

ОПИСАНИЕ ВЕРШИН УСЕЧЕННЫХ ТРАНСПОРТНЫХ МНОГОГРАННИКОВ

К. Рийвес

Сектор математического программирования НИИЭП
при Госплане ЭССР

В настоящей работе изучаются выпуклые многогранники, задаваемые такой системой линейных неравенств

$$\begin{aligned} 0 \leq x_{kl} \leq c_{kl}, \quad k=1, \dots, m; \quad l=1, \dots, n; \\ \sum_{l=1}^n x_{kl} = a_k, \quad k=1, \dots, m; \\ \sum_{k=1}^m x_{kl} = b_l, \quad l=1, \dots, n, \end{aligned} \quad (1)$$

в которой элементы матрицы $C = \|c_{kl}\|$ и координаты векторов $A = (a_1, \dots, a_m)$ и $B = (b_1, \dots, b_n)$ удовлетворяют условиям

$$a_k, b_l > 0, \quad \sum_{k=1}^m a_k = \sum_{l=1}^n b_l, \quad c_{kl} \geq 0, \quad k=1, \dots, m; \quad l=1, \dots, n. \quad (2)$$

Эти многогранники называются усеченными транспортными многогранниками (ср. [1]) и обозначаются через $M(A, B, C)$. Условия непустоты $M(A, B, C)$ даны в [4]. Нами предлагается методика нахождения вершин усеченных транспортных многогранников, аналогичная описанной в [3] для общих транспортных многогранников. Первые два пункта работы носят общий характер. В них уточняется постановка задачи и вводятся нужные обозначения. В п. 3 даются аналитические признаки вершины многогранника $M(A, B, C)$, имея в виду, что любая вершина соответствует специальному подмножеству множества неравенств системы (1). В п. 4 описывается возможно меньший класс таких подмножеств, которыми могут определяться вершины для $M(A, B, C)$. Подмножества этого класса называются допустимыми. Перебрав подходяще упорядоченным образом допустимые подмножества и проверив для них выполнение признака вершины, можно при необходимости получить все вершины многогранника $M(A, B, C)$, задавая их своими координатами x_{kl} ($k=1, \dots, m; l=1, \dots, n$).

1. Постановка задачи. Чтобы использовать методику работ [2, 3], переобозначим переменные x_{kl} , а также величины c_{kl} из системы (1), используя индекс $\nu = 1, \dots, N$ при $N = mn$ по формулам

$$x_{kl} = x^\nu, \quad c_{kl} = a_{\nu+N}, \quad \text{где } \nu = (k-1)n + l. \quad (1.1)$$

Если рассматривать x_{kl} как элементы $(m \times n)$ -матрицы $x = \|x_{kl}\|$, то множеством индексов k -й строки этой матрицы будет

$$I_k = \{(k-1)n+1, (k-1)n+2, \dots, kn\} \subset \{1, \dots, mn\}, \quad k=1, \dots, m, \quad (I.2A)$$

и множеством индексов l -го столбца

$$J_l = \{l, n+l, \dots, (m+1)n+l\} \subset \{1, \dots, mn\}, \quad l=1, \dots, n, \quad (I.2B)$$

В обозначениях (I.1), (I.2) система (I) равносильна системе

$$\begin{aligned} -x^{\nu} &\leq 0, \quad \nu=1, \dots, N; & x^{\mu} &\leq a_{\mu} + n, 0 & \mu=1, \dots, N; \\ \sum_{\nu \in I_k} x^{\nu} &\leq a_{k1}, \quad k=1, \dots, m; & \sum_{\nu \in J_l} x^{\nu} &\leq b_l, & l=1, \dots, n; \\ -\sum_{\nu \in I_k} x^{\nu} &\leq -a_{k2}, \quad k=1, \dots, m; & \sum_{\nu \in J_l} x^{\nu} &\leq -b_l, & l=1, \dots, n, \end{aligned} \quad (I.3)$$

