СВЯЗЬ МЕЖДУ СЕМАНТИЧЕСКИМИ МОДЕЛЯМИ И ПСЕВДОБУЛЕВЫМИ АЛГЕБРАМИ

А.Таутс

Институт кибернетики АН ЭССР

В [I] было дано понятие семантической модели и доказано, что каждая модель определяет некоторую полную псевдобулеву алгебру. Но в указанной статье не был исследован вопрос: можно ли таким образом получить любую полную псевдобулеву алгебру.

Легко видеть, что ответ на этот вопрос будет отрицательным. Действительно, рассмотрим, например, псевдобулеву алгебру, состоящую из трех элементов: $0, x, 1$ упорядоченных следующим образом: $0 < x < 1$. Эта псевдобулева алгебра полна. Можно ли найти семантическую структуру, имеющую в точности три значения истинности в линейном порядке?

Каждый аспект (см. [I]) вместе со своими конкретизациями определяет одно значение истинности. Кроме них существует еще по крайней мере одно значение истинности, а именно пустое, обозначаемое через 0. Значит, искомая семантическая структура не может иметь больше чем два аспекта.

Ясно, что одним аспектом можно определить только двухэлементную псевдобулеву алгебру. Следовательно, надо рассматривать семантические структуры, имеющие ровно два аспекта α и β. Но если α и β несравнимы относительно порядка, то получим четыре значения истинности. А если $\alpha<\beta$, то должны существовать выбор направлений Ω и цепь, согласующаяся с этим выбором, проходящая через α и β. Но в этом случае β является единственной конкретизацией для α в направлении $\Omega(\alpha)$, что противоречит правильности семантической структуры.

Теперь поставим себе другую цель: построить для произвольной полной псевдобулевой алгебры M семантическую модель, псевдобулева алгебра значений истинности которой имела бы подалгебру, изоморфную M. Подалгеброй полной псевдобулевой алгебры мы будем называть ее подмножество, содержащее 0 и 1 и замкнутое относительно дизъюнкции и коньюнкции (в том числе и бесконечных) и импликации. В этом случае при применении некоторой операции на элементы подалгебры результат операции не будет зависеть от того, рассмотрим ли мы эту операцию относительно всей псевдобулевой алгебры или относительно подалгебры.

Пусть M - некоторая полная псевдобулева алгебра. Будем называть буквой любой отличный от 0 элемент из M вместе с конечным (может быть, пустым) кортежом из символов + и −. При этом элемент из M мы будем называть основой буквы, а кортеж - приложением буквы. Мы будем говорить, что буква a проще буквы b, если основы этих букв совпадают, а приложение буквы a является начальным отрезком приложения буквы b. В этом случае буква b сложнее, чем a.

Будем называть словом любой непустой конечный кортеж букв, удовлетворяющий следующим условиям:

I) Основой первой буквы является 1.

2) Основы букв, считая слева направо, находятся в строго убывающем порядке в смысле псевдобулевой алгебры M.

Теперь определим отношение $\leqslant$ между словами следующим образом: если $\bar{a}$ и $\bar{b}$ слова, то $\bar{a} \leq \bar{b}$ тогда и только тогда, когда для каждой буквы в слове $\bar{a}$ имеется в слове $\bar{b}$ буква, совпадающая с ней или являющаяся более сложной.

Кроме того, каждое слово снабжают совокупностью направлений следующим образом: каждому слову ставят в соответствие одно т.н. экстранаправление, а кроме того, по одному направлению для каждого случая, где основа последней буквы данного слова является в M значением дизьюнкции элементов, строго меньших ее. Непосредственными конкретизациями данного слова в экстранаправлении считаются все ее непосредственные конкретизации в смысле отношения $\leqslant$. А если направление характеризировано тем, что основа последней буквы является в M дизьюнкцией элементов a_i, $i \in I$, то непосредственными конкретизациями данного слова в этом направлении считаются слова, полученные от данного слова прибавлением одной буквы, основа которой меньше или равна некоторому a_i, $i \in I$, а приложение есть пустой кортеж.

Проверим, является ли правильной семантическая структура, где в роли аспектов будут слова в указанном упорядочении, снабженные направлениями и непосредственными конкретизациями для каждого направления указанным образом[1].

