НЕКОТОРЫЕ ЗАДАЧИ О (0,I)-МАТРИЦАХ, СВЯЗАННЫЕ С ТЕОРИЕЙ АВТОБУСНЫХ РАСПИСАНИЙ

В.Фляйшер, Я.Хион

Мы рассматриваем задачи о нахождении (0,I)-матриц с заданными типами строк и с предписанными столбцевыми суммами или нижними границами столбцевых сумм. Например, мы изучаем нахождение (0,I)-матриц, имеющих заданные столбцевые суммы и содержащих в каждой строке ровно a единиц, идущих подряд (число a фиксировано). Для решения этих задач рассматриваются произвольные целочисленные матрицы с неотрицательными элементами и используется теория многочленов с целочисленными коэффициентами. Отметим, что сходный вопрос о существовании (0,I)-матриц с заданными нижними границами для столбцевых сумм и верхними границами для строчных сумм рассматривался в [3] (гл. II, теорема I2.I, следствия I2.2 и I2.3).

Обозначим через Z_n^+ совокупность всех n-мерных векторов с неотрицательными целочисленными координатами. Пусть заданы векторы

$$h_1=(h_{10},h_{11},\ldots,h_{1,a_1-1})\in Z^+_{a_1},\ldots,\quad h_p=(h_{p0},h_{p1},\ldots,h_{p,a_p-1})\in Z^+_{a_p}.$$

Вектор $x=(x_0,x_1,\ldots,x_{n-1})\in Z_n^+$ называется вектором типа (h_i,k), если неотрицательное целое число $k\leq n-a_i$ и

$$x_1=\ldots=x_{k-1}=0,\ x_k=h_{i0},\ldots,x_{k+a_i-1}=h_{i,a_i-1},\ x_{k+a_i}=\ldots=x_{n-1}=0.$$

Вектор x называется вектором типа h_i, если он является вектором типа (h_i,k) при каком-нибудь k. Пусть m и n натуральные числа $n\geqslant\max(a_1,\ldots,a_p)$. Обозначим через $\mathcal{M}(m,n;h_1,\ldots,h_p)$ совокупность всех $m\times n$-матриц, все строчные векторы которых имеют типы $h_1,\ldots,h_p$. Аналогично обозначим через $\mathcal{M}(n;h_1,\ldots,h_p)$ совокупность всех матриц с конечным числом строк и n столбцами, все строки которых имеют типы $h_1,\ldots,h_p$. Для нас важен случай, когда все последовательности $h_1,\ldots,h_p$ состоят только из нулей и единиц.

Пусть $X=(x_{ij})$ является $m\times n$-матрицей с целочисленными элементами. Обозначим

$$s_j(X)=\sum_{i=1}^{m} x_{ij} \quad (j=0,1,\ldots,n-1),$$
$$s(X)=(s_0(X), s_1(X), \ldots, s_{n-1}(X)).$$

Пусть вектор $b=(b_0, b_1, \ldots, b_{n-1}) \in Z_n^+$. Будем говорить, что он реализуем в $M(m,n; h_1, \ldots, h_p)$, если существует матрица $X \in M(m,n; h_1, \ldots, h_p)$, так что $b=s(X)$. Матрицу X назовем тогда реализацией вектора b в $M(m,n; h_1, \ldots, h_p)$. Совокупность всех векторов $b \in Z_n^+$, реализуемых в $M(m,n, h_1, \ldots, h_p)$, обозначим через $\mathcal{Y}M(m,n; h_1, \ldots, h_p)$. Аналогично определяются реализуемость и реализация вектора b в $M(n; h_1, \ldots, h_p)$ и множество $\mathcal{Y}M(n; h_1, \ldots, h_p)$. Назовем вектор b допустимым относительно $M(m,n; h_1, \ldots, h_p)$, если существует матрица $X \in M(m,n; h_1, \ldots, h_p)$, так что $s(X)-b \in Z_n^+$. Матрицу X назовем в этом случае мажорантой вектора b. Совокупность всех векторов $b \in Z_n^+$, допустимых относительно $M(m,n; h_1, \ldots, h_p)$, обозначим через $\mathcal{L}M(m,n; h_1, \ldots, h_p)$. Аналогичным образом определяются допустимость и мажоранта вектора b относительно $M(n; h_1, \ldots, h_p)$ и множество $\mathcal{L}M(n; h_1, \ldots, h_p)$.

