КЛАССИФИКАЦИЯ НЕПРИВОДИМЫХ МОДУЛЕЙ НАД ПОЛУПРИМАРНЫМ ПОЧТИ-КОЛЬЦОМ[I]

К.Каарли
Кафедра алгебры и геометрии

В статье [I] было введено понятие полупримарного почти-кольца, являющееся естественным обобщением понятия артинова почти-кольца. Далее полупримарные почти-кольца изучались в [2]. В настоящей работе на множестве классов изоморфных неприводимых модулей над полупримарным почти-кольцом вводится некоторое отношение частичной упорядоченности. Максимальные в смысле этой упорядоченности модули называются неприводимыми модулями типа I. Оказывается, что эти модули имеют более существенное влияние на строение почти-кольца, чем остальные неприводимые модули. Доказывается ряд структурных теорем, в которых участвуют неприводимые модули типа I.

§I. Основные понятия

Почти-кольцом называется тройка $(R,+,\cdot)$, где $(R,+)$ - группа, $(R,\cdot)$- полугруппа и выполняются тождества $r(s+t)=$ $=rs+rt$, $0r=0$, где 0 - аддитивный нейтральный элемент группы $(R,+)$.

Модулем над почти-кольцом R или просто R-модулем называется группа $(G,+)$, если для всех $g\in G$, $r\in R$ определены $gr\in G$, так что $g(rs)=(gr)s$, $g(r+s)=gr+gs$ и $0r=0$ для всех $r,s\in R$, $g\in G$.

Ядро почти-кольцевого (R-модульного) гомоморфизма называется идеалом почти-кольца (R-модуля). Символ $S\triangleleft R$ ($A \triangleleft_R G$) означает, что S (A)есть идеал почти-кольца R (R-модуля G).

[I] Обычно эти неприводимые модули называются 0-неприводимыми (в теории почти-колец рассматриваются еще I- и 2-неприводимые модули). Так как в настоящей статье другого типа неприводимость не рассматривается, то опускаем приставку 0-. Соответственно сокращаются и такие понятия, как 0-примитивность, 0-полупростота и.т.д.

Если A и B являются подмножествами R-модуля G, то обозначим

$$(B:A)_R = \{ r \in R \mid Ar \subseteq B \}.$$

Хорошо известно, что из $B \trianglelefteq_R G$ и $AR \subseteq A$ следует $(B:A)_R \triangleleft R$.

Модуль G над почти-кольцом R называется неприводимым, если он цикличен (т.е. $G = gR$ для некоторого $g \in G$) и прост (т.е. не имеет R-идеалов, отличных от 0 и G). Множество всех неприводимых модулей над почти-кольцом R обозначим через $\mathcal{M}_R$. Почти-кольцо называется примитивным, если оно обладает точным неприводимым модулем. Пересечение ядер всех неприводимых R-модулей называется радикалом почти-кольца R и обозначается через $J(R)$. Если $J(R)=0$, то почти-кольцо R называется полупростым.

Почти-кольцо R называется артиновым, если модуль R_R удовлетворяет условию минимальности для подмодулей.

Чтобы определить полупримарное почти-кольцо, определим сначала матричное почти-кольцо. Пусть группа Γ действует автоморфизмами на аддитивно записанной группе G и пусть ρ - такая эквивалентность на G, что

$$g_1 \rho g_2 \Rightarrow (\gamma g_1)\rho(\gamma g_2)$$

при каждом $\gamma \in \Gamma$. С тройкой (Γ, G, ρ) свяжем почти-кольцо $\mathrm{Hom}_{\Gamma,0}(G/\rho, G)$, состоящее из всех таких преобразований k группы G, что

1) $0k = 0$;

2) $(\gamma g)k = \gamma(gk)$ при всех $\gamma \in \Gamma$, $g \in G$;

3) $g_1 \rho g_2 \Rightarrow g_1 k = g_2 k$.

Операциями в этом почти-кольце являются поточечное сложение и композиция отображений.

Назовем тройку (Γ, G, ρ) строго регулярной, если

1) $(\gamma g)\rho g \Rightarrow \gamma = 1$ или $g \rho 0$;

2) фактормножество G/ρ состоит из конечного числа Γ-орбит.

Почти-кольцо K называется матричным, если оно изоморфно либо почти-кольцу $\mathrm{Hom}_{\Gamma,0}(G/\rho, G)$, где (Γ, G, ρ) - строго регулярная тройка, либо кольцу всех матриц над телом, т.е. кольцу всех линейных преобразований некоторого конечномерного векторного пространства H над телом. В первом случае G, а во втором случае H превращается естественным образом в K-модуль, который в дальнейшем обозначается $m(K)$.

Модуль $m(K)$ определен однозначно с точностью до K-изоморфизма (см. [2]). Если почти-кольцо K содержится в качестве идеала в некотором почти-кольце R, то $m(K)$ может быть рассмотрен как R-модуль ([2], лемма 2).

Почти-кольцо R называется полупримарным, если в нем существует конечный ряд идеалов

$$0 = R_0 \subset R_1 \subset R_2 \subset \dots \subset R_n = R, \qquad (1)$$

факторы которого либо нильпотентны, либо являются матричными почти-кольцами. Класс всех полупримарных почти-колец обозначим через $\mathfrak{A}$, а соответствующий ряд (1) назовем $\mathfrak{A}$-рядом. Известно [1], что класс $\mathfrak{A}$ включает все артиновы почти-кольца и является замкнутым относительно взятия идеалов и гомоморфных образов. В [1] доказано, что в каждом полупримарном почти-кольце R существует приведенный $\mathfrak{A}$-ряд, т.е. $\mathfrak{A}$-ряд, каждый матричный фактор R_{i+1}/R_i которого является минимальным идеалом в R/R_i. Если теперь (1) является приведенным $\mathfrak{A}$-рядом почти-кольца R, то все модули $m(R_{i+1}/R_i)$, где R_{i+1}/R_i – матричный фактор, являются неприводимыми R-модулями и больше неприводимых R-модулей нет ([2], теорема 3).

