АНАЛОГИ КВАЗИФРОБЕНИУСОВЫХ КОЛЕЦ ДЛЯ МОНОИДОВ I

П. Нормак

Кафедра математики ТПедИ

Пусть S - моноид. Множество A называется левым S-полигоном, если для любых элементов $s \in S$ и $a \in A$ определено произведение $sa \in A$, причем $(s_1 s_2)a = s_1(s_2 a)$ и $1a = a$ для всех $s_1, s_2 \in S$ и $a \in A$.

Как видно из определения, понятие полигона над моноидом аналогично понятию модуля над кольцом. В этой связи представляет интерес исследование свойств моноидов и полигонов, аналогичных тем или иным важным свойствам колец и модулей. Один из таких вопросов и рассматривается в настоящей работе. Напомним, что квазифробениусово кольцо было определено как артиново кольцо, удовлетворяющее некоторым свойствам двойственности. Впоследствии многими авторами были найдены различные условия, эквивалентные квазифробениусовости кольца. Среди них:

1. Все свободные левые R-модули инъективны ([6], предложение 5).

2. Все проективные левые R-модули инъективны ([9], теорема 5).

3. Все счетно-порожденные проективные левые R-модули инъективны ([9], теорема 5).

4. Любой левый R-модуль является подмодулем некоторого свободного левого R-модуля ([10], следствие 5.6).

5. Кольцо R является Σ-инъективным ([9], теорема 5, предложение 3).

6. Инъективная оболочка любого свободного левого R-модуля свободна ([2], теорема 5).

7. Все вполне проективные левые R-модули инъективны ([6], предложение 5).

8. Все свободные левые R-модули вполне инъективны ([6] предложение 5).

9. Все вполне проективные левые R-модули вполне инъективны ([6], предложение 5).

10. Любой циклический левый и любой циклический правый R-

модули содержатся в некотором проективном модуле ([10], следствие 5.10).

11. Все иньективные левые R-модули проективны ([10], теорема 5.3).

12. Все вполне инъективные левые R-модули проективны ([6], предложение 5).

13. Все вполне иньективные левые R-модули вполне проективны ([6], предложение 5).

14. R – совершенное слева кольцо и любой конечно порожденный левый R-модуль изоморфен подмодулю некоторого проективного R-модуля ([12], теорема 3).

15. Кольцо R удовлетворяет условию минимальности для правых идеалов и для всякого неприводимого левого (правого) R-модуля A его модуль характеров A^* является неприводимым правым (левым) R-модулем ([4], теорема 58.6).

16. Кольцо R совершенно слева и любой циклический левый R-модуль рефлексивен ([12], теорема 2).

Как видно из полученных ниже результатов, аналоги условий 1.–16. для моноидов расщепляются, т.е. они определяют несколько различных классов моноидов (см., например, теоремы 1, 2, 3 и предложение 6).

Напомним некоторые определения и факты из теории полигонов. Если не оговорено противное, полигоны предполагаются левыми.

Полигон с одним образующим называется циклическим. Полигон B называется существенным расширением полигона A, если любой гомоморфизм $\varphi: B \to C$, ограничение которого на A – мономорфизм, является мономорфизмом. Максимальное существенное расширение полигона A называются инъективной оболочкой полигона A. Любой полигон A обладает инъективной оболочкой $E(A)$, единственной с точностью до изоморфизма над A ([8], теорема 10). Говорят, что S-полигон B – чистое расширение полигона A, или, что A – чистый подполигон полигона B, если каждая конечная система уравнений вида $sx = ty$, $sx = a$, где $s,t \in S$, а $a \in A$, разрешимая в B, разрешима в A. Говорят, что полигон A абсолютно чист, если он чист в своей инъективной оболочке $E(A)$. Ясно, что каждый инъективный полигон абсолютно чист. Каждой системе Σ уравнений вышеуказанного вида сопоставим следующий граф Γ (он называется графом системы Σ): вершинами графа Γ являются символы всех неизвестных, входящих в систему, а вершины x и y соединены ребром тогда и только тогда, когда в системе Σ найдется уравнение $sx = ty$. Назовем систему Σ связной, если граф этой системы – связен. Копроизведение $\coprod_I A_i$ S-полигонов A_i, $i \in I$, где I – некоторое множество индексов, изоморфно объединению попарно непересекающихся полигонов A_i, $i \in I$. Свободный S-полигон изоморфен копроизведению некоторого множества экземпляров моноида S. Одноэлементный полигон называется нулевым. Полигон A называется слабо (f-) инъективным, если он инъективен относительно вложений (конечно порожденных) левых идеалов моноида S в S. Назовем полигон Σ-инъективным, если он инъективен и копроизведение любого множества его копий также инъективно.