состоящей из $M=2(mn+n)$ линейных неравенств. Разобьем множество $\{i\} = \{1, \dots, M\}$ на следующие непересекающиеся подмножества

$$\begin{aligned} N_0 &= \{i \mid i = \nu, \nu=1, \dots, N\}; & N_1 &= \{i \mid i = mn + \nu, \nu=1, \dots, N\}; \\ N_2 &= \{i \mid i = 2mn + k, k=1, \dots, m\}; & N_3 &= \{i \mid i = 2mn + n + k, k=1, \dots, m\}; \\ N_4 &= \{i \mid i = 2mn + m + n + k, k=1, \dots, m\}; & N_5 &= \{i \mid i = 2(mn + n) + k, k=1, \dots, n\}. \end{aligned} \quad (I.4)$$

Тогда система (I.3) является таким частным случаем общей системы линейных неравенств

$$\sum_{\nu=1}^N a_{i\nu} x^{\nu} \leq a_{i0}, \quad i=1, \dots, M, \quad (I.5)$$

где

$$a_{i\nu} = \begin{cases} -1, & \text{если } i \in N_0, \nu = l, \\ & \text{или } i \in N_1, \nu \in J_l, l=2N-m-n, \\ & \text{или } i \in N_2, \nu \in J_l, l=2(N-m)-n, \\ +1, & \text{если } i \in N_0, \nu = i-N, \\ & \text{или } i \in N_1, \nu \in J_l, l=2N, \\ & \text{или } i \in N_2, \nu \in J_l, l=2N, \\ & \text{или } i \in N_3, \nu \in J_l, l=2N-m, \\ 0, & \text{в остальных случаях} \end{cases} \quad a_{i0} = \begin{cases} 0, & \text{если } i \in N_0, \\ a_{i0}, & \text{если } i \in N_1 \text{ и } i-N=(k-1)n+l, \\ a_{i-2N}, & \text{если } i \in N_2, \\ a_{i-2N-m}, & \text{если } i \in N_3, \\ -a_{i-2N-m-n}, & \text{если } i \in N_4, \\ -a_{i-2(mn+n)-n}, & \text{если } i \in N_5. \end{cases} \quad (I.6)$$

и, кроме того,

$$a_{i0} \geq 0, \quad \text{если } i \in N_0; \quad a_{i0} \geq 0, \quad \text{если } i \in N_1 \cup N_2. \quad (I.7)$$

Нам удобно рассматривать N -мерные векторы $x = (x^1, \dots, x^N)$, $A_i = (a_{i1}, \dots, a_{iN})$ и $(N+1)$ -мерные векторы $\bar{x}_i = (a_{i0}, \dots, a_{iN}, a_{i0})$. Если записать левые стороны (I.5) как скалярные произведения (A_i, x) , то усеченный транспортный многогранник $M(A, B, C)$ определяется системой

$$(A_i, x) \leq a_{i0}, \quad i=1, \dots, M, \quad (I.8)$$

при условиях (I.6), (I.7). С учетом (I.6) ясно, что ранг ρ матрицы коэффициентов системы (I.8) равен N . Обозначим совокупность точек x , удовлетворяющих условию $(A_i, x) = a_{i0}$, через $\bar{\Gamma}_i$.

Напомним теперь некоторые результаты, относящиеся к вершинам многогранника, заданного произвольной системой, составленной из M линейных неравенств с N переменными и матрицей коэффициентов ранга $\varphi = N$, которые резюмировались уже в [3] (см. стр. 106-108). При этом удобно пользоваться следующим соглашением. Пусть фиксированы подмножества V и W так, чтобы $V \subset \mathcal{N}^0, W \subset \{1, \dots, M\}$ ($|V| + |W| = N$). Обозначим через $d[V, W]$ определитель матрицы порядка $N - |W|$, составленной из всех координат векторов A_i при $i \in W$, кроме координат с индексами из V . Если $V = \emptyset$, то учитываются все координаты A_i ($i \in W$) и определитель обозначается через $d[W]$. Аналогично, через $D[V, W]$ обозначается определитель матрицы, составленной при предположениях $V \subset \mathcal{N}^0, W \subset \{1, \dots, M\}, |V| + |W| = N + 1$ из координат векторов A_i ($i \in W$), кроме координат с индексами из V . Заметим, что порядок элементов множества W считается всегда произвольным, но раз и навсегда фиксированным; сохраняя по возможности порядок элементов множеств (I.4).