Мы будем рассматривать решение следующих задач. Пусть числа p и n множество векторов $h_1, \ldots, h_p$ и вектор $b= =(b_0, b_1, \ldots, b_{n-1})$ фиксированы.

1. Найти необходимые и достаточные условия реализуемости вектора b в $M(m,n; h_1, \ldots, h_p)$. Если эти условия выполнены, найти все его реализации.

2. Найти, для каких m данный вектор b допустим в $M(m,n; h_1, \ldots, h_p)$. Если условия допустимости выполнены, найти для вектора b в этом множестве мажоранту с наименьшей суммой элементов.

Аналогичные задачи рассматриваются и для матриц $M(n; h_1, \ldots, h_p)$.

Классы матриц $M(m,n; h_1, \ldots, h_p)$ и $M(n; h_1, \ldots, h_p)$ используются при построении автобусных расписаний. При этом время обслуживания автобусной линии делится на n равных подпериодов (оборотов), в течение каждого подпериода любой автобус может отправиться на линию самое большее один раз. Если на линии работает m водителей (и автобусов), то всякому расписанию движения автобусов на этой линии соответствует (0,1)-матрица $X=(x_{ij})$, имеющая m строк и n столбцов. Матрица X задается следующим правилом: $x_{ij}=1$, если i-ый водитель работает (отправляется на линию) на j-ом обороте, $x_{ij}=0$ в противном случае, она называется характеристической матрицей расписания. Нахождение реализации данной последовательности b в $M(m,n;h_1,\dots,h_p)$ (задача 1) означает, например, построение характеристической матрицы расписания, при котором все m водителей имеют рабочие дни заданных типов и на каждом обороте работает предписанное число водителей. (Это число определяется по числу пассажиров, накапливающихся за соответствующее время на остановках линии). Вычисление мажоранты данной последовательности b в $M(m,n;h_1,\dots,h_p)$ с минимальной суммой элементов (задача 2) означает построение характеристической матрицы такого расписания, при котором число работающих на каждом обороте водителей не меньше предписанного, а общее число совершаемых автобусами оборотов минимально.

Установим теперь связь приведенных задач с теорией многочленов. Обозначим через $Z[t]$ кольцо многочленов над кольцом Z целых чисел (см., напр. [1], стр. 195-198). Рассмотрим множество Z_n всех векторов $x=(x_0,x_1,\dots,x_{n-1})$ с целочисленными координатами. Положим для всякого многочлена $f(t)=f_0+f_1t+\dots+f_mt^m\in Z[t]$ и любого $x\in Z_n$.

$$f(t)x=(f_0+f_1t+\dots+f_mt^m)(x_0,x_1,\dots,x_{n-1})=$$
$$=(f_0x_0,\ f_0x_1+f_1x_0,\ \dots,\ f_0x_{n-1}+f_1x_{n-2}+\dots+f_{n-1}x_0), \quad (1)$$

где при $i>m$ считается, что $f_i=0$. Легко проверить, что при таком определении множество Z_n превращается в унитарный $Z[t]$-модуль (см. [2], стр. 181-183). Необходимость использования множества Z_n объясняется тем, что строки матриц из множеств $M(m,n;h_1,\dots,h_p)$ и $M(n;h_1,\dots,h_p)$ всегда принадлежат Z_n. Полезность кольца $Z[t]$ как области скаляров следует из того, что при применении многочленов $1,t,t^2,\dots$ к строкам матриц из $M(m,n;h_1,\dots,h_p)$ или $M(n;h_1,\dots,h_p)$ мы получаем, вообще говоря, матрицы из тех же множеств. Например, применив многочлен t к вектору $(h_{i0},h_{i1},\dots,h_{i,a_i-1},0,\dots,0)$ типа $(h_i,0)$, мы получим по формуле (1) вектор $(0,h_{i0},\dots,h_{i,a_i-2},h_{i,a_i-1},0,\dots,0)$ типа $(h_i,1)$. Кроме того, из формулы (1) вытекает, что $Z[t]$-модуль Z_n является моногенным. Из формулы (1) следует также, что аннулятор ([2], стр. 196) $Z[t]$-модуля Z_n состоит из всех многочленов кольца $Z[t]$, делящихся на t^n.