Не определяемые в работе понятия из теории полугрупп и теории категорий можно найти в книгах [3] и [7] соответственно.

Все рассмотрения в дальнейшем ведутся в категории левых S-полигонов, где S – фиксированный моноид.

<u>Лемма I</u> ([5], теорема I). Полигон с нулем инъективен тогда и только тогда, когда он инъективен относительно вложений в циклические полигоны.

<u>Предложение I</u>. Если полигон $\coprod_I A_i$ абсолютно чист и каждый полигон A_i содержит нулевой подполигон, то имеет место изоморфизм $E(\coprod_I A_i) \simeq \coprod_I E(A_i)$.

<u>Доказательство</u>. Пусть полигон $\coprod_I A_i$ абсолютно чист. Поскольку каждый из A_i содержит нуль, по доказательству предложения 7 работы [II] имеем $Sx \cap (\coprod_I A_i) \neq \emptyset$ для любого элемента $x \in E(\coprod_I A_i)$. Поскольку система $\{s_1 x = a_1 \in A_k,\ s_2 x = a_2 \in A_\ell,\ k \neq \ell\}$ не разрешима в $\coprod_I A_i$ ни для каких элементов $a_1 \in A_k$, $a_2 \in A_\ell$, $k \neq \ell$, $s_1, s_2 \in S$, то для любого элемента $x \in E(\coprod_I A_i)$ имеем $Sx \cap A_k \neq \emptyset$ для некоторого $k \in I$ и $Sx \cap A_\ell = \emptyset$ для $\ell \neq k$. Таким образом, $E(\coprod_I A_i) = \coprod_I X_i$, где $X_i = \{x \in E(\coprod_I A_i) ;\ Sx \cap A_i \neq \emptyset\}$. Существует гомоморфизм $\psi : \coprod_I E(A_i) \to \coprod_I X_i = E(\coprod_I A_i)$ такой, что диаграмма

$$\begin{tikzcd} & \coprod_I X_i \\ \coprod_I E(A_i) \arrow[ur, "\psi"] & \coprod_I A_i \arrow[l, "\lambda"'] \arrow[u, "i"'] \end{tikzcd}$$

коммутативна, где i и j — естественные вложения. Поскольку $A_i \subseteq \mathfrak{X}_i$, полигоны A_i содержат нулевые подполигоны и $E(A_i)$ — существенное расширение полигона A_i, $i \in I$, то $\varphi(E(A_i)) \subseteq \mathfrak{X}_i$ и φ — мономорфизм. Осталось только доказать, что полигон $\coprod_I E(A_i)$ инъективен. Пусть нам заданы гомоморфизм $\alpha: Z \to \coprod_I E(A_i)$ и мономорфизм $\mu: Z \to S\omega$. Рассмотрим диаграмму

$$\begin{tikzcd}
 & \coprod \mathfrak{X}_i \\
 & \coprod_I E(A_i) \arrow[u, "\varphi"] \\
S\omega \arrow[uur, dashed, "\bar{\alpha}"] & Z \arrow[l, "\mu"'] \arrow[u, "\alpha"]
\end{tikzcd}$$

Поскольку $\coprod \mathfrak{X}_i$ инъективен, то существует гомоморфизм $\bar{\alpha}$: $S\omega \to \coprod_I \mathfrak{X}_i$ такой, что $\bar{\alpha}\mu = \varphi\alpha$. Следовательно, существует элемент $k \in I$ такой, что $\bar{\alpha}(S\omega) \subseteq \mathfrak{X}_k$. Тогда $\alpha(Z) \subseteq E(A_k)$ и α продолжается до гомоморфизма $\alpha: S\omega \to E(A_k)$. По лемме I полигон $\coprod E(A_i)$ — инъективен. Следовательно, $E(\coprod_I A_i) \simeq \coprod_I E(A_i)$, поскольку $E(\coprod_I A_i)$ — минимальный инъективный полигон, содержащий полигон $\coprod_I A_i$.