Нам будет полезна следующая простая лемма.

Лемма 1.1. Если в почти-кольце R имеется цепочка идеалов

$$U \subset V \subseteq S \subset T \subseteq R,$$

для которого фактор-почти-кольца V/U и T/S являются матричными, то R-модули $m(V/U)$ и $m(T/S)$ неизоморфны.

Доказательство. Легко убедиться, что $V \subseteq (0 : m(T/S))$, но $V \nsubseteq (0 : m(V/U))$.

§2. Тип неприводимого R-модуля

Определение. Если B – подмодуль R-модуля A и $C \trianglelefteq_R B$, то назовем R-модуль B/C фактором модуля A. То, что R-модуль F изоморфен фактору модуля A, обозначим через $F \preccurlyeq A$. Если при этом F и A неизоморфны, то пишем $F \prec A$.

Из определения непосредственно следует импликация

$$A \preccurlyeq B \implies (0 : A)_R \supseteq (0 : B)_R. \qquad (2)$$

Обозначим через $[A]$ класс всех R-модулей, изоморфных R-модулю A и положим

$$[A] \preccurlyeq [B] \iff A \preccurlyeq B.$$

Также положим

$$O(R)=\{[G] \mid G\in \mathfrak{M}_R\}.$$

Пусть далее $R\in\mathfrak{A}$. Легко видеть, что в этом случае $\prec$ является отношением частичной упорядоченности на $O(R)$. Действительно, рефлексивность и транзитивность очевидны, а антисимметричность следует из (2), так как неизоморфные неприводимые модули над полупримарным почти-кольцом имеют различные ядра ([2], теорема 3).

<u>Определение</u>. Назовем типом неприводимого модуля над полупримарным почти-кольцом R максимальное натуральное число k, для которого существуют $G_1,\dots,G_k\in\mathfrak{M}_R$, такие что

$$G=G_k\prec G_{k-1}\prec\dots\prec G_1.$$

Обозначим тип модуля G через $t(G)$.

Нашей ближайшей целью является нахождение другой характеризации понятия типа.

Обозначим через $S(R)$ сумму всех нетривиальных (т.е., с ненулевым квадратом) минимальных идеалов почти-кольца R. Верна

<u>Лемма 2.I</u>. Если $R\in\mathfrak{A}$, то

I) $S(R)$ является прямой суммой конечного числа минимальных идеалов почти-кольца R, каждый из которых - матричное почти-кольцо;

2) $S(R)$ имеет левую единицу;

3) $S(R)$ является прямой суммой правых идеалов почти-кольца R, каждый из которых - неприводимый R-модуль.

<u>Доказательство.</u> Докажем сначала первое утверждение. Из теории мультиоператорных групп следует, что $S(R)$ является прямой суммой некоторого множества нетривиальных минимальных идеалов S_i, $i\in J$ ([5], стр. 49). Известно, что каждый из этих идеалов является матричным почти-кольцом ([2], теорема I) и все R-модули $m(S_i)$ неприводимы ([2], следствие 2). По лемме I.I все R-модули $m(S_i)$ попарно неизоморфны. Таким образом, множество J конечно, поскольку над полупримарным почти-кольцом существует лишь конечное число попарно неизоморфных неприводимых модулей ([2], следствие 5).

Утверждения 2) и 3) следуют непосредственно из уже доказанного и теоремы 6 работы [I]. Лемма доказана.

Построим в почти-кольце R ряд идеалов

$$0=F_0\subseteq E_1\subseteq F_1\subseteq E_2\subseteq F_2\subseteq\dots,$$

где $E_i/F_{i-1} = \mathcal{J}(R/F_{i-1})$, $F_i/E_i = S(R/E_i)$. Назовем этот ряд $\mathcal{J}S$-рядом почти-кольца R. Следующая лемма устанавливает основные свойства $\mathcal{J}S$-ряда полупримарного почти-кольца.

<u>Лемма 2.2</u>. Если $R \in \mathfrak{A}$, то

I) $\mathcal{J}S$-ряд почти-кольца R достигает R после конечного числа шагов;

2) факторы E_i/F_{i-1} нильпотентны,

3) факторы F_i/E_i являются прямыми суммами неприводимых R-модулей,

4) всякий неприводимый R-модуль изоморфен прямому слагаемому одного из факторов F_i/E_i.

<u>Доказательство.</u> Допустим, что для каждого натурального числа i имеем $F_i \neq E_i$. Тогда для каждого i найдется нетривиальный минимальный идеал S_i/E_i почти-кольца R/E_i. В силу теоремы I и следствия 2 работы [2] почти-кольца S_i/E_i являются матричными, а R-модули $m(S_i/E_i)$ неприводимыми. В силу леммы I.I модули $m(S_i/E_i)$ попарно неизоморфны, что снова приводит к противоречию с тем, что над полупримарным почти-кольцом существует лишь конечное число попарно неизоморфных неприводимых модулей.

Пусть $F_k = E_k$. Тогда R/E_k не имеет нетривиальных минимальных идеалов. Если $R \neq E_k$, то R/E_k содержит ненулевой нильпотентный идеал ([2], теорема I). Но это противоречит тому, что E_k/F_{k-1} является наибольшим нильпотентным идеалом почти-кольца R/F_{k-1} ([2], следствие I0). Следовательно, $F_k = R$.