Поэтому Z_n можно рассматривать также как модуль над фактор-кольцом ([I]; стр. 486) $Z[t]/(t^n)$ по соответствующему главному идеалу (t^n)([I], стр. 492]. Отсюда следует, что $Z[t]/(t^n)$-модуль Z_n изоморфен кольцу $Z[t]/(t^n)$, рассмотренному как модуль над собой, т.е. соответствующему свободному моногенному модулю([2], стр. 189).

Множество Z_n является структурно упорядоченной группой, если положить $x=(x_0, x_1, \ldots, x_{n-1})\geqslant 0$ тогда и только тогда, если $x_0\geqslant 0, x_1\geqslant 0, \ldots, x_{n-1}\geqslant 0$ ([4], стр. 29, пример 3). Для трактовки упорядоченности в Z_n полезно ввести упорядоченность в кольцах Z, $Z[t]$ и $Z[t]/(t^n)$. Кольцо Z является линейно упорядоченным кольцом относительно обычной упорядоченности целых чисел ([4], стр. 168, пример I). Поэтому кольцо $Z[t]$ является структурно упорядоченным кольцом, если положить

$$f(t)=f_0+f_1 t+\ldots+f_m t^m\geqslant 0, \quad \text{если } f_0\geqslant 0, f_1\geqslant 0, \ldots, f_m\geqslant 0$$

([4], стр. 169, пример 7). Подмножество (t^n) является выпуклым идеалом в $Z[t]$ ([4], стр. 14). Тогда рассуждениями, аналогичными приведенным в([4], стр. 33)устанавливается, что фактор-кольцо $Z[t]/(t^n)$ является структурно упорядоченным, если считать, что смежный класс $f(t)+(t^n)\geqslant 0$, если найдется $g(t)\in f(t)+(t^n)$, так что $g(t)\geqslant 0$. Множество всех положительных элементов частично упорядоченного кольца $\mathcal{L}$ обозначим через $\mathcal{L}^+$.

Дальнейшие связи между задачами I и 2 и теорией многочленов будут указаны в последующих теоремах.

<u>Теорема I</u>. Пусть $h_1=(h_{10}, \ldots, h_{1,a_1-1})\in Z^+_{a_1}, \ldots, h_p=(h_{p0}, \ldots, h_{p,a_p-1})\in Z^+_{a_p}$, $b=(b_0, b_1, \ldots, b_{n-1})\in Z^+_n$. Набор $b\in \mathcal{LM}(n; h_1, \ldots, h_p)$ тогда и только тогда, если существуют многочлены $c_1(t)=c_{10}+\ldots+c_{1,n-a_1}t^{n-a_1}, \ldots, c_p(t)=c_{p0}+\ldots+c_{p,n-a_p}t^{n-a_p}\in Z^+[t]$ так что $c_1(t)h_1(t)+\ldots+c_p(t)h_p(t)-b(t)\in Z^+[t]$, где $h_i(t)=h_{i0}+\ldots+h_{i,a_i-1}t^{a_i-1}$ $(i=1, \ldots, p)$, $b(t)=b_0+b_1 t+\ldots+b_{n-1}t^{n-1}$. При этом $b\in \mathcal{LM}(m, n; h_1, \ldots, h_p)$ если дополнительно выполняется $c_1(1)+\ldots+c_p(1)=m$, имеет место $b\in \mathcal{JM}(n; h_1, \ldots, h_p)$, если дополнительно $c_1(t)h_1(t)+\ldots+c_p(t)h_p(t)=b(t)$, будет $b\in \mathcal{JM}(m, n; h_1, \ldots, h_p)$, если выполняются оба дополнительных условия. Для получения мажоранты (соответственно реализации) вектора b надо взять в соответствующую матрицу c_{10} строк типа $(h_1, 0), \ldots, c_{1,n-a_1}$ строк типа $(h_1, n-a_1), \ldots, c_{p0}$ строк типа $(h_p, 0), \ldots, c_{p,n-a_p}$ строк типа $(h_p, n-a_p)$.

Из формулировки теоремы видно, что координаты векторов здесь удобно задавать как коэффициенты многочленов.