<u>Предложение 2</u>. Если любые два левых идеала моноида S имеют непустое пересечение, то $E(\coprod_I A_i) \simeq \coprod_{I \cup \{0\}} \mathfrak{X}_i$, где $\mathfrak{X}_i$ — подполигоны в $E(\coprod_I A_i)$, $\mathfrak{X}_i \supseteq A_i$ и $\mathfrak{X}_0 = \emptyset$, при условии, что полигон $\coprod_I A_i$ имеет нулевой подполигон Θ и $\mathfrak{X}_0 = \Theta$ в противном случае. Кроме того, если каждый A_i содержит нулевой подполигон, то $E(\coprod_I A_i) \simeq \coprod_I E(A_i)$.

<u>Доказательство.</u> Пусть любые два левых идеала моноида S имеют непустое пересечение и пусть A_i, $i \in I$, — некоторое множество S-полигонов. Обозначим $\coprod_I A_i = A$ и предположим, что для элемента $x \in E(A)$ существуют элементы $s_1, s_2 \in S$ такие, что $s_1 x \in A_k$, $s_2 x \in A_\ell$, $k \neq \ell$. По условию найдутся элементы $t_1, t_2 \in S$ такие, что $t_1 s_1 = t_2 s_2$. Тогда имеем $t_1 s_1 x \in A_k$ и $t_1 s_1 x = t_2 s_2 x \in A_\ell$, что невозможно. Таким образом, $E(A)$ распадается в объединение непересекающихся множеств $\mathfrak{X}_i$, $i \in I$, где $\mathfrak{X}_i = \{x \in E(A);\ Sx \cap A_i \neq \emptyset\}$ и нулевого подполигона Θ, если A не содержит нулевых подполигонов (лемма 2 работы [II]). Покажем, что $\mathfrak{X}_i \subseteq E(A)$ — подполигон, $i \in I$. Пусть $x \in \mathfrak{X}_k$ и $s \in S$. Тогда существует элемент $t \in S$ такой, что $tx \in A_k$. По условию существуют элементы $t_1, t_2 \in$

$\in S$ такие, что $t_1 s = t_2 t$. Тогда имеем $t_1 s x = t_2 t x \in$ $\in A_k$, т.е. $s x \in \mathcal{X}_k$. Следовательно, $E(\coprod_I A_i) = \coprod_{I \cup \{0\}} \mathcal{X}_i$, где $\mathcal{X}_i \supseteq A_i$, $i \in I$. Предположим теперь, что каждый A_i содержит нулевой подполигон. Тогда, очевидно, каждый полигон $\mathcal{X}_i$ инъективен и, поскольку вложение $\iota : \coprod A_i \to E(\coprod A_i)$ продолжается до вложения $j : \coprod E(A_i) \to E(\coprod_I A_i)$, то нам достаточно доказать, что $\coprod E(A_i)$ - инъективен. При сделанных предположениях циклический полигон не имеет непересекающихся подполигонов. Следовательно, для любого подполигона Z циклического полигона Sw и любого гомоморфизма $\varphi : Z \to \coprod E(A_i)$ имеем $\varphi(Z) \subseteq E(A_k)$ для некоторого $k \in I$. Ввиду инъективности полигона $E(A_k)$ гомоморфизм φ продолжается до гомоморфизма $\bar{\varphi} : Sw \to \coprod E(A_i)$. Инъективность полигона $\coprod_I E(A_i)$ следует теперь из леммы I.

Предложение 3. Следующие свойства моноида S эквивалентны:

I) Копроизведение любого множества инъективных S-полигонов инъективно.

2) Существует инъективные S-полигоны A и B такие, что полигон $A \coprod B$ инъективен.

3) Существует инъективный S-полигон $A \coprod B$, где полигоны A и B содержат нулевые подполигоны.

4) Существует абсолютно чистый S-полигон $A \coprod B$, где A и B содержат нулевые подполигоны.

5) Существует S-полигон A, содержащий нулевой подполигон, такой, что полигон $A \coprod A$ абсолютно чист.

6) Существует S-полигон A такой, что $A \coprod A$-инъективен.

7) Копроизведение любого множества абсолютно чистых S-полигонов абсолютно чисто.