Во первых, каждому слову предшествует только конечное число слов. Кроме того, для каждого слова в каждом направлении имеется не меньше двух непосредственных конкретизаций. Для экстранаправления можно, например, прибавить + или – к приложению любой буквы. Для остальных направлений – их будем в дальнейшем называть простыми – это вытекает из того, что в M отличный от 0 элемент может быть значением дизъюнкции совокупности элементов, строго меньших его, если эта совокупность содержит не меньше двух элементов.

Следовательно, линейно упорядоченные множества аспектов могут быть только конечные или в виде последовательности. В последнем случае они неограничены сверху. Цепи бывают только в виде последовательности. Поэтому условие о существовании наименьшей верхней грани для каждого вполне упорядоченного множества, ограниченного сверху, выполнено тривиальным образом.

Вторoе условие правильности требует, что если $\bar{a} \leq \bar{b}$, то существует выбор направлений и цепь, согласующаяся с этим, проходящая через $\bar{a}$ и $\bar{b}$. Но выбор можно определить так, что каждому слову соответствует экстранаправление, а от $\bar{a}$ можно шаг за шагом двигаться к $\bar{b}$, прибавляя каждый раз + или – к некоторому приложению или основу новой буквы.

Третье условие правильности требует, чтобы множество $\{\bar{a}\}$ исчерпывало только конкретизации слова $\bar{a}$. Но если $\bar{b}$ не является конкретизацией $\bar{a}$, а Ω является некоторым выбором направлений, то $\bar{a}$ имеет такую букву, которой нет в $\bar{b}$, а также в $\bar{b}$ нет более сложной буквы. В этом случае цепь, начинающаяся с $\bar{b}$ и согласующаяся с Ω, выбирается так, что в каждом слове $\bar{c}$, не являющемся конкретизацией $\bar{a}$, прибавляется к некоторому приложению + или –, или к этому слову прибавляется основа некоторой буквы, чтобы получить непосредственную конкретизацию в направлении $\Omega(\bar{c})$, тоже не являющуюся конкретизацией $\bar{a}$. Для экстранаправления это возможно тривиальным образом, так как к любому приложению можно прибавить + или – и оба прибавления не могут дать конкретизацию слова $\bar{a}$. В случае простого направления

[1] Можно рассматривать и вырожденную псевдобулеву алгебру, где 0 и 1 совпадают. В этом случае множество букв и множество слов окажутся пустыми.

опасность возникает только в таком случае, если лишь одна буква слова $\bar{a}$ отсутствует в $\bar{c}$, но, как нам известно, можно в этом случае прибавить некоторую другую букву, получая непосредственную конкретизацию в направлении $\Omega(\bar{c})$.