Для доказательства теоремы нужно взять матрицу, имеющую n столбцов и строки, указанные в конце формулировки теоремы, и вычислить многочлен, задающий ее столбцевые суммы. При этом нужно неоднократно пользоваться тем, что множество Z_n является $Z[t]$-модулем, и тем, что $Z[t]$ есть структурно упорядоченное кольцо. Для экономии места соответствующее доказательство (как и дальнейшие доказательства) не будет здесь изложено.

Рассмотрим теперь подробнее случай, когда $p=1$, т.е. задан только один набор $h=(h_0, h_1, \dots, h_{a-1}) \in Z_a^+$.

Теорема 2. Пусть $h \in Z_a^+$, $h \neq 0$ и $b \in \mathcal{M}(n;h)$ т.е. найдется такой многочлен $c(t)=c_0+c_1t+\dots+c_{n-a}t^{n-a} \in Z^+[t]$, так что $c(t)h(t)=b(t)$. Тогда многочлен $c(t)$ определен однозначно. Любые две реализации вектора b в $\mathcal{M}(n;h)$ могут отличаться только порядком строк.

Обозначим смежный класс многочлена $f(t) \in Z[t]$ по идеалу (t^n) через $\overline{f(t)}$. Если многочлен $f(t)=f_0+f_1t+\dots+f_{n-1}t^{n-1}$ таков, что $f_0=1$, т.е. $f(t)=1+g(t)$, где $g(t)=f_1t+\dots+f_{n-1}t^{n-1}$, то имеет место формула

$$\overline{f(t)}\,\overline{d(t)}=\overline{1}, \qquad \text{где } d(t)=1-g(t)+g^2(t)-\dots+(-1)^{n-1}g^{n-1}(t) \tag{2}$$

причем $\overline{d(t)}$ – единственный элемент из $Z[t]/(t^n)$, для которого $\overline{f(t)}\,\overline{d(t)}=\overline{1}$.

Теорема 3. Пусть $h=(1, h_1, \dots, h_{a-1}) \in Z_a^+$, $b=(b_0, b_1, \dots, b_{n-1}) \in Z_n^+$. Вектор $b \in \mathcal{M}(n;h)$ тогда и только тогда, если из чисел

$$c_k=\sum_{\substack{s_1+\dots+(a-1)s_{a-1}+s_k=k\\ s_1,\dots,s_k\geq 0}} (-1)^{s_1+\dots+s_{a-1}}\frac{(s_1+\dots+s_{a-1})!}{s_1!\dots s_{a-1}!}h_1^{s_1}\dots h_{a-1}^{s_{a-1}}b_{s_k} \qquad (k=0,\dots,n-1)$$

числа $c_0, \dots, c_{n-a}$ неотрицательны и $c_{n-a+1}=\dots=c_{n-1}=0$. При этом $b \in \mathcal{M}(m,n;h)$, если дополнительно выполняется

$$\sum_{k=0}^{n-a} c_k = m.$$

Эта теорема доказывается при помощи формулы (2) и факта, что $Z[t]/(t^n)$ является упорядоченным кольцом.

Установим, например, является ли вектор $b=(1,3,3,3,4,2) \in Z_6^+$ реализуемым в $\mathcal{M}(4,6;h)$, где $h=(1,2,1)$ и найдем при положительном ответе реализацию вектора b в $\mathcal{M}(4,6;(1,2,1))$. Решение задачи можно было бы получить из теоремы 3, но можно и прямо пользоваться формулой (2). Именно, мы имеем здесь $h(t) = 1+2t+t^2 = 1+t(t+2)$. По формуле (2) обратным для $h(t)$ в $Z[t]/(t^6)$ будет

$$\overline{d(t)} = \overline{1} - \overline{t(t+2)} + \overline{t^2(t+2)^2} - \overline{t^3(t+2)^3} + \overline{t^4(t+2)^4} - \overline{t^5(t+2)^5}.$$

Производя вычисления в $Z[t]/(t^6)$, т.е. опуская члены степени выше 5 и опуская для краткости черты, получим

$$d(t) = 1 - t(t+2) + t^2(t^2+4t+4) - t^3(6t^2+12t+8) + t^4(32t+16) - 32t^5 = 1 - 2t + 3t^2 - 4t^3 + 5t^4 - 6t^5.$$

Легко проверить, что $h(t)\,d(t) = 1 - 7t^6 - 6t^7$, т.е. действительно $\overline{h(t)}\;\overline{d(t)} = \overline{1}$.