8) Копроизведение любого множества слабоинъективных S-полигонов слабоинъективно.

9) Копроизведение любого множества слабо f-инъективных S-полигонов слабо f-инъективно.

10) Пересечение любых двух левых идеалов моноида S непусто.

Доказательство. Учитывая тот факт, что каждый инъективный полигон является абсолютно чистым и что каждый инъективный полигон содержит нулевой подполигон ([I], лемма 3), мы получим следующий граф импликаций:

$$\begin{tikzcd}[column sep=small]
 & \mathrm{I} \arrow[dl] \arrow[dr] & \\
6 \arrow[d, leftrightarrow] & 7 \arrow[dd, leftrightarrow] & 2 \arrow[d, leftrightarrow] \\
5 \arrow[dr] & & 3 \arrow[dl] \\
 & 4 &
\end{tikzcd}$$

Импликация I0) $\Rightarrow$ I) вытекает из предложения 2, а импликация 4) $\Longrightarrow$ 2) следует из предложения I. Для доказательства импликаций 2)$\Longrightarrow$I0), 8)$\Longrightarrow$I0) и 9)$\Longrightarrow$I0) предположим, что $I_1 \cap I_2 = \emptyset$ для некоторых главных левых идеалов I_1 и I_2 моноида S. Пусть, далее A и B – некоторые инъективные полигоны, такие, что полигон $A \amalg B$ слабо f-инъективен. Определим гомоморфизм $\varphi: I_1 \cup I_2 \to A \amalg B$ формулой

$$\varphi(s) = \begin{cases} \theta_1, & \text{если } s \in I_1, \\ \theta_2, & \text{если } s \in I_2, \end{cases}$$

где $\theta_1 \in A$, $\theta \in B$ – нулевые подполигоны. По условию φ продолжается до гомоморфизма $\bar{\varphi}: S \to A \amalg B$. Но так как моноид S как левый S-полигон – цикличен, то образ гомоморфизма $\bar{\varphi}$ содержится либо в A, либо в B, т.е. мы получили противоречие с тем, что $\bar{\varphi}$ продолжает φ. I0) $\Longrightarrow$7). Пусть полигоны A_i, $i \in I$, абсолютно чисты. Пусть задана некоторая конечная система Σ уравнений с константами из $\coprod\limits_I A_i$. Не ограничивая общности, можно предполагать, что система Σ связна. По предложению 2 имеем $E(\coprod\limits_I A_i) = \coprod\limits_{I \cup \{0\}} \mathcal{X}_i$, где $\mathcal{X}_i \supseteq A_i$, $i \in I$. Тогда, очевидно, все константы, присутствующие в системе Σ, принадлежат некоторому полигону A_k, $k \in I$. Следовательно, система Σ разрешима в $\mathcal{X}_k$ и, поскольку по предложению 3 работы [II] A_k чист в $\mathcal{X}_k$, система Σ разрешима в A_k. Таким образом, полигон $\coprod\limits_I A_i$ абсолютно чист. I0)$\Longrightarrow$8), 9). Пусть A_i, $i \in I$, – слабо (f-)инъективные полигоны и пусть $\varphi: I \to \coprod\limits_I A_i$ – гомоморфизм, где I – (конечно порожденный) левый идеал моноида S. По условию I0) идеал I не представляется в виде объединения непересекающихся левых идеалов и, следовательно, $\varphi(I) \subseteq A_k$ для некоторого $k \in I$. Поскольку A_k – слабо (f-)инъективен, то φ продолжается до гомоморфизма $\psi: S \to \coprod\limits_I A_i$, т.е. $\coprod\limits_I A_i$ – слабо (f-)инъективен.

<u>Лемма 2</u>. Пересечение любых двух левых идеалов моноида S с правым нулем 0 непусто тогда и только тогда, когда 0 – двусторонний нуль моноида S.

Доказательство очевидно.

Напомним, что левый S-полигон A называется образующим, если для любых различных гомоморфизмов $\alpha, \beta : X \to Y$ существует гомоморфизм $\gamma : A \to X$ такой, что $\alpha\gamma \neq \beta\gamma$. Полигон A называется вполне проективным, если A - проективный образующий в категории левых S-полигонов.

Теорема I. Следующие свойства моноида S эквивалентны:

I) Все свободные S-полигоны инъективны.