Наконец, остается четвертое требование: если $A \subseteq M$ исчерпывает $\bar{a}$ и $\bar{a} \le \bar{b}$, то A исчерпывает $\bar{b}$. Пусть A исчерпывает $\bar{a}$ и $\bar{a} \le \bar{b}$. Пусть Ω - выбор направления, реализующий исчерпываемость $\bar{a}$ множеством A. Выбираем, если это возможно, в направлении $\Omega(\bar{a})$ такую непосредственную конкретизацию $\bar{c}_1$, что $\bar{c}_1 \le \bar{b}$. Также поступаем и с $\bar{c}_1$ получая $\bar{c}_2 \le \bar{b}$ и т.д. Так как между $\bar{a}$ и $\bar{b}$ может быть только конечное число слов, то когда-нибудь мы дойдем до некоторого $\bar{c}_n$, не имеющего в направлении $\Omega(\bar{c}_n)$ требуемой конкретизации. В случае, если $\bar{a}$ ее не имеет, то $n = 0$ и $\bar{c}_0 = a$. Итак, получаем $\bar{c} \ge \bar{a}$ такую, что $\bar{c} \le \bar{b}$. Никакая непосредственная конкретизация $\bar{c}'$ слова $\bar{c}$ в направлении $\Omega(\bar{c})$ не удовлетворяет неравенству $\bar{c}' \le \bar{b}$, кроме того, либо $\bar{a} = \bar{c}$, либо между $\bar{a}$ и $\bar{c}$ есть часть цепи, согласующейся с Ω. Поэтому A исчерпывает $\bar{c}$. Если $\bar{c} = \bar{b}$, то A исчерпывает $\bar{b}$ и вопрос решен. Если $\bar{c} < \bar{b}$, то $\Omega(c)$ обязательно простое. Оно характеризуется совокупностью элементов $\{ e_\iota, \iota \in I\}$ таких, что $\vee_{\iota \in I} e_\iota$ есть основа последней буквы из $\bar{c}$, а каждое e_ι строго меньше ее. Непосредственные конкретизации в направлении $\Omega(\bar{c})$ получаются прибавлением букв, основа которых меньше или равна некоторому e_ι. Но так как основа последней буквы слова $\bar{c}$ является основой некоторой буквы слова $\bar{b}$, то основа последней буквы слова $\bar{b}$ равна или меньше ее. В этом случае выбираем направление $\Omega'(\bar{b})$ следующим образом. Пусть e - основа последней буквы слова $\bar{b}$. Известно, что $\vee_{\iota \in I}(e \wedge e_\iota) = e \wedge (\vee_{\iota \in I} e_\iota)$. Но так как $\vee_{\iota \in I} e_\iota \ge e$, то $\vee_{\iota \in I}(e \wedge e_\iota) = e$. Если теперь для некоторого $\iota \in I$ имеет место $e \wedge e_\iota = e$ т.е. $e \le e_\iota$, то одну конкретизацию в направлении $\Omega(\bar{c})$ можно получить прибавлением буквы с основой e и эта конкретизация была бы меньше или равна $\bar{b}$, что противоречит предположению. Поэтому для каждого $\iota \in I$ имеет место $e \wedge e_\iota < e$ и мы можем выбирать в качестве $\Omega'(\bar{b})$ направление, характеризуемое совокупностью $\{e \wedge e_\iota, \iota \in I\}$. Если теперь $\bar{b}_1$ есть непосредственная конкретизация слова $\bar{b}$ в направлении $\Omega'(\bar{b})$, то $\bar{b}_1$ получается из $\bar{b}$ прибавлением буквы с основой $f \leq c \wedge e_i \leq e_i$. Но такую же букву можно прибавить и к слову $\bar{c}$, получая его непосредственную конкретизацию $\bar{a}_1$ в направлении $\Omega(\bar{c})$. При этом $\bar{a}_1 < \bar{b}_1$. Таким образом, мы нашли для $\bar{b}$ направление $\Omega'(\bar{b})$ такое, что для каждой конкретизации $\bar{b}_1$ в направлении $\Omega'(\bar{b})$ имеется $\bar{a}_1$ такое, что $\bar{a}_1 < \bar{b}_1$, а между $\bar{a}$ и $\bar{a}_1$ существует часть цепи, согласующейся с Ω. Теперь повторим конструкцию, беря $\bar{a}_1$ и $\bar{b}_1$ в качестве $\bar{a}$ и $\bar{b}$, используя обстоятельство, что Ω реализует и исчерпаемость $\bar{a}_1$ множеством A. При этом получаем $\Omega'(\bar{b}_1)$ и т.д. После этого можно Ω' продолжить на всю структуру произвольным образом. Если теперь $\bar{b}, \bar{b}_1, \bar{b}_2, \ldots, \bar{b}_n, \ldots$ – цепь, согласующаяся с Ω', то существует последовательность $\bar{a}, \bar{a}_1, \bar{a}_2, \ldots \bar{a}_n \ldots$ такая, что $\bar{a}_n \leq \bar{b}_n$ и между $\bar{a}_i$ и $\bar{a}_{i+1}$ существует часть цепи, согласующейся с Ω. Поэтому $\bar{a}, \bar{a}_1, \bar{a}_2, \ldots, \bar{a}_n \ldots$ определяет такую цепь. Но в этом случае некоторое $\bar{a}_n$ больше или равно некоторому слову из A, а значит, это имеет место и для $\bar{b}_n$. Поэтому Ω' реализует исчерпаемость слова $\bar{b}$ множеством A.

