из $\Gamma / k_1 \cap k_2 \in \mathfrak{N}_{n-2}$ следует, что $\sigma \sim \tau \, (k_1 \cap k_2)$. Поэтому при любом $g \in G$ имеем $g^{\sigma} \equiv g^{\tau} \pmod{G_1}$; полагаем $g^{\sigma - \tau} = g_2 \in G_1$. При $g \in G_{n-1}$ имеем также $g^{\sigma} = g^{\tau}$. Фиксируем еще некоторый элемент $\gamma \in \Gamma$. Стабильность действия полугруппы Γ относительно рида $(*)$ позволяет провести следующие вычисления:

$$
\begin{aligned}
g^{\sigma\gamma\tau} &= (g^{\sigma})^{\gamma\tau} = (g_2 \cdot g^{\tau})^{\gamma\tau} = g_2^{\theta} (g^{\tau\gamma})^{\tau} = g_2^{\theta} (g^{\theta} g^{-\theta} \cdot g^{\tau\gamma})^{\tau} = \\
&= g_2^{\theta} \cdot g^{\theta\tau} \cdot (g^{(-\theta + \tau\gamma)})^{\tau} = g_2^{\theta} \cdot g^{\theta\tau} \cdot (g^{-\theta + \tau\gamma})^{\sigma} = \\
&= g_2^{\theta} \cdot g^{\theta(\tau - \sigma)} \cdot g^{\tau\gamma\sigma} = g^{(\sigma - \tau)\theta} \cdot g^{\theta(\tau - \sigma)} \cdot g^{\tau\gamma\sigma} = \\
&= g^{\theta(\sigma - \tau) + \theta(\tau - \sigma) + \tau\gamma\sigma} = g^{\tau\gamma\sigma}.
\end{aligned}
$$

В силу точности (G, Γ) из этого следует $\sigma\gamma\tau = \tau\gamma\sigma$. Отсюда вытекает, что в полугруппе Γ выполняется тождество

$$X_{n-2} \cdot u_{n-1} \cdot Y_{n-2} = Y_{n-2} \cdot u_{n-1} \cdot X_{n-2}, \quad \text{т.е.} \quad \Gamma \in \mathfrak{N}_{n-1}.$$

Теорема доказана.

5. Введенный в определении стабильности пары (G, Γ) квазиэндоморфизм θ может полугруппе Γ не принадлежать. В частном случае, когда Γ – моноид, понятие стабильности пары (G, Γ) приобретает обычный смысл (в факторах ряда $(*)$ элементы из Γ действуют тождественно). Согласно теореме из предыдущего пункта имеем $\Gamma \in \mathfrak{N}_{n-1}$. Однако можно воспользоваться еще и наблюдением: ряд $(*)$ является допустимым для элементов из Γ, которые действуя тождественно на факторах этого ряда, являются автоморфизмами ([3], стр. 222). Следовательно, Γ является $(n-1)$-ступенно нильпотентной полугруппой с законом сокращения, и поэтому может быть рассмотрена как подполугруппа нильпотентной группы (теорема 2 из [2]).

Литература

1. К а л ь ю л а й д У., О фундаментальном идеале целочисленного группового кольца конечной группы. Уч. зап. Тартуск. гос. ун-та, 1971, 281, 58-61.
2. М а л ь ц е в А. И., Нильпотентные полугруппы. Уч. зап. Ивановск. пед. ин-та, 1953, 4, 107-111.

3. П л о т к и н Б. И., Группы автоморфизмов алгебраческих систем. Москва, 1966.

4. П л о т к и н Б.И., Замечания о стабильных представлениях нильпотентных групп. Труди Московск. матем. о-ва, 1973, 29, 191-206.

5. F r ö l i c h A., Distributively generated near-ringe. Proo. London Math. Soc. (3), 1958, 8, 76-108.

6. P a s s m a n D., The algebraic structure of group rings. Wiley-Interecienoe, 1977.

Поступило
5 XI 1979

POOLRÜHMADE TOIMEST

U.Kaljulaid

R e s ü m e e

Têatatakse, et kui poolrühma täpne toime on n-stabiilne, siis toimiv poolrühm on $(\leq (n-1))$-nilpotentne A.I. Maltsevi môttes.

ABOUT SEMIGROUP ACTIONS

U.Kaljulaid

S u m m a r y

It has been shown here that from n-stability of a faithful semigroup action it follows that the aoting semigroup is nilpotent in the sense of A.I.Maloev of degree $\leq n-1$.