2) Все вполне проективные S-полигоны инъективны.

3) Все проективные S-полигоны инъективны.

4) Все конечно порожденные свободные S-полигоны инъективны.

5) Все конечно порожденные проективные S-полигоны инъективны.

6) Все счетно-порожденные проективные S-полигоны инъективны.

7) Моноид S является Σ-инъективным.

8) Инъективная оболочка любого свободного S-полигона свободна.

9) Существует свободный инъективный S-полигон с множеством I свободных образующих, где $|I| \geqslant 2$.

IO) S - самоинъективен с двусторонним нулем.

Примечание. Заметим, что в теореме I рассмотрены условия на моноид, соответствующие условиям I) - 3) и 5) - 7) квазифробениусовости кольца, приведенные во введении. Отметим еще, что эквивалентности условий I), 3) и IO) теоремы I получены также с использованием других соображений М.П.Дорофеевой (Деп. ВИНИТИ № 5252 - 73, I-II).

Доказательство теоремы. Импликации 4) $\Longrightarrow$ 9) $\Longleftarrow$ 8) $\Longleftarrow$ I) $\Rightarrow$ $\Longrightarrow$ 2) $\Longrightarrow$ 3) $\Longrightarrow$ 6) и 7) $\Longleftarrow$ I) $\Longrightarrow$ 4) $\Longleftrightarrow$ 5) очевидны. Поскольку моноид S, как инъективный левый S-полигон, содержит левый нуль, то импликации 6) $\Longrightarrow$ IO), 7) $\Longrightarrow$ IO), 9) $\Longrightarrow$ IO) и IO) $\Longrightarrow$ I) следуют из предложения 3 и леммы 2.

Из самоинъективности моноида S не следует, что S имеет двусторонний нуль, как показывает следующий

Пример I. Пусть $S = \{1, a, 0_1, 0_2\}$, где $s0_i = 0_j a = 0_i$ и $a^2 = 1$, $i \neq j \in \{1, 2\}$. Поскольку S, очевидно, инъективен относительно вложений в циклические полигоны, то S - самоинъективен по лемме I. Однако S не содержит двустороннего нуля.

Литература

1. Дорофеева М. П., Инъективные и плоские полигоны над наследственными моноидами.- Вестн. Моск. ун-та, 1973, № 1, 47-51.
2. Геминтерн В. И., Самоинъективные кольца эндоморфизмов свободных модулей.- Мат. заметки, 1969, 6, № 5, 533-540.
3. Клиффорд А., Престон Г., Алгебраическая теория полугрупп I, Москва, 1972.
4. Кэртис Ч., Райнер И., Теория представлений конечных групп и ассоциативных алгебр, Москва, 1969.
5. Скорняков Л. А., О гомологической классификации моноидов.- Сибирск. матем. ж., 1969, 10, 1133-1143.
6. Тольская Т. С., Гомологическая характеризация некоторых классов колец.- Вестн. Моск. ун-та, 1971, № 2, 49-57.
7. Цаленко М. Ш., Шульгейфер Е. Г., Основы теории категорий, Москва, 1974.
8. Berthiaume, P., The injective envelope of S-sets, Canad. Math. Bull., 1974, 17, 11-18.
9. Faith, C., Rings with ascending condition on annihilators, Nagoya Math. J., 1966, 27, № 1, 179-191.
10. Faith, C., Walker, E., Direct sum representations of injective modules, J. Algebra, 1967, 5, 203-221.
11. Normak, P., Purity in the category of M-sets, Semigroup Forum, 1980,
12. Rutter, E. A., Two characterizations of QF-rings, Pacific J. Math., 1969, 30, № 3, 777-784.

Поступило
13.X 1979

QF-RINGIDE ANALOOGIAID MONOIDIDE KORRAL

P.Normak

Resümee

Artiklis vaadeldakse polügoone üle monoidi S. Leitakse QF-ringide analoogiad monoidide korral. Näidatakse, et üheks selliseks monoidiks on nulliga iseinjektiivne monoid.

ANALOGIES OF QF-RINGS FOR MONOIDS

P.Normak

S u m m a r y

Let S be a monoid. In this article we consider left S-sets satisfying certain properties. All of these properties are proved to be equivalent to the fact that all projective S-sets are injective the property which in the case of ringe is equivalent to the ring to be a QF-ring.