Следовательно, полученная семантическая структура правильна и определяет псевдобулеву алгебру.

Поставим теперь $a \in M$ в соответствие множество слов $A(a)$, состоящее в точности из тех слов, основа последней буквы которых меньше или равно a.

Проверим, являются ли множества $A(a)$ значениями истинности.

Ясно, что если $\bar{b} \in A(a)$, а $\bar{b} \leq \bar{c}$, то основа последней буквы слова $\bar{b}$ является основой некоторой буквы слова $\bar{c}$ и основа последней буквы слова $\bar{c}$ меньше или равно ей. Поэтому $\bar{c} \in A(a)$ и $A(a)$ монотонно. Остается доказать, что для каждого $\bar{b} \bar{\in} A(a)$ существует в каждом направлении непосредственная конкретизация, не принадлежащая $A(a)$. В этом случае мы можем при каждом выборе направлений Ω построить цепь, начинающуюся с $\bar{b}$, согласующуюся с Ω и не пересекающуюся с $A(a)$.

Но если $\bar{b} \bar{\in} A(a)$, то при экстранаправлении можно просто прибавить + или – к некоторому приложению. Простое направление характеризуется такой совокупностью $\{e_i : i \in I\}$, что $\vee_{i \in I} e_i$ является основой последней буквы слова $\bar{b}$. Если для каждого $i \in I$ имело бы место $e_i \leq a$, то было бы и $\vee_{i \in I} e_i \leq a$ и $\bar{b} \in A(a)$. Следовательно, для некоторого

$\iota \in I$ не имеет места $a_\iota \leq a$ и можно прибавить букву с основой b_ι, не попадая в $A(a)$. Следовательно, $A(a)$ есть значение истинности.

Проверим, является ли $\{A(a) : a \in M\}$ подалгеброй полученной булевой алгебры значений истинности, изоморфной M.

Ясно, что если $a \neq b$, то $A(a)$ и $A(b)$ разные, иначе слова, основами последних букв которых являются a и b, принадлежали бы $A(a)$ и $A(b)$, что привело бы к $a \leq b$ и $b \leq a$, т.е. $a = b$. При этом $A(a) \leq A(b)$ тогда и только тогда, если $a \leq b$, иначе слова, основы последних букв которых суть a, не принадлежат $A(b)$.

Множество $A(1)$ является всей структурой, а $A(0)$ – пустым множеством.

Пусть $\{a_\iota : \iota \in I\}$ есть совокупность элементов. Слово $\bar{a}$ принадлежит каждому $A(a_\iota)$, $\iota \in I$, если основа его последней буквы меньше или равна a_ι для всех $\iota \in I$, т.е. меньше или равно $\bigwedge_{\iota \in I} a_\iota$. Следовательно, $\bigwedge_{\iota \in I} A(a_\iota) = A(\bigwedge_{\iota \in I} a_\iota)$.

Дальше, если $a \leq \bigvee_{\iota \in I} a_\iota$, то $\bigvee_{\iota \in I} (a \wedge a_\iota) = a$. Если для некоторого $\iota \in I$ имеет место $a \wedge a_\iota = a$, т.е. $a \leq a_\iota$, то слова, основа последней буквы которых есть a, принадлежат уже $A(a_\iota)$. Если $a \leq a_\iota$ не имеет место, то для слова с основой последней буквы a существует направление, характеризуемое совокупностью $\{a \wedge a_\iota : \iota \in I\}$, и каждая непосредственная конкретизация в этом случае попадет в некоторое $A(a_\iota)$, $\iota \in I$. Т.е. $\bar{a} \in \bigvee_{\iota \in I} A(a_\iota)$. А если не имеет место $a \leq \bigvee_{\iota \in I} a_\iota$, то для экстранаправления можно прибавить + или – к некоторому приложению, а всякое простое направление для $\bar{a}$ с основой последней буквы a характеризуется совокупностью $\{e_\varkappa : \varkappa \in K\}$, где $\bigvee_{\varkappa \in K} e_\varkappa = a$. При этом хотя бы для одного $\varkappa \in K$ не имеет место $e_\varkappa \leq \bigvee_{\iota \in I} a_\iota$ и мы можем найти непосредственную конкретизацию, где $e_\varkappa$ – основа последней буквы. Продолжая таким образом, мы получим цепь, не попадая ни в одно $A(a_\iota)$, $\iota \in I$, следовательно, $\bar{a} \in \bigvee_{\iota \in I} A(a_\iota)$. Итак, $\bigvee_{\iota \in I} A(a_\iota) = A(\bigvee_{\iota \in I} a_\iota)$.