Утверждение 2) вытекает из следствия I0 работы [2], а 3) из леммы 2.I. Поскольку по лемме 2.I каждый фактор F_i/E_i является прямой суммой минимальных идеалов почти-кольца R/E_i, являющихся матричными почти-кольцами, то $\mathcal{J}S$-ряд допускает уплотнение, являющийся приведенным $\mathfrak{A}$-рядом. Отсюда следует утверждение 4). Лемма доказана.

Далее исследуем взаимосвязь между неприводимыми R-модулями, содержащихся в качестве прямых слагаемых в различных факторах F_i/E_i.

<u>Лемма 2.3</u>. Пусть $R \in \mathfrak{A}$ и $G_1, G_2 \in \mathfrak{M}_R$. Если $G_1 \prec G_2$ и G_j изоморфен прямому слагаемому фактора F_{i_j}/E_{i_j} $(j=1,2)$, то $i_1 > i_2$.

<u>Доказательство.</u> Предположим от противного, что $i_1 \leq i_2$. Поскольку $G_1 \prec G_2$, то

$$(0:G_1)_R \supseteq (0:G_2)_R. \qquad (3)$$

В силу предположения найдутся минимальные идеалы T_j/E_{i_j} почти-колец R/E_{i_j}, также что $G_j \simeq_R m(T_j/E_{i_j})$ $(j=1,2)$. Ясно, что $G_1T_1 \neq 0$. Докажем, что $G_2T_1=0$ и тем самым приходим к противоречию с (3).

Если $i_1 < i_2$, то $T_1 \subseteq F_{i_1} \subseteq E_{i_2} \subseteq (0:G_2)_R$ и, следовательно, $G_2T_1=0$.

Пусть теперь $i_1=i_2$. Тогда $T_1 \neq T_2$, ибо иначе было бы $G_1 \simeq_R G_2$. В силу минимальности идеалов T_1/E_{i_2} и T_2/E_{i_2} в R/E_{i_2} получим $T_2T_1 \subseteq T_2 \cap T_1 \subseteq E_{i_2}$, т.е. $(T_2/E_{i_2})T_1=0$. Так как матричное почти-кольцо T_2/E_{i_2}, рассматриваемое как R-модуль, изоморфно конечной прямой степени модуля $m(T_2/E_{i_2})$ ([2], лемма I), то $G_2T_1=0$. Лемма доказана.

<u>Лемма 2.4.</u> Пусть $R\in\mathfrak{A}$ и $G_1\in\mathfrak{M}_R$. Если G_1 изоморфен прямому слагаемому фактора F_i/E_i JS-ряда или R, причем $i>1$, то найдется $G_2\in\mathfrak{M}_R$, такой что G_2 изоморфен прямому слагаемому фактора F_{i-1}/E_{i-1} и $G_1 \prec G_2$.

<u>Доказательство.</u> Обозначим $R'=R/E_{i-1}$, $F'_{i-1}=F_{i-1}/E_{i-1}$. По лемме 2.I F'_{i-1} имеет левую единицу e'. Тогда

$$R'=F'_{i-1} \dotplus U', \qquad (4)$$

где $U'=(0:e')_{R'}$. Из (4) следуют канонические изоморфизмы

$$R/F_{i-1} \simeq R'/F'_{i-1} \simeq U'.$$

Обозначим канонический изоморфизм из R/F_{i-1} на U' через φ.

В силу выбора G_1 существует минимальный идеал $T/E_i \lhd R/E_i$, так что $G_1 \simeq_R m(T/E_i)$. Полагая

$$Y'=\varphi(T/F_{i-1}), \quad X'=\varphi(E_i/F_{i-1}),$$

имеем канонический изоморфизм

$$T/E_i \simeq (T/F_{i-1})/(E_i/F_{i-1}) \simeq Y'/X'.$$

Следовательно, Y'/X' имеет левую единицу и, как R-модуль, изоморфно конечной прямой степени R-модуля G_1.

Обозначим через $\mathfrak{X}$ класс всех неприводимых R-модулей, изоморфных прямым слагаемым R-модуля F'_{i-1}. Докажем, что найдутся $G_2\in\mathfrak{X}$ и $g\in G_2$ такие, что $gX'\neq gY'$. Предположим от противного, что $gX'=gY'$ для всех $g\in G\in\mathfrak{X}$. Из нашего предположения следует, что $KX'=KY'$ для всех подмножеств K из любого $G\in\mathfrak{X}$. Но тогда также $KX'^n=KY'^n$ для любого натурального числа n. Поскольку

$\mathfrak{X} = \varphi(E_i / F_{i-1})$, то найдется n, такое что $X'^n = 0$. Значит, Y' нильпотентен по модулю идеала $I' = \bigcap\limits_{G \in \mathfrak{X}} (0 : G)_{R'}$.

Докажем, что $I' = 0$. Так как F'_{i-1} является прямой суммой R-модулей из $\mathfrak{X}$, то $I' = (0 : F'_{i-1})_{R'}$. Поскольку

$$R' = R / E_{i-1} \simeq (R / F_{i-2}) / (E_{i-1} / F_{i-2})$$

и $E_{i-1} / F_{i-2} = \mathcal{J}(R / F_{i-2})$, то $\mathcal{J}(R') = 0$. Значит, R' не имеет ненулевых нильпотентных идеалов ([6], следствие 2.8). Следовательно, если $I' \neq 0$, то он содержит нетривиальный минимальный идеал S' ([2], теорема I). Но тогда $F'_{i-1} I' \supseteq S' S' \neq 0$ что противоречит условию $I' = (0 : F'_{i-1})_{R'}$.

Из $I' = 0$ следует, что Y' - нильпотентный идеал почти-кольца R', но это противоречит наличию в Y'/X' левой единицы. Следовательно, существуют $G \in \mathfrak{X}$ и $g \in G$, такие что $g X \neq g Y'$.