Для нахождения реализации последовательности b образуем многочлен $b(t) = 1+3t+3t^2+3t^3+4t^4+2t^5$. Согласно предложению 2 надо найти многочлен $c(t) = c_0 + c_1 t + c_2 t^2 + c_3 t^3$, что $c(t)\cdot h(t) = b(t)$. Перейдем в последнем равенстве к соответствующим классам смежности и умножим его на $\overline{d(t)}$. Получим

$$\overline{c(t)} = \overline{d(t)}\;\overline{h(t)}\;\overline{c(t)} = \overline{d(t)}\;\overline{b(t)}.$$

Следовательно,

$$c(t) = d(t)\,b(t) = b_0 + (b_1 - 2b_0)t + (b_2 - 2b_1 + 3b_0)t^2 + (b_3 - 2b_2 + 3b_1 - 4b_0)t^3 + (b_4 - 2b_3 + 3b_2 - 4b_1 + 5b_0)t^4 + (b_5 - 2b_4 + 3b_3 - 4b_2 + 5b_1 - 6b_0)t^5.$$

По виду многочлена $c(t)$ должно быть

$$c_0 = b_0 \geqslant 0,\; c_1 = b_1 - 2b_0 \geqslant 0,\; c_2 = b_2 - 2b_1 + 3b_0 \geqslant 0,\; c_3 = b_3 - 2b_2 + 3b_1 - 4b_0 \geqslant 0,\; c_4 = b_4 - 2b_3 + 3b_2 - 4b_1 + 5b_0 = 0,\; c_5 = b_5 - 2b_4 + 3b_3 - 4b_2 + 5b_1 - 6b_0 = 0.$$

В данном случае имеем

$$c_0 = 1 \geqslant 0,\; c_1 = 3 - 2\cdot 1 = 1 \geqslant 0,\; c_2 = 3 - 2\cdot 3 + 3\cdot 1 = 0,$$
$$c_3 = 3 - 2\cdot 3 + 3\cdot 3 - 4\cdot 1 = 2 \geqslant 0,\; c_4 = 4 - 2\cdot 3 + 3\cdot 3 - 4\cdot 3 + 5\cdot 1 = 0,$$
$$c_5 = 2 - 2\cdot 4 + 3\cdot 3 - 4\cdot 3 + 5\cdot 3 - 6\cdot 1 = 0,\; c_0 + c_1 + c_2 + c_3 = 1+1+0+2 = 4.$$

Следовательно, многочлен $c(t) = 1 + t + 2t^3$ имеет требуемый вид и неотрицательные коэффициенты, т.е. реализация существует. Согласно теореме I реализация должна иметь одну строку типа $(h, 0)$ (ибо $c_0 = 1$), одну строку типа $(h, 1)$ и две строки типа $(h, 3)$. Поэтому реализацией вектора $(1, 3, 3, 3, 4, 2)$ является, например, матрица

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

По теореме 2 все другие реализации вектора b получаются из этой матрицы перестановкой строк.

Перейдем к рассмотрению условий, при которых данный вектор $b=(b_0, b_1, \dots, b_{n-1}) \in Z^+_n$ допустим относительно $\mathcal{M}(m, n; h)$, и к нахождению мажоранты этого набора в $\mathcal{M}(m,n;h)$. Здесь нам приходится наложить дальнейшее ограничение на рассматриваемую задачу и допустить, что вектор h имеет вид $h=(1,1,\dots,1)$, т.е. $h(t)=1+t+\dots+t^{a-1}$. Совокупность матриц, получающуюся при таком h, обозначим через $\mathcal{M}(m,n;[a])$.

<u>Теорема 4</u>. Для любых натуральных чисел $n \geq a$ и вектора $b=(b_0, b_1, \dots, b_{n-1}) \in Z^+_n$ существует такое натуральное число $m^* = m^*(n, a, b)$, так что $b \in \mathcal{X}\mathcal{M}(m,n;[a])$ тогда и только тогда, если $m \geq m^*(n,a,b)$. При этом $m^*(n,a,b) \leq ([\frac{n}{a}]+1) \max\limits_{0 \leq j \leq n-1} b_j$.