Пусть теперь $\bar{c} \in A(a \to b)$, т.е. основа последней буквы слова $\bar{c}$ меньше или равна $a \to b$. Это имеет место и для всех конкретизаций слова $\bar{c}$. Если некоторая его конкретизация $\bar{d}$ принадлежит и $A(a)$, то основа последней буквы $\bar{d}$ меньше или равна $a \to b$ и a, т.е. меньше или равна $(a \to b) \wedge a \leq b$. В этом случае $\bar{d} \in A(b)$. Следовательно,

$\bar{c} \in A(a) \to A(b)$.

Пусть теперь $\bar{c} \in A(a \to b)$ не имеет место и пусть c – основа последней буквы слова $\bar{c}$. В этом случае $c \leq a \to b$ не имеет место, также не имеет место и $c \wedge a \leq b$. Но в этом случае можно найти конкретизацию для $\bar{c}$, прибавляя букву с основой $c \wedge a$ (в случае $c \wedge a = c$ в качестве этой конкретизации можно взять $\bar{c}$), принадлежащую $A(a)$, но не принадлежащую $A(b)$, следовательно, $c \bar{\in} A(a) \to A(b)$.

Итак, $A(a \to b): A(a) \to A(b)$.

Таким образом, мы видим, что $\{A(a) : a \in M\}$ – подалгебра полученной псевдобулевой алгебры, изоморфна M.

Из полученного результата можно вывести следующее следствие. Если $\mathfrak{A}$ – нетавтологичная формула и $\mathcal{U}$ – контрамодель для $\mathfrak{A}$, основывающаяся на псевдобулевой алгебре M, то можно построить семантическую структуру S, система значений истинности которой имеет подалгебру M^*, изоморфную M. Теперь можно построить модель на S, где все значения истинности существования, а также и значения предикатов попадут в M^*, являясь элементами, соответствующими аналогичным значениям в M. Такая связь сохраняется и между значениями формул. Поэтому S является контрамоделью для $\mathfrak{A}$. Итак, если для $\mathfrak{A}$ существует контрамодель, то, не ограничивая общности, можно эту контрамодель задать на семантической структуре.

Литература

I. Т а у т с А., Семантическая модель для бесконечных формул.– Уч. зап. Тартуск. ун-та, 1975, 355, 7-19.

Поступило
28.XII 1978

SEMANTILISTE MUDELITE JA PSEUDO-BOOLE'I ALGEBRATE VAHELINE SEOS

A.Tauts

R e s ü m e e

Teatavasti artiklis [1] esitatud semantiline struktuur määrab alati mingi pseudo-Boole'i algebra. Käesolevas artiklis tõestatakse, et ehkki iga pseudo-Boole'i algebrat ei ole võimalik nii saada, on ometi iga pseudo-Boole'i algebrat

võimalik saada niisugusel viisil määratud pseudo-Boole'i algebra alamalgebrana. Siit järeldub, et valemite kontramudelite konstrueerimisel võib piirduda semantiliste mudelitega.

DER ZUSAMMENHANG ZWISCHEN DEN SEMANTISCHEN MODELLEN UND DEN PSEUDO-BOOLESCHEN ALGEBREN

A.Tauts

Zusammenfassung

Bekanntlich bestimmt die in dem Artikkel [1] dargelegte semantische Struktur immer eine pseudo-Boolesche Algebra. In dem vorliegenden Artikel wird bewiesen, daß obgleich man nicht jede pseudo-Boolesche Algebra in solcher Weise bekommen kann, kann man doch jede pseudo-Boolesche Algebra als eine Unteralgebra einer in solcher Weise bestimmten Algebra bekommen. Daraus folgt, daß man sich bei dem Konstruieren der Kontramodelle der Formeln nur mit den semantischen Modellen begnügen kann.