Поскольку $X' \trianglelefteq_R Y'$, то $g X \trianglelefteq_R g Y'$ и фактормодуль gY'/gX' является гомоморфным образом R-модуля Y'/X'. Так как Y'/X' является прямой суммой изоморфных копий неприводимого R-модуля G_1, то таким же является и gY'/gX':

$$gY' / gX' = \sum_{i=1}^{k}{}^{\bullet} B_i / gX',$$

где $B_i / gX' \simeq_R G_1$. Следовательно, $G_1 \prec G_2$. По определению $\mathfrak{X}$ существует такой минимальный идеал $V / E_{i-1} \triangleleft R / E_{i-1}$, что $G_2 \simeq_R m(V / E_{i-1})$. Тогда $G_2 V \neq 0$, но

$$G_1 V \subseteq G_1 F_{i-1} \subseteq G_1 E_i = 0.$$

Значит, $G_1 \simeq_R G_2$ и тем самым $G_1 \prec G_2$.

Теорема 2.5. Тип неприводимого модуля G над полупримарным почти-кольцом R равен k тогда и только тогда, когда G изоморфен прямому слагаемому фактора F_k / E_k $\mathcal{J}\mathcal{G}$-ряда почти-кольца R.

Доказательство. По лемме 2.2 найдется такое k, что G изоморфен прямому слагаемому фактора F_k / E_k. Тогда из леммы 2.3 следует $t(G) \leqslant k$, а лемма 2.4 дает $t(G) \geqslant k$. Следовательно, $t(G) = k$, что и требовалось доказать.

§3. Неприводимые модули типа I

В настоящем параграфе мы покажем, что не все неприводимые модули имеют одинаковое влияние на строение почти-кольца. Более сильное влияние имеют неприводимые модули типа I. В самом деле это нельзя считать неожиданностью, так как неприводимые модули типа I содержат все остальные неприводимые модули в качестве факторов.

Предложение 3.I. Если $R \in \mathfrak{A}$, то

I) всякий неприводимый R-модуль изоморфен фактору некоторого неприводимого R-модуля типа I,

2) $\mathcal{J}(R) = \bigcap\limits_{\substack{G \in \mathfrak{M}_R \\ t(G)=1}} (0 : G)_R$

Доказательство. Первое утверждение следует непосредственно из определения типа неприводимого R-модуля, а второе следует из первого и импликации (2).

Лемма 3.2. Пусть $R \in \mathfrak{A}$ и G – точный неприводимый R-модуль. Тогда G является единственным неприводимым R-модулем типа I.

Доказательство. Так как почти-кольцо R примитивно, то оно первично, т.е. произведение ненулевых идеалов почти-кольца R отлично от нуля ([6], теорема 3.I). Следовательно, R не имеет ненулевых нильпотентных идеалов и тем самым $E_1 = 0$. В силу первичности R имеет единственный нетривиальный минимальный идеал S и тогда $F_1 = S$.

Если $G \preceq G_1$, где $G_1 \in \mathfrak{M}_R$, то $0 = (0 : G)_R \supseteq (0 : G_1)_R$. Следовательно, $(0 : G)_R = (0 : G_1)_R$ и $G \simeq_R G_1$ ([2], теорема 3). Значит, $t(G) = 1$.

По теореме 2.5 всякий неприводимый R-модуль G типа I изоморфен прямому слагаемому R-модуля S. Поскольку S изоморфно прямой степени неприводимого R-модуля $m(S)$, то $G \simeq_R m(S)$.

Предложение 3.3. Если $R \in \mathfrak{A}$ и $G_1, G_2 \in \mathfrak{M}_R$, то

$$G_1 \preceq G_2 \Longleftrightarrow (0 : G_1)_R \supseteq (0 : G_2)_R .$$

Доказательство. Импликация $\Longrightarrow$ следует из (2). Докажем обратную импликацию. Пусть $(0 : G_1)_R \supseteq (0 : G_2)_R$. Модуль G_2 является точным неприводимым модулем над полупримарным почти-кольцом $R' = R/(0 : G_2)_R$. В силу леммы 3.2 он является с точностью до изоморфизма единственным неприводимым R'-модулем типа I. Так как $(0 : G_1)_R \supseteq (0 : G_2)_R$, то G_1 можно рассматривать как R'-модуль и явно $G_1 \in \mathfrak{M}_{R'}$. По предложению 3.I имеем $G_1 \preceq G_2$. Ясно, что это соотношение сохраняется при переходе к R. Предложение доказано.

Далее покажем, что всякое полупростое полупримарное почти-кольцо имеет единственное разложение в несократимое подпрямое произведение примитивных почти-колец. Последними примитивными почти-кольцами оказываются в точности $R/(0 : G_i)_R$, где G_i – неприводимые R-модули типа I.

Напомним, что почти-кольцо R является тогда и только тогда подпрямым произведением своих фактор-почти-колец R/S_i, $i \in J$, когда $\bigcap\limits_{i \in J} S_i = 0$. Если, кроме того, $\bigcap\limits_{i \in \mathcal{J}} S_i \neq 0$ при любом собственном подмножестве $\mathcal{J} \subset J$, то говорят, что это подпрямое разложение несократимо.

<u>Теорема 3.4.</u> Пусть $R \in \mathfrak{A}$, $\mathcal{J}(R) = 0$ и $G_1, \dots, G_n$ - все имеющиеся попарно неизоморфные неприводимые R-модули типа I. Тогда R является несократимым подпрямым произведением почти-колец $R/(0:G_i)_R$, $i = 1, \dots, n$. Это единственное разложение R в несократимое подпрямое произведение примитивных почти-колец.

<u>Доказательство.</u> В силу предложения 3.I имеем $\bigcap\limits_{i=1}^{n} (0:G_i)_R = 0$. Значит, R является подпрямым произведением почти-колец $R/(0:G_i)_R$.