Известно, что если многогранник задан в N -мерном пространстве R_N системой (I.8) при условии $\varphi = N$ (но в общем случае без условий (I.6), (I.7)), то при совместности системы (I.8) множество его вершин непустое и каждая вершина определена как единственная точка пересечения по крайней мере N гиперплоскостей $\Gamma_{i(1)}, \dots, \Gamma_{i(N)}$ пространства R_N . Эти гиперплоскости определяются уравнениями

$$(A_i, x) = \alpha_{i0}, \quad i = i(1), \dots, i(N). \quad (I.9)$$

По предположению определитель системы (I.9) отличен от нуля, т.е., если взять $J = \{i(1), \dots, i(N)\}$, то $d[J] \neq 0$. Обозначим точку, определенную системой (I.9), через $x_J = \Gamma_{i(1)} \cap \dots \cap \Gamma_{i(N)}$. Поскольку координатами любой точки x пространства R_N являются x^1, \dots, x^N , а по (I.4) нами введено обозначение $\mathcal{N}^0 = \{1, \dots, N\}$, координаты вершины x_J можно записать в форме x_J^i ($i \in \mathcal{N}^0$). Они составляют решение системы (I.9), которое выражается формулами

$$x_J^i = (-1)^{i \in J} D[i, J] / d[J], \quad i \in \mathcal{N}^0. \quad (I.10)$$

Обозначим для произвольного $i \in \{1, \dots, M\}$

$$J[i] = \{i\} \cup J. \quad (I.11)$$

По определению вершины и в силу предложения I.1 из [2] (стр. 194), точка x с координатами (I.10) будет вершиной многогранника тогда и только тогда, когда для всех $i \in \{1, \dots, M\}$

имеют место

$$(-1)^{N-1} D[J(i)] / d[J] \leq 0. \quad (I.12)$$

Прямым следствием системы неравенств (I.12) будет

Предложение 1. Для того, чтобы точка x_j с координатами (I.10) являлась вершиной многогранника, заданного системой (I.8), необходимо и достаточно, чтобы для множества $J = \{i(1), \dots, i(N)\}$ имело место

$$d[J] \neq 0 \quad (I.13)$$

и для всех $i \in \{1, \dots, M\}$ либо

$$\operatorname{sgn} D[J(i)] = (-1)^{|J|} \operatorname{sgn} d[J], \quad (I.14)$$

либо

$$D[J(i)] = 0 \quad (I.15)$$

Вернемся теперь к исследованию многогранника $M(A, B, C)$, который задается системой (I.8) при условиях (I.6), (I.7).

2. О нахождении вершин многогранника $M(A, B, C)$. Как уже отмечалось, в [4] даны необходимые и достаточные условия непустоты многогранника $M(A, B, C)$ или, что равносильно, условия непустоты множества его вершин. Однако при нахождении вершин $M(A, B, C)$ проверку условий совместности системы (I) можно опустить, так как их нарушение проявится в том, что в процессе вычислений не будет обнаружено ни одной вершины.

Перейдем к специализации общих условий (I.13)–(I.15) вершины многогранника $M(A, B, C)$, учитывая специальный вид задающей его системы (I.8), для которой выполняются (I.6) и (I.7). Имеет место

Предложение 2. Любая вершина многогранника $M(A, B, C)$, заданного системой (I.8) при условиях (I.6), (I.7), является точкой пересечения x_j таких гиперплоскостей $\Gamma_{i(1)}, \dots, \Gamma_{i(N)}$, для которых $J = \{i(1), \dots, i(N)\} \subset \Pi^0 \cup \Pi_1 \cup \Pi_2$.

Так как у нас будут встречаться различные объединения множеств (I.4) и пересечения с ними множеств J , определяющих вершины, то введем для них специальные обозначения. Пусть $\{p, \dots, q; r, \dots, s\}$ являются произвольными подмножествами в $\{0, 1, 2\}$ (одно из них может быть и пустым). Примем

$$\Pi(p, \dots, q; r, \dots, s) = \Pi^p \cup \dots \cup \Pi^q \cup \Pi_r \cup \dots \cup \Pi_s.$$

