О ВПОЛНЕ ПЛОСКИХ СЛЕВА МОНОИДАХ, ЯВЛЯЮЩИХСЯ ОБЪЕДИНЕНИЯМИ ГРУПП

М.Кильп
Кафедра алгебры и геометрии

Моноид S называется <u>вполне плоским слева</u>, когда все левые S-полигоны являются плоскими. В этой статье доказывается, что вполне плоский слева моноид, являющийся объединением групп, есть полуструктура правых групп.

Пусть S – моноид. Множество M называется левым S-полигоном, если для любого элемента $m \in M$ и любого элемента $s \in S$ определено их произведение $sm \in M$ так, что $(s_1 s_2)m = s_1(s_2 m)$ и $1m = m$ для произвольных $s_1, s_2 \in S$ и $m \in M$. Правые S-полигоны определяются аналогично. Пусть B – правый S-полигон и M – левый S-полигон. Рассмотрим на декартовом произведении $B \times M$ наименьшее отношение эквивалентности, порожденное отношением $(bs, m) \equiv (b, sm)$, $s \in S$, $b \in B$, $m \in M$. Соответствующее множество классов эквивалентности называется тензорным произведением S-полигонов B и M и обозначается через $B \otimes_S M$. Класс, содержащий элемент (b, m), обозначается через $b \otimes m$. Следовательно, в тензорном произведении $B \otimes_S M$ имеет место равенство $b_1 \otimes m_1 = b_2 \otimes m_2$ тогда и только тогда, когда существует такая конечная цепочка пар из $B \times M$, что первая пара совпадает с парой (b_1, m_1), последняя совпадает с (b_2, m_2), а переход от каждой пары последовательности к следующей осуществляется при помощи переброски элемента из S, т.е., от пары (bs, m), $b \in B$, $m \in M$, $s \in S$, переходят к паре (b, sm), или наоборот.

Если M – левый S-полигон, то $\otimes_S M$ является функтором из категории всех правых S-полигонов в категорию множеств. Левый S-полигон M называется плоским, если функтор $\otimes_S M$ сохраняет мономорфизмы. Это означает, что левый S-полигон M является плоским тогда и только тогда, когда из равенства $a_1 \otimes m_1 = a_2 \otimes m_2$ в тензорном произведении $B \otimes_S M$, где $a_1, a_2 \in A$, $m_1, m_2 \in M$, A – подполигон полигона B, следует равенство $a_1 \otimes m_1 = a_2 \otimes m_2$

в тензорном произведении $A \otimes_S M$. Плоские правые S-полигоны определяются аналогично. Моноид называется вполне плоским, если все (и левые, и правые) полигоны над этим моноидом являются плоскими.

Понятие плоского полигона было введено в [I], где было показано, что существуют моноиды, над которыми все левые, но не все правые полигоны являются плоскими. В [2] доказано, что если S является полуструктурой групп, то S является вполне плоским.

Лемма I. Пусть S и T - моноиды и $\varphi : S \to T$ - эпиморфизм. Если S является вполне плоским слева, то и T является вполне плоским слева.