Из конечности числа неприводимых R-модулей следует, что разложения R в несократимое подпрямое произведение примитивных почти-колец существуют. Пусть R является несократимым подпрямым произведением почти-колец R/S_i, где $S_i = (0:G_i')_R$, $G_i' \in \mathfrak{M}_R$, $i = 1, \dots, m$. Теорема будет доказана, если мы покажем, что среди G_i' встречаются все модули $G_1, \dots, G_n$.

Предположим, что $G_i S_j' \neq 0$ для всех $j = 1, \dots, m$. Тогда

$$G_i S_1' S_2' \cdots S_m' = G_i S_2' \cdots S_m' = G_i S_m' = G_i$$

см. ([2], лемма 4). С другой стороны

$$G_i S_1' S_2' \cdots S_m' \subseteq G_i \bigcap_{j=1}^{m} S_j' = G_i 0 = 0.$$

Полученное противоречие показывает, что среди S_j' найдется такой, что $G_i S_j' = 0$. Но тогда $S_j' = (0:G_j')_R \subseteq (0:G_i)$, откуда по предложению 3.3 получим $G_i \preceq G_j'$. Так как $l(G_i) = 1$, то это дает $G_i \simeq_R G_j'$. Теорема доказана.

Следующее предложение дает необходимое условие для того, чтобы полупримарное полупростое почти-кольцо разлагалось в прямое произведение примитивных почти-колец. В конце статьи мы построим пример 5.3, показывающий, что полученное условие не является достаточным. Однако это условие вместе с примером 5.I показывает, что далеко не каждое полупростое полупримарное почти-кольцо представляется в виде прямой суммы примитивных почти-колец. Можно даже сказать, что существование такого представления является довольно редким исключением, а не закономерностью.

Предложение 3.5. Если полупримарное полупростое почти-кольцо R является прямой суммой примитивных почти-колец, то для каждого неприводимого R-модуля G существует единственный неприводимый R-модуль G' типа 1, так что $G \preceq G'$.

Доказательство. Пусть $R = \sum_{i=1}^{n}{}^{\cdot} R_i$, где R_i – примитивные почти-кольца. Тогда легко видеть, что $\mathfrak{M}_R = \bigcup_{i=1}^{n} \mathfrak{M}_{R_i}$. Каждое R_i обладает единственным неприводимым модулем типа I (лемма 3.2). Предложение будет доказано, если мы убедимся, что модули из разных $\mathfrak{M}_{R_i}$ не могут быть сравнимы в смысле отношения $\preceq$. Пусть $H_i \in \mathfrak{M}_{R_i}$, $H_j \in \mathfrak{M}_{R_j}$, $i \neq j$. Тогда $H_i R_j = H_j R_i = 0$. Значит, ядра R-модулей H_i и H_j не сравнимы в смысле включения. Требуемый результат следует теперь из предложения 3.3.

§4. Об идеальной наследственности радикала $\mathcal{J}$

В теореме 8 работы [2] была доказана эквивалентность четырех условий на полупримарное почти-кольцо R, каждое из которых влечет идеальную наследственность $\mathcal{J}$ в R, т.е. $\mathcal{J}(S) = S \cap \mathcal{J}(R)$ для каждого идеала $S \triangleleft R$. Там же было отмечено, что эти условия не являются необходимыми, и было обещено в дальнейшем опубликовать необходимые и достаточные условия. Выполним здесь это обещание.

Теорема 4.I. Следующие условия равносильны для полупримарного почти-кольца R:

I) $\mathcal{J}(S) = S \cap \mathcal{J}(R)$ при любом идеале $S \triangleleft R$.

2) Если U – нильпотентный идеал в R и V/U – нетривиальный минимальный идеал почти-кольца R/U, то $\mathcal{J}(V) = U$.

3) Если U – нильпотентный идеал почти-кольца R, то каждый нетривиальный минимальный идеал почти-кольца R/U является простым почти-кольцом.

4) Если $G \in \mathfrak{M}_R$, $t(G) = 1$, $S \triangleleft R$ и $GS \neq 0$, то $G \in \mathfrak{M}_S$.

5) Если $S \triangleleft R$, $G \in \mathfrak{M}_S$ и $t(G_S) = 1$, то G допускает продолжение до R-модуля.

Доказательство. Схема доказательства

$$1) \Longrightarrow 2) \Longrightarrow 3) \Longrightarrow 4) \Longrightarrow 5)$$

I) $\Longrightarrow$ 2) Пусть U – нильпотентный идеал в R и V/U – нетривиальный минимальный идеал в R/U. Тогда $U \subseteq \mathcal{J}(V)$, Докажем обратное включение. Так как $U \subseteq \mathcal{J}(V) \subseteq V$ и в силу I) имеем $\mathcal{J}(V) \triangleleft R$, то у нас две возможности: $\mathcal{J}(V) = U$ или $\mathcal{J}(V) = V$. В последнем случае V было бы нильпотентным ([2], следствие 10), что противоречило бы тому, что V/U является матричным почти-кольцом ([2], теорема I).

2)$\Longrightarrow$3) Пусть опять U – нильпотентный идеал в R и V/U – нетривиальный минимальный идеал в R/U. Почти-кольцо V/U является матричным ([2], теорема I). Если V/U является кольцом матриц над телом, то оно просто. Пусть $V/U \simeq \mathrm{Hom}_{\Gamma,0}(G/\varrho, G)$, где (Γ, G, ϱ) – строго регулярная тройка. По условию 2) имеем $\mathcal{J}(V) = U$, откуда $\mathcal{J}(V/U) = 0$. Значит, V/U не имеет ненулевых нильпотентных идеалов. Но тогда V/U вообще не имеет ненулевых собственных идеалов ([I], теорема 3).