Если $\{p, \dots, q\} = \emptyset$, то обязательно $\{r, \dots, s\}$ непустое и $\Pi(\emptyset; r, \dots, s) = \Pi_r \cup \dots \cup \Pi_s$. Аналогично, при $\{r, \dots, s\} = \emptyset$ — $\Pi(p, \dots, q; \emptyset) = \Pi^p \cup \dots \cup \Pi^q$. В этих обозначениях имеем

тели возможно более низкого порядка. С этой целью мы введем несколько вспомогательных функций. Они используются для характеристики расположения элементов множеств $SJ(0; 0)$ или $J(0, \emptyset)$ и $RJ(0; \emptyset)$ относительно друг друга в случае произвольного фиксированного множества $J = \{i(1), \dots, i(N)\} \subset \mathcal{A}(J) \neq \emptyset$. Пусть u, v - натуральные числа и

$$h(u, v) = \begin{cases} 0, & \text{если } u + 0,5[u(u+1) + v(v+1)] \text{ - четное число,} \\ I, & \text{в противном случае.} \end{cases} \quad (3.1)$$

Пусть для любого $i \in J(\emptyset; 0)$

$$g(i) = \begin{cases} 0, & \text{если } \{j \in J(\emptyset; \emptyset), j > i\} \text{ - четное число,} \\ I, & \text{в противном случае.} \end{cases} \quad (3.2)$$

Далее положим для любого $i \in RJ(0; \emptyset)$

$$f(i) = \begin{cases} 0, & \text{если } \{j \in J(0; \emptyset), j < i\} \text{ - четное число,} \\ I, & \text{в противном случае.} \end{cases} \quad (3.3)$$

При $J(0; \emptyset) = \emptyset$ будем считать $f(i) = g(i) = 0$ при всевозможных i . С помощью (1.6), (3.2), (3.3) получается

Предложение 3. Справедливы равенства

$$\begin{aligned} d[J] &= (-1)^2 d[SJ(0; 0), J(\emptyset; 1, 2)], \\ D[J(i)] &= (-1)^{g(i)} D[iJ(0; \emptyset), J(\emptyset; 0, 1, 2)], \quad i \in \mathcal{R}(0, \emptyset), \\ D[J(i)] &= (-1)^2 D[J(0; \emptyset), iJ(\emptyset; 0, 1, 2)], \quad i \in \mathcal{R}(1, 2; 0, 1, 2), \end{aligned} \quad (3.4)$$

где

$$\begin{aligned} x &= m(0; \emptyset) + 0,5 m(0; 0) [m(0; 0) + 1] + \sum_{k \in J(0; \emptyset)} k + \sum_{k \in J(\emptyset; 0)} \{g(k) + k + 1\}, \\ y(i) &= i + f(i) + 0,5 m(0; \emptyset) [m(0; \emptyset) + 1] + \sum_{k \in J(0; \emptyset)} k, \\ z &= 0,5 m(0; \emptyset) [m(0; \emptyset) + 1] + \sum_{k \in J(0; \emptyset)} k. \end{aligned} \quad (3.5)$$

Здесь знак " \sim " между целыми числами означает, что эти числа имеют одинаковую четность. При этом порядок определителей в правых частях равенств (3.4) в общем случае меньше порядка определителей в левых частях (только при $J(0; \emptyset) = \emptyset$ он сохраняется для третьей группы равенств (3.4)). Из равенств (3.4) и соотношений (3.5), (3.1)-(3.3) получаются искомые аналитические признаки вершины многогранника $M(A, B, C)$. Справедливо

Предложение 4. Пусть $J = \{i(1), \dots, i(N)\} \subset \mathcal{R}(0; 0, 1, 2)$ множество, в котором элементы нумерованы в возрастающем порядке. Если $d[SJ(0; 0), J(\emptyset; 1, 2)] \neq 0$, то точка \mathfrak{A}_J пересечения гиперплоскостей $\Gamma_{i(1)}, \dots, \Gamma_{i(N)}$ будет вершиной многогранника $M(A, B, C)$ тогда и только тогда, когда

$$\begin{aligned} 1) & \text{ для каждого } i \in J(0; \emptyset) \text{ имеет место} \\ \operatorname{sgn} D[iJ(0; \emptyset), J(\emptyset; 0, 1, 2)] &= (-1)^{g(i)} \operatorname{sgn} d[SJ(0; 0), J(\emptyset; 1, 2)] \end{aligned} \quad (3.6)$$