Доказательство. Пусть B - правый T-полигон, A - его подполигон и M - левый T-полигон. Рассмотрим $B \otimes_T M$ и предположим, что $a_1 \otimes m_1 = a_2 \otimes m_2$ для некоторых $a_1, a_2 \in A$, $m_1, m_2 \in M$. Это означает, что существует конечная цепочка элементов из T, при помощи которых мы можем в $B \times M$ перейти от пары (a_1, m_1) к паре (a_2, m_2). Пусть эти переброски реализуются элементами $t_1, t_2, \ldots, t_r \in T$. Определим $bs = b\varphi(s)$ и $sm = \varphi(s)m$ для всех $s \in S$, $b \in B$, $m \in M$. Тогда, очевидно, A, B и M можно рассматривать как S-полигоны. Выберем $s_1, s_2, \ldots, s_r \in S$ так, что $\varphi(s_i) = t_i$, $i = 1, 2, \ldots, r$. Тогда наша последовательность перебросок может рассматриваться как последовательность, реализуемая элементами $s_1, s_2, \ldots, s_r \in S$. Из существования такой последовательности следует равенство $a_1 \otimes m_1 = a_2 \otimes m_2$ в тензорном произведении $B \otimes_S M$. Предположим теперь, что S является вполне плоским слева. Тогда M является плоским левым S-полигоном и мы имеем равенство $a_1 \otimes m_1 = a_2 \otimes m_2$ в тензорном произведении $A \otimes_S M$. Значит, мы имеем конечную цепочку пар в $A \times M$ такую, что первая пара есть (a_1, m_1) последняя - (a_2, m_2) и от каждой пары к следующей мы переходим при помощи переброски элемента из S. Пусть эти переброски реализуются элементами $u_1, u_2, \ldots, u_t \in S$. Пусть $\varphi(u_i) = v_i$, $i = 1, 2, \ldots, t$. Так как в нашем случае $bu_i = b\varphi(u_i) = bv_i$ и $u_i m = \varphi(u_i)m = v_i m$ для всех $b \in B$, $m \in M$, $i = 1, 2, \ldots, t$, то мы можем рассматривать нашу новую последовательность пар как такую последовательность, где переброски реализуются элементами $v_1, v_2,$

$\ldots, v_t \in T$. Из существования такой последовательности следует, что $a_1 \otimes m_1 = a_2 \otimes m_2$ в тензорном произведении $A \otimes_T M$. Следовательно, M является плоским S-полигоном, а T - вполне плоским слева моноидом.

Лемма 2. Пусть $S = T \cup 0$ - такой моноид с нулем 0, что T - его подмоноид. Если S является вполне плоским слева, то и T является вполне плоским слева.

Доказательство. Пусть B - правый T-полигон, A - его подполигон и M - левый T-полигон. Определим $\bar{B} = B \cup 0_B$, $0_B \bar{\in} B$, $\bar{M} = M \cup 0_M$, $0_M \bar{\in} M$, где $0_B s = 0B$, $b0 = 0_B$, $0m = 0_M$, $s0_M = 0_M$ для всех $b \in B$, $m \in M$, $s \in S$. Ясно, что $\bar{B}$ является правым, а $\bar{M}$ - левым S-полигоном. Пусть $\bar{A} = A \cup 0_B$. Тогда $\bar{A}$ является S-подполигоном полигона $\bar{B}$. Пусть $a_1 \otimes m_1 = a_2 \otimes m_2$ в тензорном произведении $B \otimes_T M$, $a_1, a_2 \in A$, $m_1, m_2 \in M$. Так как T - подмоноид моноида S и $B \subset \bar{B}$, $M \subset \bar{M}$, то очевидно, $a_1 \otimes m_1 = a_2 \otimes m_2$ в тензорном произведении $\bar{B} \otimes_S \bar{M}$. Предположим теперь, что S - вполне плоский слева. Тогда $\bar{M}$ является плоским S-полигоном и мы имеем $a_1 \otimes m_1 = a_2 \otimes m_2$ в тензорном произведении $\bar{A} \otimes_S \bar{M}$. Следовательно, существует цепочка пар

$$(a_1, m_1), (c_1, n_1), (c_2, n_2), \ldots, (c_r, n_r), (a_2, m_2),$$

$c_1, c_2, \ldots, c_r \in \bar{A}$, $n_1, n_2, \ldots, n_r \in M$, в которой мы от каждой пары к следующей переходим при помощи переброски элемента из S. Пусть эти переброски реализуются элементами $s_1, s_2, \ldots, s_{r+1} \in S$. Тогда для пары (c_1, n_1) мы имеем либо $a_1 = c_1 s_1$ и $s_1 m_1 = n_1$, либо $s_1 n_1 = m_1$ и $a_1 s_1 = c_1$. В обоих случаях из определения умножения на элементы из S следует, что $s_1 \in T$, $c_1 \in A$ и $n_1 \in M$. Простая индукция по i дает нам, что для всех i мы имеем $s_i \in T$, $c_i \in A$ и $n_i \in M$. Следовательно, $a_1 \otimes m_1 = a_2 \otimes m_2$ в тензорном произведении $A \otimes_T M$. Тем самым мы доказали, что если S является вполне плоским слева, то любой левый T-полигон является плоским, т.е. T является вполне плоским слева.