3)$\Longrightarrow$4) Пусть $G \in \mathfrak{M}_R$ и $t(G) = 1$. По теореме 2.5 модуль G изоморфен прямому слагаемому фактора $F_1/E_1 = S(R/\mathcal{J}(R))$. Значит, найдется нетривиальный минимальный идеал $T/\mathcal{J}(R)$ почти-кольца $R/\mathcal{J}(R)$, такой что $G \simeq_{R} m(T/\mathcal{J}(R))$. Так как $\mathcal{J}(R)$ нильпотентен ([2], следствие 10), то по условию 3) $T/\mathcal{J}(R)$ является простым почти-кольцом.

Докажем, что G – простой T-модуль. Если $T/\mathcal{J}(R)$ изоморфно кольцу матриц над телом, то это очевидно. Пусть $T/\mathcal{J}(R) \simeq \mathrm{Hom}_{\Gamma,0}(G/\varrho, G)$, где (Γ, G, ϱ) – строго регулярная тройка. Тогда простота G_T следует из простоты почти-кольца $T/\mathcal{J}(R)$ и из предложения 7 работы [I].

Пусть теперь $S \triangleleft R$ и $GS \neq 0$. Тогда

$$\mathcal{J}(R) \subseteq S \cap T + \mathcal{J}(R) \subseteq T$$

и в силу минимальности $T/\mathcal{J}(R)$ либо $S \cap T + \mathcal{J}(R) = \mathcal{J}(R)$, либо $S \cap T + \mathcal{J}(R) = T$. В первом случае $S \cap T \subseteq \mathcal{J}(R)$ и

$$GS = GTS \subseteq G(T \cap S) \subseteq G\mathcal{J}(R) = 0,$$

что противоречит выбору S.

Значит, $S \cap T + \mathcal{J}(R) = T$, откуда $T \subseteq S + \mathcal{J}(R)$. Поскольку $G\mathcal{J}(R) = 0$, то из простоты модуля G_T следует простота модуля G_S. Кроме того, из $GS \neq 0$ следует, что G – циклический S-модуль ([2], лемма 4).

4)$\Longrightarrow$5) Пусть $S \triangleleft R$, $G \in \mathfrak{M}_S$ и $t(G_S) = 1$. Тогда существуют $G' \in \mathfrak{M}_R$ и $H \underset{S}{\triangleleft} G'$, такие что $G \simeq_S G'/H$ ([2], теорема 2). Значит, $G_S < G'_S$. Согласно предложению

3.I найдется $G'' \in \mathfrak{M}_R$ такой, что $t(G''_R)=1$ и $G'_R \preceq G''_R$. Значит $G'_S \preceq G''_S$ и, по транзитивности, $G_S \preceq G''_S$. Так как $t(G_S)=1$, то $G \simeq_S G''$. Таким образом, G допускает продолжение до R-модуля.

5) $\Longrightarrow$ 2) Пусть снова U - нильпотентный идеал в R и V/U - нетривиальный минимальный идеал в R/U. Как и раньше, получим, что $U \subseteq \mathcal{J}(R)$ и V/U является матричным почти-кольцом. Следовательно, $0 \subseteq U \subseteq V$ является $\mathfrak{A}$-рядом для V. Тогда V также обладает приведенным $\mathfrak{A}$-рядом с одним матричным фактором ([I], лемма I4). Следовательно, V обладает единственным неприводимым модулем $G = m(V/U)$. Ясно, что $t(G_V)=1$ и по условию 5) G можно считать R-модулем. Поэтому $\mathcal{J}(V)=(0:G)_V \triangleleft R$. Так как $\mathcal{J}(V) \neq V$, то в силу минимальности V/U получим $\mathcal{J}(V)=U$.

4) $\Longrightarrow$ I) Пусть $S \triangleleft R$. Согласно теореме 7 из [2] имеем $\mathcal{J}(S) \supseteq \mathcal{J}(R) \cap S$. Докажем обратное включение. В силу условия 4) $\mathcal{J}(S)$ аннулирует все неприводимые R-модули типа I. Но тогда по предложению 3.I $\mathcal{J}(S) \subseteq \mathcal{J}(R)$. Теорема доказана.

<u>Следствие 4.2</u>. Полупримарное дистрибутивно порожденное почти-кольцо удовлетворяет условиям I) - 5) теоремы 4.I.

<u>Доказательство</u>. Известно [3], что любое дистрибутивно порожденное почти-кольцо удовлетворяет условию I) (впрочем также 4) и 5)).

§5. Примеры

Первый пример показывает, что среди частично упорядоченных множеств ч.у.м. $(\mathcal{O}(R), \preceq)$ конечных почти-колец R встречаются все с точностью до изоморфизма конечные ч.у.м.

<u>Пример 5.I</u>. Пусть $(\mathfrak{I}, \leq)$ - некоторое конечное ч.у.м. Покажем сначала, что существуют конечная группа G, и ее семейство подгрупп G_i, $i \in \mathfrak{I}$, удовлетворяющие условиям

G I. $i \leq j \Longleftrightarrow G_i \subseteq G_j$;

G 2. для каждого $i \in \mathfrak{I}$ множество

$$\mathcal{G}_i = \{g \in G_i \setminus \{0\} / g \in G_j \ \& \ j \in \mathfrak{I} \Longrightarrow i \leq j\}$$

непусто.

