О ФАКТОРРЕШЕТКЕ РЕШЕТКИ РЕКУРСИВНО ПЕРЕЧИСЛИМЫХ МНОЖЕСТВ ПО КОНГРУЭНЦИИ ИММУННОСТИ

Р. Пранк
Кафедра программирования

1. Пусть $\mathcal{E}$ обозначает решетку рекурсивно перечислимых подмножеств множества натуральных чисел N относительно теоретико-множественных операций. Большое количество результатов о решетке $\mathcal{E}$, а также о факторрешетке $\mathcal{E}/\mathcal{F}$ по идеалу конечных множеств, приводится в 12-ой главе монографии Роджерса [1]. Для $A, B \in \mathcal{E}$ определим

$$A =_{\mathcal{J}} B \rightleftharpoons (A \setminus B) \cup (B \setminus A) \text{ конечно или иммунно.}$$

Факторрешетку решетки $\mathcal{E}$ по конгруэнции иммунности $=_{\mathcal{J}}$ обозначим через $\mathcal{E}/\mathcal{J}$, а класс конгруэнтности рекурсивно перечислимого множества A через $A_{\mathcal{J}}$. Решетка $\mathcal{E}/\mathcal{J}$ обладает нулевым элементом $0 = \phi_{\mathcal{J}}$ и единичным элементом $1 = N_{\mathcal{J}}$. Дополнение элемента $A_{\mathcal{J}}$ в $\mathcal{E}/\mathcal{J}$ обозначим через $A_{\mathcal{J}}'$, а дополнение множества $A \subseteq N$ до N через $\bar{A}$. Под элементарной теорией решетки $\mathcal{E}$ ($\mathcal{E}/\mathcal{J}$) понимаем совокупность истинных в $\mathcal{E}$ ($\mathcal{E}/\mathcal{J}$) замкнутых формул теоретико-решеточного языка в сигнатуре $\langle 0, 1, \cup, \cap, ' \rangle$ или $\langle 0, 1, \leq \rangle$.

В [2] Лахлан ставит задачу об исследовании решетки $\mathcal{E}/\mathcal{J}$ для получения информации о решетке $\mathcal{E}$. В настоящей заметке опишем элементы $\mathcal{E}/\mathcal{J}$, обладающие дополнением, и построим один элементарно определимый в $\mathcal{E}/\mathcal{J}$ собственный подкласс класса элементов, не обладающих дополнением.

2. В §8.7 книги Роджерса все рекурсивно перечислимые множества группируются по пяти непересекающимся классам $\mathcal{C}_0, \ldots, \mathcal{C}_4$, где, в частности,

$$\mathcal{C}_0 = \{A \mid A \text{ рекурсивно}\},$$
$$\mathcal{C}_1 = \{A \mid A \text{ просто}\},$$
$$\mathcal{C}_2 = \{A \mid \bar{A} \text{ не рекурсивно перечислимо и } \bar{A} = B \cup I, \text{ где } B \text{ - бесконечное рекурсивно перечислимое множество, } I \text{ - иммунно}\},$$

а для множеств A из классов $\mathcal{C}_3$ и $\mathcal{C}_4$ для каждого рекурсивно перечислимого множества $B \subseteq \bar{A}$ найдется такое бесконечное рекурсивно перечислимое множество $C \subseteq \bar{A}$, что $B \cap C = \phi$.

Ясно, что имеет место следующая

Теорема I. Пусть A - рекурсивно перечислимое множество. Тогда

$A_{\mathcal{Y}}$ имеет дополнение $\Longleftrightarrow A \in \mathcal{C}_0 \cup \mathcal{C}_1 \cup \mathcal{C}_2$.

Следствие I. Существует такое рекурсивно перечислимое множество A, что

I) $A_{\mathcal{Y}}$ имеет дополнение в $\mathcal{E}/\mathcal{Y}$,

2) класс $A_{\mathcal{Y}}$ не содержит рекурсивных множеств.

Условиям следствия удовлетворяют множества из подклассов $\mathcal{C}_{22}$ и $\mathcal{C}_{23}$ рассмотренной классификации.

По теореме I, обладающие дополнением элементы решетки $\mathcal{E}/\mathcal{Y}$ порождаются рекурсивно перечислимыми множествами из различных элементарно определимых в $\mathcal{E}$ классов. Но следующая теорема показывает, что отличные от 0 и 1 элементы с дополнением решетки $\mathcal{E}/\mathcal{Y}$ образуют единственный элементарно определимый в $\mathcal{E}/\mathcal{Y}$ класс.

Теорема 2. Пусть $D_{\mathcal{Y}}$ и $E_{\mathcal{Y}}$ - элементы с дополнением решетки $\mathcal{E}/\mathcal{Y}$, отличные от 0 и 1. Тогда найдется такой автоморфизм Φ решетки $\mathcal{E}/\mathcal{Y}$, что $\Phi(D_{\mathcal{Y}}) = E_{\mathcal{Y}}$.