Теорема 3. Пусть S - моноид, являющийся объединением групп. Если S является вполне плоским слева, то S является полуструктурой правых групп.

Доказательство. Пусть S - вполне плоский слева моноид, являющийся объединением групп. Тогда S является полуструктурой вполне простых полугрупп [3, теорема 4.6], каждая из которых является прямоугольной связкой групп [3,стр. 80]. Следовательно, S - полуструктура прямоугольных связок R_y групп, $S = \bigcup_{y \in Y} R_y$. Пусть $y \in Y$ и $Z = \{z \in Y \mid z < y$ или z не сравним с $y\}$. Пусть $I = \bigcup_{z \in Z} R_z$. Ясно, что I - идеал моноида S. Пусть $\bar{S} = S/I$ - фактормоноид Риса. По лемме I моноид $\bar{S}$ является вполне плоским слева. Пусть теперь $\bar{S} = T \cup 0$. Легко понять, что T - подмоноид моноида $\bar{S}$. По лемме 2 моноид T является вполне плоским слева. Очевидно, что T - полуструктура прямоугольных связок групп, в которой R_y является ниже компонентой. Легко доказать, что левые и правые идеалы полугруппы R_y являются соответственно левыми и правыми идеалами полугруппы T. Известно [3, следствие 2.49], что прямоугольная связка групп представляет из себя объединение своих попарно непересекающихся правых (левых) идеалов. В [1, лемма 3] доказано, что если все левые полигоны над некоторым моноидом являются плоскими, то любые два правых идеала этого моноида должны иметь непустое пересечение. Из этого факта и того, что все левые T-полигоны являются плоскими, следует, что полугруппа R_y может обладать лишь одним правым идеалом. Следовательно, R_y является правой группой.

<u>Следствие 4</u>. Если идемпотентный моноид S является вполне плоским слева, то S - полуструктура полугрупп с правым умножением.

Из теоремы 3 и результатов статьи [2] вытекает

<u>Теорема 5</u>. Пусть моноид S является объединением групп. Моноид S является вполне плоским тогда и только тогда, когда S - полуструктура групп.

<u>Следствие 6</u>. Пусть S - идемпотентный моноид. Моноид S является вполне плоским тогда и только тогда, когда S коммутативен.

Литература

1. К и л ь п М., О плоских полигонах.- Уч. зап. Тартуск. ун-та, 1970, 253, 66-72.
2. К и л ь п М., К гомологической классификации моноидов. - Сиб. матем. ж., 1972, 13, № 3, 578-586.

3. Clifford, A. H. and G. B. Preston, The algebraic theory of semigroups. Vol. 1 and 2, Amer. Math. Soc., Providence, R.I., (1961) and (1967).

Поступило
15 XI 1979

VASAKULT TÄIESTI LAMEDATEST MONOIDIDEST, MIS ON RÜHMADE ÜHENDID

M.Kilp

R e s ü m e e

Artiklis tõestatakse, et pealkirjas näidatud omadusega monoid on parempoolsete rühmade kommutatiivne sidum.

ON LEFT COMPLETELY FLAT MONOIDS THAT ARE UNIONS OF GROUPS

M.Kilp

S u m m a r y

A monoid is called left completely flat if all left acts over it are flat and completely flat if all (all left and all right) acts over it are flat.

Let S be a monoid which is a union of groups. It is proved that if S is left completely flat then S is a semilattice of right groups. S is completely flat if and only if S is a semilattice of groups.