Известно, что существует конечное множество A имеющее семейство подмножеств A_i, $i \in \mathfrak{I}$, такое что $i \leq j \Longleftrightarrow A_i \subseteq A_j$ ([4], стр. 22). Берем некоторое семейство конечных ненулевых групп H_α, $\alpha \in A$, и положим $G = \sum^{\cdot}_{\alpha \in A} H_\alpha$, $G_i = \sum^{\cdot}_{\alpha \in A_i} H_\alpha$, т.е. G_i состоит из тех элементов $(h_\alpha) \in G$, что $h_\alpha = 0$ при $\alpha \notin A_i$. Легко видеть, что семейство G_i, $i \in J$, удовлетворяет условию $G1$. Условие $G2$ тоже выполнено, так как каждое $\mathcal{G}_i$ содержит по крайней мере все элементы вида $h = (h_\alpha)$, для которых $h_\alpha = 0$ при $\alpha \notin A_i$ и $h_\alpha \neq 0$ при $\alpha \in A_i$.

Рассмотрим множество R всех преобразований r группы G, таких что

$R1$. $G_i r \subseteq G_i$, $i \in J$;

$R2$. $(G \setminus \bigcup_{i \in J} \mathcal{G}_i) r = 0$.

Очевидно, это множество является почти-кольцом, а группы G_i – R-модулями.

Докажем, что G_i являются неприводимыми R-модулями. Пусть $F \trianglelefteq_R G_i$ и $0 \neq F \neq G_i$. Берем $0 \neq f \in F$ и $g_i \in \mathcal{G}_i$. Легко видеть, что R содержит элемент r, такой что $g_i r = g \in G_i \setminus F$, но $(f + g_i) r = 0$. Тогда $(f + g_i) r - g_i r = -g \notin F$, что противоречит условию $F \trianglelefteq_R G_i$.

Докажем, что модулями G_i, $i \in J$, исчерпываются неприводимые R-модули. Пусть $\mathcal{J}$ – множество всех максимальных элементов ч.у.м. $(J, \leq)$. Очевидно, тогда $\bigcap_{i \in \mathcal{J}} (0 : G_i)_R = 0$ и $\bigcap_{i \in \mathcal{J}} (0 : G_i)_R \neq 0$ для каждого $j \in \mathcal{J}$. Следовательно, R является несократимым подпрямым произведением примитивных почти-колец $R/(0 : G_i)_R$, $i \in \mathcal{J}$. По теореме 3.4 получим, что неприводимые R-модули типа I – это в точности R-модули G_i, $i \in \mathcal{J}$.

Все будет доказано, если мы убедимся, что каждый G_j, $i \in \mathcal{J}$ не имеет неприводимых факторов, отличных от подмодулей G_i, $i \in J$. Пусть A – подмодуль модуля G_j, $j \in \mathcal{J}$, $B \trianglelefteq_R A$ и $A/B \in \mathfrak{M}_R$. Тогда существует $i \in J$, так что $\mathcal{G}_i \cap (A \setminus B) \neq \emptyset$, пусть $g \in \mathcal{G}_i \cap (A \setminus B)$. Предположим от противного, что $B \neq 0$ и берем $0 \neq b \in B$. Легко видеть, что R содержит такой элемент r, что $gr = g$ и $(b+g)r = 0$. Тогда $(b+g)r - gr = -g \notin B$, что противоречит условию $B \trianglelefteq_R A$.

Следовательно, $B = 0$ и $A \in \mathfrak{M}_R$. Пусть $A = aR$, где $a \in A$. Тогда a содержится в некотором $\mathcal{G}_k$, где $k \in J$. Значит, $A = aR = G_k$, что и требовалось доказать.

В построенном примере 5.I в качестве отношения $\leq$ на самом деле всюду выступает включение. Следующий пример показывает, что это не обязательно. Существует конечное почти-кольцо R и такие неприводимые R-модули G_1 и G_2, что G_1 изоморфен фактору R-модуля G_2, но не изоморфен ни одному его подмодулю.

Пример 5.2. Пусть G - элементарная абелева группа порядка 8 и H и F - ее подгруппы, причем $H \supset F$, $H \simeq Z_2 \dotplus Z_2$, $F \simeq Z_2$. В качестве R берем множество всех преобразований r группы G, действующих на H эндоморфизмами и удовлетворяющих условию $Fr = 0$. Легко проверить, что G и H/F являются неприводимыми R-модулями. Также очевидно, что $H/F \prec G$, но H/F не изоморфен ни одному подмодулю модуля G. Действительно, единственным подмодулем порядка 2 модуля G является F, но $FR = 0$.

Следующий пример показывает, что существует конечное полупростое почти-кольцо, обладающее только двумя неприводимыми модулями (обе типа I), но не являющееся прямой суммой примитивных почти-колец.

Пример 5.3. Пусть G_1 и G_2 - восьмиэлементные подгруппы элементарной абелевой группы A порядка 16, пересекающиеся по четырехэлементной подгруппе H. Обозначим через F некоторую двухэлементную подгруппу группы H. Рассмотрим множество R всех преобразований r группы A, таких что 1) $G_1 r \subseteq G_1$, 2) $G_2 r \subseteq G_2$, 3) $Hr \subseteq F$, 4) $Fr = 0$, 5) $[A \setminus (G_1 \cup G_2)] r = 0$.

Легко убедиться, что R есть почти-кольцо, а G_1 и G_2 являются единственными неприводимыми R-модулями. Эти R-модули неизоморфны, так как $(0 : G_1)_R \neq (0 : G_2)_R$. Следовательно, один из этих модулей не может быть фактором другого и $t(G_1) = t(G_2) = 1$. Ясно, что $(0 : G_1)_R \cap (0 : G_2)_R = 0$, т.е. R - полупростое почти-кольцо. Если бы R являлось прямой суммой примитивных почти-колец, то было бы

$$R \simeq R/(0 : G_1)_R \dotplus R/(0 : G_2)_R ,$$

откуда следовало бы

$$|R| = |R/(0 : G_1)_R| \cdot |R/(0 : G_2)_R| .$$

Однако простой подсчет показывает, что $|R| = 8^4 \cdot 4$ и $|R/(0 : G_1)_R| = |R/(0 : G_2)_R| = 8^4 \cdot 4$.