В силу предложения 2 будем теперь рассматривать только множества $J = \{i(1), \dots, i(N)\} \in \mathcal{J} \subset \mathcal{K}(0; 0, 1, 2)$, не оговаривая это специально. При этом целесообразно разбить J на подмножества соответственно его пересечениям с произвольными множествами $\mathcal{K}(\rho, \dots, q; \nu, \dots, \delta)$. Именно, обозначим

$$J(\rho, \dots, q; \nu, \dots, \delta) = J \cap \mathcal{K}(\rho, \dots, q; \nu, \dots, \delta), \quad (2.1A)$$

$$RJ(\rho, \dots, q; \nu, \dots, \delta) = \mathcal{K}(\rho, \dots, q; \nu, \dots, \delta) \setminus J(\rho, \dots, q; \nu, \dots, \delta).$$

Если $i \in \{1, \dots, M\}$, то пусть

$$i \in J(\rho, \dots, q; \nu, \dots, \delta) = \{i\} \cup J(\rho, \dots, q; \nu, \dots, \delta). \quad (2.1B)$$

Важное значение для нас будет иметь множество

$$TJ = \{i \in \{1, \dots, M\} \mid D[J(i)] = 0\} \supset J, \quad (2.1B)$$

с помощью которого множество $RJ(0; 0)$ (соответственно и его подмножества $RJ(0; \emptyset)$, $RJ(\emptyset; 0)$) разбивается на две части по правилу

$$ORJ(0; 0) = RJ(0; 0) \cap TJ, \quad PRJ(0; 0) = RJ(0; 0) \setminus ORJ(0; 0). \quad (2.2)$$

Мощности этих множеств обозначаются соответственно через

$$m(\rho, \dots, q; \nu, \dots, \delta) = |J(\rho, \dots, q; \nu, \dots, \delta)|, \quad Rm(\rho, \dots, q; \nu, \dots, \delta) = |RJ(\rho, \dots, q; \nu, \dots, \delta)|, \quad ORm(0; 0) = |ORJ(0; 0)|, \quad PRm(0; 0) = |PRJ(0; 0)|.$$

Так как по определению $|J| = N$, то с учетом (I.4) из (2.1), (2.2) получаются соотношения

$$m(0; 0) + m(\emptyset; 1, 2) = N, \\ m(\emptyset; 1, 2) + Rm(\emptyset; 1, 2) = m + n. \quad (2.3)$$

Таким образом $m(\emptyset; 1, 2) \leq m + n < N$ и $m(0; 0) = N - m(\emptyset; 1, 2) > 0$. Это означает, что множество $J(0; 0)$ — непустое. Пусть элементы множества J нумерованы в возрастающем порядке, т.е. $i(1) < \dots < i(N)$. Тогда $J(0; \emptyset) = \{i(1), \dots, i(m(0; \emptyset))\}$, $J(\emptyset; 0) = \{i(m(0; \emptyset) + 1), \dots, i(m(0; 0))\}$, $J(0; 1, 2) = \{i(m(0; 0) + 1), \dots, i(N)\}$. Так как при $i \in J(\emptyset; 0)$ имеет место $i - N \in \mathcal{K}^c$, то определим

$$SJ(0; 0) = \{i(1), \dots, i(m(0; \emptyset)), i(m(0; \emptyset) + 1) - N, \dots, i(m(0; 0)) - N\} \subset \mathcal{K}^c.$$

В общем случае элементы множества $SJ(0; 0)$ не упорядочены в возрастающем порядке. Заметим, что для некоторого другого $J \subset \mathcal{K}(0; 0, 1, 2)$ используются аналогичные обозначения, только J в (2.1), (2.2) заменяется на J и m в (2.3) на n .