Предположим сначала, что последовательность $b=(b_0, b_1, \dots, b_{n-1}) \in Z^+_n$ допустима относительно $\mathcal{M}(m^*, n; [a])$, т.е. имеет в ней мажоранту $X^* = (x^*_{ij})$. Если $m \geq m^*$, то мы получим для b мажоранту $X=(x_{ij})$ в $\mathcal{M}(m,n;[a])$, добавив к X^*, например, $m-m^*$ строк типа $(h, 0)$.

Пусть при разделении n на a с остатком получится $n=ua+v$, $0 \leq v < a$, тогда $u=[\frac{n}{a}]$. Возьмем многочлен $c(t)=(\max b_j)(1+t^a+\dots+t^{(u-1)a}+t^{(u-1)a+v})$ (при $v=0$ последний член следует опустить. Для него имеем

$$c(t)h(t)-b(t)=(\max_j b_j)(1+t+\dots+t^{(u-1)a+v-1}+2t^{(u-1)a+v}+\dots+2t^{ua-1}+t^{ua}+\dots+t^{ua+v-1})-b(t) \in Z^+[t],$$

т.е. многочлен $c(t)$ определяет согласно теореме I мажоранту для вектора b. Число строк в соответствующей матрице равно по теореме I числу $c(1)$, т.е. числу $m=(\max b_j)\cdot(u+1)=(\max b_j)([\frac{n}{a}]+1)$. Следовательно, при таком значении m мажоранта вектора b в $\mathcal{M}(m,n;[a])$ заведомо существует.

Для получения правил вычисления числа m^* и мажоранты вектора b в $\mathcal{M}(m^*, n; [a])$ введем некоторые обозначения. Пусть многочлен $f(t)=f_0+f_1 t+\dots+f_n t^n \in Z[t]$. Обозначим через $[f(t)]_a$ многочлен

$$f_0+\max(f_0,f_1)t+\dots+\max(f_0,f_1,\dots,f_{a-1})t^{a-1}+f_a t^a+\dots+f_n t^n.$$

Аналогично введем обозначение

$$[f(t)]^a=f_0+f_1 t+\dots+f_{n-a}t^{n-a}+\max(f_{n-a+1},\dots,f_n)t^{n-a+1}+\dots+\max(f_{n-1},f_n)t^{n-1}+f_n t^n,$$

положим $[f(t)]_a^a = [[f(t)]_a]^a$.

Теорема 5. Пусть заданы натуральные числа $n \geq a$ и вектор $b = (b_0, b_1, \ldots, b_{n-1}) \in Z_n^+$. Тогда число $m^* = m^*(n, a, b)$ равно коэффициенту при t^{n-1} в многочлене $[[b(t)]_a^a (1 + t^a + t^{2a} + \ldots)]_n$. Одна из мажорант вектора b в $M(m^*, n; [a])$ задается многочленом $c(t) = [[[b(t)]_a^a (1 + t^a + t^{2a} + \ldots)]_n]^a (1-t)$ (вычисления надо провести в $Z[t]/(t^n)$).

Доказательство теоремы снова основано на том факте, что кольцо $Z[t]/(t^n)$ является структурно упорядоченным кольцом. Используется также содержащееся в теореме I утверждение, что последовательность b допустима относительно $M(m, n; h)$ тогда и только тогда, если существует многочлен $c(t) = c_0 + c_1 t + \ldots + c_{n-1} t^{n-1}$, так что $c(t) h(t) \geq b(t)$ и $c(1) = m$.