Наконец приведем пример конечного почти-кольца R и его идеала S, для которых $J(S) \neq J(R) \cap S$. Заодно этот пример показывает, что ни одно из условий теоремы 4.1 не выполняется во всех конечных почти-кольцах.

Пример 5.4. Пусть $H = Z_8$ - циклическая группа порядка 8 и Γ - ее группа автоморфизмав, состоящая из I и умножения на 5. Рассмотрим почти-кольцо $R = \mathrm{Hom}_{\Gamma,0}(H,H)$. Оно содержит идеал $S = (0 : 2H)_R$, который, как легко видеть, совпадает с почти-кольцом $\mathrm{Hom}_{\Gamma,0}(H/\varrho, H)$, где

$$a \varrho b \longleftrightarrow a = b \quad \text{или} \quad a, b \in 2H.$$

Прямая проверка показывает, что $H \in \mathfrak{M}_R$, но $H \notin \mathfrak{M}_S$, так как $4H \underset{S}{\lhd} H$. Значит, по предложению 7 из [I], S является минимальным идеалом в R, но не является простым почти-кольцом. Он имеет ненулевой нильпотентный идеал $(4H : H)_S$. Следовательно, $\mathcal{J}(S)$ - собственный ненулевой идеал в S. Поскольку S - минимальный идеал в R, то $\mathcal{J}(S) \neq \mathcal{J}(R) \cap S$.

Литература

I. К а а р л и К., Минимальные идеалы в почти-кольцах. – Уч. зап. Тартуск. ун-та, 1975, 336, 105-142.

2. К а а р л и К., Радикалы в почти-кольцах. – Уч. зап. Тартуск. ун-та, 1976, 390, 134-171.

3. К а а р л и К., Специальные радикалы дистрибутивно порожденных почти-колец.

4. К у р о ш А.Г., Лекции по общей алгебре. Москва, 1973.

5. П л о т к и н Б. И., Группы автоморфизмов алгебраических систем. Москва, 1966.

6. R a m a k o t a i a h D., Radicals for near-rings. Math. Z., 1967, 96, № 1, 45-56.

Поступило
15.XI 1979

TAANDUMATUTE MOODULITE KLASSIFIKATSIOON ÜLE POOLPRIMAARSE RINGOIDI

K.Kaarli

R e s ü m e e

Käesolevas artiklis defineeritakse R-moodulite A ja B, kus R on ringoid, jaoks seos "$\lesssim$" järgmiselt: $A \lesssim B$, kui leiduvad alammoodul $C \subset B$ ja R-ideaal $D \underset{R}{\lhd} C$, nii et $A \underset{R}{\cong} C/D$. Osutub, et poolprimaarse ringoidi R korral indutseerib defineeritud seos kõigi taandumatute R-moodulite isomorfismiklasside hulgal $\mathfrak{M}$ osalise järjestuse.

Tõestatakse, et iga lõpliku osaliselt järjestatud hulga $(J, \leq)$ jaoks leidub lõplik ringoid R, millele $(J, \leq)$ on osaliselt järjestatud hulgaks $(\mathfrak{M}, \lesssim)$.

Kasutades defineeritud järjestust tuuakse sisse taandumatu R-mooduli tüübi mõiste, kusjuures antud järjestuse mõttes maksimaalsete moodulite tüübiks on 1. Tõestatakse rida teoreeme poolprimaarsete ringoidide kohta, kus ilmneb ringoidi ehituse sõltuvus tüübiga 1 R-moodulite omadustest.

THE CLASSIFICATION OF IRREDUCIBLE R-GROUPS OVER A SEMIPRIMARY NEAR-RING

K.Kaarli

S u m m a r y

In this paper irreducible (more exactly, 0-irreducible) R-groups over a semiprimary near-ring R (see [1,2]) are considered. For irreducible R-groups A and B we define $A \preceq B$ if there exist a R-subgroup $C \subseteq B$ and a R-ideal $D \underset{R}{\trianglelefteq} C$ such that $A \simeq C/D$. This relation "$\preceq$" induces a partial order relation on the set $\mathfrak{M}$ of isomorphism classes of irreducible R-groups.

We prove that for every finite poset $(\mathcal{J}, \leq)$ there exists a finite near-ring R having $(\mathcal{J}, \leq)$ as a poset $(\mathfrak{M}, \preceq)$. Using this order relation a type of an irreducible R-group is defined. According to the definition R-groups of type 1 are precisely those which belong to maximal classes of $(\mathfrak{M}, \preceq)$.

Several theorems using the notion of the type of an irreducible R-group are proven. For example we present here the following theorems.

<u>Theorem 3.4</u>. Let R be a semisimple semiprimary near-ring and $G_1, \dots, G_n$ all pairwise non-isomorphic irreducible R-groups of type 1. Then R is a noncancellable subdirect product of near-rings $R/(0 : G_i)_R$, $i=1,\dots,n$ and this is an unique decomposition of R into a noncancellable subdirect product of primitive near-rings.

<u>Theorem 4.1</u>. For a semiprimary near-ring R the following conditions are equivalent.

1) $\mathcal{J}(S) = S \cap \mathcal{J}(R)$ for every ideal $S \triangleleft R$.

2) If U is a nilpotent ideal of R and V/U is a minimal ideal of R/U, $V^2 \nsubseteq U$, then $\mathcal{J}(V) = U$.

3) If U is a nilpotent ideal of R then any minimal ideal V/U of R/U with $V^2 \nsubseteq U$ is a simple near-

ring.

4) If G is an irreducible R-group of type 1, S is an ideal of R and $GS \neq 0$ then G is an irreducible S-group.

5) If S is an ideal of R and G is an irreducible S-group of type 1 then G can be considered as a R-group.