3. Аналитические признаки вершины многогранника $M(A, B, C)$

Все только что определенные множества применяются при получении необходимых и достаточных условий вершины многогранника $M(A, B, C)$, равносильных с условиями (I.13)–(I.15). Желательно, чтобы в искомым условиях встречались определе-

при

$$|N'(i)| = N + i + f(i) + h(m(0; \emptyset), m(0; 0)) + \sum_{k \in J(\emptyset; 0)} [g(k) + k - N]; \quad (3.7)$$

2) для каждого $i \in PRJ(\emptyset; 0)$ имеет место

$$\forall \alpha \in \mathcal{D}[J(\emptyset; \emptyset), J(\emptyset; 0, 1, 2)] = (-1)^{N'_{\text{sign}}} d[\mathcal{J}J(\emptyset; 0), J(\emptyset; 1, 2)] \quad (3.8)$$

при

$$N'' = |N + h(m(0; \emptyset), m(0; 0)) + \sum_{k \in J(\emptyset; 0)} [g(k) + k - N]|, \quad (3.9)$$

3) для каждого $i \in RJ(\emptyset; 1, 2)$ имеет место

$$D[J(\emptyset; \emptyset), iJ(\emptyset; 0, 1, 2)] = 0. \quad (3.10)$$

Доказательство опускается. Оно аналогично доказательству предложения 4 из [3].

Ввиду (I.6), (I.10) и (I.12) можно сформулировать следующие следствия из предложения 4.

Предложение 5. Если множество J удовлетворяет условиям предложения 4, то координаты $x_J^i \geq 0$ ($i \in \mathcal{V}^0$) определяемой им вершины x_J многогранника $M(A, B, C)$ вычисляются по формуле

$$x_J^i = \begin{cases} |D[iJ(\emptyset; \emptyset), J(\emptyset; 0, 1, 2)]| & \text{если } i \in PRJ(\emptyset; \emptyset), \\ 0, & \text{если } i \in J(\emptyset; \emptyset) \cup ORJ(\emptyset; \emptyset). \end{cases} \quad (3.11)$$

Предложение 6. Пусть множество J удовлетворяет условиям предложения 4. Для него формулы (3.8), (3.9) равносильны условиям

$$|D[iJ(\emptyset; \emptyset), J(\emptyset; 0, 1, 2)]| - a_{i, N+0} \leq 0 \text{ при всех } i \in PRJ(\emptyset; \emptyset) \quad (3.12)$$

В условиях (3.12) по существу проверяется, выполняются ли ограничения сверху для координат x_J^i точки x_J , определенной множеством J . С вычислительной точки зрения их проверка гораздо легче, чем проверка условий (3.8), так как последние требуют вычисления дополнительных определителей порядка $m(\emptyset; 0, 1, 2) + 1 = N - m(0; \emptyset) + 1 \leq N + 1$.

4. Допустимые множества. В этом параграфе вводится понятие допустимого множества. Оказывается, что недопустимому множеству никогда не соответствуют вершины $M(A, B, C)$. Дается полная характеристика возможно меньшего класса допустимых множеств, определяющих все вершины многогранника $M(A, B, C)$. Указывается также способ получения целой серии допустимых множеств, если некоторое допустимое множество уже получено.

Предложение 7. Любая вершина x_J многогранника $M(A, B, C)$ определяется, кроме J , также таким множеством J' , для которого $J(\emptyset; 0) \subset J'(\emptyset; 0)$ и $J(\emptyset; 1, 2) = \mathcal{V}(\emptyset; 1, 2) \setminus \{2N+m+n\}$ (в частном случае $J(\emptyset; 1, 2) = \mathcal{V}(\emptyset; 1, 2) \setminus \{2N+m+n\}$ множества J и J' совпадают).

Это предложение характеризует класс таких множеств, просмотр которых обеспечивает при необходимости нахождение полного множества вершин многогранника $M(A, B, C)$. Все они содержат однозначно определенное подмножество $J(\emptyset; 1, 2)$, включающее $m+n-1$ элементов и их число зависит только от возможностей выбора $J(0, 0)$.

Определение. Множество $J \subset \mathcal{N}(0; 0, 1, 2)$ с упорядоченными по возрастанию элементами называется допустимым, если для него имеет место $J(\emptyset; 1, 2) = \mathcal{N}(\emptyset; 1, 2) \setminus \{2N+m+n\}$ и $d[J] \neq 0$. В противном случае оно называется недопустимым. (Заметим, что при $d[J] = 0$ множество никогда не определяет вершины.)

Для допустимых множеств упрощается проверка условий вершины из предложения 4. Именно, в силу (2) и (2.IA) имеет место

Предложение 8. Для допустимого множества J множество $RJ(0; 1, 2) = \{2N+m+n\}$ одноэлементно и J удовлетворяет условию (3.10).