Для доказательства достаточно построить автоморфизм для случая, когда D - бесконечное кобесконечное рекурсивное множество, а $E \in \mathcal{C}_2$. Если B - множество из определения $\mathcal{C}_2$ для E, то нужный автоморфизм индуцирувтся взаимно-однозначной общерекурсивной функцией, отображающей D на E и $\overline{D}$ на B.

Следствие 2. Отличные от 0 и 1 элементы с дополнением решетки $\mathcal{E}/\mathcal{Y}$ образуют один элементарно определимый в $\mathcal{E}/\mathcal{Y}$ класс.

Следствие 3. Существует автоморфизм решетки $\mathcal{E}/\mathcal{Y}$, не индуцированный никаким автоморфизмом решетки $\mathcal{E}$.

Отметим, что все автоморфизмы факторрешетки $\mathcal{E}/\mathcal{F}$ индуцируются автоморфизмами $\mathcal{E}$ [3].

3. Переходим к рассмотрению элементов $\mathcal{E}/\mathcal{Y}$ без дополнения. Аналоги известных для $\mathcal{E}$ и $\mathcal{E}/\mathcal{F}$ классов максимальных, r-максимальных, простых и др. элементов здесь отсутствуют, соответствующие рекурсивно перечислимые множества "склеиваются" при факторизации. Для получения элементарно определимых классов нужен "более грубый" эффект.

Аналогично рекурсивно отделимым элементам $\mathcal{E}$ называем элементы $A_{\mathcal{Y}}$ и $B_{\mathcal{Y}}$ решетки $\mathcal{E}/\mathcal{Y}$ отделимыми в $\mathcal{E}/\mathcal{Y}$, если существует элемент $x_{\varphi} \in \mathcal{E}/\varphi$, обладающий дополнением и такой, что

$$A_{\varphi} \leq x_{\varphi} \text{ и } B_{\varphi} \leq x_{\varphi}'.$$

Ясно, что отделимость выражается формулой

$$(\exists x)(\exists y)[y = x' \,\&\, a \leq x \,\&\, b \leq x'].$$

Теорема 3. Существует такое рекурсивно перечислимое множество A, что

I) A_{φ} не имеет дополнения в $\mathcal{E}/\varphi$,

2) A_{φ} отделим в $\mathcal{E}/\varphi$ от каждого дизъюнктного с ним элемента.

Условиям теоремы удовлетворяет множество

$$A = \{\langle x, i\rangle \mid x \in \mathbb{N},\ i \in S\},$$

где S – простое множество.

Аналогично доказательству теоремы 7-XII из [I] можно убедиться, что для приведенных там множеств

$$A_0 = \{x \mid \varphi_x(x) = 0\} \text{ и } A_1 = \{x \mid \varphi_x(x) = 1\}$$

классы $(A_0)_{\varphi}$ и $(A_1)_{\varphi}$ являются неотделимыми также и в $\mathcal{E}/\varphi$. Из этого факта и теоремы 3 получим

Следствие 4. Существуют элементарно определимые собственные подклассы класса элементов $\mathcal{E}/\varphi$, не обладающих дополнением.

Литература

I. Р о д ж е р с Х., Теория рекурсивных функций и эффективная вычислимость, Москва, 1972.

2. L a c h l a n A. H., On the lattice of recursively enumerable sets. Trans. Amer. Math. Soc., 130, № 1(1968), 1-37.

3. S o a r e R. I., Automorphisms of the lattice of recursively enumerable sets. Part I: Maximal sets, Ann. Math. 100, № 1 (1974), 80-120.

Поступило
I5 VI 1979

VÕREST $\mathcal{E}/\varphi$

R. Prank

R e s ü m e e

Artiklis vaadeldakse rekursiivselt loetletavate hulkade võre faktorvõrat $\mathcal{E}/\varphi$, mis on saadud kongruentsi

$A =_{\varphi} B \rightleftharpoons (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$ on lõplik või immuunne

järgi.

Antakse võre $\mathcal{L}/\mathcal{J}$ täiendiga elementide kirjeldus. Näidatakse, et null- ja ühikelemendist erinevad täiendiga elemendid moodustavad ainult ühe elementaarselt defineeritava klassi, aga täiendita elementide klasse on rohkem kui üks.

ON THE FACTORLATTICE OF LATTICE OF RECURSIVELY ENUMERABLE SETS BY IMMUNITY CONGRUENCE

R.Frank

S u m m a r y

For the factorlattice $\mathcal{L}/\mathcal{J}$ of lattice $\mathcal{L}$ of RE sets defined by the congruence

$A =_{\mathcal{J}} B \rightleftarrows (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$ is finite or immune,

the following theorems are proved.

An element $A_{\mathcal{J}} \in \mathcal{L}/\mathcal{J}$ has complement if and only if $A \in \mathcal{L}_2 \cup \mathcal{L}_1 \cup \mathcal{L}_3$ in the classification of §8.7 in [1]. For any two complemented elements of $\mathcal{L}/\mathcal{J}$ different from 0 and 1 there is an automorphism of $\mathcal{L}/\mathcal{J}$ mapping one to the other.

An example of an elementary definable proper subclass of noncomplemented elements is given.