Приведем пример на применение теоремы 5. Найдем наименьшее m, при котором вектор $b = (2, 1, 3, 5, 2, 6, 6, 1, 7, 4)$ допустим в $M(m, 10; 4)$. В данном случае имеем

$$b(t) = 2 + t + 3t^2 + 5t^3 + 2t^4 + 6t^5 + 6t^6 + t^7 + 7t^8 + 4t^9.$$

Вычислим

$$[b(t)]_4^4 = 2 + \max(2,1)t + \max(2,1,3)t^2 + \max(2,1,3,5)t^3 + 2t^4 + 6t^5 + \max(6,1,7,4)t^6 + \max(1,7,4)t^7 + \max(7,4)t^8 + 4t^9 =$$
$$= 2 + 2t + 3t^2 + 5t^3 + 2t^4 + 6t^5 + 7t^6 + 7t^7 + 7t^8 + 4t^9.$$

Далее имеем

$$[b(t)]_4^4 (1 + t^4 + t^8) = 2 + 2t + 3t^2 + 5t^3 + (2+2)t^4 + (2+6)t^5 + (3+7)t^6 + (5+7)t^7 + (2+2+7)t^8 + (2+6+4)t^9 =$$
$$= 2 + 2t + 3t^2 + 5t^3 + 4t^4 + 8t^5 + 10t^6 + 12t^7 + 11t^8 + 12t^9.$$

Теперь получим

$$[[b(t)]_4^4 (1 + t^4 + t^8)]_{10} = 2 + 2t + 3t^2 + 5t^3 + 5t^4 + 8t^5 + 10t^6 + 12t^7 + 12t^8 + 12t^9.$$

Следовательно, $m^* = 12$ и вектор b допустим относительно $M(12, 10, [4])$, причем 12 – наименьшее такое число строк. Наконец, вычислим

$$[[[b(t)]_4^4 (1 + t^4 + t^8)]_{10}]^4 =$$
$$= 2 + 2t + 3t^2 + 5t^3 + 5t^4 + 8t^5 + 12t^6 + 12t^7 + 12t^8 + 12t^9.$$

Отсюда получим

$$c(t) = [[[b(t)]_4^4 (1 + t^4 + t^8)]_{10}]^4 (1-t) = 2 + t^2 + 2t^3 + 3t^5 + 4t^6.$$

У этого многочлена действительно $c(1) = 12$. По правилу из теоремы I мы получим матрицу

$$\begin{pmatrix}
1&1&1&1&0&0&0&0&0&0\\
1&1&1&1&0&0&0&0&0&0\\
0&0&1&1&1&1&0&0&0&0\\
0&0&0&1&1&1&1&0&0&0\\
0&0&0&1&1&1&1&0&0&0\\
0&0&0&0&0&1&1&1&1&0\\
0&0&0&0&0&1&1&1&1&0\\
0&0&0&0&0&1&1&1&1&0\\
0&0&0&0&0&0&1&1&1&1\\
0&0&0&0&0&0&1&1&1&1\\
0&0&0&0&0&0&1&1&1&1\\
0&0&0&0&0&0&1&1&1&1
\end{pmatrix}$$

Ее вектор столбцевых сумм есть $(2,2,3,5,3,6,9,7,7,4)$, так что она действительно является мажорантой вектора b.

Литература

1. K a n g r o, G. Kõrgem algebra. Tartu, 1962.
2. Б у р б а к и Н. Алгебра. Алгебраические структуры. Линейная и полилинейная алгебра. Москва, 1962.
3. Ф а л к е р с о н Д., Ф о р д Л. Потоки в сетях. Москва, 1966.
4. Ф у к с Л. Частично упорядоченные алгебраические системы. Москва, 1965.

Поступило
20.VI 1980

ÜLESANDED (0,1)-MAATRIKSITE KOHTA, MIS ON SEOTUD BUSSIDE SÕIDUPLAANIDE TEOORIAGA

V.Fleischer, J.Hion

R e s ü m e e

Käsitletakse selliste (0,1)-maatriksite leidmist, millel on antud tüüpi read ja etteantud veerusummad. Näiteks on uuritud selliste (0,1)-maatriksite leidmist, millel igas reas on a järjestikku seisvat ühte ja antud veerusummad. Need ülesanded lahendatakse täisarvuliste kordajatega polünoomide teooriat kasutades.

SOME PROBLEMS ON (0,1)-MATRICES RELATED WITH THE THEORY OF BUS SCHEDULINGS

V.Fleischer, J.Hion

S u m m a r y

The problems about finding of (0,1)-matricee with given types of rows and presoribed oolumn sums are considered.For inetance, finding of (0,1)-matricee having a consequent ones in every row and given oolumn sums is coneidered.These problems are solved using the theory of polynomials with integer coefficients.