Не все множества J , имеющие структуру, описанную в предложении 7, являются допустимыми, так как по (2), (1.2), (1.6) справедливо

Предложение 9. Рассмотрим множество J с $RJ(\emptyset; 1, 2) = \{2N+m+n\}$. Оно будет недопустимым, если выполняется по крайней мере одно из следующих условий

- 1) $\exists k, \ell \in SJ(0; 0)$ хотя бы для одного k или ℓ ;
- 2) при некотором $i \in J(0; \emptyset)$ имеет место $i+N \in J(\emptyset; 2)$.

Определение. Допустимое множество J называется исходным, если для него имеет место $m(\emptyset; 0) = 0$.

Рассмотрим исходное множество J . Для него $m(0; \emptyset) = N - (m+n-1)$. Пусть выбрано непустое $\mathcal{K} \subseteq J(0; \emptyset)$. Обозначим

$$\begin{aligned} J(0; \emptyset) &= J(0; \emptyset) \setminus \mathcal{K}, \quad J(\emptyset; 0) = \{i+N, i \in \mathcal{K}\}, \\ J(\emptyset; 1, 2) &= J(\emptyset; 1, 2) \setminus \{2N+m+n\}, \\ \mathcal{F}(J, \mathcal{K}) &= J(0; \emptyset) \cup J(\emptyset; 0) \cup J(\emptyset; 1, 2). \end{aligned} \quad (4.3)$$

Предложение 10. Пусть $J = \{i(1), \dots, i(N)\}$ исходное множество. При $\emptyset \neq \mathcal{K} \subseteq J(0; \emptyset)$ множество $\mathcal{F}(J, \mathcal{K})$ допустимо. Наоборот, если множество J с непустым $J(\emptyset; 0)$ допустимо, то существует некоторое исходное множество J с подмножеством $\emptyset \neq \mathcal{K} \subseteq J(0; \emptyset)$ так, что $J = \mathcal{F}(J, \mathcal{K})$.

Если все исходные множества J уже известны, то предложение 10 дает правило нахождения всех допустимых множеств J с всевозможными $d(\emptyset; 0) = |J(\emptyset; 0)| = 1, \dots, N - (m+n-1)$.

В силу обратного утверждения этого предложения множество всех допустимых множеств исчерпывается описанным образом. Запишем в таблице I все множества $J(0;0)$ допустимых множеств J с $\ell(\emptyset;0) \neq 0$, получаемых на основе исходного J по (4.3).

Таблица I
Серия множеств $J(0;0)$, связанных с исходным множеством J

$\ell(\emptyset, 0)$	$ K =1$	$ K =2$...	$ N-(m+n-1)$
$J(0;0)$	$i(1), \dots, i(m(0;0)), i(n)+N$ $i(1), \dots, i(m(0;0)+1), i(m(0;0)+N)$	$i(1), \dots, i(m(0;0)), i(n)+N, i(n)+N$ $i(1), \dots, i(m(0;0)-2), i(m(0;0)-1)+N, i(m(0;0)+N)$...	$i(1)+N, \dots, i(m(0;0)+N)$
ИХ ЧИСЛО	$C_{N-(m+n-1)}^1$	$C_{N-(m+n-1)}^2$...	1

Подводя итоги основных результатов п. 3-4, мы имеем 1) аналитические признаки, которым должно удовлетворять допустимое множество, если ему соответствует вершина многогранника $M(A, B, C)$ (предложения 4, 6, 8) и 2) принцип перебора допустимых множеств (предложения 7, 9, 10). Именно

Предложение II. Все вершины многогранника $M(A, B, C)$ определяются такими допустимыми множествами J , что при всех $i \in PRJ(0; \emptyset)$ выполняются условия

$$\text{sgn } D[i; J(0; \emptyset), J(\emptyset; 0, 1, 2)] = (-1)^{n(i)} \text{sgn } d[SJ(0; 0), J(\emptyset; 1, 2)]$$

где

$$N'(i) = N + i + f(i) + h(m(0; \emptyset), m(0; 0)) + \sum_{k \in J(\emptyset; 0)} [g(k) + k - N]$$

а функции f, g, h определены формулами (3.1), (3.2), (3.3) и, кроме того,

$$|D[i; J(0; \emptyset), J(\emptyset; 0, 1, 2)]| - \alpha_{i, N, 0} \leq 0, \quad i \in PRJ(0; \emptyset).$$

Для любой вершины X_J множество $VJ = J(0;0) \cup ORJ(0;0)$ определено однозначно.

В силу однозначности VJ число множеств J , перебираемых в ходе нахождения вершин многогранника $M(A, B, C)$, может сильно сокращаться, так как любые допустимые последовательности с совпадающими VJ определяют совпадающие с X_J вершины, и их можно исключить из дальнейшего рассмотрения.

Для получения всех вершин многогранника $M(A, B, C)$ нужен некоторый перебор множеств J , который можно осуществить так. Перебор нужно начать с некоторого исходного множества

J , образуемого с учетом предположений 7 и 9. Далее для J нужно проверить условия предложения II. Для этого сначала нужно вычислить определитель $d[\bar{J}(0;0), J(\emptyset;1,2)]$. Затем в случае каждого J с $m(\emptyset;0)$ от 0 до $N-(m+n-1)$ нужно вычислить не более чем $Rm(0;\emptyset) = N-m(0;\emptyset)$ определителей $D[\bar{J}(0;\mu), J(\emptyset;0,1,2)]$ порядка $Rm(0;\emptyset)$. Эти определители надо вычислять до тех пор, пока все проверяемые условия выполняются. Если все условия вершины выполнены, занесем новую вершину в список. Как только хотя бы одно из условий нарушается, исследование данного J нужно прекратить (оно не определяет вершины для $M(A,B,C)$), и перейти к следующему J . Это будет или допустимым множеством, соответствующим данному исходному, или, если последние исчерпаны, новым исходным множеством. Когда все исходные множества и соответствующие им допустимые множества перебраны, закончим работу.

Заметим, что если эти результаты применить для решения экстремальных задач, то перебор множеств J значительно уменьшится.

Литература

1. Корзников А.Д. О гранях правильно-усеченного транспортного многогранника. — Вопр. планир. и экон.-мат. методы, Минск, 1978, 137-141.
2. Ривес К., Об аффинной классификации и признаках выпуклых многогранников в евклидовом пространстве R_n . — Уч. зап. Тартуск. ун-та, 1975, 366, 187-216.
3. Ривес К., Об определении вершин транспортных многогранников. — Уч. зап. Тартуск. ун-та, 1979, 500, 105-118.
4. Комароми, Е., Matrices with restricted elements, row sums and column sums. — Acta Math. Acad. Sci. Hung. 1978, 31, № 3-4, 349-354.

Поступило
11.XI 1979

LÕIGATUD TRANSPORTHULKTAHUKATE TIPPUDE MÄÄRAMINE

K.Riives

R e s ü m e e

Lõigatud transporthulktahukas $M(A,B,C)$ esitatakse transpordiülesande kitsenduste süsteemiga, mida on täiendatud muutujate väärtuste ülemiste tõketega. Nagu üldistegi kumerate hulktahukate puhul, on $M(A,B,C)$ tipud esitatavad võrratuste hulga teatud alamhukade poolt [2,3]. Töös on

kirjeldataud võimalikult väikest niisuguste alamhulkade klassi, kuhu kuuluvad kõiki $M(A, B, C)$ tippe määravad alamhulgad (vt. Laused 7,9) ja antud analüütilised tingimused selleks, et fikseeritud alamhulgale vastaks mingi tipp (Lause 11).

DETERMINATION OF THE VERTICES OF CUTTED TRANSPORTPOLYTOPES

K.Riives

S u m m a r y

A cutted transportpolytope $M(A, B, C)$ is given by the system of constraints of transportation problem with additional upper bounds for variables. As for general convex polytopes the vertices of $M(A, B, C)$ are determined by special subsets of the set of inequalities [2,3]. In the paper a possibly small class of such subsets is characterized which contains all subsets defining vertices of $M(A, B, C)$ (Prepositions 9,10). The analytic characters for the subset determining the vertice of $M(A, B, C)$ are pointed out (Preposition 11).